ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

CH. STURM

Autre démonstration du même théorème

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 14 (1823-1824), p. 286-293
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__286_0>

Autre démonstration du même théorème ;

Par M. Ch. Sturm.

Soient α, β, γ les trois angles du triangle donné, et r le rayon du cercle circonscrit ; il est aisé de voir que les côtés respectivement opposés à ces angles seront

$$2r\mathrm{Sin}.\alpha\,,\qquad 2r\mathrm{Sin}.\beta\,,\qquad 2r\mathrm{Sin}.\gamma\,.$$

Si d'un point P, situé comme on voudra dans l'intérieur du triangle on abaisse des perpendiculaires a, b, c sur les directions de ses trois côtés, ces perpendiculaires seront les hauteurs de trois triangles ayant pour bases les trois côtés du premier et leur sommet commun au point P; les aires de ces triangles seront respectivement

$$ra\mathrm{Sin}.\alpha\,,\qquad rb\mathrm{Sin}.\beta\,,\qquad rc\mathrm{Sin}.\gamma\,,$$

et la somme de ces aires sera l'aire du triangle donné. Mais on sait qu'on obtient aussi cette dernière en divisant le produit des trois côtés du triangle par le quadruple du rayon du cercle circonscrit ; ce qui donne

$$\frac{2r\mathrm{Sin}\,\alpha.2r\mathrm{Sin}\,\beta.2r\mathrm{Sin}.\gamma}{4r}\qquad \text{ou}\qquad 2r^2\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Sin}.\beta\mathrm{Sin}.\gamma\ ;$$

on aura donc, en divisant par r,

$$a\text{Sin}.\alpha+b\text{Sin}.\beta+c\text{Sin}.\gamma=2r\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.\beta\text{Sin}.\gamma. \qquad (1)$$

Le triangle qui a ses sommets aux pieds des trois perpendiculaires a, b, c est lui même décomposé, par ces perpendiculaires en trois autres; et, en remarquant que les angles que forment ces perpendiculaires deux à deux sont les supplémens respectifs des trois angles du triangle donné, nous aurons, pour les aires de ces triangles partiels,

$$\tfrac{1}{2}bc\text{Sin}.\alpha\ , \qquad \tfrac{1}{2}ca\text{Sin}.\beta\ , \qquad \tfrac{1}{2}ab\text{Sin}.\gamma\ ;$$

de sorte qu'en désignant par k^2 l'aire du triangle total, on aura

$$bc\text{Sin}.\alpha+ca\text{Sin}.\beta+ab\text{Sin}.\gamma=2k^2\ . \qquad (2)$$

Pour rendre cette dernière équation appliquable à toutes les situations du point P, que nous avons d'abord supposé intérieur au triangle donné, il faudra avoir égard aux signes des perpendiculaires a, b, c qu'il faudra prendre positives ou négatives, suivant qu'en partant de leurs pieds elles se dirigeront vers l'intérieur ou vers l'extérieur de ce triangle. Cette circonstance pourra quelquefois rendre k^2 négatif, ce qui, géométriquement parlant ne sera d'aucune conséquence, attendu que, dans la géométrie proprement dite, toutes les grandeurs sont supposées absolues; mais lorsqu'au contraire on voudra envisager les choses sous le point de vue analitique, il faudra avoir égard au signe de k^2.

Cela posé, cherchons quel doit être le lieu des divers points P qui rendent constante l'aire k^2 du triangle qui a ses sommets aux pieds des trois perpendiculaires. Eliminons d'abord c entre les équations (1) et (2), nous trouverons ainsi

$$2r(b\text{Sin}.\alpha+a\text{Sin}.\beta)\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.\beta\text{Sin}.\gamma-(a^2+b^2)\text{Sin}\,\alpha\text{Sin}.\beta-ab(\text{Sin}.^2\alpha+\text{Sin}.^2\beta-\text{Sin}\,^2\gamma)$$

$$=2k^2\text{Sin}.\gamma\ . \qquad (3)$$

Mais, si l'on désigne par a', b', c' les trois côtés du triangle donné, on aura

$$a'^2+b'^2-c'^2=2a'b'\text{Cos}.\gamma\ ,$$

ou en mettant pour les trois côtés leurs valeurs $2r\text{Sin}.\alpha$, $2r\text{Sin}.\beta$, $2r\text{Sin}.\gamma$ et divisant par $4r^2$

$$\text{Sin}.^2\alpha+\text{Sin}.^2\beta-\text{Sin}.^2\gamma=2\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.\beta\text{Cos}.\gamma\ .$$

En introduisant donc cette valeur dans l'équation (3) elle deviendra

$$2r(b\text{Sin}.\alpha+a\text{Sin}.\beta)\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.\beta\text{Sin}.\gamma-(a^2+b^2)\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.\beta-2ab\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.\beta\text{Cos}.\gamma$$

$$=2k^2\text{Sin}.\gamma\ ; \qquad (4)$$

Rapportons présentement le point P aux deux côtés de l'angle γ, pris pour axes des coordonnées, c'est-à-dire, aux deux côtés du triangle donné sur les directions desquels tombent les perpendiculaires a et b, le premier étant pris pour axe des x et l'autre pour axe des y. En représentant par x et y les deux coordonnées du point P parrallèles à ces axes, nous aurons

$$a=y\text{Sin}.\gamma\ , \qquad b=x\text{Sin}.\gamma\ ,$$

valeurs qui, substituées dans l'équation (4) donneront, en réduisant,

$$x^2+y^2+2xy\text{Cos}.\gamma-2rx\text{Sin}.\alpha-2ry\text{Sin}\beta+\frac{2k^2}{\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.\beta\text{Sin}.\gamma}=0\ ;$$

équation qui appartient évidemment à un cercle et qui peut facilement être mise sous cette forme

$$\left(x-\frac{r\text{Cos.}\beta}{\text{Sin.}\gamma}\right)^2+\left(y-\frac{r\text{Cos.}\alpha}{\text{Sin.}\gamma}\right)^2+2\left(x-\frac{r\text{Cos.}\beta}{\text{Sin.}\gamma}\right)\left(y-\frac{r\text{Cos.}\alpha}{\text{Sin.}\gamma}\right)\text{Cos.}\gamma$$

$$=r^2-\frac{2k^2}{\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\gamma}\ ;$$

les coordonnées du centre de ce cercle sont donc

$$\frac{r\text{Cos.}\beta}{\text{Sin.}\gamma}\ ,\qquad \frac{r\text{Cos.}\alpha}{\text{Sin.}\gamma}\ ,$$

longueurs indépendantes de k ; ce qui nous montre que, pour les diverses valeurs de k, la circonférence, lieu des points P, ne varie que de rayon et conserve toujours le même centre.

Mais, lorsqu'on suppose $k=0$, l'équation, sous sa première forme, perd son terme tout connu ; elle exprime donc alors un cercle passant par l'origine, c'est-à-dire, par un quelconque des sommets du triangle donné, et par conséquent par ses trois sommets. Ainsi le lieu de tous les points P est alors le cercle circonscrit au triangle donné lui-même; puis donc que les lieux du point P répondant aux diverses valeurs de k sont des cercles concentriques, ils ont tous pour centre commun le centre du cercle circonscrit au triangle donné. On voit de plus que le lieu des points P est ce cercle lui-même, lorsque $k=0$.

Si présentement nous nous rappelons que k^2 peut être pris indistinctement en plus ou en moins, nous en conclurons qu'en représentant par R le rayon du cercle qui, pour une certaine valeur de k, résout le problème, on doit avoir

$$R=\sqrt{r^2\pm\frac{2k^2}{\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\gamma}}\ ;$$

d'où l'on voit qu'en général, pour une même valeur donnée de k^2, les points P qui résolvent le problème sont sur deux circonférences concentriques avec celle du cercle circonscrit au triangle donné. Nous disons en général ; car, si k^2 excédait une certaine limite, l'une des deux valeurs de R deviendrait imaginaire, de sorte que le problème ne pourrait plus être résolu que par les points d'une circonférence unique.

Si l'on désigne par R et R' les rayons des deux cercles, on aura

$$R^2=r^2+\frac{2k^2}{\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Sin}.\beta\mathrm{Sin}.\gamma}, \qquad R'^2=r^2-\frac{2k^2}{\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Sin}.\beta\mathrm{Sin}.\gamma},$$

ce qui donne

$$R^2+R'^2=2r^2;$$

ou encore

$$R^2-r^2=r^2-R'^2;$$

d'où l'on voit d'abord que l'un des deux cercles est toujours extérieur au cercle circonscrit au triangle donné, tandis que l'autre lui est intérieur, tellement que la corde du cercle circonscrit tangente à l'intérieur est égale à la corde de l'extérieur tangente au circonscrit.

Pour que le plus petit des deux cercles se réduise à un point, il faut qu'on ait

$$r^2-\frac{2k^2}{\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Sin}.\beta\mathrm{Sin}.\gamma}=0, \qquad \text{d'où} \qquad k^2=\frac{r^2\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Sin}.\beta\mathrm{Sin}.\gamma}{2},$$

ou bien

$$k^2=\frac{2r\mathrm{Sin}.\alpha.2r\mathrm{Sin}.\beta.2r\mathrm{Sin}.\gamma}{16r};$$

or, le numérateur de cette expression est le produit des trois côtés du triangle donné, d'où il est aisé de conclure que cette valeur de

k^2 est le quart de l'aire de ce triangle. Il faut bien en effet qu'il en soit ainsi ; car, lorsque du centre du cercle circonscrit à un triangle on abaisse des perpendiculaires sur les directions de ses trois côtés, les pieds de ces perpendiculaires sont les milieux de ces mêmes côtés, et par conséquent le triangle qui a ses sommets à ces pieds est le quart du premier.

On voit aussi, par ce qui précède, 1.° que, tant que le diamètre du cercle extérieur est moindre que la diagonale du quarré circonscrit au cercle circonscrit au triangle donné, il y a un cercle extérieur et un cercle intérieur qui résolvent le problème ; 2.° que, lorsque le diamètre du cercle extérieur est précisément égal à cette diagonale, le cercle intérieur se réduit à un point ; 3.° qu'enfin lorsque le diamètre du cercle extérieur est plus grand que cette diagonale, il n'y a plus de cercle intérieur.

Il résulte aussi de ce qui précéde que, lorsque le cercle extérieur se confond avec le cercle circonscrit au triangle donné, le cercle intérieur se confond aussi avec lui. L'aire du triangle qui a ses sommets aux pieds des trois perpendiculaires étant alors nulle, ces trois points doivent ainsi être en ligne droite. C'est le cas particulier déjà démontré (*Annales*, tom. IV, pag. 251.)

Après avoir ainsi démontré de tous points le théorème énoncé, nous allons généraliser un peu la propriété qu'il exprime.

Par le point P soient menées aux trois côtés du triangle donné des obliques a', b', c' faisant dans le même sens des angles égaux ε avec les trois perpendiculaires a, b, c. Soient fait des pieds de ces obliques les sommets d'un triangle inscrit dont nous représenterons l'aire par k'^2. En raisonnant, comme nous l'avons fait ci-dessus, pour parvenir à l'équation (2), nous aurons

$$b'c'\text{Cos}.\alpha+c'a'\text{Cos}.\beta+a'b'\text{Cos}.\gamma=k'^2 . \qquad (5)$$

Mais on a

$$a'=\frac{a}{\mathrm{Cos}.\varepsilon}\ , \quad b'=\frac{b}{\mathrm{Cos}.\varepsilon}\ , \quad c'=\frac{c}{\mathrm{Cos}.\varepsilon}\ . \qquad (6)$$

substituant donc, nous aurons

$$bc\mathrm{Cos}.\alpha+ca\mathrm{Cos}.\beta+ab\mathrm{Cos}.\gamma=2k'^2\mathrm{Cos}.^2\varepsilon\ ,$$

ou, en vertu de l'équation (2),

$$k^2=k'^2\mathrm{Cos}.^2\varepsilon\ .$$

Ainsi, l'aire du nouveau triangle sera égale à celle du triangle dont les sommets sont les pieds mêmes des perpendiculaires, divisée par le quarré du cosinus de l'angle que forment les obliques avec elles. Donc, pour que l'aire de ce premier triangle soit constante, il est nécessaire et il suffit que l'aire de l'autre le soit, et conséquemment le lieu des points P qui rempliront cette condition sera encore ici, comme dans le premier cas, une circonférence concentrique à celle du cercle circonscrit.

On voit, en particulier, que, si de l'un quelconque des points de la circonférence du cercle circonscrit à un triangle, on abaisse, sur les directions de ses côtés, des obliques également inclinées dans le même sens sur ces mêmes côtés, les pieds de ces obliques appartiendront tous trois à une même ligne droite.

Nous terminerons par observer qu'en général le lieu des points du plan d'un polygone quelconque desquels abaissant des perpendiculaires sur les directions de ses côtés, le polygone inscrit au premier, dont les sommets consécutifs sont les pieds de ces perpendiculaires, à une aire constante, est une ligne du second ordre.

En

En effet, en désignant toujours par P l'un des points dont il s'agit et par x et y ses coordonnées, sur le plan du polygone dont il s'agit, l'aire du second polygone sera la *somme algébrique* des aires d'une suite de triangles ayant leur sommet commun en P et dont les côtés adjacens à ce sommet sont les perpendiculaires dont il s'agit. Or, l'aire de chacun de ces triangles sera la moitié du produit des deux côtés qui partent de ce sommet commun, multiplié par le sinus de l'angle que comprennent entre eux ces mêmes côtés. Or, cet angle est indépendant de la situation du point P, par la nature même de la question ; et les côtés qui le comprennent sont des fonctions linéaires des coordonnées x et y du point P; l'expression de l'aire de chacun de ces triangles sera donc une fonction entière du second degré de x et de y; il en sera donc de même de l'expression de l'aire du polygone somme des aires de ces triangles. Si donc on égale l'aire de ce polygone à une surface constante, l'équation résultante sera celle d'une ligne du second ordre, lieu de tous les points P.

Il est aisé de voir que les mêmes choses auraient lieu encore si, au lieu de perpendiculaires, on abaissait du point P des obliques également inclinées dans le même sens sur les côtés du polygone donné.