ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

W. H. TALBOT

# Seconde solution, présentant la démonstration d'un théorème

*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 14 (1823-1824), p. 123-128
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__123_1>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1823-1824, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

---

## *Seconde solution, présentant la démonstration d'un théorème ;*

Par M. W. H. Talbot, membre de la société philosophique de Cambridge (*).

I. Avant d'entrer en matière, nous rappellerons d'abord un théorème très-connu, et qui se trouve, en particulier, démontré à la page 269 du XIII.e volume du présent recueil, lequel consiste

---

(*) Pour faciliter la comparaison entre cette solution et la précédente, nous avons cru convenable d'y introduire les mêmes notations. *J. D. G.*

en ce que l'*aire de toute figure fermée quelconque, tracée sur la surface convexe d'un cône droit, multipliée par le sinus tabulaire de l'angle générateur du cône, donne un produit égal à l'aire de la projection de cette figure sur un plan quelconque perpendiculaire à l'axe.*

II. Avant de nous occuper du problème proposé, occupons-nous d'abord de la solution de celui-ci : *Connaissant l'angle générateur d'un cône droit, la distance du sommet à laquelle son axe est rencontré par un plan qui le coupe et l'angle que fait le plan coupant avec l'axe, déterminer les dimensions de la section qui en résulte ?*

Concevons que le plan de la figure (fig. 11) soit le plan conduit par l'axe, perpendiculairement au plan coupant. Soient $\alpha$ l'angle générateur du cône, $k$ la distance de son sommet au point où le plan coupant rencontre son axe, et $\beta$ l'angle que fait ce plan axec l'axe.

Soient S le sommet de ce cône, SCD la direction de son axe SGA et SBH les droites suivant lesquelles sa surface est coupée par le plan de la figure, GCH l'intersection du même plan avec le plan coupant, et enfin ACB son intersection avec un plan conduit par le point C perpendiculairement à l'axe ; GH sera alors le premier axe de la section, et si, sur AB comme diamètre, on décrit un demi-cercle coupant l'axe en D, $CD=CA=CB=k\text{Tang.}\alpha$ sera évidemment l'ordonné correspondant aux deux segmens CG et CH de ce grand axe.

Ces choses ainsi entendues, les deux triangles SCG et SCH donnent

$$CG=k.\frac{\text{Sin.}\alpha}{\text{Sin.}(\beta+\alpha)}\,,\qquad CH=k.\frac{\text{Sin.}\alpha}{\text{Sin.}(\beta-\alpha)}\,;$$

si donc on représente par $2a$ la longueur du premier axe, on aura

$$2a=\mathrm{CG}+\mathrm{CH}=k\left\{\frac{\mathrm{Sin}.\alpha}{\mathrm{Sin}.(\beta+\alpha)}+\frac{\mathrm{Sin}.\alpha}{\mathrm{Sin}.(\beta-\alpha)}\right\}=2k\,\frac{\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Cos}.\alpha\mathrm{Sin}.\beta}{\mathrm{Sin}.(\beta+\alpha)\mathrm{Sin}.(\beta-\alpha)}\,,$$

d'où

$$a=k.\frac{\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Cos}.\alpha\mathrm{Sin}.\beta}{\mathrm{Sin}.(\beta+\alpha)\mathrm{Sin}.(\beta-\alpha)}\,.$$

En outre, en représentant par $2b$ le second axe, on devra avoir

$$\frac{\overline{\mathrm{CD}}^2}{\mathrm{CG}.\mathrm{CH}}=\frac{b^2}{a^2}\,,$$

d'où

$$b^2=a^2.\frac{\overline{\mathrm{CD}}^2}{\mathrm{CG}.\mathrm{CH}}\,;$$

substituant donc, et extrayant la racine quarrée, on trouvera

$$b=k.\frac{\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Sin}.\beta}{\sqrt{\mathrm{Sin}.(\beta+\alpha)\mathrm{Sin}.(\beta-\alpha)}}\,.$$

Si ensuite on désigne le paramètre par $p$, on aura, comme l'on sait,

$$p=\frac{2b^2}{a}=2k\mathrm{Tang}.\alpha\mathrm{Sin}.\beta\,.$$

Désignant encore par $e$ l'excentricité, on aura

$$e^2=a^2-b^2=k^2.\frac{\mathrm{Sin}.^2\alpha\mathrm{Sin}.^2\beta\mathrm{Cos}.^2\beta}{\mathrm{Sin}.^2(\beta+\alpha)\mathrm{Sin}.^2(\beta-\alpha)}\,,$$

d'où

$$e=k.\frac{\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Sin}.\beta\mathrm{Cos}.\beta}{\mathrm{Sin}.(\beta+\alpha)\mathrm{Sin}.(\beta-\alpha)}\,;$$

d'après quoi le rapport de l'excentricité au demi-grand axe sera

$$\frac{e}{a}=\frac{\mathrm{Cos}.\beta}{\mathrm{Cos}.\alpha}\,.$$

Si l'on désigne par $c$ la distance d'un sommet au foyer le plus voisin, on aura

$$c=a-e=k.\frac{\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Sin}.\beta(\mathrm{Cos}.\alpha-\mathrm{Cos}.\beta)}{\mathrm{Sin}.(\beta+\alpha)\mathrm{Sin}.(\beta-\alpha)}\,,$$

ou encore

$$c=\frac{k}{2}\cdot\frac{\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\beta}{\text{Cos.}\frac{1}{2}(\beta+\alpha)\text{Cos.}\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}\,.$$

Dans la recherche de toutes ces formules, nous avons tacitement supposé que la section était elliptique, ou qu'on avait $\beta>\alpha$ ; mais elles subsisteraient encore si la section était hyperbolique ou parabolique ; il arriverait seulement, dans le premier cas, que $b$ serait imaginaire, et dans le second que $a$, $b$ et $e$ seraient infinis.

Nous avons donc complètement résolu le problème que nous nous étions proposé, et des formules que nous avons obtenues, il serait aisé de conclure la solution de ce problème inverse : *Par quel point de l'axe d'un cône droit et sous quel angle faut-il conduire un plan, pour qu'il en résulte une section conique de dimensions données ?*

III. En nous occupant de la question proposée, nous avons rencontré un théorème assez curieux, que nous allons préalablement démontrer, et que l'on peut énoncer comme il suit :

*THÉORÈME. Si l'on projette orthogonalement, sur un plan quelconque perpendiculaire à l'axe d'un cône droit, une section plane quelconque faite dans ce cône, le point d'intersection de son axe avec le plan de la projection sera le foyer de cette projection* (*).

*Démonstration.* La démonstration de ce théorème est très-facile à déduire des formules précédemment obtenues. En désignant, en effet, par $2a'$ et $2b'$ les deux axes de la projection, nous aurons

$$a'=a\text{Sin.}\beta\,,\qquad b'=b\,;$$

c'est-à-dire, en substituant,

$$a'=k\,.\frac{\text{Sin.}\alpha\text{Cos.}\alpha\text{Sin.}^2\beta}{\text{Sin.}(\beta+\alpha)\text{Sin.}(\beta-\alpha)}\,,\qquad b'=k\,.\frac{\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\beta}{\sqrt{\text{Sin.}(\beta+\alpha)\text{Sin.}(\beta-\alpha)}}\,.$$

(*) Il serait curieux d'examiner si, en projetant obliquement une section faite dans un cône oblique, sur le plan de sa base, par des parallèles à la droite qui joint son sommet au centre de cette base, ce centre ne serait pas le foyer de la projection. J. D. G.

En désignant donc par $e'$ l'excentricité de cette projection, nous aurons

$$e'^2=a'^2-b'^2=k^2.\frac{\text{Sin.}^4\alpha\text{Sin.}^2\beta\text{Cos.}^2\beta}{\text{Sin.}^2(\beta+\alpha)\text{Sin.}^2(\beta-\alpha)}\ ;$$

d'où

$$e'=k.\frac{\text{Sin.}^2\alpha\text{Sin.}\beta\text{Cos.}\beta}{\text{Sin.}(\beta+\alpha)\text{Sin.}(\beta-\alpha)}\ ,\quad \text{et}\quad \frac{e'}{a'}=\frac{\text{Tang.}\alpha}{\text{Tang.}\beta}\ .$$

Si ensuite on représente par $c'$ la distance d'un sommet au foyer le plus voisin, on aura

$$c'=a'-e'=k.\frac{\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\beta}{\text{Sin.}(\beta+\alpha)}=\text{CGSin.}\beta\ ;$$

cette distance sera donc la projection de CG sur le plan dont il s'agit ; or, la projection de G sera le sommet de la courbe ; donc le point C en sera le foyer.

IV. Venons présentement à la question qui a été proposée ; et remarquons d'abord que, comme l'on sait déterminer la surface convexe et le volume du demi-cône dont l'onglet fait partie, toute la question se réduit à savoir évaluer la surface convexe et le volume de ce qui reste de ce demi-cône lorsqu'on en a retranché l'onglet. Il ne s'agit même que de la seule évaluation de la surface convexe de ce corps ; car, pour en avoir le volume, il suffit évidemment de multiplier cette surface par le tiers de la perpendiculaire abaissée du centre de la base du cône sur l'une quelconque de ses arêtes, laquelle a pour expression $k\text{Sin.}\alpha$.

Mais, d'après ce que nous avons remarqué (I), pour avoir l'aire de cette surface, il suffit de diviser par $\text{Sin.}\alpha$ l'aire de sa projection que nous venons de voir être une section conique dont le foyer est en C; la question se trouve donc ramenée à déterminer l'aire d'un segment de section conique qui a pour corde le paramètre.

Or, il est connu que, $\frac{1}{n}$ désignant le rapport de l'excentricité au demi-grand axe, et $a'$ ce demi-grand axe, l'aire d'un tel segment est, pour l'ellipse,

$$a'^2\left\{\text{Arc}\left(\text{Cos.}=\frac{1}{n}\right)-\frac{n^2-1}{n^3}\right\}\frac{\sqrt{n^2-1}}{n},$$

et pour l'hyperbole,

$$a'^2\left\{\frac{\sqrt{1-n^2}}{n^2}-\text{Log.}(1+\sqrt{1-n^2})\right\}\frac{\sqrt{1-n^2}}{n};$$

quant à la parabole, en représentant par $c'$ la distance du sommet au foyer, l'aire du pareil segment sera

$$\tfrac{4}{3}c'^2,$$

en mettant donc, dans ces trois formules, pour $a'$ et $c'$, les valeurs déterminées ci-dessus, et observant qu'ici

$$n=\frac{a'}{c'}=\text{Tang.}\beta\text{Cot.}\alpha,$$

on aura l'aire du segment, pour les trois cas, en fonction des données du problème. Le quotient de sa division par Sin.$\alpha$ donnera la surface convexe de ce qui reste du demi-cône lorsqu'on en a retranché l'onglet. Cette surface retranchée de celle du demi-cône sera donc la surface convexe de l'onglet, dont on obtiendra ensuite le volume, en la multipliant par $\frac{1}{3}k$Sin.$\alpha$ (*).

(*) M. Talbot a aussi traité la question par le calcul intégral ; mais les développemens présentés sur ce sujet par M. Stein rendent superflue cette partie de son travail. *J. D. G.*