ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

TÉDENAT

Questions résolues. Solution des deux problèmes de dynamique, et réflexions sur le problème de situation proposés à la page 380 du VIII.e volume des Annales

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 15 (1824-1825), p. 124-129
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1824-1825__15__124_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution des deux problèmes de dynamique, et réflexions sur le problème de situation proposés à la page 380 *du VIII.e volume des* Annales ;

Par M. Tédenat, recteur honoraire, correspondant de l'académie royale des sciences.

Au Rédacteur des *Annales* ;

Mon cher Professeur,

Il est dans votre recueil un assez grand nombre de *questions proposées* qui sont demeurées jusqu'ici sans solution ; soit que vos lecteurs, trop superficiellement peut-être, les aient jugées de peu d'intérêt, soit qu'ils les aient trouvées trop difficiles, comme il arrive en effet pour quelques-uns, soit encore qu'ils n'en aient obtenu que des solutions trop compliquées et trop peu élégantes pour mériter d'être mises au jour. Il n'en est pas en effet de celui qui publie un recueil de problèmes de son choix comme de celui qui traite des problèmes qui lui sont indiqués. Le premier peut, en effet, s'essayer sur un très-grand nombre, et faire ensuite parade de sa sagacité, en ne mettant en lumière que ceux d'entre eux de la solution desquels il a lieu d'être pleinement satisfait, tandis que l'autre, dont la tâche est tracée, se trouve dans une position beaucoup moins favorable.

En examinant, en particulier, les trois questions proposées à la fin de votre VIII.e volume, et qui sont du nombre de celles qui sont demeurées sans solution, il m'a paru que les deux premières pouvaient facilement être ramenées à d'autres sur la solution desquelles les traités élémentaires de mécanique ne laissent plus aujourd'hui rien à désirer ; et quant à la troisième, elle ne semble abordable que dans un seul cas où elle est extrêmement facile. Je consigne ici mes réflexions sur ces trois questions, sans aucune prétention, et telles exactement qu'elles se sont offertes à mon esprit.

Je vais d'abord ramener le premier des deux problèmes de dynamique à un énoncé un peu plus général qui, sans le compliquer davantage, le rendra d'un aspect plus élégant, et en fera dépendre la solution de calculs tout-à-fait symétriques.

PROBLÈME I. Un point, sollicité par une force accélératrice, constante ou variable, tant d'intensité que de direction, est assujetti à se mouvoir librement sur une droite indéfinie ; cette droite elle-même est assujettie à se mouvoir sur deux courbes fixes, de manière à avoir constamment les deux mêmes points de sa direction sur ces courbes ; on demande, d'après ces conditions, d'assigner les circonstances du mouvement du point dont il s'agit.

Solution. Soit k l'intervalle entre les points de la droite mobile qui doivent se trouver constamment sur les deux courbes fixes. Si l'on conçoit que de l'un quelconque des points de la première de ces deux courbes pris pour centre, et avec le rayon k, on décrive une sphère, cette sphère coupera généralement la seconde courbe en deux points au moins dont les rayons indiqueront les directions que pourra prendre la droite mobile, lorsqu'elle passera par le point ainsi choisi sur la première courbe ; et, comme il en ira de même pour tous les autres points pris sur cette courbe, il s'ensuit que toutes les situations que pourra prendre dans l'espace la droite que le point mobile est assujetti à parcourir appartiendront à une certaine surface gauche, ayant deux nappes au moins qui se couperont suivant cette courbe ; et, comme on peut prendre la seconde courbe pour la première et *vice versâ*, on peut dire que toutes les situations possibles de la droite que le mobile est assujetti à parcourir sont comprises dans une surface gauche à deux nappes au moins se coupant suivant les deux courbes fixes. Il est évident en outre que toute droite tracée sur l'une ou l'autre nappes peut être réputée une des positions de la droite mobile ; et puisque le point mobile peut avoir une situation quelconque sur cette droite, il s'ensuit que ce point peut, d'après les conditions du mouvement, occuper une place quelconque sur l'une ou l'autre nappes, et ne saurait se trouver hors d'elles.

Tout l'effet de l'appareil qui maîtrise le mouvement du point que nous considérons se réduit donc à le contraindre à ne pas abandonner une surface courbe tout-à-fait déterminée, sur laquelle d'ailleurs il peut se mouvoir librement, de telle sorte que cette surface courbe peut être subtituée à l'appareil dont il s'agit, sans que les circonstances du mouvement en éprouvent la moindre altération. Le problème se trouve donc ainsi ramené à celui du mouvement d'un point sur une surface déterminée ; problème dont la solution est familière à tous ceux qui ont cultivé la mécanique rationnelle.

Quant à la recherche de l'équation de la surface gauche sur laquelle le mobile est assujetti à se mouvoir, elle ne présente que des difficultés ordinaires de calcul. En désignant en effet par (x, y, z) un quelconque des points de la droite mobile, par (x', y', z'), (x'', y'', z'') les points communs à cette droite et aux deux courbes fixes sur lesquelles elle repose, on aura d'abord

$$(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2=k^2,$$

$$\frac{x-x'}{x'-x''}=\frac{y-y'}{y'-y''}=\frac{z-z'}{z'-z''}.$$

On pourra ensuite supposer que les équations données des deux courbes fixes sont

$$\begin{cases} M'=0\ , \\ N'=0\ ; \end{cases} \qquad \begin{cases} M''=0\ , \\ N''=0\ ; \end{cases}$$

M', N' étant des fonctions données de x', y', z'; et M'', N'' des fonctions également données de x'', y'', z''. Eliminant donc les *six* quantités x', y', z', x'', y'', z'' entre ces *sept* équations, l'équation résultante en x, y, z sera celle de la surface demandée.

Si les courbes fixes données étaient deux courbes planes situées dans un même plan, ce plan serait évidemment la surface sur laquelle le point mobile serait assujetti à se mouvoir; et les lois de son mouvement se trouveraient indépendantes de la nature de ces deux courbes.

Si, dans ce cas particulier, la force accélératrice était constante d'intensité et de direction, on se trouverait ramené à la théorie ordinaire du mouvement des graves sur les plans inclinés.

Et si, en outre, cette force accélératrice constante était située dans le plan même que le point mobile est assujetti à parcourir, le problème reviendrait à celui de la chute libre des corps pesans dans l'espace.

PROBLÈME II. Donner la théorie du mouvement du pendule simple d'une longueur variable et fonction de l'angle que fait sa direction avec la verticale, en supposant d'ailleurs le point de suspension fixe?

Solution. Soit u la longueur que se trouve avoir le pendule, lorsque sa direction fait un angle t avec la verticale; on devra avoir $u=\varphi(t)$, φ désignant une fonction donnée quelconque. Cette équation sera évidemment l'équation polaire de la courbe que le mobile fixé à l'extrémité inférieure du pendule sera contraint de décrire, et les variations que ce pendule éprouvera dans sa longueur n'auront d'autre effet que de lui faire parcourir cette courbe qui pourra le remplacer, par rapport au mobile, sans que les circonstances de son mouvement en soient aucunement altérées. Le problème se trouve donc ramené à la recherche des circonstances du mouvement d'un point matériel pesant le long d'une courbe plane dont le plan est vertical, c'est-à-dire, à un problème complètement traité dans tous les ouvrages élémentaires.

PROBLÈME III. On a fait des sections dans un polyèdre régulier, par des plans indéfinis, perpendiculaires sur les milieux de toutes ses arètes. On a opéré de la même manière sur tous les corps résultant de cette première décomposition, et ainsi de suite indéfiniment. On demande, pour chacun des cinq polyèdres réguliers, quels seront, après un nombre quelconque de semblables opérations, le nombre et la nature de parties résultantes ?

Réflexions. La solution de ce problème se présente pour ainsi dire d'elle-même pour l'hexaèdre, attendu qu'on obtient constamment des hexaèdres, et qu'à chaque opération on en obtient un nombre huit fois plus grand ; de sorte qu'après un nombre x d'opérations le nombre des hexaèdres obtenus est 8^x.

Mais le problème semble tout-à-fait inabordable pour tous les autres polyèdres réguliers, attendu que, dès la première opération, on cesse d'obtenir des polyèdres réguliers. Pour le tétraèdre, par exemple, une première opération donne vingt-quatre tétraèdres partiels, égaux entre eux ; mais ces tétraèdres ne sont plus réguliers et une seconde opération les décompose en portions si peu régulières qu'il devient déjà très-difficile d'en assigner le nombre et la nature ; et l'on conçoit qu'il en serait de même, à plus forte raison, pour les opérations subséquentes. Ce serait bien pire encore s'il s'agissait des autres polyèdres différens du cube.

Ce serait vainement qu'on tenterait de rendre le problème plus traitable en assujettissant les plans coupant à des conditions différentes. Si, par exemple, on exigeait que ces plans passassent par les milieux des arètes des divers sommets du polyèdre, on tirerait du tétraèdre quatre autres tétraèdres réguliers comme lui, plus un octaèdre également régulier; mais, en opérant de la même manière sur cet octaèdre, on en obtiendrait six pyramides quadrangulaires, plus un corps terminé par six carrés et par huit triangles équilatéraux; la même opération faite sur le cube conduirait de prime abord à ce même corps et à huit tétraèdres non réguliers.

Si l'on voulait assujettir les plans coupans à être parallèles aux faces opposées et à passer en outre par le centre du polyèdre, ce qui rentrerait pour le cube dans le cas proposé; on exclurait d'abord le tétraèdre, où il n'y a point de faces opposées. Or, en opérant sur l'octaèdre, une première opération donnerait six octaèdres et huit tétraèdres, tous réguliers; et, à raison de ces tétraèdres, l'opération ne pourrait plus se poursuivre.

On concevra facilement toute la difficulté du problème en considérant qu'il a son analogue pour les polygones réguliers, où il semblerait devoir être incomparablement plus facile; et que pourtant, le carré excepté qui donne pour résultat 4^x, on ne voit pas trop comment on pourrait le résoudre généralement pour tout autre polygone.

Agréez, etc.

St-Geniez, le 5 juin 1824.