ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Démonstration d'un théorème de géométrie énoncé dans le New-Castle Magazine (décembre 1823, pag. 665)

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 14 (1823-1824), p. 376-378
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__376_0>

Démonstration d'un théorème de géométrie énoncé dans le New-Castle Magazine (*Decembre* 1823 , *pag.* 665) ;

Par M. GERGONNE.

THÉORÈME. De quelque point de la circonférence du cercle inscrit à un triangle équilatéral, qu'on abaisse des perpendiculaires sur ses trois côtés ; la somme des rectangles construits sur ces perpendiculaires prises deux à deux sera constante et équivalente au carré construit sur la moitié de la hauteur du triangle.

Démonstration. Soient ABC le triangle dont il s'agit, O son centre de figure, P un quelconque des points de la circonférence du cercle inscrit, enfin, PA', PB', PC', les perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés BC, CA, AB du triangle ; en désignant par H sa hauteur, il s'agira de démontrer que

$$\mathrm{PA'.PB'}+\mathrm{PB'.PC'}+\mathrm{PC'.PA'}=\tfrac{1}{4}H^2 ,$$

Soient menées A'B', B'C', C'A', nous aurons

$$\textit{Triang.}\mathrm{A'PB'}=\tfrac{1}{2}\mathrm{PA'.PB'}\mathrm{Sin.A'PB'}=\tfrac{1}{2}\mathrm{PA'.PB'}\mathrm{Sin.}120^\circ ;$$

$$\textit{Triang.}\mathrm{B'PC'}=\tfrac{1}{2}\mathrm{PB'.PC'}\mathrm{Sin.B'PC'}=\tfrac{1}{2}\mathrm{PB'.PC'}\mathrm{Sin.}120^\circ ;$$

$$\textit{Triang.}\mathrm{C'PA'}=\tfrac{1}{2}\mathrm{PC'.PA'}\mathrm{Sin.C'PA'}=\tfrac{1}{2}\mathrm{PC'.PA'}\mathrm{Sin.}120^\circ ;$$

d'où, en ajoutant

$$Triang.A'B'C'=\frac{1}{2}(PA'.PB'+PB'.PC'+PC'.PA')\text{Sin}.120^\circ\ ;$$

et par suite

$$PA'.PB'+PB'.PC'+PC'.PA'=\frac{2\text{Triang}.A'B'C'}{\text{Sin}.120^\circ}\ .$$

Or, dans le triangle équilatéral, le cercle inscrit est concentrique au cercle circonscrit, d'où il suit (pag. 280—291 du présent volume) que, quelle que soit la situation du point P, sur la circonférence du premier de ces deux cercles, l'aire du triangle A'B'C' est constante; donc on a aussi

$$PA'.PB'+PB'.PC'+PC'.PA'=Const.$$

Si présentement on prend pour le point P l'un des points de contact du cercle inscrit avec les côtés du triangle, deux des trois rectangles seront nuls, et le troisième se réduira évidemment à $\frac{1}{4}H^2$; donc finalement

$$PA'.PB'+PB'.PC'+PC'.PA'=\frac{1}{4}H^2\ .$$

Corollaire. Il est connu que, quelle que soit la situation du point P, dans l'intérieur du triangle équilatéral, on a toujours

$$PA'+PB'+PC'=H\ ,$$

d'où, en quarrant

$$\overline{PA'}^2+\overline{PB'}^2+\overline{PC'}^2+2(PA'.PB'+PB'.PC'+PC'.PA')=H^2\ ;$$

mettant donc ici pour la somme des produits deux à deux sa valeur $\frac{1}{4}H^2$, transposant et réduisant, on aura

$$\overline{PA'}^2+\overline{PB'}^2+\overline{PC'}^2=\tfrac{1}{2}H^2\ ;$$

c'est-à-dire, *si, de l'un quelconque des points de la circonférence du cercle inscrit au triangle équilatéral, on abaisse des perpendiculaires sur ses trois côtés, la somme des carrés construits sur ces perpendiculaires sera constante et équivalente à la moitié du carré construit sur la hauteur du triangle.*