ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

L. C. BOUVIER

# Arithmétique. Démonstration élémentaire de la valeur infinie de la somme des inverses des nombres naturels

*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 15 (1824-1825), p. 39-40
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1824-1825__15__39_0>

# ARITHMÉTIQUE.

## *Démonstration élémentaire de la valeur infinie de la somme des inverses des nombres naturels ;*

Par M. L. C. Bouvier, ex-officier du génie, ancien élève de l'école polytechnique.

Soit posée

$$z=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\dots.$$

$$x=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\dots.$$

$$y=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{14}+\dots.$$

nous aurons évidemment

$$x+y=z\ , \qquad 2y=z\ ,$$

et par suite

$$x+y=2y \qquad \text{ou} \qquad x=y\ .$$

Mais, d'un autre côté, $y$ n'étant autre chose que $x$, dans laquelle on a augmenté tous les dénominateurs d'une unité, si $x$, $y$, $z$ avaient des valeurs finies, on devrait avoir

$$x>y\ .$$

Cette relation étant donc incompatible avec la précédente, il en faut conclure que $x$ et $y$ sont infinis, et que conséquemment leur somme $z$ l'est aussi.

Il faudrait bien toutefois se garder de conclure de là que $x=y$ et que conséquemment

$$0=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots.$$

on n'a en effet $x=y$ qu'autant que ces deux infinies ne diffèrent que d'une quantité finie qui s'évanouit devant eux ; et c'est précisément ce qui arrive ici ; car, comme l'on sait,

$$\mathrm{Log}.2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots.$$

de sorte qu'on a réellement

$$x-y=\mathrm{Log}.2\,, \quad \text{et conséquemment} \quad x>y\,,$$

comme nous l'avions trouvé.