ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

J. B. DURRANDE

Géométrie élémentaire. Démonstration d'un théorème de géométrie

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 14 (1823-1824), p. 309-313
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__309_0>

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstration d'un théorème de géométrie ;

Par M. J. B. Durrande, professeur de physique au collége royal de Cahors.

THÉORÈME. *Dans tout quadrilatère circonscrit au cercle, la droite qui joint les milieux des diagonales passe par le centre du cercle inscrit.*

Démonstration. Soit ABCD (fig. 1) un quadrilatère circonscrit au cercle O ; soient V, X, Y, Z les points de contact respectifs des côtés AB, BC, CD, DA de ce quadrilatère avec le cercle. De chacun des sommets A, B, C, D comme centre, et avec des rayons respectivement égaux aux distances de ces sommets aux points de contact des deux côtés qui y concourent, soient décrits quatre cercles que nous désignerons simplement, comme le premier, par les lettres placées à leur centre. Soient menés l'axe radical des deux cercles opposés A et C, et l'axe radical des deux autres cercles opposés B et D ; soient H, H', I, I' les points d'intersection de ce dernier avec les deux cercles A et C, et soient K, K', L, L' les points d'intersection du premier avec les cercles B et D. Ces deux axes radicaux se couperont évidemment au point O, puisque les tangentes menées de ce point aux quatre cercles A, B, C, D ont pour longueur commune le rayon du cercle O.

Menons présentement les droites AH et CI, concourant en M, AH′ et CI′ concourant en M′. Soient menées pareillement BK et DL concourant en N, BK′ et DL′ concourant en N′, les deux quadrilatères AMCM′ et BNDN′ seront des parallélogrammes, et auront conséquemment leurs côtés opposés égaux. En effet, de ce que le cercle A est tangent aux deux cercles B et D dont l'axe radical est HI, il s'ensuit (tom. XIII, pag. 198) que la tangente à A au point H est parallèle à celle des deux tangentes communes extérieures aux deux cercles B et D qui ne coupe pas le cercle A; et, pour la même raison, la tangente à C au point I est parallèle à celle des deux tangentes communes extérieures aux deux cercles B et D qui ne coupe pas le cercle C; donc les deux tangentes en H au cercle A et en I au cercle C doivent, comme les tangentes communes extérieures aux deux cercles B et D faire des angles égaux avec la droite BD qui joint leurs centres; donc, puisque HI est perpendiculaire à cette droite et que HM et IM sont respectivement perpendiculaires aux deux tangentes, il s'ensuit que le triangle HMI a ses deux angles en H et I égaux entre eux et à ceux que font avec BD les tangentes extérieures communes aux deux cercles B et D. Par un raisonnement tout-à-fait analogue, on démontrera exactement la même chose du triangle H′M′I′, par rapport à ses angles H′ et I′; d'où on conclura que les droites MA et MC sont respectivement parallèles aux droites M′A et M′C et qu'ainsi AM′=CM et CM′=AM. On démontrera aussi de la même manière, en faisant changer de rôle aux deux couples de cercles opposés, que DN′=BN et BN′=DN.

Cela posé, les points H et I pourront être considérés comme les points de contact des deux cercles A et C avec un cercle décrit du point M comme centre et avec MH=MI pour rayon, et que, pour abréger, nous appellerons le cercle M; de même H′ et I′ seront les points de contact de ces deux mêmes cercles avec le cercle M′. Pareillement K et L seront les points de contact des cercles B et D avec le cercle N; et K′ et L′ seront les points de contact des deux mêmes cercles avec le cercle N′.

D'après cela, les deux droites VZ et KL devant concourir au centre de similitude des deux cercles B et D, les quatre points K, V, Z, L appartiendront à une même circonférence, d'où il suit que les droites KV et LZ iront concourir en un même point P de l'axe radical HI des deux cercles B et D ; et, pour des raisons semblables, les deux droites KX et LY iront aussi concourir en un même point Q de cet axe radical. Pareillement, les deux droites HV et IX iront concourir en un point R de l'axe radical KL des deux cercles A et C ; et les deux droites HZ et IY iront concourir en un même point S du même axe radical.

De même les droites VK′ et ZL′ iront concourir en un point P′, et les droites XK′ et YL′ en un point Q′ de l'axe radical HI ; les droites VH′ et XI′ iront concourir en un point R′, et les droites ZH′ et YI′ en un point S′ de l'axe radical KL.

On peut remarquer maintenant que la droite MM′, que nous nous dispensons de mener, pour ne point trop compliquer la figure, passe par le point O. En effet, considérons d'abord les trois cercles A, M, M′ ; le point H est le centre de similitude externe des deux premiers et le point H′ est le centre de similitude interne du premier et du troisième ; d'où il suit que le centre de similitude interne de M et M′ doit être sur la droite HH′ ou HI. Considérant ensuite les trois cercles A, B, M, remarquant que V est le centre de similitude interne des deux premiers et H le centre de similitude externe du premier et du troisième, on en conclura que le centre de similitude interne de B et M est sur la droite HV. En considérant de même les trois cercles C, B, M, on prouvera que le centre de similitude interne de B et M est aussi sur IX, d'où on conclura qu'il est à l'intersection R de cette droite avec HV. Des raisonnemens semblables serviront à prouver que le centre de similitude externe des deux cercles B et M′ est le point R′, intersection des deux droites VH′ et XI′ ; d'où il suit que le centre de similitude interne des deux cercles M et M′ est sur la droite RR′ ou KL ; et comme on pourrait prouver également qu'il doit être sur HI, il s'ensuit qu'il est à l'intersection O de ces deux droites, laquelle, conséquemment, doit être en ligne droite avec les points M et M'. On prouverait de la même manière qu'elle est aussi en ligne droite avec les points N et N'.

On peut aussi prouver que la droite MN passe également par le point O. En effet, en considérant d'abord les trois cercles A, M, N; le centre de similitude externe des deux premiers étant le point H, et le centre de similitude interne du premier et du troisième étant le point P, comme il est aisé de le prouver, en raisonnant comme ci-dessus; il s'ensuit que le centre de similitude interne de M et N est sur la droite HP ou HI; et on prouverait de la même manière qu'il est aussi sur la droite KL; ce centre est donc à l'intersection O de ces deux droites qui conséquemment doit se trouver en ligne droite avec les points M et N; et on prouverait la même chose des points M' et N'.

Voilà donc conséquemment les quatre points M, N, M', N' en ligne droite avec le point O, c'est-à-dire que, dans les deux parallélogrammes AMCM' et BNCN' les diagonales qui ne sont point tracées doivent se confondre en une seule ligne droite qui passe par le point O; cette droite doit donc passer par les milieux des deux autres diagonales AC et BD des mêmes parallélogrammes, lesquelles sont aussi les deux diagonales du quadrilatère ABCD circonscrit au cercle O; donc la droite qui joint les milieux des deux diagonales de ce quadrilatère contient le centre O du cercle inscrit (*).

Tout triangle circonscrit à un cercle pouvant être considéré comme un quadrilatère circonscrit, dans lequel un des angles, égal à deux angles droits a son sommet sur la circonférence, au point de con-

---

(*) Le théorème général, pour une section conique quelconque, se trouve démontré dans le présent recueil, savoir : analitiquement (tom. XII, pag. 382), et géométriquement (tom. XII, pag. 109).

J. D. G.

tact de l'un des côtés du triangle ; on peut conclure du théorème qui vient d'être démontré le théorème suivant que l'on pourrait aussi parvenir à démontrer directement par des moyens analogues.

THÉORÈME. Dans tout triangle, la droite qui joint le milieu de l'un quelconque des côtés avec le milieu de la droite qui joint le point de contact de ce côté avec le cercle inscrit au sommet opposé, contient le centre de ce cercle.