ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

Géométrie élémentaire. Sur la propriété de minimum dont jouissent la circonférence du cercle, entre les périmètres des figures planes de méme surface, et la surface de la sphère, entre toutes celles qui enferment un méme volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 14 (1823-1824), p. 316-318

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__316_0>

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Sur la propriété de minimum *dont jouissent la circonférence du cercle, entre les périmètres des figures planes de même surface, et la surface de la sphère, entre toutes celles qui enferment un même volume;*

Par un ABONNÉ.

Au Rédacteur des *Annales*;

MONSIEUR,

EN examinant avec attention l'article de la page 132 du précédent volume des *Annales*, relatif à la propriété de *minimum* dont jouissent la circonférence du cercle, entre les périmètres des figures planes de même surface, et la surface de la sphère, entre les surfaces des corps de même volume, il m'a paru que, pour compléter la démonstration de ces propriétés, et la rendre tout-à-fait Euclidienne, il pouvait être nécessaire de la faire précéder des deux lemmes que voici :

LEMME I. Toute courbe plane dans laquelle la droite qui joint les milieux de deux cordes parallèles quelconques est perpendiculaire à leur direction commune est un cercle.

Démonstration. Soient A, B, C (fig. 3) trois points pris arbitrairement

trairement sur le périmètre de la courbe dont il s'agit, et par ces trois points soit fait passer un cercle. Soit menée la corde BC et, par le point A, soit menée la corde AD parallèle à celle-là, se terminant à la courbe en D. Par hypothèse, les milieux de ces deux cordes seront sur une perpendiculaire à leur direction commune; d'où il suit que les quatre points A, B, C, D de la courbe dont il s'agit appartiennent à une même circonférence, laquelle ne saurait être autre que celle que nous avons fait passer par les trois premiers A, B, C; de sorte que nous avons trouvé un quatrième point D de la courbe qui appartient à cette circonférence.

Si présentement nous menons la corde BD et sa parallèle AE, se terminant à la courbe en E; pour de semblables raisons, on verra que ce point E est aussi un cinquième point de notre circonférence, à l'aide duquel on en déterminera un sixième qui sera également sur cette circonférence, puis un septième et ainsi de suite.

En remarquant, d'un autre côté, que les deux points A, B de la courbe peuvent être pris si voisins l'un de l'autre qu'on le veut, et qu'on peut prendre le troisième C de manière que la corde BC ait quelle direction on voudra, il sera aisé d'en conclure qu'il n'est aucun point de la courbe qui n'appartienne en même temps à la circonférence qui passe par trois de ses points, et qu'ainsi cette courbe n'est autre qu'une circonférence.

LEMME II. Toute surface courbe dans laquelle le plan qui contient les milieux de trois cordes parallèles quelconques, non comprises dans un même plan, est perpendiculaire à leur direction commune, est une sphère.

Démonstration. Soient A, B, C, D (fig. 4) quatre points de la surface courbe dont s'agit, non compris dans un même plan, par lesquels soit fait passer une sphère. Soit menée la corde CD; et, par les points A et B, soient menées les deux autres cordes AF et BE, parallèles à celle-là, se terminant en F et E à la surface dont il s'agit. Par hypothèse, les milieux de ces trois cordes seront dans un plan perpendiculaire à leur direction commune ; d'où il suit que leurs six extrémités appartiendront à une même sphère, laquelle ne saurait être autre que celle que nous avons fait passer par les quatre premiers points A, B, C, D; de sorte que nous avons trouvé deux nouveaux points E, F, de la surface dont il s'agit qui sont en même temps sur cette sphère.

Si présentement nous menons la corde CF, et ses deux parallèles AG et BH, se terminant en G et H à la surface proposée; pour de semblables raisons, on verra que ces deux points G et H sont aussi un septième et un huitième points de la surface de la sphère, à l'aide desquels on en déterminera un neuvième et un dixième qui seront également sur cette sphère, et ainsi de suite.

En remarquant, d'un autre côté, que les trois points A, B, C de la surface dont il s'agit peuvent être pris aussi voisins les uns des autres qu'on le voudra, et qu'on peut prendre le quatrième D, sur cette surface, de telle sorte que la corde CD ait une direction donnée, il sera aisé d'en conclure qu'il n'est aucun point de la surface proposée qui n'appartienne en même temps à la sphère qui passe par quatre d'entre eux et qu'ainsi cette surface n'est autre que la sphère elle-même.

Agréez, etc.

Marseille, le 19 juillet 1823.