ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

ROCHE

Solution du problème d'analise transcendante énoncé à la page 128 du présent volume, suivie de la démonstration d'un théorème nouveau

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 14 (1823-1824), p. 294-302
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__294_0>

Solution du problème d'analise transcendante énoncé à la page 128 du présent volume, suivie de la démonstration d'un théorème nouveau;

Par M. Roche, capitaine d'artillerie de la marine, ancien élève de l'école polytechnique.

PROBLÈME. *Quelle est la forme la plus générale des équations différentielles qui admettent une intégrale de la forme*

$$f(x-\alpha, y-\beta)=0 ,$$

dans laquelle α et β représentent des fonctions déterminées quelconques de la constante arbitraire c?

Solution. En supposant tour à tour l'équation intégrale résolue par rapport à $y-\beta$ et $x-\alpha$, on obtiendra des valeurs de cette forme

$$y-\beta=\Phi'(x-\alpha) , \qquad x-\alpha=\Psi(y-\beta) ,$$

où Φ et Ψ seront des fonctions déterminées de $x-\alpha$ et $y-\beta$, respectivement. En différentiant ces deux équations, et représentant, à l'ordinaire, par p le coefficient différentiel de y et par Φ' et Ψ' les dérivées respectives de Φ et Ψ, on trouvera

$$p=\Phi'(x-\alpha) , \qquad 1=p\Psi'(y-\beta) ,$$

équations qui, résolues, la première par rapport à $x-\alpha$ et l'autre par rapport à $y-\beta$, donneront

$$x-\alpha=\varphi(p)\ , \qquad y-\beta=\psi(p)\ ,$$

où φ et ψ seront également des fonctions déterminées de p; et par suite

$$\alpha=x-\varphi(p)\ , \qquad \beta=y-\psi(p)\ .$$

Mais α et β étant des fonctions déterminées de c sont aussi fonctions l'une de l'autre, c'est-à-dire, qu'il doit exister entre elles une relation déterminée. En supposant donc cette relation exprimée par l'équation

$$\mathrm{F}(\alpha,\beta)=0\ ,$$

et substituant, on obtiendra, pour l'équation différentielle demandée

$$\mathrm{F}\{x-\varphi(p),y-\psi(p)\}=0\ . \qquad \text{(I)}$$

Mais il est essentiel de remarquer que les fonctions φ et ψ ne sauraient être indépendantes; et rien n'est plus facile que d'assigner la relation qui doit exister entre elles. Si, en effet, on différentie les valeurs de $x-\alpha$ et $y-\beta$ trouvées ci-dessus, on aura

$$\mathrm{d}x=\varphi'(p).\mathrm{d}p\ , \qquad \mathrm{d}y=\psi'(p).\mathrm{d}p\ ,$$

φ' et ψ' étant les dérivées respectives de φ et ψ; or, ces deux équations, divisées l'une par l'autre, donnent

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \text{ou} \quad p=\frac{\psi'(p)}{\varphi'(p)}\ , \quad \text{c'est-à-dire,} \quad \psi'(p)=p\varphi'(p)\ ; \qquad \text{(II)}$$

relation qu'on peut encore mettre sous cette forme

$$\psi(p)=\int\varphi'(p).p\mathrm{d}p\ ,$$

ou, en intégrant par parties,

$$\psi(p)=p\varphi(p)-\int\varphi(p).\mathrm{d}p\ .\ (*)$$

Soit, par exemple, l'équation

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2\ ,$$

dans laquelle on suppose

$$\alpha=\rho\mathrm{Cos}.c\ , \qquad \beta=\rho\mathrm{Sin}.c\ ,$$

c étant la constante arbitraire. En différentiant cette équation, il viendra

$$(x-\alpha)+p(y-\beta)=0\ .$$

En mettant dans la proposée et sa différentielle pour α et β leurs valeurs en c et éliminant ensuite c entre les deux équations résultantes, on aura, toutes réductions faites,

$$(1+p^2)(x^2+y^2+r^2-\rho^2)^2=4r^2(y+px)^2\ ,$$

équation qui peut être mise sous cette forme

(*) Ce résultat avait déjà été obtenu par M. Woisard, dans un mémoire qu'à raison de l'abondance des matières nous avons été contraint d'abréger en le publiant.

J. D. G.

$$\left\{x-\frac{rp}{\sqrt{1+p^2}}\right\}^2+\left\{y-\frac{r}{\sqrt{1+p^2}}\right\}^2=\rho^2\ ,$$

et qui rentre ainsi dans la formule (I). De plus, on a ici

$$\varphi(p)=\frac{rp}{\sqrt{1+p^2}}\ ,\qquad \psi(p)=\frac{r}{\sqrt{1+p^2}}\ ,$$

d'où

$$\varphi'(p)=\frac{r}{\sqrt{1+p^2}}\ ,\qquad \psi'(p)=\frac{rp}{\sqrt{1+p^2}}\ ,$$

ce qui vérifie la relation (II).

Au moyen de ce qui précède, on peut aisément démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. Toute équation différentielle de la forme

$$\mathrm{F}\{x-\varphi(p)\ ,y-\psi(p)\}=0\ ,$$

qui admet une solution particulière, a, par là même, une intégrale de la forme

$$\mathrm{f}(x-\alpha,\,y-\beta)=0\ ,$$

dans laquelle α *et* β *sont des fonctions d'une même constante arbitraire.*

Et réciproquement toute équation différentielle de la première forme, dont l'intégrale est de la seconde, admet par là même une solution particulière.

Démonstration. En effet, 1.° on sait que, pour obtenir la solution particulière d'une équation telle que

$$F\{x-\varphi(p),\ y-\psi(p)\}=0\ ,$$

il faut, après l'avoir différentiée, égaler séparément à zéro et le multiplicateur de dp et la partie qui en est indépendante. Or, si l'on désigne respectivement par P et Q les dérivées du premier membre de cette équation, prises par rapport aux deux binomes $x-\varphi(p)$, $y-\psi(p)$, considérés comme deux variables, sa différentielle sera

$$Pdx+Qdy-\{P\varphi'(p)+Q\psi'(p)\}dp=0\ ;$$

afin donc que cette équation admette une solution particulière, il faudra qu'on ait séparément

$$Pdx+Qdy=0\ , \qquad P\varphi'(p)+Q\varphi'(p)=0\ ,$$

équations entre lesquelles éliminant le rapport de P à Q, on obtiendra

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{ou} \quad p=\frac{\psi'(p)}{\varphi'(p)}\ , \quad \text{c'est-à-dire}\ , \quad \varphi'(p)=p\varphi'(p)\ ,$$

qui est précisément la relation (II), nécessaire pour que l'équation admette une intégrale de la forme

$$f(x-\alpha,y-\beta)=0\ ;$$

ce qui démontre déjà la première partie de la proposition.

2.° Réciproquement, soit

$$f(x-\alpha,y-\beta)=0\ ,$$

l'intégrale d'une équation différentielle, dans laquelle on suppose que α et β sont des fonctions d'une même constante c ; pour avoir la solution particulière de son équation différentielle, il faudra, comme l'on sait, éliminer la constante c entre cette équation et sa dérivée par rapport à cette lettre ; mais, en représentant par P_1 et Q_1 les dérivées de son premier membre, prises par rapport à $x-\alpha$, $y-\beta$, considérés comme deux variables la dérivée dont il s'agit sera

$$P_1\mathrm{d}\alpha+Q_1\mathrm{d}\beta=0.$$

Si, au contraire, on différentie la proposée par rapport à x et y on aura

$$P_1\mathrm{d}x+Q_1\mathrm{d}y=0\,;$$

d'où il suit que la différentielle de sa solution particulière sera le résultat de l'élimination de c entre ces deux dernières. Or, on a vu par le problème précédent que cette différentielle était

$$\mathrm{F}\{x-\varphi(p)\,,\,y-\psi(p)\}=0\,.$$

avec la condition

$$\psi'(p')=p\varphi'(p)\,;$$

or, en différentiant de nouveau l'équation différentielle obtenue, on parvient, comme nous l'avons déja vu, à un résultat de la forme

$$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\{P\varphi'(p)+Q\psi'(p)\}\mathrm{d}p=0\,;$$

or, si l'on substitue, dans cette dernière équation, pour $\psi'(p)$ sa valeur $p\varphi'(p)$, et pour $\mathrm{d}y$ sa valeur $p\mathrm{d}x$, on obtiendra

$$(P+pQ)\{\mathrm{d}x-\mathrm{d}p\varphi'(p)\}=0 ,$$

équation qui peut être satisfaite en posant

$$P+pQ=0 \qquad \text{ou} \qquad P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$$

ce qui revient à dire que la différentielle

$$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\{P\varphi'(p)+Q\psi'(p)\}\mathrm{d}p=0 ,$$

en y considérant p comme une constante, est égale à zéro, ce qui est précisément le caractère des solutions particulières; mais l'équation est aussi satisfaite en posant

$$\mathrm{d}x-\mathrm{d}p\varphi'(p)=0 \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{d}y=\mathrm{d}p.\psi'(p)=0 ,$$

ce qui donne, en intégrant,

$$x-\alpha=\varphi(p) , \qquad y-\beta=\psi(p) ,$$

équations dans lesquelles α, β sont les constantes arbitraires, et qui donnent, par l'élimination de p,

$$\mathrm{f}(x-\alpha , y-\beta)=0 .$$

Corollaire. Il résulte de là un moyen facile de ramener l'intégration d'une équation différentielle dans laquelle x ou y est donnée en fonction de p, lorsqu'elle ne peut être résolue par rapport à

cette

cette lettre, à l'intégration d'une fonction d'une seule variable, jointe à l'élimination.

Soit, en effet, l'équation proposée

$$x-\alpha=\varphi(p)\ ;$$

$\frac{dy}{dx}$ sera une fonction de $x-\alpha$ et conséquemment de p ; de sorte que l'intégration de cette équation donnera un résultat de la forme

$$y-\beta=\psi(p)\ ,$$

dans lequel β sera la constante arbitraire. En différentiant ces deux équations et éliminant entre leurs différentielles $\frac{dp}{dx}$, on obtiendra comme ci-dessus, l'équation de condition

$$\psi'(p)=p\varphi'(p)\ ,$$

et la fonction ψ sera donnée par l'intégration de la fonction $p\varphi'(p)$.

Si, au contraire, l'équation proposée est

$$y-\beta=\psi(p)\ ,$$

en posant

$$x-\alpha=\varphi(p)\ ,$$

la fonction φ serait donnée, à l'inverse, par l'intégration de la fonction $\frac{\psi'(p)}{p}$.

Dans l'un et dans l'autre cas, les fonctions φ et ψ étant connues, l'élimination de p entre les deux équations

$$x-\alpha=\varphi(p)\,,\qquad\qquad y-\beta=\psi(p)$$

conduira à l'intégrale cherchée. (*)

(*) M. Woisard, professeur aux écoles d'artillerie à Metz, a aussi donné une solution du problème qui, pour le fond, ne diffère pas de celle qu'on vient de lire.

J. D. G.