ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

CONDITIONS DE LA SOUSCRIPTION.

Depuis le premier juillet 1810, ce recueil paraît de mois en mois, par livraisons de 30 à 40 pages d'impression, non compris les planches.

On peut adresser indistinctement les demandes de souscription,

Au Rédacteur des *Annales*, rue du St-Sacrement, n.° 252, à Montpellier [Hérault];

A M. *Bachelier*, gendre *Courcier*, libraire pour les Mathématiques, Quai des Augustins, n.° 55, à Paris;

Et à tous les bureaux de poste.

Les articles à insérer doivent être envoyés, francs de port, à la première de ces adresses.

Le prix de la souscription annuelle est 21 fr. pour la France, et 24 fr. pour l'étranger. Les lettres et l'argent doivent être affranchis.

AVIS au Relieur,

Sur le placement des Planches.

Planche I.	Après la page	28.
II.		64.
III.		128.
IV.		336.

ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

RECUEIL PÉRIODIQUE,

RÉDIGÉ ET PUBLIÉ

Par J. D. GERGONNE, professeur à la faculté des sciences de Montpellier, membre de plusieurs sociétés savantes.

TOME QUATORZIÈME.

A NISMES,

DE L'IMPRIMERIE DE P. DURAND-BELLE.

Et se trouve à PARIS, chez M. BACHELIER, gendre COURCIER, Libraire pour les Mathématiques, Quai des Augustins, n.° 55.

1823 ET 1824.

ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

OPTIQUE.

De la vision, à travers les verres plans, d'une épaisseur constante;

Par M. GERGONNE.

On sait qu'en général l'effet commun des lentilles convexes, comme des miroirs concaves, est d'amplifier les images des objets, et que l'effet commun des lentilles concaves, comme des miroirs convexes, est au contraire de les faire paraître plus petits; or, comme il est d'ailleurs connu que les miroirs plans ne changent absolument rien à l'aspect des objets, c'est sans doute pour cela qu'on en aura conclu, sans y regarder de trop près, que les lentilles qui ne sont ni concaves ni convexes, c'est-à-dire, les verres plans, à faces parallèles, ne devaient rien y changer non plus, et qu'il en devait être de même des verres sphériques d'une épaisseur constante, du moins lorsque l'œil est placé au centre commun des deux surfaces qui les terminent.

Mais M. JEAN MILE, professeur de physique à l'université de Varsovie, dans une lettre en date du 20 juin 1821, insérée dans le *Journal de physique, de chimie et d'histoire naturelle* (novembre 1822), vient de battre en ruine la première de ces deux suppositions. Il a prouvé en effet, par des considérations géométriques de la plus grande simplicité, que, lorsqu'on regarde un objet à travers un verre sphérique d'une épaisseur constante, c'est-à-dire à faces concentriques, 1.° si la concavité est tournée vers l'objet, l'angle visuel est toujours amplifié; 2.° si, au contraire, c'est la convexité qui est tournée vers l'objet, l'angle visuel est amplifié, demeure le même ou est diminué, suivant que le centre de courbure est en arrière de l'œil, à l'œil même ou devant lui.

Or comme, lorsqu'on interpose un verre plan entre l'œil et un objet, il est toujours permis de considérer ce verre comme un verre sphérique d'une épaisseur constante et d'un rayon infini; et comme alors on peut toujours supposer que c'est sa concavité qui est tournée vers l'objet, et qu'en admettant même que ce fût sa convexité, le centre de courbure se trouverait alors en arrière de l'œil, il s'ensuit que l'*interposition d'un verre plan, à faces parallèles, entre l'œil et un objet, amplifie toujours l'angle visuel sous lequel l'objet s'offrirait à l'œil nu, et cela d'autant plus que le verre est plus épais et que sa substance jouit d'un pouvoir réfringent plus énergique;* proposition qu'au surplus M. J. Mile démontre d'abord directement.

Quelque évidente que soit la démonstration de M. Mile, il ne se croit pas pour cela dispensé d'appuyer son assertion d'une expérience facile et décisive, fort propre à convaincre les physiciens, malheureusement encore en assez grand nombre, aujourd'hui même, qui n'entendent rien en géométrie. Prenez, dit-il, un tube de fer-blanc, assez gros et long, aux deux extrémités duquel vous mastiquerez bien exactement et perpendiculairement à son axe deux disques de verre plan; et montez ce tube sur un pied, comme vous le feriez d'un télescope grégorien, de telle sorte que son axe soit horizontal. Placez ce tube de manière que son axe soit perpendiculaire à une muraille blanche et éclairée, sur laquelle vous tracerez deux traits noirs verticaux, assez rapprochés les uns des autres, et de manière que le prolongement de l'axe du tube aille rencontrer la muraille à distance égale de l'une et de l'autre. Si alors vous regardez les deux parallèles à travers le tube, vous les verrez à peu près comme à l'œil nu, à raison de la petite épaisseur des deux verres qui le terminent. Mais si, auparavant, vous remplissez le tube jusqu'à sa moitié, c'est-à-dire, jusqu'à la hauteur de son axe, au moyen d'un orifice ménagé à sa partie supérieure, d'un liquide bien transparent, d'eau ou d'alcohol, par exemple, et que vous compariez alors la distance entre les portions de parallèles vues dans l'air à la distance entre leurs prolongemens vus dans le liquide, cette dernière paraîtra beaucoup plus grande que l'autre.

Jusqu'ici tout est parfaitement exact; mais, de ce que l'interposition d'un verre plan à faces parallèles entre l'œil et un objet le fait voir sous un plus grand angle, M. J. Mile paraît en inférer qu'elle le fait voir plus gros, et c'est précisément le contraire. Il arrive seulement qu'en le faisant voir plus petit elle le rapproche en même temps de l'œil; que ce rapprochement fait plus que compenser la diminution des dimensions; de sorte qu'en dernière analise l'angle optique est réellement amplifié.

L'erreur de M. J. Mile en ceci vient de ce que, à l'exemple de la plupart des physiciens qui ne considèrent les phénomènes d'optique que d'une manière vague, il prend l'angle visuel pour la mesure de la grandeur apparente, sans aucun égard au lieu réel de l'image, ce qui ne saurait être toléré que pour des objets placés assez loin pour que l'œil cesse de pouvoir estimer l'intervalle qui l'en sépare. D'après cette manière d'envisager les choses, M. J. Mile doit penser aussi que la vision à travers un verre sphérique d'une épaisseur constante, tellement situé que l'œil se trouve au centre commun de ses deux surfaces, doit s'opérer comme à l'œil nu, et c'est encore là une erreur, comme nous le ferons voir plus loin.

On ne saurait trop répéter que c'est dans la considération des caustiques, et non autre part, qu'il faut chercher la solution du problème de la vision par l'intermédiaire des rayons réfractés et réfléchis, et que cette considération peut seule donner la mesure précise de toutes les circonstances du phénomène.

En particulier, le cas de l'interposition d'un verre plan à faces parallèles entre l'œil et l'objet a déjà été traité et discuté dans le V.e volume du présent recueil (pag. 294); et voici les résultats que nous avons obtenus, en cet endroit, d'une analise rigoureuse.

1.° Les rayons de lumière émanés d'un même point, et situés dans un même plan, perpendiculaire aux deux faces d'un verre plan, d'une épaisseur constante, après avoir traversé ce verre, deviennent tous normaux à une même ellipse, dont le grand axe est perpendiculaire aux deux faces du verre, et dont la situation et les dimensions sont tout-à-fait indépendantes de la distance de ce verre au point fixe d'où l'on suppose que ces rayons sont émanés.

2.° Ce même point est un des foyers de l'ellipse, dont le centre est du même côté de ce foyer que le verre, et dont l'excentricité est précisément égale à son épaisseur.

3.° En outre, si l'on suppose que le rapport du sinus d'incidence dans l'air au sinus de réfraction dans le verre soit celui de p à q, et qu'on fasse, pour abréger,

$$\frac{p}{q}=m\,,\qquad \frac{p^2-q^2}{q^2}=n^2\,,\qquad \text{d'où}\qquad m^2=1+n^2\,;$$

$2me$ et $2ne$ seront les deux axes de cette ellipse.

4.° Tous les rayons, à leur sortie du verre, sont donc tangens à la développée de cette ellipse, développée qui est conséquemment la caustique à laquelle donne naissance le point dont il s'agit; de sorte que, pour un œil situé de l'autre côté du verre, le lieu de l'image de ce point sera le point de contact de cette caustique, avec la tangente qu'on lui menera de ce même œil.

5.° Mais il est essentiel de remarquer que si, par le centre commun de l'ellipse et de sa développée, on conçoit un plan parallèle à la surface du verre, la moitié de la développée située du côté de ce plan opposé au verre sera seule utile à la question, et devra seule conséquemment être réputée la caustique dont il s'agit.

6.° De ces principes résulte, en particulier, cette conséquence digne de remarque que, si l'on fait marcher le verre, parallèlement à lui-même, entre l'œil et un objet, l'image de cet objet n'en éprouvera aucun changement de forme ou de situation.

Ces choses ainsi entendues, soit $P'P''$ (fig. 1) une droite, et soit O un œil situé en l'un des points de la perpendiculaire sur son milieu P. Supposons qu'on interpose entre l'un et l'autre un verre plan à faces parallèles, perpendiculaire au plan de la figure et parallèle à la droite $P'P''$, et examinons sous quel aspect se présentera cette droite, vue à travers un tel verre.

Des extrémités P', P'' de la droite $P'P''$, élevons-lui du côté de l'œil des perpendiculaires $P'C'$, $P''C''$, d'une longueur égale à l'épaisseur du verre ; prolongeons ces perpendiculaires du côté opposé en S' et S'' de manière qu'on ait $C'S'=C''S''=me$, e étant l'épaisseur du verre et m le rapport du sinus d'incidence dans l'air au sinus de réfraction dans le verre. Soient construites deux demi-ellipses dont les centres soient en C' et C'', les foyers en P' et P'' et les sommets en S' et S''. Soient construites aussi les développées de ces demi-ellipses, dont les points de rebroussement soient K' et K'', tellement situés que $K'S'$ et $K''S''$ sont égales au demi-paramètre ; ces développées seront les caustiques relatives aux points P' et P''. Si donc du point O on leur mène des tangentes, leurs points de contact I' et I'' seront ceux où l'œil croira voir les points P' et P''.

On voit donc que la droite $P'P''$ qui, avant l'interposition du verre, était vue sous l'angle $P'OP''$, sera vue, par l'effet de cette interposition, sous l'angle $I'OI''$ évidemment plus grand que celui-là, comme l'a trouvé M. J. Mile ; mais on voit en même temps que cette droite paraîtra plus petite et plus rapprochée de l'œil qu'elle ne l'est réellement, comme nous l'avions annoncé.

On voit en outre que son image ne sera point une ligne droite; car si, pour le point milieu P, on fait la même construction que pour les extrémités P′ et P″, le point I de contact de la tangente menée à la nouvelle caustique par le point O se confondra avec son point de rebroussement; l'image I du point P sera donc plus rapprochée de ce point que les images I′ et I″ des points P′ et P″ ne le seront de ceux-ci; d'où l'on voit que l'image I′II″ de la droite P′PP″ sera un peu concave vers l'œil. Il est aisé de voir que sa courbure aura pour asymptote la droite C′CC″, qui contient les centres des diverses caustiques.

Pour opposer expérience à expérience, nous dirons que, si l'on fait avancer ou reculer la lunette de M. J. Mile dans le sens de son axe, sans que l'œil change de situation, l'aspect des portions de parallèles qui sont vues à travers le liquide n'en éprouvera aucun changement. Si ensuite le spectateur, ayant ramené l'instrument près de lui, promène son œil le long du diamètre horizontal de l'oculaire de cette espèce de lunette, en fixant à la fois son attention sur les portions de parallèles vues dans l'air et leurs portions vues dans le liquide, il s'assurera bientôt de l'existence d'une parallaxe, du genre de celle qu'on remarque lorsqu'on regarde, à travers un cristal de chaux carbonaté posé sur du papier, les deux images d'un trait qu'on y a tracé; et il sera dès-lors impossible de douter que les images des deux parallèles, vues à travers le liquide, ne soient en avant de ces parallèles elles-mêmes.

On voit donc que les verres à faces planes partagent avec les lentilles convexes la propriété d'augmenter l'angle optique sous lequel les objets nous apparaissent; d'où résultent ces diverses conséquences, 1.° qu'à courbure égale des deux surfaces, une lentille convexe amplifie d'autant plus cet angle qu'elle est plus épaisse; 2.° que, pour qu'une lentille n'amplifie aucunement l'angle sous lequel les objets nous apparaissent, il est nécessaire qu'elle soit un peu concave, et d'autant plus qu'elle sera plus épaisse; 3.° que conséquemment à courbure et épaisseur égales les lentilles convexes doivent plus amplifier l'angle sous lequel nous voyons les objets que les lentilles concaves ne doivent le réduire.

Si l'on conçoit que les points P′ et P″ se rapprochent peu à peu du point P, de manière à diminuer de plus en plus la longueur de la droite P′P″; ou bien, si l'on conçoit que le point O s'éloigne peu à peu, en demeuraut toujours sur la droite PC; ou enfin si l'on imagine que ces deux circonstances aient lieu à la fois; il est clair que l'angle I′OI″ diminuera sans cesse; que par conséquent les points I′ et I″ marcheront respectivement vers K′ et K″, de sorte que OI′ et OI″ tendront à se prolonger suivant K′P′ et K″P″, et que l'image I′II″ de la droite P′PP″ tendra sans cesse à se redresser et à se confondre avec la droite K′IK″, qui lui est égale et parallèle.

Ainsi, lorsqu'un objet est vu sous un fort petit angle, ce qui peut également provenir de sa petitesse réelle ou de son éloignement de l'œil ou de ces deux causes à la fois; l'interposition d'un verre plan à faces parallèles entre l'œil et un tel objet, quelle qu'en puisse être d'ailleurs l'épaisseur, n'a d'autre effet apparent que de rapprocher l'image de cet objet de l'œil, d'une quantité moindre pourtant que l'épaisseur du verre, sans le déformer et sans altérer sensiblement l'angle sous lequel il est vu.

Il n'est pas même nécessaire, pour cela, que le verre interposé soit perpendiculaire à la direction des rayons visuels; car, soit la droite PP′ (fig. 2) vue à l'œil nu, par une spectateur infiniment éloigné, suivant les parallèles PQ, P′Q′; si ayant interposé, parallèlement à PP′, entre celle droite et le spectateur, un verre plan à faces parallèles, on trace les caustiques qui répondent aux points P et P′; en leur menant des tangentes IL et I′L′, parallèles à PQ et P′Q′, leurs points de contact I et I′ seront les images des points P et P′; de sorte que, par l'effet de l'interposition du verre, la droite PP′ semblera être devenue II′, qui lui est égale et parallèle; il arrivera donc seulement ici que la droite, en paraissant s'être avancée, parallèlement à elle-même, paraîtra en même temps avoir glissé dans le sens de sa longueur et du côté du spectateur.

Si l'on considère maintenant que le diamètre du soleil et celui de la lune, vus de la terre, soutendent dans le ciel des arcs de grands cercles qui ne s'écartent jamais guère d'un demi-degré, et que le plus voisin de ces deux astres est éloigné de de nous plus de 80000 lieues, on sera fondé à conclure de ce qui précède que l'interposition d'un verre plan bien transparent à faces parallèles, d'une dixaine de lieues d'épaisseur, entre ces astres et nous, ne changerait sensiblement rien à leur aspect; puisqu'elle ne produirait d'autre effet que de les rapprocher de notre œil d'une quantité moindre que dix lieues, c'est-à-dire, d'une quantité qu'on peut négliger vis-à-vis l'excessive distance où nous sommes de ces astres.

Le but principal de M. J. Mile, dans la lettre à laquelle ceci se rattache, est de prouver qu'il y a quelque chose de plus qu'une simple illusion dans l'extrême grandeur que nous attribuons au soleil et à la lune, à l'époque de leur lever et de leur coucher, et de mettre à profit la remarque, très-curieuse d'ailleurs, qu'il a faite sur l'effet des verres plans ou sphériques à surfaces parallèles, pour tenter d'expliquer comment l'interposition de l'atmosphère entre nous et ces astres peut occasioner un accroissement réel dans l'angle sous lequel nous les voyons, lorsqu'ils sont fort près de l'horizon.

Mais d'abord la discussion dans laquelle nous venons d'entrer ci-dessus paraît ruiner complètement toutes les inductions qu'on voudrait tirer des remarques de M. J. Mile. En second lieu, M. J. Mile ignore-t-il que l'effet de l'interposition de l'atmosphère sur l'aspect du ciel est aujourd'hui connu à la précision des secondes; que cet effet est journellement employé sur tous les points de l'Europe par les astronomes comme correction des observations, et qu'à moins de s'inscrire en faux contre les élémens du système solaire, tous déduits d'observations ainsi corrigées, il faut admettre que les astres sont vus à l'horizon sous un angle plus petit que celui sous lequel ils nous apparaissent lorsqu'ils se trouvent plus voisins du zénith; car

car c'est là une conséquence rigoureuse des théories admises par tous les astronomes ; théories que probablement ils ne sont pas disposés à abandonner.

Il faut donc continuer à ne voir, dans le phénomène que M. J. Mile a tenté d'expliquer d'une manière nouvelle, que ce qu'on y a vu jusqu'ici ; c'est-à-dire, une pure illusion qui a sa source dans la combinaison de plusieurs de ces jugemens d'habitude qui nous sont si fréquens et contre lesquels il nous est si difficile de nous défendre.

Venons présentement à l'effet des verres sphériques à faces concentriques. Soit O l'œil (fig. 3), et soit $P'P''$ une droite dont P soit le milieu ; et supposons que le verre soit placé entre l'œil et cette droite, de manière que le centre commun de ses deux courbures soit en O. Il est certain que, par l'interposition de ce verre, aucun des rayons émanés des divers points de cette droite ne sera détourné de sa direction pour parvenir à l'œil ; mais les images de ces différens points seront toutes rapprochées du spectateur, d'une même quantité moindre que l'épaisseur du verre, comme elles le seraient par l'effet de l'interposition d'un verre plan à faces parallèles, perpendiculaire à la direction de ces mêmes rayons. Les points P, P', P'' seront donc vus en I, I', I'', sur OP, OP', OP'', de telle sorte qu'on aura $PI=P'I'=P''I''$; la droite $P'P''$ sera donc vue sous le même angle $I'OI''=P'OP''$ qu'à l'œil nu ; mais elle sera vue en $I'II''$, plus rapprochée de l'œil du spectateur, sous la figure d'une courbe convexe vers l'œil, laquelle sera évidemment une conchoïde, ayant le point O pour pôle et la droite $P'PP''$ pour asymptote.

On doit remarquer, au surplus, qu'ici, comme dans le premier cas, si la droite $P'P''$ était fort distante du point O ou très-petite, son image lui serait sensiblement égale et parallèle, et conséquemment rectiligne, mais seulement plus rapprochée du spectateur ; et encore le rapprochement serait-il insensible, si la distance de l'œil à la droite était incomparablement plus grande que l'épaisseur du verre.

L'appareil de M. J. Mile semble pouvoir être employé, avec quelque avantage, à la détermination du pouvoir refringent des divers liquides. Qu'avec le diamant on trace sur son objectif une suite de cordes verticales également espacées; les distances entre ces verticales paraîtront amplifiées dans la partie inférieure de cet objectif, par l'effet de l'interposition du liquide; et en plaçant l'œil contre l'oculaire, on pourra juger du nombre rond d'espaces entre les verticales supérieures nécessaires pour correspondre à un nombre rond d'espaces entre les verticales inférieures. Supposons qu'il en faille un nombre p des premiers pour répondre à un nombre q des derniers : il n'en faudra pas davantage pour déterminer le nombre m, qui exprime le rapport du sinus d'incidence dans l'air au sinus de réfraction dans le liquide, ainsi qu'on va le voir.

Soient l la longueur connue de la lunette et a la distance réelle de l'une des verticales à celle qui passe par le centre de l'objectif $\frac{a}{l}$ sera la tangente tabulaire de l'angle sous lequel cette distance sera aperçue par un œil placé au centre de l'oculaire. Or, comme nous supposons l très-grand par rapport à a, et conséquemment cet angle très-petit, nous pourrons prendre $\frac{a}{l}$ pour l'angle lui-même.

Prenons pour le plan de la caustique le plan de la surface supérieure du liquide, c'est-à-dire, le plan horizontal conduit par l'axe de la lunette. Prenons cet axe pour axe des y, et le diamètre horizontal de l'oculaire pour axe des x; de manière que l'origine soit à la fois le centre de cet oculaire et le lieu de l'œil. L'image du point par lequel notre verticale plonge dans le liquide sera donc le point de contact de la caustique avec la tangente menée à cette courbe par l'origine. Désignons par x', y' les coordonnées de ce point de contact; pour les mêmes raisons que ci-dessus, nous pourrons considérer $\frac{y'}{x'}$ comme exprimant sensiblement l'angle sous lequel la distance a est aperçue à travers le liquide et conséquemment nous devrons avoir

$$\frac{y'}{x'}:\frac{a}{l}::p:q\ ,$$

d'où

$$pax'-qly'=0\ , \qquad (1)$$

première équation du problème.

Présentement, comme ici l'œil est sur l'une des faces parallèles même du milieu réfringent et l'objet sur l'autre, l'équation de la caustique sera, d'après ce que nous avons dit ci-dessus,

$$\left\{\frac{n(x-a)}{l}\right\}^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{my}{l}\right)^{\frac{2}{3}}=1\ ;\ (*)$$

et, comme le point (x',y') est sur cette courbe, on aura, pour la seconde équation du problème,

$$\left\{\frac{n(x'-a)}{l}\right\}^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{my'}{l}\right)^{\frac{2}{3}}=1\ . \qquad (2)$$

En différentiant l'équation de la caustique, on en tire

$$\frac{dy}{dx}=-\sqrt[3]{\frac{n^2y}{m^2(x-a)}}\ ,$$

ce qui donne pour l'équation de sa tangente par le point (x',y')

$$(x-x')\sqrt[3]{n^2y'}+(y-y')\sqrt[3]{m^2(x'-a)}=0\ ;$$

mais, cette tangente devant en outre passer par l'origine, il faut

(*) Voyez *Annales*, tom. V, pag. 288, ou tom. XI, pag. 235.

que son équation soit satisfaite en y mettant zéro pour x et pour y; ce qui donne, pour la troisième équation du problème

$$x'\sqrt[3]{n^2y'}+y'\sqrt[3]{m^2(x'-a)}=0 ,$$

ou

$$n^2x'^3+m^2y'^2(x'-a)=0 , \qquad (3)$$

en mettant dans celle-ci pour y' sa valeur donnée par l'équation (1), elle donne

$$x'=\frac{m^2p^2a^2}{n^2q^2l^2+m^2p^2a^2} , \quad x'-a=-\frac{n^2q^2l^2a}{n^2q^2l^2+m^2p^2a^2} ;$$

on trouve ensuite, par l'équation (1),

$$y'=\frac{m^2p^3a^4}{ql(n^2q^2l^2+m^2p^2a^2)} .$$

Substituant donc ces valeurs dans l'équation (2), elle deviendra

$$a^2(m^2p^2a^2-n^2q^2l^2)^3-q^2l^4(n^2q^2l^2+m^2p^2a^2)^2=0 ,$$

et, comme on a d'ailleurs $n^2=m^2-1$, on aura tout ce qui est nécessaire pour déterminer m.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration d'un théorème de géométrie ; énoncé à la page 248 du précédent volume ;

Par M. Ch. Sturm (*).

Théorème. Le point d'un plan indéfini dont la somme des distances à trois autres points est un minimum *est tel que si, par ce point, on mène une perpendiculaire au plan dont il s'agit et des droites aux trois points donnés, le plan que l'on conduira par cette perpendiculaire et par l'une quelconque de ces droites divisera en deux parties égales l'angle formé par les deux autres.*

Demonstration. La démonstration de ce théorème peut être facilement déduite d'un théorème de statique dont voici l'énoncé :

Si un point M, *libre ou situé sur une surface ou ligne donnée, est sollicité par des forces, en nombre quelconque, dont les directions passent par des points fixes, et dont les intensités soient telles que la somme des produits respectifs des distances de ces*

(*) M. Sturm a adressé au rédacteur des *Annales* deux démonstrations de ce théorème ; mais, comme l'une d'elles est en tout semblable à celle qu'a donné M. Querret, à la page 329 du précédent volume, il serait superflu de la reproduire ici.

J. D. G.

points au point M *par les forces qui passent par ces mêmes points soit un* maximum *ou un* minimum , *le point* M *sera en équilibre.*

Mais la réciproque de cette proposition n'est pas généralement vraie.

Ce théorème , qui n'est qu'un cas particulier de celui qui se trouve déduit du principe des vitesses virtuelles dans la *Mécanique analitique* (2.^{e} édition , tom. I , pag. 67) , pourrait être facilement démontré dans les traités élémentaires de statique.

Ce theorème admis , soient A , B , C (fig. 4) trois points donnés hors d'un plan XZ , et M le point de ce plan dont la somme MA+MB+MC des distances aux points A , B , C soit un *minimum*. Si l'on conçoit le point M poussé contre le plan XZ par trois forces égales quelconques , représentées en intensité et en direction par MA', MB', MC', en ~~vertu du théorème~~ énoncé , ce point devra demeurer en équilibre ; il faudra donc que la direction MN de la résultante des trois forces soit perpendiculaire au plan XZ ; et cette résultante devra aussi être la même que celle de MC' et de la résultante MD' de M'A et MB' ; et , comme la résultante de deux forces est dans leur plan, il faudra que la perpendiculaire MN soit dans le plan de MC' et MD' ; mais cette dernière droite divise l'angle AMB en deux parties égales ; donc , en effet, le plan qui passe par l'une quelconque MC de nos trois droites et par la perpendiculaire MN , divise en deux parties égales l'angle AMB formé par les deux autres.

Le théorème qui vient d'être démontré donne trois conditions pour déterminer le point M du plan XZ , lorsque les trois points A , B , C sont donnés ; or , comme deux d'entre elles suffisent pour déterminer ce point , il s'ensuit que chacune d'elles doit être comportée par les deux autres ; c'est-à-dire que les plans conduits par chacune des droites MA , MB , MC et par la droite qui divise l'angle des deux autres en deux parties égales , se coupent tous trois suivant une même droite , et c'est ce qu'il est facile d'ailleurs de démontrer directement pour les trois arêtes d'un angle trièdre quelconque.

Soit , en effet , SABC (fig. 5) un angle trièdre quelconque , et soient menées les droites S*a* , S*b* , S*c* , qui divisent ses angles en deux parties égales. Soient ensuite prises sur ses arêtes, à partir de son sommet, des parties égales quelconques SA$'$, SB$'$, SC$'$, et soient menées A$'$B$'$, B$'$C$'$, C$'$A$'$, coupées respectivement en c', a', b' par Sc, Sa, Sb ; les points a', b', c' seront les milieux respectifs de B$'$C$'$, C$'$A$'$, A$'$B$'$, d'où il suit que si l'on mène A$'a'$, B$'b'$, C$'c'$, ces trois droites se couperont en un même point p', centre de gravité de l'aire du triangle A$'$B$'$C$'$; or si, par S et p', on mène une droite Sp, il est clair que cette droite sera à la fois dans les plans de SA et Sa, SB et Sb, SC et Sc ; ces trois plans se coupent donc suivant la droite unique Sp.

Ainsi, *dans tout angle trièdre, les plans conduits par les arêtes et par les droites qui divisent les angles plans opposés en deux parties égales, se coupent tous trois suivant une même droite ;* et, d'après cela, notre théorème revient à dire que *le point d'un plan dont la somme des distances à trois points donnés hors de ce plan est un* minimum, *doit être tel que, si l'on en fait le sommet d'un angle trièdre dont les arêtes passent par les trois points donnés, cet angle trièdre devra être tel que la commune section des plans conduits par ses arêtes et par les droites qui divisent les angles plans opposés en deux parties égales, soit perpendiculaire au plan dont il s'agit.*

Au surplus, ce théorème n'est qu'un cas particulier d'un théorème plus général qu'on peut énoncer comme il suit :

THÉORÈME. Si un point M *est tellement situé, sur une surface quelconque, par rapport à trois autres points* A, B, C, *hors de cette surface, que la somme des produits de ses distances à ces trois points par des coefficiens* a, b, c *soit un* minimum ; *le plan conduit par la normale à la surface au point* M *et par l'une quelconque des trois droites* MA, MB, MC, *divisera l'angle des deux autres en deux parties dont les sinus seront en raison inverse des coefficiens qui répondent à ces deux dernières droites.*

Démonstration. En effet, tout étant d'ailleurs supposé comme ci-dessus (fig. 4) avec cette seule différence que les forces MA$'$, MB′, MC′, au lieu d'être égales, soient proportionnelles aux coefficiens a, b, c, et que le plan XZ soit le plan tangent en M à la surface dont il s'agit, il faudra encore ici, comme alors, que le plan conduit par la direction MC de l'une quelconque des forces et par la normale MN contienne la résultante MD′ des deux autres et divise conséquemment l'angle AMB de celle-ci en deux autres D′MA et D′MB dont les sinus soient en raison inverse de MA′ et MB′, et conséquemment en raison inverse des coefficiens a et b.

Le même principe de statique donnera toujours les conditions que doit remplir un point M, libre dans l'espace ou situé sur une surface ou une ligne donnée, pour que la somme, soit de ses distances à des points donnés, soit des produits respectifs de ces distances par des multiplicateurs donnés, soit un *minimum*.

On en déduit encore cet autre théorème :

THÉORÈME. Soient A, B, C, D *quatre points donnés hors d'une surface et* M *un point tellement situé sur cette surface que la somme des produits* a.MA+b.MB+c.MC+d.MD *soit un* minimum. *Si l'on mène un plan qui divise les angles* AMB, CMD *en deux parties dont les sinus soient, pour le premier, en raison inverse de* a *et* b, *et pour le second, en raison inverse de* c *et* d, *ce plan contiendra la normale à la surface au point* M ; *de sorte que, si l'on mène un second plan qui divise les angles* AMC, BMD *en deux parties, dont les sinus soient, pour le premier, en raison inverse de* a *et* c, *et pour le second, en raison inverse de* b *et* d, *puis un troisième plan qui divise les angles* AMD, BMC *en deux parties, dont les sinus soient, pour le premier, en raison inverse de* a *et* d, *et pour le second, en raison inverse de* b *et* c, *ces trois plans se couperont suivant cette même normale* (*).

Genève, le 15 d'avril 1823.

(*) Nous rappellerons encore ici que, quelque jour que puisse jeter ce qu'on vient de lire sur la question proposée à la page 380 du XII.e volume du présent recueil, cette question n'en reste pas moins à résoudre. *J. D. G.*

Démonstration

Démonstration de deux théorèmes de géométrie, énoncés à la page 248 du XIII.e volume des Annales ;

Par M. Ch. Sturm.

Théorèmes. Soit une lemniscate , *lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées du centre d'une hyperbole équilatère dont les diamètres principaux sont égaux à* 2a *sur les tangentes à la courbe. Sur l'axe transverse de cette hyperbole comme grand axe soit décrite une ellipse dont le petit axe soit égal à la distance entre ses foyers.*

Désignons par D *l'excès fini de l'asymptote infinie de l'hyperbole , comptée du centre , sur le quart infini de cette courbe , c'est-à-dire , sur la moitié de l'une de ses branches , comptée de son sommet. Soient en outre* q *le quart du périmètre de la lemniscate et* Q *le quart du périmètre de l'ellipse ; on aura*

$$1.^\circ \quad D+q=Q\sqrt{2}\,, \qquad 2.^\circ \quad Dq=\frac{\varpi}{4}a^2\,.$$

Démonstration. En représentant par a et b les deux demi-diamètres principaux d'une hyperbole , son équation est

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1\,; \qquad (1)$$

l'équation de sa tangente en un point (x',y'), pris sur la courbe, est

$$\frac{xx'}{a^2}-\frac{yy'}{b^2}=1\,; \qquad (2)$$

équation dans laquelle x' et y' sont liées par la condition

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2-\left(\frac{y'}{b}\right)^2=1\,. \qquad (3)$$

L'équation de la perpendiculaire menée du centre sur cette tangente est

$$a^2xy'+b^2yx'=0 \ . \qquad (4)$$

Son pied étant donné par le système des équations (2, 4), dans lesquelles x' et y' sont liées par la relation (3); il s'ensuit qu'en éliminant x', y' entre ces trois équations, l'équation résultante en x et y sera celle du lieu des pieds de toutes les perpendiculaires menées du centre de la courbe sur ces tangentes.

Or, on tire des équations (2 et 4)

$$\frac{x'}{a}=+\frac{ax}{x^2+y^2}\ , \qquad \frac{y'}{b}=-\frac{by}{x^2+y^2}\ ,$$

valeurs qui, substituées dans l'équation (3), donnent pour celle du lieu cherché

$$a^2x^2-b^2y^2=(x^2+y^2)^2 \ ;$$

c'est l'équation générale de la lemniscate.

Pour passer à son équation polaire, nous poserons

$$x=l\,\mathrm{Cos}.u\ , \qquad y=l\,\mathrm{Sin}.u\ ,$$

et cette équation polaire sera ainsi

$$l^2=a^2\mathrm{Cos}.^2u-b^2\mathrm{Sin}.^2u \ .$$

Quant à l'hyperbole, en appelant h son rayon vecteur répondant à l'angle u, son équation deviendra

$$h^2(b^2\mathrm{Cos}.^2u-a^2\mathrm{Sin}.^2u)=a^2b^2 \ .$$

Mais, dans le cas particulier qui nous occupe, et où il s'agit d'une hyperbole équilatère, on a $b=a$; en sorte que l'équation polaire de l'hyperbole devient simplement

$$a^2=h^2\mathrm{Cos}.2u\ , \qquad (5)$$

et celle de la lemniscate

$$l^2=a^2\mathrm{Cos}.2u\ ; \qquad (6)$$

d'où résulte, entre les longueurs des rayons vecteurs correspondans des deux courbes l'équation de relation

$$lh=a^2\ .$$

On peut déduire de ces équations une construction simultanée des deux courbes.

Sur le demi-axe transverse CA (fig. 6) soit décrite une circonférence, à laquelle soit menée la tangente AD. Soient menées arbitrairement, par le centre, les deux droites CE, CE′ faisant des angles égaux avec CA, et coupant le cercle en F et F′. Soit pris l'arc FG$=$FA, et soit portée la corde CG de C en K. Soit élevée à CA la perpendiculaire KM rencontrant la circonférence en M et soit menée CM, coupant AD en N. Si alors du point C comme centre commun, et avec CM et CN pour rayon, on décrit deux cercles concentriques, le plus grand coupera nos arbitraires en quatre points H, H′, H″, H‴, qui appartiendront à l'hyperbole, et le plus petit coupera ces mêmes droites en quatre autres points L, L′, L″, L‴, qui appartiendront à la lemniscate.

En effet, 1.° en abaissant la perpendiculaire GP sur le diamètre, on aura

$$\overline{CH}^2=\overline{CN}^2=\overline{CA}^2+\overline{AN}^2=\overline{CA}^2+\left(\frac{CA.KM}{CK}\right)^2=\overline{CA}^2.\frac{\overline{CK}^2+\overline{KM}^2}{\overline{CK}^2}=\overline{CA}^2.\frac{\overline{CM}^2}{\overline{CK}^2}\,,$$

ou bien

$$\overline{CH}^2=\overline{CA}^2.\frac{\overline{CM}^2}{\overline{CG}^2}=\overline{CA}^2.\frac{CK}{CP}=\overline{CA}^2.\frac{CG}{CP}\ ;$$

c'est-à-dire,

$$z^2=a^2\text{Sec}.2u\ , \qquad \text{ou} \qquad a^2=z^2\text{Cos}.2u\ .$$

On aura, 2.°

$$\overline{CL}^2=\overline{CM}^2=\overline{CA}^2.\frac{\overline{CK}^2}{\overline{CM}^2}=\overline{CA}^2.\frac{\overline{CG}^2}{\overline{CM}^2}=\overline{CA}^2.\frac{CP}{CK}=\overline{CA}^2.\frac{CP}{CG}\ ;$$

c'est-à-dire,

$$l^2=a^2\text{Cos}.2u\ .$$

Si l'hyperbole était déjà tracée, la construction de la lemniscate deviendrait beaucoup plus facile; H étant le point où cette hyperbole serait coupée par l'arbitraire CE, l'arc HN, décrit du point C comme centre, déterminerait le point N de AD; la droite CN déterminerait le point M de la circonférence; et enfin l'arc ML, décrit encore du point C comme centre, déterminerait le point L de la lemniscate.

On tire des équations (5, 6)

$$\mathrm{d}u=+\frac{a^2\mathrm{d}h}{h\sqrt{h^4-a^4}}\,,\qquad \mathrm{d}u=-\frac{l\mathrm{d}l}{\sqrt{a^4-l^4}}\,,$$

en observant que, pour la dernière courbe, le rayon vecteur décroît lorsque u augmente. Mais on sait que s étant l'arc d'une courbe dont le rayon vecteur r fait un angle u avec l'axe, on a

$$s=\int\sqrt{\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}u^2}\;;$$

donc, en représentant respectivement par H, L les arcs de nos deux courbes, nous aurons

$$H=\int\frac{h^2\mathrm{d}h}{\sqrt{h^4-a^4}}\,,\qquad L=\int-\frac{a^2\mathrm{d}l}{\sqrt{a^4-l^4}}\,,$$

les arcs étant comptés à partir du sommet de l'hyperbole. Mais, à cause de la relation trouvée ci-dessus, $lh=a^2$, on peut exprimer H en l, et il vient ainsi

$$H=\int-\frac{a^4\mathrm{d}l}{l^2\sqrt{a^4-l^4}}=\frac{\sqrt{a^4-l^4}}{l}+\int\frac{l^2\mathrm{d}l}{\sqrt{a^4-l^4}}\,.$$

Remarquons présentement que l'excès de l'asymptote de l'hyperbole sur le quart de cette courbe n'est autre chose que ce que devient l'excès $h-H$ ou $\frac{a^2}{l}-H$ du rayon vecteur sur l'arc correspondant, compté depuis le sommet, lorsque ce rayon vecteur devient infini, ou, ce qui revient au même, lorsque $l=0$, d'où il suit qu'on doit avoir

$$D=\frac{a^2}{l}-\frac{\sqrt{a^4-l^4}}{l}-\int\frac{l^2\mathrm{d}l}{\sqrt{a^4-l^4}}\,.\qquad\left[\begin{matrix}l=a\\ l=0\end{matrix}\right]$$

Or, en remarquant que $\frac{a^2}{l}-\frac{\sqrt{a^4-l^4}}{l}=\frac{a^2}{l}\left\{1-\sqrt{1-\frac{l^4}{a^4}}\right\}$, on voit que la quantité qui précède le signe $\int$ s'évanouit aux deux limites, de sorte qu'on a simplement

$$D=\int-\frac{l^2\mathrm{d}l}{\sqrt{a^4-l^4}}\,. \qquad \begin{bmatrix}l=a\\ l=0\end{bmatrix},$$

On aura de même, pour le quart de la lemniscate,

$$q=\int-\frac{a^2\mathrm{d}l}{\sqrt{a^4-l^4}}\,; \qquad \begin{bmatrix}l=a\\ l=0\end{bmatrix}$$

en intervertissant donc l'ordre des limites, on trouvera

$$D+q=\int\left\{\frac{l^2}{\sqrt{a^4-l^4}}+\frac{a^2}{\sqrt{a^4-l^4}}\right\}\mathrm{d}l=\int\mathrm{d}l\sqrt{\frac{a^2+l^2}{a^2-l^2}}\,. \qquad \begin{bmatrix}l=0\\ l=a\end{bmatrix}$$

Concevons présentement que, sur l'axe transverse de notre hyperbole, comme petit axe, on décrive une ellipse dont le grand axe soit $a\sqrt{2}$, en représentant par l l'abscisse de la courbe répondant à l'ordonnée y, son équation sera

$$2l^2+y^2=2a^2,$$

d'où on tirera

$$\mathrm{d}y=-\sqrt{2}.\frac{l\mathrm{d}l}{\sqrt{a^2-l^2}},$$

en conséquence, l'arc d'ellipse qui a pour expression $\int\sqrt{\mathrm{d}l^2+\mathrm{d}y^2}$, sera

$$\int\mathrm{d}l\sqrt{\frac{a^2+l^2}{a^2-l^2}}\,;$$

et, pour avoir le quart du périmètre de la courbe, il faudra prendre cette intégrale entre les limites 0 et a; représentant donc cette longueur par Q', on aura

$$Q'=\int\mathrm{d}l\sqrt{\frac{a^2+l^2}{a^2-l^2}}\,; \qquad \begin{bmatrix}l=0\\ l=a\end{bmatrix}$$

et par suite

$$D+q=Q'.$$

Mais, si l'on conçoit une ellipse qui ait l'axe transverse de l'hyperbole pour grand axe, et dont le petit axe soit égal à la distance entre ses foyers, son équation sera

$$t^2+2y^2=a^2 ,$$

elle sera donc semblable à la précédente, et le rapport de leurs lignes homologues sera celui de $\sqrt{2}$ à 1 ; en représentant donc par Q le quart du périmètre de cette nouvelle courbe, on aura

$$Q'=Q\sqrt{2} ,$$

et, par suite,

$$D+q=Q\sqrt{2} ,$$

ce qui démontre déjà la première partie du théorème.

Présentement, dans la théorie des intégrales définies de la forme $\int x^{m-1}\mathrm{d}x(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}$ donnée par Euler (*), on rencontre l'équation suivante

---

(*) Voyez le *Traité dss différences et des séries* de M. Lacroix, dernière édition, page 426. On parviendrait également au but à l'aide des formules de la page 430 du même ouvrage, en y faisant $n=4$.

Le même résultat se présente aussi à la page 413 de ce traité ; mais il nous a paru que la démonstration n'était point exacte.

On sait que

$$\int\frac{x^{2r}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\int\frac{x^{2r+1}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2r+1}\cdot\frac{\varpi}{2} , \quad \begin{bmatrix}x=0\\x=1\end{bmatrix}$$

du moins en supposant r entier et positif. Si donc l'on pose $x=z^n$, n étant supposé positif, auquel cas les limites de z seront les mêmes que celles de x, on aura

$$n^2\int\frac{z^{2rn+n-1}\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^{2n}}}\cdot\int\frac{z^{2rn+n-1}\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^{2n}}}=\frac{1}{2r+1}\cdot\frac{\varpi}{2} \quad \begin{bmatrix}z=0\\z=1\end{bmatrix}$$

d'où, en posant $2rn+n-1=p$, il viendra

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^n}}\cdot\int\frac{x^{n-m-1}dx}{\sqrt{1-x^n}}=\frac{2\varpi\text{Cot.}\frac{m\varpi}{n}}{n(n-2m)}\,,\qquad\begin{bmatrix}x=0\\x=1\end{bmatrix}$$

en faisant donc $m=1$, $n=4$, $x=\frac{l}{a}$, on obtiendra

$$\int\frac{a^2dl}{\sqrt{a^4-l^4}}\cdot\int\frac{l^2dl}{\sqrt{a^4-l^4}}=\frac{\varpi a^2}{4}\,,\qquad\begin{bmatrix}l=0\\l=a\end{bmatrix}$$

donc

$$qD=\frac{\varpi a^2}{4}\,,$$

deuxième partie du théorème (*).

Genève, le 15 avril 1823.

$$\int\frac{z^pdz}{\sqrt{1-z^{2n}}}\cdot\int\frac{z^{p+n}dz}{\sqrt{1-z^{2n}}}=\frac{1}{n(p+1)}\cdot\frac{\varpi}{2}\,;\qquad\begin{bmatrix}z=0\\z=1\end{bmatrix}$$

mais il faut observer que p n'est point ici un nombre tout-à-fait arbitraire, à cause de l'équation $2rn+n-1=p$, dans laquelle r et n sont nécessairement des nombres positifs, et où r est un nombre entier. Si, par exemple, pour obtenir le produit

$$\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}\cdot\int\frac{z^2dz}{\sqrt{1-z^4}}\,,$$

on voulait faire $p=0$ et $n=2$, il s'ensuivrait $4r+1=0$, ou $r=-\frac{1}{4}$, ce qu'on ne peut admettre; il faut donc chercher ce produit par une autre voie.

(*) M. H. W. T. à qui on doit ces deux singuliers théorèmes en a donné une démonstration qui ne diffère guère de celle qu'on vient de lire qu'en ce que, dans ses calculs, il substitue l'angle u au rayon vecteur.

J. D. G.

Solution de deux des problèmes de géométrie, proposés à la page 304 du XIII.^e volume des Annales ;

Par M. C. G. (*).

PROBLÈME I. Deux angles mobiles donnés étant assujettis à tourner sur un plan autour de leurs sommets fixes, de telle sorte qu'un côté de l'un et un côté de l'autre se coupent constamment sur une droite donnée, quelle est la courbe que décrira sur ce plan l'intersection mobile des deux autres côtés de ces angles ?

Solution. Soit prise pour axe des x la droite indéfinie sur laquelle doivent se couper constamment deux côtés de ces angles, en prenant pour axe des y une perpendiculaire quelconque à cette droite. Soient alors $(a\,,\,b)$ et $(a'\,,\,b')$ les deux sommets fixes, m et m' les tangentes tabulaires des angles correspondans, et enfin t la distance variable de l'origine au point de l'axe des x où deux côtés de ces angles doivent se couper.

Représentons les équations des côtés des deux angles ainsi qu'il suit :

(*) M. C. G. nous a aussi adressé une démonstration du théorème énoncé à la page 212 du tome XIII.e, mais, comme elle est en tout semblable à celle qu'a donné M. Querret à la page 321 du même volume, il nous suffira de la mentionner ici.

J. D. G.

$y-b$

$$y-b=M(x-a)\,, \qquad y-b'=M'(x-a')\,;$$

$$y-b=N(x-a)\,, \qquad y-b'=N'(x-a')\,;$$

les équations de la dernière ligne étant celles des côtés qui doivent se couper sur l'axe des x, à une distance t de l'origine. Nous aurons

$$m=\frac{M-N}{1+MN}\,, \qquad m'=\frac{M'-N'}{1+M'N'}\,.$$

mais, en mettant t pour x et 0 pour y dans les équations de la dernière ligne, elles doivent être satisfaites; d'où il suit qu'on doit avoir

$$-b=N(t-a)\,, \qquad -b'=N'(t-a')$$

Substituant donc les valeurs de N et N', tirées de ces deux équations dans les expressions de m et m', celles-ci deviendront

$$m=\frac{Mt+(b-Ma)}{t-(a+Mb)}\,, \qquad m'=\frac{M't+(b'-M'a')}{t-(a'+M'b')}\,;$$

ce qui donne

$$(M-m)t=(a+mb)M-(b-ma)\,;$$

$$(M'-m')t=(a'+m'b')M'-(b'-m'a')\,;$$

équations entre lesquelles éliminant t, il viendra

$$\begin{aligned}&\{(mb-m'b')+(a-a')\}MM'\\ &+\{(b'-mm'b)-m'(a+a')\}M\\ &-\{(b-mm'b')-m(a+a')\}M'\\ &-\{(mb'-m'b)+mm'(a-a')\}=0\,;\end{aligned}$$

mettant enfin dans celle-ci pour M et M' les valeurs données par les équations de la première ligne, et chassant les dénominateurs, nous aurons, pour l'équation de la courbe demandée,

$$\{(mb'-m'b)+mm'(a-a')\}(x-a)(x-a')$$
$$-\{(mb-m'b')+(a-a')\}(y-b)(y-b')$$
$$+\{(b-mm'b')-m(a+a')\}(x-a)(y-b')$$
$$-\{(b'-mm'b)-m'(a+a')\}(x-a')(y-b)=0\ ;$$

cette courbe est donc une ligne du second ordre, et on voit de plus qu'elle passe par les sommets des deux angles.

Il est aisé de voir que cette courbe peut être une quelconque des sections coniques. On trouve, en particulier, qu'elle est un cercle, si l'on a

$$(1+mm')(a-a')+(m-m')(b+b')=0\ .$$

PROBLÈME II. *Quelle est la courbe plane de chacun des points de laquelle menant des droites à deux points fixes de son plan, ces droites intercepteut entre elles des portions égales d'une droite indéfinie donnée sur le même plan?*

Solution. Soient prises pour axe des x la droite indéfinie donnée, et pour axe des y une perpendiculaire quelconque à cette droite. Soient (a, b) et (a', b') les deux points fixes donnés, t et t' les distances variables de l'origine aux deux points où l'axe des x est coupé par les droites qui, partant d'un même point de la courbe, passent par les deux points fixes; et soit enfin k la portion de l'axe des x qui doit être interceptée par ces deux droites.

En prenant pour équations respectives des droites mobiles

$$y-b=M(x-a)\ , \qquad y-b'=M'(x-a')\ ,$$

il faudra d'abord exprimer qu'elles sont satisfaites en y mettant t et t' pour x et zéro pour y, ce qui donnera

$$-b=M(t-a)\ , \qquad -b'=M'(t'-a')\ ,$$

d'où

$$t=\frac{aM-b}{M}\ , \qquad t'=\frac{a'M'-b'}{M'}\ ;$$

mais on doit avoir

$$t-t'=k\ ;$$

donc, en substituant,

$$(a-a'-k)MM'+b'M-bM'=0\ ;$$

substituant enfin dans cette dernière équation, pour M et M' les valeurs données par les équations des deux droites, il viendra, en chassant les dénominateurs, pour l'équation de la courbe cherchée,

$$(a-a'-k)(y-b)(y-b')+b'(y-b)(x-a')-b(y-b')(x-a)=0\ ,$$

équation qui appartient essentiellement à une hyperbole passant par les deux points donnés.

Il est clair que, pour chacun de ces deux points, l'une des droites qui devront intercepter la longueur donnée sur l'axe des x sera la droite passant par l'une et l'autre, tandis que l'autre sera la tangente au point dont il s'agit, laquelle conséquemment doit couper l'axe des x à une distance k du point où il est coupé par la droite qui contient les deux points fixes.

Quelle que soit la longueur k, on peut toujours par les points fixes conduire deux droites parallèles entre elles qui interceptent cette même longueur sur l'axe des x ; ces parallèles indiqueront évidemment la direction de l'une des asymptotes qui sera la parallèle à ces droites également distante de l'une et de l'autre ; quant à l'autre asymptote, ce sera toujours l'axe des x. On voit par là que si la distance $a-a'$ entre les projections des points fixes sur l'axe des x était égale à k, l'hyperbole serait équilatère.

Si les deux points fixes étaient sur une parallèle à la droite donnée ; c'est-à-dire, si l'on avait $b=b'$, l'hyperbole se changerait en deux parallèles à l'axe des x ; ce qu'il est d'ailleurs facile de vérifier par des considérations géométriques.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de statique.

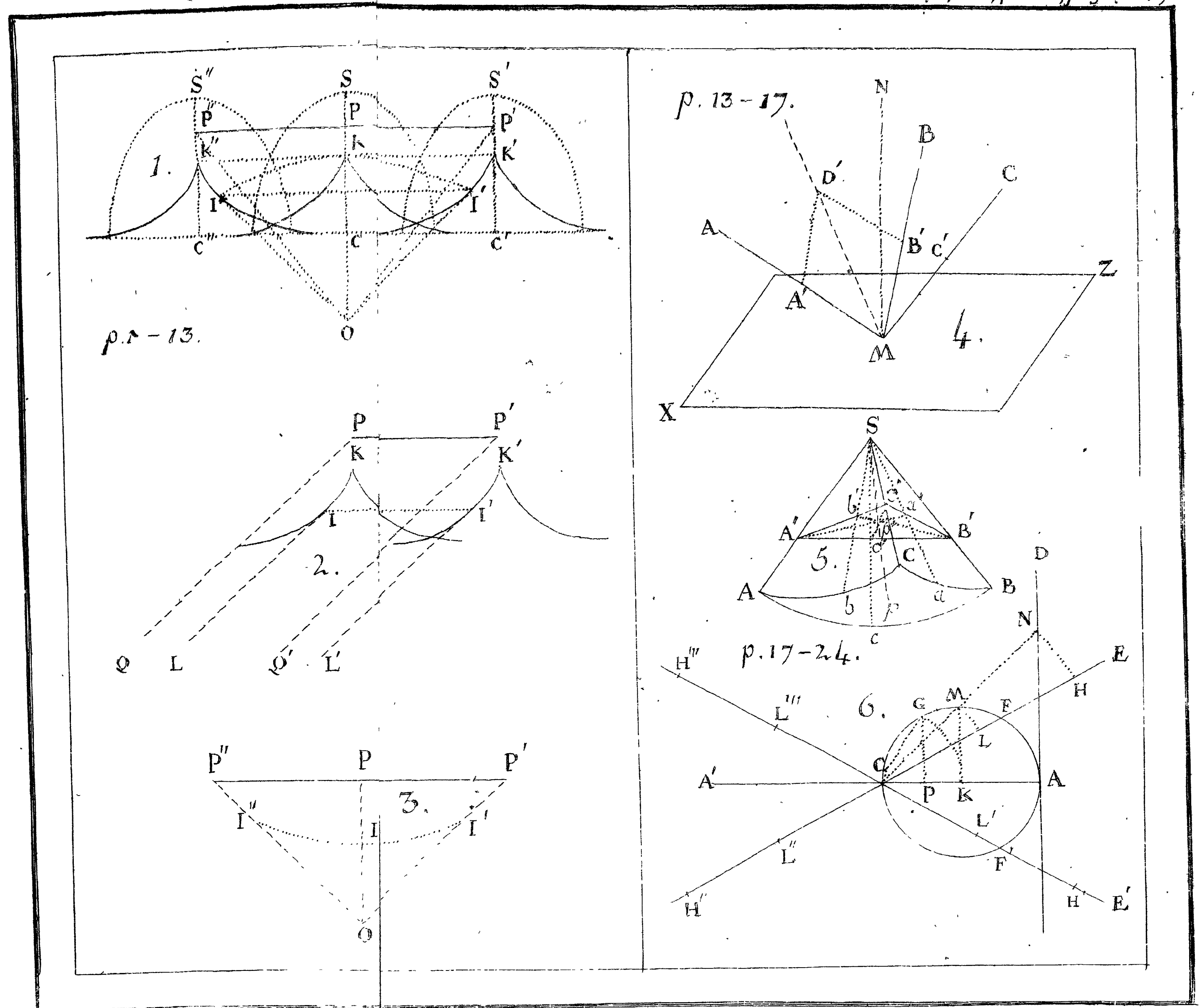
Un fil non pesant, parfaitement flexible et inextensible, d'une longueur déterminée, est attaché par ses extrémités à deux points fixes dont la distance donnée est moindre que sa longueur. Tous ses points sont attirés ou repoussés par un centre fixe, suivant une fonction déterminée de la distance. On demande l'équation la plus simple de la courbure du fil en équilibre. On demande, en particulier, ce que devient cette équation, lorsque l'attraction ou la répulsion suit la raison inverse du quarré de la distance.

Théorème de Géométrie.

Si de l'un quelconque des points d'une circonférence concentrique à celle du cercle circonscrit à un triangle, on abaisse des perpendiculaires sur les directions de ses trois côtés, l'aire du triangle dont les sommets seront les pieds de ces perpendiculaires sera constante. Si, en particulier, ce cercle se confond avec le premier, cette aire deviendra nulle ; c'est-à-dire qu'alors les pieds des trois perpendiculaires seront en ligne droite (*).

En outre, si deux cercles concentriques au cercle circonscrit sont tels que la somme des quarrés de leurs rayons soit double du quarré du sien, les triangles qui auront pour sommets les pieds des perpendiculaires abaissées des points des circonférences des dernier cercles sur les directions des côtés du triangle inscrit au premier seront équivalens.

(*) Ce cas particulier a déjà été démontré dans le présent recueil (tom. IV, p. 251)



J. D. G. fecit.

GÉOMÉTRIE.

Démonstration élémentaire des principales propriétés des hexagones inscrits et circonscrits au cercle, suivie de la solution de divers problèmes de géométrie ;

Par M. J. B. Durrande, professeur de physique au collége royal de Cahors.

Dissertation préliminaire.

Dans un mémoire, publié au commencement du XI.e volume des *Annales de mathématiques*, j'ai avancé que la géométrie pure, improprement appelée géométrie synthétique, telle qu'elle a été cultivée par les anciens, pouvait s'élever à toute la généralité et à toute la simplicité des autres méthodes connues. Pour appuyer cette assertion par des faits, j'ai démontré, en l'endroit cité, les principales propriétés du contact des cercles, et j'ai traité le problème du cercle tangent à trois autres d'une manière très-générale et en même temps très-élémentaire. Je me propose aujourd'hui de corroborer encore mon opinion sur ce point, en prouvant, par de nouveaux exemples, tout ce qu'on peut retirer de cette géométrie qui, bien que restreinte dans ses moyens, n'en est pas, pour cela, moins féconde en résultats importans, et qui jouit en outre du grand avantage d'être à la portée des commençans comme de toutes les autres classes de géomètres ; avantage que n'ont pas au même degré les diverses méthodes dont les modernes ont enrichi la science de l'étendue. Je le répète encore, comme je le disais alors, je ne prétends pas ici mettre la géométrie élémentaire au-dessus de ces méthodes, dont je ne conteste ni l'utilité ni le mérite ; je veux seulement prouver qu'elle peut parvenir comme elles, et avec la même élégance, aux mêmes résultats ; et qu'elle ne mérite pas le reproche de stérilité qu'on lui a adressé tant de fois, et qu'on lui adresse encore tous les jours, avec bien peu de fondement, à ce qu'il me semble.

On me permettra sans doute de revenir de nouveau sur ce sujet, puisque les reproches dont il s'agit viennent eux-mêmes d'être renouvelés, avec une sorte d'autorité, dans un ouvrage très-remarquable, qui a paru il y a peu de temps, et qui place son auteur, M. Poncelet, au nombre des géomètres distingués qui honorent à la fois leur patrie et l'école célèbre qui les a formés. M. Poncelet avait déjà émis cette opinion dans un article des *Annales de mathématiques* (tom. VIII, pag. 141); et M. Gergonne, dans un autre article, où il combattait quelques assertions de ce géomètre (pag. 156), avait aussi partagé ses idées sur la géométrie d'Euclide; et ces deux habiles géomètres, différant d'ailleurs sur tous les autres points, s'étaient accordés à regarder cette géométrie comme dépourvue de généralité et d'uniformité dans ses procédés, et comme étant, dans quelques cas, d'une rebutante complication.

Sans examiner ici s'il ne serait pas possible de rétorquer ces divers reproches, et de faire voir qu'ils seraient, dans certaines circonstances, tout aussi bien applicables aux diverses théories géométriques auxquelles on veut attribuer exclusivement les avantages que l'on refuse à celles des anciens, je me contenterai de faire voir de nouveau, par quelques exemples, combien ces reproches sont peu fondés. Je ferai remarquer, en outre, qu'on a peut-être tort de reprocher à la géométrie élémentaire l'obligation étroite où elle se trouve de ne jamais perdre de vue les différentes lignes de construction des figures que l'on est obligé de considérer, et de passer successivement en revue tous les cas particuliers qui peuvent se présenter, puisqu'on retire souvent de cet examen attentif la connaissance des modifications importantes des propriétés auxquelles on avait précipitamment accordé une généralité trop absolue. Je dis plus, c'est que le principe de la continuité introduit par M. Poncelet, bien loin de dispenser de cet examen, le réclame au contraire impérieusement.

Il est vrai que, pour rendre la géométrie proprement dite tout-à-fait irréprochable, il faudrait la traiter d'une manière un peu plus large qu'on ne l'a fait jusqu'ici ; et elle ne devrait pas être bornée, comme elle l'est encore, dans sa partie élémentaire, à quelques propositions isolées les unes des autres, et déduites de la comparaison des triangles ou de quelques autres figures, propositions qui semblent n'y être admises que comme moyen de parvenir à la mesure des aires et des volumes. Je n'adopte nullement la distinction que MM. Gergonne et Poncelet ont voulu établir entre ce qu'ils appellent la géométrie d'Euclide, de Viète, de Fermat, etc., et la géométrie de Monge : l'une et l'autre ne sont que des procédés divers de la géométrie pure, et elles lui appartiennent également ; aussi, bien loin de la dépouiller et de la morceler, comme on l'a fait jusqu'ici, bien loin de vouloir faire de chacune de ses parties une science à part, sous le nom de méthode des projections, méthode des transversales, méthode de Monge, etc., ne serait-il pas plus profitable de réunir ces diverses méthodes en un seul corps de doctrine qui présentât enfin un traité complet de la science de l'étendue ? Sans entrer ici dans le détail de tout ce que devrait renfermer un pareil ouvrage, je dirai seulement qu'il serait à souhaiter qu'on y insistât beaucoup plus qu'on ne le fait communément dans les élémens sur les belles propriétés des triangles, quadrilatères et autres polygones ; notamment sur celles de ces propriétés qui établissent des relations entre les lignes les plus remarquables de ces figures ; comme aussi sur celles de ces lignes qui se coupent en un même point et sur ceux de ces points qui appartiennent à une même droite.

On devrait également y faire figurer les diverses propriétés des cercles, celles de leurs tangentes communes, de leurs contacts, des pôles et pôlaires, des centres et axes de similitude, des axes et centres radicaux, des polygones inscrits et circonscrits, et, en particulier, de ceux de ces polygones qui n'ont pas plus de six côtés.

Les problèmes les plus remarquables de la géométrie plane devraient aussi s'y trouver résolus. La détermination des triangles, des quadrilatères et des autres polygones, au moyen de certaines conditions, le problème du cercle tangent à trois autres, celui du triangle ou du polygone inscrit ou circonscrit dont les côtés passent par des points donnés ou dont les sommets sont sur des droites données, et tous les autres problèmes qui servent de cortège à ceux-là. J'en dirai autant des problèmes de *maximums* et de *minimums*, ainsi que de tant d'autres qui se trouvent épars dans les divers ouvrages publiés sur la géométrie, et en particulier dans les *Annales*, et qui devraient tous désormais faire partie des traités élémentaires de géométrie tels que je les conçois.

Mais, pour pouvoir remplir ce but, il faudrait étendre convenablement les moyens de la géométrie ordinaire, en employant tour à tour, suivant l'occasion, les divers procédés qui lui sont propres, tant ceux qui nous ont été transmis par les anciens que ceux que nous avons vu, pour ainsi dire, éclore sous nos yeux. Ainsi, bien loin de vouloir bannir de son domaine, comme le voudrait M. Gergonne, l'usage des proportions, instrument précieux par sa simplicité, et qu'il faudrait remplacer par tout autre équivalent, dans les questions où l'on se propose d'établir des relations métriques entre les diverses parties des figures, il faudrait, au contraire, y introduire la théorie des projections, celle des transversales et surtout celle des lignes appelées trigonométriques, envisagées uniquement comme établissant des rapports entre les lignes et les angles, et indépendamment de leur application à la résolution des triangles.

Il n'a été nullement question, dans ce qui précède, de la géométrie à trois dimensions, et c'est pourtant celle qui réclame le plus de développemens; car ce que l'on en a donné jusqu'ici, dans les traités élémentaires, se borne presque uniquement à la mesure des volumes. Ainsi, la méthode des projections dans l'espace devrait être soigneusement développée dans les élémens, et, avec son secours, on résoudrait facilement les principaux problèmes de la géométrie à trois dimensions, en partant des propriétés des figures planes, et en s'élevant à celles des corps qui leur correspondent, par une méthode fort simple et fort souvent pratiquée par les anciens géomètres; comme aussi des propriétés de l'étendue à trois dimensions on pourrait redescendre à celles des figures planes, par cette méthode de l'école de Monge, préconisée avec tant de raison par MM. Gergonne et Poncelet, dans les articles déjà cités; et quelle riche moisson de théorèmes et de problèmes ne déduirait-on pas de la combinaison et de l'emploi simultané de ces divers moyens d'investigation?

Voilà pour ce qui concerne la partie proprement élémentaire de la géométrie : vient ensuite la théorie des courbes planes et des surfaces courbes, et en particulier celle des lignes et surfaces du second ordre qui, en même temps qu'elle s'offre la première dans l'ordre de simplicité, est susceptible de tant d'utiles applications et si féconde en beaux résultats. La théorie purement géométrique des lignes du second ordre n'est plus à désirer; elle existe depuis longtemps, quoiqu'on l'ait singulièrement négligée depuis que la géométrie analitique a été introduite dans l'enseignement élémentaire. Les traités de sections coniques des anciens, et quelques ouvrages du même genre dus aux modernes, contiennent à peu de choses près tout ce qu'on peut dire d'utile sur ce sujet. Il ne s'agit donc plus que de réunir et de coordonner entre eux les matériaux dont on est actuellement en possession, et les ouvrages de MM. Poncelet et Brianchon, en particulier, ne pourront qu'aider puissamment à l'exécution d'une telle entreprise. Quant aux surfaces du second ordre, on n'en possède pas encore une théorie purement géométrique; et, à l'exception de quelques propositions dues à MM. Chasle, Hachette, Brianchon et Poncelet, ç'a toujours été l'analise qui a présidé exclusivement à la recherche de leurs propriétés. Dans la vue de remplir cette lacune, je me propose de développer, dans une suite d'articles des *Annales*, l'essai d'une théorie complète et purement élémentaire des surfaces du second ordre, à laquelle je suis parvenu déjà depuis long-temps, et qui ne suppose que la connaissance des propriétés des lignes du même ordre, et les principes contenus dans les élémens ordinaires de géométrie.

On pourrait enfin compléter ces élémens de géométrie pure par l'exposition des propriétés des courbes dites transcendantes, et de quelques autres qui ont été étudiées par les anciens, et par la théorie générale des contacts, des développées, des osculatrices, des rayons de courbure, etc. On y ajouterait la théorie générale des surfaces, d'après les beaux travaux de Monge, Meusnier, Lancret, Dupin, Hachette, etc.

Si l'on considère présentement de combien de volumes un ouvrage tel que celui dont je viens d'esquisser le plan pourrait tenir lieu, on ne pourra que désirer, dans l'intérêt de ceux qui se livrent à l'étude des mathématiques, que quelque habile géomètre veuille bien s'en occuper. Il est impossible, en effet, qu'au milieu de tant d'acquisitions dont la géométrie s'est enrichie de nos jours, les élémens d'Euclide, cet antique monument de la méthode des anciens, et leurs sections coniques puissent suffire aux besoins actuels de la science; et il est nécessaire d'agrandir enfin le champ des traités destinés à l'enseignement élémentaire de la géométrie. Cette nécessité, qui se fait déjà sentir depuis long-temps, aurait dû produire quelques améliorations dans les traités que l'on met entre les mains de la jeunesse studieuse de nos écoles; et cependant, tant est puissant l'empire d'une longue habitude, de tous les auteurs, en très-grand nombre, qui, dans ces derniers temps, ont écrit des élémens de géométrie, il n'en est pas un seul qui ait osé sortir du cadre étroit tracé par le géomètre grec. Aussi, pour s'instruire des découvertes modernes, faut-il recourir à un grand nombre d'ouvrages, trèsvolumineux, et conséquemment très-chers pour la plupart ; et ce n'est pas là, pour le dire en passant, un des moindres inconvéniens attachés à l'étude des mathématiques.

On prétend que Lagrange, considérant les immenses progrès des sciences mathématiques, pensait « qu'on ne pouvait guère, à l'avenir, » attendre de grands et véritables succès dans cette branche de nos » connaissances que de la part de ceux à qui le défaut de fortune » et de l'existence qu'elle procure dans le monde servirait comme » d'un aiguillon constant qui leur ferait surmonter tous les obstacles. » Il ne pensait pas que, sans un motif aussi pressant, on pût » apporter aux travaux préalables, devenus si longs et si pénibles, » toute la suite et toute la ténacité qu'ils exigent, quand on veut » aller beaucoup plus loin. »

Si tel est, en effet, comme on n'en saurait d'ailleurs douter, l'avenir réservé aux sciences mathématiques ; et si, d'après l'opinion du grand et profond géomètre que je viens de citer, elles ne peuvent désormais attendre de nouveaux progrès que de ceux-là seuls que la fortune n'a pas favorisés de ces dons, ne doit-on pas craindre de les voir bientôt tout-à-fait stationnaires ? car, comment concilier le défaut de fortune avec la dépense que nécessite l'acquisition des nombreux et volumineux ouvrages que ceux qui cultivent ces sciences sont contraints d'avoir sans cesse sous la main ? et, pour ne pas sortir du sujet qui nous occupe, combien de mémoires, de recueils et d'ouvrages particuliers ne doit-il pas consulter, pour se mettre bien au courant de tout ce qui a été découvert dans la seule géométrie pure ? et encore l'intelligence de ces ouvrages exigera-t-elle souvent des connaissances préliminaires qu'il faudra puiser dans d'autres. Nouvelle source d'embarras, nouveaux obstacles qui ont peut-être arrêté plus d'une fois et détourné pour jamais de l'étude de la géométrie des jeunes-gens nés d'ailleurs avec les dispositions les plus propres à en reculer les limites.

Frappé des nombreux inconvéniens qui résultent de l'excessive disproportion qui existe actuellement entre les connaissances acquises et celles qui font la matière des élémens, je me suis proposé d'appeler sur ce point l'attention de ceux qui écrivent pour les commençans, et généralement de tous ceux qui s'intéressent à la propagation de la science; et je me suis également proposé de faire rentrer, autant qu'il serait en moi, dans le domaine de l'enseignement le plus élémentaire, les connaissances réservées ordinairement pour l'enseignement supérieur, ou même qu'il faut acquérir sans le secours d'aucun guide, après la sortie des écoles, du moins lorsque ces connaissances peuvent servir de base à d'importantes théories.

C'est dans cette vue que j'ai publié, il y a quelque temps, un mémoire sur les contacts (*Annales*, tom. XI, pag. 1); et c'est dans la même vue que je publie le présent mémoire. J'espère pouvoir encore montrer dans la suite, par beaucoup d'autres exemples, toute la fécondité et toutes les ressources de la géométrie pure, et rendre ainsi tout-à-fait élémentaires des théories qui jusqu'ici ont passé pour assez élevées, ou qui même n'ont été traitées que par l'analise. Telle est, en particulier, la théorie des surfaces du second ordre que j'ai mentionnée plus haut et que je me propose d'amener au plus haut degré de simplicité; heureux si je puis parvenir à mettre ainsi à la portée de toutes les classes de géomètres d'importantes théories qui jusqu'ici n'ont été accessibles qu'au plus petit nombre d'entre eux; plus heureux encore si ce que j'ai dit ci-dessus peut enfin déterminer quelque habile géomètre à exécuter le traité de géométrie dont j'ai essayé de tracer le plan; ouvrage qui épargnerait une foule de recherches et de dépenses inutiles à ceux qui se trouvent, par les circonstances dans lesquelles ils sont placés, ainsi que je l'ai toujours été moi-même, réduits à étudier uniquement dans les livres, et privés du puissant secours des leçons et des conseils d'un professeur. Le nombre des géomètres dans cette position a toujours été assez grand; l'histoire de la science nous en offre des exemples très-remarquables, et l'opinion de Lagrange, qui est ici d'un si grand poids, nous explique suffisamment pourquoi ce nombre devient de jour en jour plus considérable.

Le

Le sujet que je me propose de traiter ici, par la géométrie élémentaire et par les principes exposés dans mon *Essai sur les contacts* déjà cité, a été l'objet des recherches de plusieurs célèbres géomètres. On sait en effet que Pascal avait découvert, sous le nom d'*hexagramme mystique*, la belle propriété de l'hexagone inscrit à une ligne du second ordre, et avait même fait de cette propriété la base d'un traité de sections coniques qui ne nous est point parvenu. M. Brianchon, après avoir découvert la propriété correspondante de l'hexagone circonscrit, a démontré l'une et l'autre propriétés dans les *Journaux de l'école polytechnique*, et en a déduit des conséquences nombreuses et importantes. Il a depuis considérablement étendu cette matière dans des traités particuliers. D'autres géomètres ont démontré postérieurement ces mêmes propriétés de diverses manières. Je citerai, comme les plus remarquables par leur simplicité et leur élégance, la démonstration de M. Carnot, déduite de la théorie des transversales, et celle de M. Gergonne (*Annales*, tom. IV, pag. 78), tirée de la considération des projections centrales. Je me propose d'en donner une démonstration nouvelle qui me paraît ne le céder en rien à celles que je viens de citer, et qui conduit aux diverses conséquences découvertes par MM. Carnot et Brianchon. J'en déduirai aussi la solution d'un problème qui a occupé les géomètres, depuis Pappus d'Alexandrie jusqu'à nous, et qui, aujourd'hui même, passe encore pour difficile. Je veux parler de l'inscription à un cercle d'un triangle dont les côtés passent par des points donnés, et de la circonscription au même cercle d'un triangle dont les sommets soient sur des droites données. L'histoire de ce problème est trop généralement connue pour qu'il soit nécessaire de mentionner ici les géomètres qui en ont fait le sujet de leurs recherches. Je ne parlerai que de la construction ingénieuse que M. Gergonne a déduite de la géométrie analitique (*Annales*, tom. VII, pag. 325), et que l'on verra, dans ce qui va suivre, déduite, d'une manière toute simple, de la géométrie la plus élémentaire.

Enfin j'ajouterai de nouveaux développemens aux propriétés de l'hexagramme mystique de Pascal ; et je parviendrai ainsi à quelques propositions déjà connues, pour la plupart, et dues à M. Brianchon. J'en déduirai ensuite la solution de trois problèmes proposés dans les *Annales de mathématiques*. Le premier de ces problèmes, présenté sous la forme de deux porismes (tom. I, pag. 64) conduit à ce beau théorème de géométrie élémentaire, énoncé dans le même volume (pag. 149), savoir que *la distance entre les centres des cercles inscrit et circonscrit à un même triangle rectiligne est moyenne proportionnelle entre le rayon du circonscrit et l'excès de ce rayon sur le diamètre de l'inscrit.* Ce théorème, qui paraît dû à M. Maisonneuve, ingénieur des mines, a été l'objet des recherches de MM. Kramp, Lhuilier et Garnier. M. Gergonne m'en a communiqué dans le temps une démonstration analitique très-élégante ; et je regrette beaucoup qu'il ne l'ait pas publiée dans son recueil. Il y avait lieu de croire que des théorèmes analogues devaient avoir lieu, tant pour la distance entre les centres des sphères inscrite et circonscrite à un même tétraèdre que pour l'arc de grand cercle qui joint les pôles de deux petits cercles, inscrit et circonscrit à un même triangle sphérique. C'est pourquoi M. Gergonne, ayant proposé dans les *Annales* (tom. VI, pag. 30), de trouver cette distance et cet arc, proposa aussi, à la suite des solutions qui furent données dans le même volume (pag. 221 et 225), de découvrir si ces distance et arc ne pourraient pas être exprimés par de simples fonctions des rayons et distances polaires. Aucun des collaborateurs des *Annales* n'avait encore répondu à cet appel lorsque j'ai été assez heureux pour déduire des divers théorèmes que je me propose de démontrer ici la solution de ces deux questions, comme je le ferai voir dans ce qui va suivre.

Pour abréger, nous convenons de désigner simplement, par la lettre O placée à son centre, le cercle auquel seront inscrites et circonscrites les diverses droites que nous aurons à considérer. Nous désignerons également par la seule lettre de leur centre les cercles dont les rayons seront des tangentes au cercle O.

Il est presque superflu de prévenir qu'en vertu de ce que M. Poncelet a appelé *propriétés projectives des figures*, tout ce qui va être démontré du cercle le sera, par là même, d'une section conique quelconque.

§. I.

Propriétés des hexagones inscrits et circonscrits au cercle.

THÉORÈME I. Dans tout hexagone inscrit au cercle, les points de concours des directioas des côtés opposés appartiennent tous trois à une même ligne droite.

Démonstration. Soit ABCDEFA (fig. 2) un hexagone quelconque inscrit au cercle O. Soient LM, MG, GH, HI, IK, KL, respectivement, les côtés de l'hexagone circonscrit au même cercle dont les points de contact sont aux sommets A, B, C, D, E, F de l'inscrit. Soient respectivement P, Q, R les points de concours des directions des côtés opposés AB et DE, BC et EF, CD et FA de l'hexagone inscrit; il s'agit de démontrer que ces trois points appartiennent à une même ligne droite.

Soient pour cela T, U, V, respectivement les points de concours des directions des côtés opposés GH et KL, HI et LM, IK et MG, de l'exagone circonscrit.

Le cercle M touche extérieurement en B le cercle V, et intérieurement en A le cercle U; d'où il suit que AB passe par le centre de similitude interne des cercles U et V. Pareillement, le cercle I touche extérieurement en D le cercle U, et intérieurement en E le cercle V; d'où il suit que DE passe aussi par le centre de similitude interne des deux cercles U et V, lequel conséquemment ne saurait être que le point P de concours des directions de AB et DE.

Par un raisonnement tout-à-fait semblable, appliqué tour à tour aux deux cercles K et G, on prouvera que BC et EF passent toutes deux par le centre de similitude interne des deux cercles T et V, lequel conséquemment ne saurait être autre que le point Q de concours des directions de BC et EF.

Enfin, le cercle H touche intérieurement les cercles T et U en C et D, et le cercle L touche extérieurement les deux mêmes cercles en F et A, d'où il suit que les droites CD et FA contiennent l'une et l'autre le centre de similitude externe des deux cercles T et U, lequel conséquemment ne saurait être autre que le point R de concours des directions de ces deux droites.

Ainsi, les trois points P, Q, R sont, savoir ; les deux premiers les centres de similitude internes, et le dernier le centre de similitude externe du système des trois cercles T, U, V ; donc ces trois points appartiennent à l'un des trois axes de similitude internes de ces trois cercles, et conséquemment à une même ligne droite.

Un raisonnement analogue s'appliquera à tous les cas et à toutes les sortes d'hexagones qui pourront être inscrits à un cercle même à ceux dont des côtés se couperaient entre leurs extrémités, ainsi qu'il arrive pour les polygones étoilés. Il pourra seulement arriver, dans certains cas, que les points de concours soient tous trois des centres de similitude externes, auquel cas ils appartiendront à l'axe de similitude externe des trois cercles.

Si l'on forme tous les hexagones inscrits qu'il est possible de construire avec les mêmes sommets donnés ; chacun d'eux jouissant de la propriété qui vient d'être démontrée, on en verra éclore soixante systèmes de trois points appartenant à une même ligne droite.

THÉORÈME II. Dans tout hexagone circonscrit au cercle, les diagonales qui joignent les sommets opposés concourent toutes trois en un même point.

Démonstration. Au moyen de la théorie des pôles et polaires, ce théorème devient une conséquence fort simple du précédent.

Soit en effet GHIKLMG un hexagone circonscrit au cercle O et duquel il faut démontrer que les diagonales GK, HL, IM qui joignent les sommets opposés concourent en un même point.

Soient respectivement C, D, E, F, A, B les points de contact des côtés GH, HI, IK, KL, LM, MG; et soient P, Q, R, respectivement, les points de concours des directions de AD et DE, BC et EF, CD et FA.

Parce que M et I sont les pôles respectifs de AB et DE, MI doit être la polaire du point P; pour de semblables raisons, GK et HL doivent être les polaires respectives des points Q et R; puis donc que, par le précédent théorème, ces trois points appartiennent à une même ligne droite, il s'ensuit que leurs trois polaires MI, GK, HL, doivent concourir en un même point, pôle de cette droite.

Ce théorème a évidemment la même généralité que le précédent, et s'applique indistinctement à toutes les sortes d'hexagones circonscrits au cercle, même à ceux qui n'enfermeraient point la circonférence entre leurs côtés.

Si l'on forme tous les hexagones circonscrits qu'il est possible de construire par les intersections des six mêmes tangentes données, considérées comme droites indéfinies; chacun d'eux jouissant de la propriété qui vient d'être démontrée, on en verra éclore soixante systèmes de trois droites, concourant en un même point.

On se convaincra facilement que, dans tous les cas, si l'hexagone inscrit a ses sommets aux points de contact du circonscrit, le point de concours des diagonales joignant les sommets opposés de ce dernier sera constamment le pôle de la droite contenant les points de concours des directions des côtés opposés du premier.

Remarquons encore que de même que nous avons déduit le second théorème du premier, à l'aide de la théorie des pôles et polaires, on parviendrait également, à l'aide de la même théorie, à déduire le premier du second, si ce dernier était démontré directement.

§. II.

Propriétés des pentagones inscrits et circonscrits au cercle.

Tout pentagone inscrit au cercle peut être considéré comme un hexagone inscrit dans lequel un des côtés, d'une longueur nulle, est dirigé suivant la tangente à l'un quelconque des sommets du pentagone.

Pareillement, tout pentagone circonscrit au cercle peut être considéré comme un hexagone circonscrit dans lequel un des angles, égal à deux angles droits, a son sommet au point de contact de l'un des côtés du pentagone.

En modifiant donc les énoncés des *Théorèmes I et II*, conformément à cette circonstance particulière, on obtiendra les deux théorèmes suivans, dont un, au surplus, pourrait être directement démontré par un raisonnement analogue à celui que nous avons appliqué au *Théorème I*, et dont chacun peut être facilement déduit de l'autre à l'aide de la théorie des pôles et polaires.

THÉORÈME III. Dans tout pentagone inscrit au cercle, les points de concours des directions de deux paires de côtés non consécutifs quelconques, et le point de concours de la direction du cinquième côté avec la tangente au sommet opposé, appartiennent tous trois à une même droite.

THÉORÈME IV. Dans tout pentagone circonscrit au cercle, les diagonales qui joignent deux paires de sommets non consécutifs quelconques, et la droite qui joint le cinquième sommet au point de contact du côté opposé, concourent tous trois en un même point.

On conçoit que ces deux théorèmes ont la même généralité que les *Théorèmes I et II*, et sont comme eux applicables à toutes les sortes de pentagones qu'on peut inscrire ou circonscrire à un cercle, même aux pentagones inscrits dont les côtés se coupent entre leurs extrémités et aux pentagones circonscrits qui n'embrassent pas la circonférence.

Si l'on forme tous les pentagones inscrits et circonscrits qu'il est possible de construire soit avec les cinq mêmes sommets, soit avec les cinq mêmes tangentes donnés, chacun d'eux jouissant de la propriété énoncée par le *Théorème III* ou par le *Théorème IV*, on en verra éclore douze systèmes de trois points appartenant à une même ligne droite ou douze systèmes de trois droites concourant en un même point.

Il est en outre facile de se convaincre que si le pentagone inscrit a ses sommets aux points de contact du circonscrit, chacun des points de concours de trois droites sera le pôle de chacune des droites qui contiendront les trois mêmes points.

§. III.

Propriétés des quadrilatères inscrits et circonscrits au cercle.

Tout quadrilatère inscrit au cercle peut être considéré comme un hexagone inscrit dans lequel deux côtés opposés quelconques, d'une longueur nulle, sont dirigés suivant les tangentes à deux sommets opposés du quadrilatère.

Pareillement, tout quadrilatère circonscrit au cercle peut être considéré comme un hexagone circonscrit dans lequel deux angles opposés quelconques, égaux à deux angles droits, ont leurs sommets aux points de contact de deux côtés opposés du quadrilatère.

En modifiant donc les énoncés des *Théorèmes I et II*, conformément à cette circonstance particulière, on obtiendra les deux théorèmes suivans, dont un, au surplus, pourrait être directement démontré par un raisonnement analogue à celui que nous avons appliqué au *Théorème I*, et dont chacun peut être facilement déduit de l'autre, à l'aide de la théorie des pôles et polaires.

THÉORÈME V. Dans tout quadrilatère inscrit au cercle, les points de concours des directions des côtés opposés et les points de concours des tangentes aux sommets opposés appartiennent tous quatre à une même ligne droite.

THÉORÈME VI. Dans tout quadrilatère circonscrit au cercle, les droites qui joignent les sommets opposés et les droites qui joignent les points de contact des côtés opposés concourent toutes quatre en un même point.

Il est aisé de voir que ces théorèmes s'étendent à toutes les sortes de quadrilatères qui peuvent être inscrits et circonscrits au cercle; même aux quadrilatères inscrits dont deux côtés opposés se couperaient entre leurs extrémités et aux quadrilatères circonscrits qui n'envelopperaient pas la circonférence.

Si l'on forme tous les quadrilatères inscrits et circonscrits qu'il est possible de construire soit avec les quatre mêmes sommets, soit avec les quatre mêmes tangentes donnés; chacun d'eux jouissant de la propriété énoncée par le *Théorème V* ou par le *Théorème VI*, on en verra éclore trois systèmes de quatre points appartenant à une même ligne droite ou de quatre droites concourant en un même point.

Il est en outre facile de se convaincre que, si le quadrilatère inscrit a ses sommets aux points de contact du circonscrit, les points de concours des systèmes de quatre droites seront respectivement les pôles des droites contenant les systèmes de quatre points.

§. IV.

Propriétés des triangles inscrits et circonscrits au cercle.

Tout triangle inscrit au cercle peut être considéré comme un hexagone inscrit dont les côtés, de deux en deux, d'une longueur nulle, sont dirigés suivant les tangentes aux trois sommets du triangle.

Pareillement,

Pareillement, tout triangle circonscrit au cercle peut être considéré comme un hexagone circonscrit dont les angles, de deux en deux, égaux à deux angles droits, ont leurs sommets aux points de contact des côtés du triangle.

En modifiant donc les énoncés des *Théorèmes I et II*, conformément à cette circonstance particulière, on obtiendra les deux théorèmes suivans, dont un, au surplus, pourrait être directement démontré, par un raisonnement analogue à celui que nous avons appliqué au *Théorème I*, et dont chacun peut être facilement déduit de l'autre, à l'aide de la théorie des pôles et polaires.

THÉORÈME VII. Dans tout triangle inscrit au cercle, les points de concours des directions des côtés avec les tangentes aux sommets opposés appartiennent tous trois à une même ligne droite.

THÉORÈME VIII. Dans tout triangle circonscrit au cercle, les droites qui joignent les sommets aux points de contact des côtés opposés concourent toutes trois en un même point.

Ces deux théorèmes peuvent, au surplus, être renfermés dans l'énoncé unique que voici :

THÉORÈME IX. Si deux triangles sont l'un inscrit et l'autre circonscrit à un même cercle; de telle sorte que les sommets de l'inscrit soient les points de contact du circonscrit, 1.° *les points de concours des directions des côtés opposés des deux triangles appartiendront à une même ligne droite;* 2.° *les droites qui joindront leurs sommets opposés concourront toutes trois en un même point;* 3.° *enfin ce point sera le pôle de la droite dont il vient d'être question.*

On doit remarquer que, lorsque le triangle inscrit est obtus angle, le triangle circonscrit n'enveloppe pas le cercle.

§. V.

Inscription ou circonscription au cercle d'un triangle dont les côtés passent par des points donnés, ou dont les sommets soient sur des droites données.

PROBLÈME I. A un cercle donné, inscrire un triangle dont les côtés passent par trois points donnés?

Solution On voit d'abord évidemment que le problème doit avoir en général deux solutions, du moins lorsqu'il est possible ; car, en inscrivant arbitrairement deux triangles à un même cercle, leurs côtés de mêmes rangs se couperont en trois points que l'on pourra ensuite, en renversant le problème, considérer comme les trois points donnés.

Soient donc A, B, C (fig. 2) ces trois points donnés, et soient TUV, T′U′V′ les deux triangles résolvant le problème ; UV et U′V′ se coupant en A, VT et V′T′ en B, et TU et T′U′ en C. Soient construits les triangles circonscrits XYZ, X′Y′Z′ dont les points de contact soient les sommets des deux inscrits, YZ et Y′Z′ passant respectivement par T et T′, XZ et X′Z′ par U et U′, XY et X′Y′ par V et V′; et soient menées les trois droites XX′, YY′, ZZ′, les deux dernières se coupant en D, la première et la dernière en E et les deux premières en F. UV et U′V′ qui se coupent en A étant les polaires respectives de X et X′, la droite EF sera la polaire du point A. Pour de semblables raisons, DF et DE seront les polaires respectives des points B et C.

Soient menées ensuite TT′, UU′, VV′, les deux dernières se coupant en P, la première et la dernière se coupant en Q et les deux premières en R. Nous allons prouver que les points P, Q, R sont respectivement sur les droites EF, FD et DE.

Pour cela, soient menées les droites TU′, UV′, VT′, T′U, U′V, V′T ; en considérant tour-à-tour les quadrilatères inscrits UU′VV′, VV′TT′, TT′UU′, et en leur appliquant le *Théorème V*, on verra en effet que P est sur XX′, et conséquemment sur EF; que Q est sur YY′, et conséquemment sur FD; et qu'enfin R est sur ZZ′, et conséquemment sur DE.

Or, comme PQ, QR, RP, par leurs intersections avec le cercle, déterminent les sommets des deux triangles cherchés, il s'ensuit que tout se réduit à construire ces droites, ou simplement les sommets P, Q, R du triangle qu'elles forment par leurs rencontres. Puis donc que ces sommets sont déjà respectivement sur EF, FD, et DE, il ne s'agit plus que de trouver d'autres droites sur lesquelles ils se trouvent également. Or, il est aisé de prouver que le sommet P est sur DA, le sommet Q sur EB et le sommet R sur FC.

En effet, soient respectivement G, H, K les intersections de Z′X′ et XY, de X′Y′ et YZ, et de Y′Z′ et ZX; soient en outre L, M, N les intersections respectives de YZ et Y′Z′, de ZX et Z′X′, de XY et X′Y′. Les points A, M, N ayant pour polaires respectives EF, UU′ et VV′, qui concourent en P; il s'ensuit que ces trois points appartiennent à une même ligne droite dont le point P est le pôle. Pour de semblables raisons, la droite LN passe par B et a pour pôle le point Q; et la droite LM passe par C et a pour pôle le point R; soient enfin menés AB, BC et CA.

Cela posé, si l'on considère en premier lieu, l'hexagone inscrit non convexe dont les côtés consécutifs sont T′V′, V′U, UT, TV, VU′, U′T′, on verra (*Théorème I*) que la droite BC doit passer par le point de concours de UV′ et U′V. Considérant ensuite le quadrilatère convexe inscrit dont les côtés consécutifs sont UU′, U′V, VV′, V′U, on verra (*Théorème V*) que ces mêmes droites UV′ U′V doivent concourir en un point de EF; d'où on conclura que BC et U′V doivent concourir en un même point de EF, et que conséquemment leurs pôles respectifs D, G, A sont en ligne droite. Enfin, en considérant le quadrilatère inscrit non convexe dont les côtés consécutifs sont UU′, U′V′, V′V, VU, on voit (*Théorème V*), que les points A, G, P sont aussi en ligne droite; donc finalement D, A et P sont en ligne droite; et, par des raisonnemens semblables on prouvera que les points E, B, Q, ainsi que les points F, C, R, sont aussi en ligne droite.

La solution du problème proposé se réduit donc à cette construction fort simple, qui n'exige que le seul emploi de la règle : formez un triangle DEF dont les côtés EF, FD, DE soient respectivement les polaires des points donnés A, B, C; menez ensuite DA, EB, FC, coupant les côtés de ce triangle en P, Q, R; formez enfin un triangle dont ces trois derniers points soient les sommets; les points d'intersection de ses côtés avec le cercle donné seront les sommets des deux triangles cherchés. C'est, en effet, la construction que M. Gergonne a déduite de l'analise en l'endroit cité.

PROBLÈME II. A un cercle donné, circonscrire un triangle dont les sommets soient sur trois droites données?

Solution. On pourrait aisément parvenir, d'une manière directe, à la solution de ce dernier problème, comme nous sommes parvenus à celle du premier. Mais il est incomparablement plus simple de la déduire de celle-là, par la théorie des pôles et polaires.

On voit en effet que, si les droites données forment le triangle DEF, et que les deux triangles circonscrits qui résolvent le problème soient XYZ, X′Y′Z′, en construisant les triangles inscrits TUV, T′U′V′ dont les sommets soient les points de contact des circonscrits, les côtés de ces triangles passeront par les trois points A, B, C pôles respectifs de EF, FD, DE; opérant donc sur ces trois points et sur ces trois droites comme dans le problème précédent, on obtiendra les sommets des triangles inscrits et conséquemment les points de contact des triangles circonscrits. C'est aussi là la construction indiquée par M. Gergonne.

On conçoit qu'à l'inverse, ayant obtenu d'abord une solution directe de ce dernier problème, on en conclurait facilement celle du premier.

Remarque. Il est aisé de voir que les droites DP, EQ, FR doivent concourir toutes trois en un même point, et que conséquemment les points de concours des directions de EF et QR, FD et RP, DE et PQ, qui sont les centres de similitude externes des trois cercles L, M, N pris deux à deux, doivent appartenir à une même ligne droite polaire de ce point.

§. VI.

Propriétés des cercles inscrits et circonscrits aux triangles rectilignes et sphériques, et des sphères inscrites et circonscrites aux tétraèdres.

Nous avons démontré (§. I.) que, six points étant pris sur la circonférence d'un cercle, les points de concours des directions des côtés opposés des hexagones qui ont leurs sommets en ces six points appartiennent tous trois à une même ligne droite.

On peut conclure de là que, réciproquement, *lorsque cinq sommets d'un hexagone sont sur une circonférence, et que d'ailleurs les points de concours des directions des côtés opposés appartiennent tous trois à une même ligne droite, le sixième sommet est aussi sur cette circonférence.*

En effet, dans le cas contraire, on pourrait, en conservant cinq des sommets, construire un hexagone inscrit dont le sixième sommet serait au point où l'un des côtés du sommet dont il s'agit ou son prolongement coupe la circonférence, et dans celui-ci, comme dans l'autre, les points de concours des directions des côtés opposés devraient appartenir à une même ligne droite; mais deux de ces points étant communs aux deux hexagones, il faudrait que deux points d'une droite fussent à la fois en ligne droite avec deux points d'une autre droite qui ne se confond pas avec elle, ce qui est absurde.

Nous avons également démontré, en l'endroit cité, qne six tangentes étant menées à un même cercle, les diagonales qui joignent les sommets opposés des hexagones dont ces tangentes sont les côtés concourent toutes trois en un même point.

On peut conclure de là que, réciproquement, *lorsque cinq côtés d'un hexagone sont tangens à un même cercle, et que les diagonales qui joignent ses sommets opposés concourent en un même point, son sixième côté est aussi tangent au cercle.*

En effet, dans le cas contraire, en menant, par l'un des sommets que ce sixième côté détermine, une tangente au cercle, cette tangente, avec les cinq autres, formerait un hexagone circonscrit dans lequel les diagonales joignant les sommets opposés concourraient en un même point; mais, deux des diagonales étant communes aux deux hexagones et les troisièmes partant d'un même sommet, il faudrait que deux droites partant d'un même point passassent l'une et l'autre par l'intersection de deux autres droites, ce qui est absurde.

On ne doit pas perdre de vue que ces propositions s'appliquent aux hexagones rapportés à une section conique quelconque différente du cercle.

THÉORÈME X. Deux triangles étant circonscrits à un même cercle; si cinq de leurs sommets sont sur une même circonférence, le sixième sera aussi sur cette circonférence.

Démonstration. Soient ABC, DEF (fig. 3) deux triangles circonscrits à un même cercle et le touchant aux points a, b, c, d, e, f; leurs sommets sont aussi ceux d'un hexagone ABFEDCA, dans lequel il est facile de prouver que les points de concours respectifs G, H, K des directions des côtés opposés AB et ED, BF et DC, FE et CA, appartiennent à une même ligne droite; en effet, dans l'hexagone inscrit $abdefca$ les trois points de concours des directions des côtés opposés ab et ef, bd et fc, de et ca

doivent appartenir à une même ligne droite ; or, le premier de ces trois points est évidemment le pôle de CD, le second le pôle de GK, et le troitième le pôle de BF ; donc les trois droites CD, GK et BF doivent se couper au même point, ce qui revient à dire que le point H d'intersection de BF et DC est en ligne droite avec les points G et K ; les sommets A, B, C, D, E, F des deux triangles sont donc aussi les sommets d'un hexagone dans lequel les points de concours des directions des côtés opposés appartiennent tous trois à une même ligne droite ; donc, par la première des deux propositions ci-dessus, si cinq de ces sommets sont sur une même circonférence, le sixième y sera également.

On peut déduire de là le théorème suivant, dû à M. Brianchon :

THÉORÈME XI. Deux triangles circonscrits à une même conique sont aussi inscrits à une même conique.

THÉORÈME XII. Deux triangles étant inscrits à un même cercle ; si cinq de leurs côtés sont tangens à une même circonférence, le sixième sera aussi tangent à cette circonférence.

Démonstration. Soient ABC, DEF deux triangles inscrits au cercle P ; et considérons l'hexagone DGBCKFD formé avec les côtés de ces triangles ; il est aisé de s'assurer que, dans cet hexagone, les diagonales DC, GK, BF, qui joignent les sommets opposés, concourent en un même point H. En effet, dans l'hexagone ABFEDCA, inscrit au cercle P, les points G, H, K de concours des directions des côtés opposés AB et ED, BF et DC, FE et CA, doivent appartenir à une même droite ; donc la droite GK doit passer par le point de concours de DC et BF ; ce qui revient à dire que ces trois droites doivent se couper au même point K ; donc les côtés de deux triangles inscrits à un même cercle sont en même temps côtés d'un hexagone dans lequel les diagonales qui joignent les sommets opposés concourent en un même point ; donc, par la dernière des deux propositions ci-dessus, si cinq de ces côtés sont tangens à une même circonférence, le sixième sera aussi tangent à cette circonférence.

De là résulte le théorème suivant, dû à M. Brianchon :

THÉORÈME XIII. Deux triangles inscrits à une même conique sont aussi circonscrits à une même conique.

THÉORÈME XIV. Lorsqu'un triangle est, à la fois, circonscrit à un cercle et inscrit à un autre cercle, une infinité d'autres triangles peuvent être, à la fois, circonscrits au premier de ces cercles et inscrits au second.

Démonstration. Soit, en effet, le triangle ABC, circonscrit au cercle O et inscrit au cercle P. Inscrivons au second une corde quelconque DE, tangente au premier ; et, par les sommets D et E, menons au cercle O les tangentes DF et EF ; il s'agit de prouver que le point F où ces deux tangentes se couperont sera aussi sur la circonférence du cercle P, de sorte que le triangle DEF, déjà circonscrit au cercle O sera en même temps inscrit au cercle P. Pour cela, remarquons que les deux triangles ABC, DEF sont déjà circonscrits au cercle O ; or, cinq A, B, C, D, E de leurs sommets sont, par construction, à la circonférence du cercle P ; donc (*Théorème X*) le sixième sera aussi sur cette circonférence ; donc enfin le triangle DEF, circonscrit au cercle O, est en même temps inscrit au cercle P, comme le triangle ABC.

Ce théorème avait déjà été remarqué par M. Lhuilier (*Annales de math.*, tom. I, pag. 155).

On peut déduire de ce qui précède le théorème plus général que voici, dû à M. Poncelet, qui l'a même étendu à un polygone quelconque.

THÉORÈME XV. Si un seul triangle est circonscrit à une conique et inscrit à une autre, une infinité d'autres triangles pourront être, à la fois, circonscrits à la première et inscrits à la seconde.

THÉORÈME XVI. Si un tétraèdre est, à la fois, circonscrit à une sphère et inscrit à une autre, une infinité d'autres tétraèdres pourront aussi, à la fois, être circonscrits à la première et inscrits à la seconde.

Démonstration.

Démonstration. Prenons un des sommets de notre tétraèdre pour sommet d'un cône circonscrit à la première sphère ; ce cône sera inscrit au tétraèdre, et sera coupé suivant un cercle par le plan de la face opposée à son sommet ; ce plan coupera d'ailleurs la seconde sphère suivant un cercle, et la face du tétraèdre que nous considérons ici sera à la fois circonscrite au premier cercle dont il vient d'être question et inscrite à ce dernier ; on pourra donc (*Théorème XIV*) construire une infinité de triangles qui, comme celui-là, seront circonscrits à l'un de ces cercles et inscrits à l'autre ; et il est clair que, si l'on fait de ces triangles les bases d'autant de tétraèdres, ayant tous même sommet que le premier, ces tétraèdres seront tous, comme le premier, circonscrits à l'une des sphères et inscrits à l'autre.

Ainsi, en conservant un quelconque des sommets du tétraèdre, on peut varier d'une infinité de manières différentes la construction de la face opposée. Or, il est clair que pareillement, dans chacun des tétraèdres résultans, on pourra prendre à son tour pour sommet fixe l'un quelconque des sommets du triangle que nous avions d'abord considéré comme base, et varier alors, d'une infinité de manières différentes la construction de la face opposée.

Il y aura donc ainsi une infinité de tétraèdres de toutes sortes de formes et directions, circonscrits à l'une des sphères et inscrits à l'autre ; et il ne serait pas même difficile de prouver qu'on en pourra toujours trouver un qui ait pour une de ses arêtes une corde arbitraire de la sphère extérieure.

Ce théorème n'avait point encore été remarqué. La première partie de sa démonstration peut évidemment servir à établir le théorème que voici :

THÉORÈME XVII. Si un seul angle trièdre est, à la fois, circonscrit à une surface conique du second ordre et inscrit à une autre, toutes deux de même sommet que lui, une infinité d'autres angles trièdres pourront aussi être, à la fois, circonscrits à la première surface et inscrits à la seconde.

De ce dernier théorème résulte encore le suivant :

THÉORÈME XIX. Si un même triangle sphérique est, à la fois, circonscrit à un cercle de la sphère et inscrit à un autre, une infinité d'autres triangles sphériques pourront aussi être, à la fois, circonscrits au premier de ces cercles et inscrits au dernier.

THÉORÈME XX. La distance entre les centres de deux cercles, l'un inscrit et l'autre circonscrit à un même triangle quelconque est moyenne proportionnelle entre le rayon du circonscrit et l'excès de ce rayon sur le diamètre de l'inscrit.

Démonstration. Nous venons de voir (*Théorème IV*) que, lorsqu'un même triangle est à la fois circonscrit à un cercle et inscrit à un autre cercle, une infinité d'autres triangles peuvent aussi, à la fois, être circonscrits au premier de ces cercles et inscrits au second ; la distance entre les centres des cercles inscrits et circonscrits à chacun d'eux est donc la même pour tous ; elle doit donc être indépendante de la nature du triangle que l'on considère en particulier, et ne doit dépendre que des élémens qui leur sont communs à tous, c'est-à-dire, des rayons des deux cercles.

Profitant de cette remarque, cherchons, parmi ces divers triangles, celui qui paraît devoir le mieux se prêter à la détermination qui nous occupe ; ce doit être, sans contredit, un des deux qui ont un de leurs sommets à l'une ou l'autre des extrémités de celui des diamètres du cercle circonscrit qui passe par le centre de l'inscrit, et dont conséquemment le côté opposé est perpendiculaire à ce diamètre ; car ces deux triangles sont isocèles et symétriquement situés par rapport aux deux cercles.

Soit donc (fig. 4) SK le diamètre du circonscrit qui contient les centres des deux cercles, C étant le centre du circonscrit et O celui de l'inscrit ; et ce dernier étant coupé en H par SK. Soit ASB le triangle isocèle dont il s'agit, divisé en deux parties égales par SH. Menons AC et AO.

La droite AO divisant l'angle A du triangle SAH en deux parties égales ; par une proposition connue de géométrie, on aura, en quarrant,

$$\overline{AS}^2 : \overline{AH}^2 :: \overline{OS}^2 : \overline{OH}^2 \;;$$

mais, en nommant R le rayon du cercle circonscrit, r celui de l'inscrit et D la distance de leurs centres, on a

$$\overline{AS}^2=\overline{SH}^2+\overline{AH}^2=\overline{SH}^2+\overline{AC}^2-\overline{CH}^2=(D+R+r)^2+R^2-(D+r)^2=R(D+R+r) \;,$$

$$\overline{AH}^2=\overline{AG}^2-\overline{GH}^2=R^2-(D+r)^2=(D+R+r)(R-r-D) \;,$$

$$\overline{OS}^2=(D+R)^2 \;,$$

$$\overline{OH}^2=r^2 \;;$$

substituant donc et remarquant qu'alors le facteur $D+R+r$ pourra être supprimé dans les deux termes du premier rapport, il viendra

$$2R : R-r-D :: (D+R)^2 : r^2 \;,$$

ou encore, parce que la différence des deux premiers termes est au second, comme la différence des deux derniers est au quatrième

$$D+R+r : R-r-D :: (D+R)^2-r^2 : r^2 \;,$$

ou en divisant les deux antécédans par $D+R+r$

$$1 : R-r-D :: R-r+D : r^2 \;;$$

ou enfin, en égalant le produit des extrêmes au produit des moyens

$$r^2 = (R-r)^2 - D^2 \,,$$

d'où

$$D^2 = (R-r)^2 - r^2 = R^2 - 2rR = R(R-2r) \,,$$

ce qui donne

$$\div R : D : R-2r \,,$$

comme nous l'avions annoncé.

Si le cercle tangent aux trois côtés du triangle, au lieu d'être inscrit, était exinscrit, en raisonnant d'une manière analogue; on trouverait la proportion

$$\div R : D : R+2r \,.$$

c'est là le théorème de M. Maisonneuve annoncé ci-dessus.

THÉORÈME XXI. La distance entre les centres de deux sphères, l'une inscrite et l'autre circonscrite à un même tétraèdre, est moyenne proportionnelle entre la somme des rayons de ces deux sphères et l'excès du rayon de la sphère circonscrite sur le triple du rayon de la sphère inscrite.

Démonstration. Nous savons déjà (*Théorème XVI*) que, lorsqu'un même tétraèdre est, à la fois, circonscrit à une sphère et inscrit à une autre sphère, une infinité d'autres tétraèdres peuvent aussi, à la fois, être circonscrits à la première de ces sphères et inscrits à la seconde; la distance, entre les centres des sphères inscrite et circonscrite à chacun d'eux, est donc la même pour tous; elle doit donc être indépendante de la nature du tétraèdre que l'on considère en particulier, et ne doit dépendre que des élémens qui leur sont communs à tous, c'est-à-dire, des rayons des deux sphères.

Profitant de cette remarque, cherchons, parmi ces divers tétraèdres, celui qui paraît devoir le mieux se prêter à la recherche qui nous occupe : ce doit être sans contredit, un des deux qui ont un de leurs sommets à l'une ou l'autre des extrémités de celui des diamètres de la sphère circonscrite qui passe par le centre de l'inscrite, et dont conséquemment la face opposée est perpendiculaire à ce diamètre ; il est aisé de voir, en effet, que la base de ce tétraèdre est un triangle équilatéral, que ses autres faces sont des triangles isocèles égaux entre eux, et que la droite qui joint son sommet au centre de sa base en est en même temps la hauteur.

Soit donc SBDE (fig. 5) un tel tétraèdre ; soit H le centre de sa base, qui sera aussi le point de contact de cette base avec la sphère inscrite ; soit menée la hauteur SH, contenant en C le centre de la sphère circonscrite, et en O celui de la sphère inscrite. Soit menée BH, coupant perpendiculairement DE, en son milieu A ; soient enfin menées AS, BC et AO ; BH sera le double de AH.

Parce que AB et AS sont deux tangentes à la sphère inscrite, AO doit diviser l'angle SAH en deux parties égales. Le triangle SAH donnera donc, en quarrant,

$$\overline{AS}^2:\overline{AH}^2::\overline{OS}^2:\overline{OH}^2 \;;$$

or, en employant les mêmes notations que dans le théorème précédent, on a

$$\overline{AS}^2=\overline{SH}^2+\overline{AH}^2=\overline{SH}^2+\tfrac{1}{4}\overline{BH}^2=\overline{SH}^2+\tfrac{1}{4}(\overline{BC}^2-\overline{CH}^2)=(R+r+D)^2$$

$$+\tfrac{1}{4}[R^2-(r+D)^2]=(R+r+D)[(R+r+D)+\tfrac{1}{4}(R-r-D)] \;,$$

$$\overline{AH}^2=\tfrac{1}{4}\overline{BH}^2=\tfrac{1}{4}[R^2-(r+D)^2]=\tfrac{1}{4}(R+r+D)(R-r-D) \;,$$

$$\overline{OS}^2=(R+D)^2 \;,$$

$$\overline{OH}^2=r^2 \;;$$

substituant donc, en observant que le facteur $R+r+D$ peut être supprimé, dans les deux termes du premier rapport, il viendra

$$(R+r+D)+\tfrac{1}{4}(R-r-D):\tfrac{1}{4}(R-r-D)::(R+D)^2:r^2\ ,$$

ou parce que, dans toute proportion, la différence des deux premiers termes est au second, comme la différence des deux derniers est au quatrième

$$R+r+D:\tfrac{1}{4}(R-r-D)::(R+D)^2-r^2:r^2\ ;$$

ou en divisant les deux antécédans par $R+r+D$ et multipliant les deux premiers termes par 4,

$$4:R-r-D::R-r+D:r^2\ ,$$

d'où, en égalant le produit des extrêmes au produit des moyens,

$$4r^2=(R-r)^2-D^2\ ,$$

ou

$$D^2=(R-r)^2-4r^2=(R+r)(R-3r)\ ,$$

ce qui donne

$$\div R+r:D:R-3r\ ,$$

comme nous l'avions annoncé.

Si la sphère tangente aux quatre faces du tétraèdre, au lieu d'être inscrite était exinscrite, en raisonnant d'une manière analogue, on serait conduit à la proportion

$$\because R-r : D : R+3r \, .$$

Le résultat auquel nous venons de parvenir, et qui n'était point connu jusqu'ici, avait été demandé dans les *Annales de mathématiques* (tom. VI, pag. 228).

THÉORÈME XXII. Le sinus de l'arc de grand cercle qui joint les pôles de deux cercles, l'un inscrit et l'autre circonscrit à un même triangle sphérique, est moyen proportionnel entre la demi-somme des sinus de la somme et de la différence des rayons sphériques de ces deux cercles et la moitié de l'excès du triple du sinus de la différence de ces deux rayons sur le sinus de leur somme (*).

Démonstration. Il est d'abord très-facile de s'assurer que l'arc de grand cercle qui divise l'un quelconque des angles d'un triangle sphérique en deux parties égales partage le côté opposé en deux segmens dont les sinus sont proportionnels aux sinus des côtés correspondans.

Cette proposition admise, supposons que tout soit (fig. 4) comme dans la démonstration du *Théorème XX*, si ce n'est que nous supposerons ici la figure tracée sur la surface d'une sphère; de manière que tout ce qui était alors lignes droites devienne arcs de grands cercles; nous aurons ici, en quarrant,

$$\text{Sin.}^2\text{AS} : \text{Sin.}^2\text{AH} :: \text{Sin.}^2\text{OS} : \text{Sin.}^2\text{OH} \, ,$$

Or,

(*) Nous entendons ici par rayon sphérique d'un cercle de la sphère l'arc de grand cercle qui joint son pôle à un point quelconque de sa circonférence.

$$\text{Sin.}^2\text{AS} = 1 - \text{Cos.}^2\text{AS} = 1 - \text{Cos.}^2\text{SHCos.}^2\text{AH} = 1 - \text{Cos.}^2\text{SH}\,\frac{\text{Cos.}^2\text{AC}}{\text{Cos.}^2\text{CH}}$$

$$= \frac{\text{Cos.}^2\text{CH} - \text{Cos.}^2\text{SHCos.}^2\text{AC}}{\text{Cos.}^2\text{CH}},$$

$$\text{Sin.}^2\text{AH} = 1 - \text{Cos.}^2\text{AH} = 1 - \frac{\text{Cos.}^2\text{AC}}{\text{Cos.}^2\text{CH}} = \frac{\text{Cos.}^2\text{CH} - \text{Cos.}^2\text{AC}}{\text{Cos.}^2\text{CH}}.$$

substituant ces valeurs, en supprimant le dénominateur Cos.²CH, alors commun aux deux termes du premier rapport, il viendra

$$\text{Cos.}^2\text{CH} - \text{Cos.}^2\text{SHCos.}^2\text{AC} : \text{Cos.}^2\text{CH} - \text{Cos.}^2\text{AC} :: \text{Sin.}^2\text{OS} : \text{Sin.}^2\text{OH},$$

ou, en comparant la différence des deux premiers termes et la différence des deux derniers au second et au quatrième,

$$\text{Cos.}^2\text{AC} - \text{Cos.}^2\text{SHCos.}^2\text{AC} : \text{Cos.}^2\text{CH} - \text{Cos.}^2\text{AC}$$

$$:: \text{Sin.}^2\text{OS} - \text{Sin.}^2\text{OH} : \text{Sin.}^2\text{OH};$$

ou bien

$$\text{Cos.}^2\text{ACSin.}^2\text{SH} : \text{Cos.}^2\text{CH} - \text{Cos.}^2\text{AC} :: \text{Sin.}^2\text{OS} - \text{Sin.}^2\text{OH} : \text{Sin.}^2\text{OH};$$

ou encore

$$\text{Cos.}^2\text{RSin.}^2(\text{R}+r+\text{D}) : \text{Cos.}^2(r+\text{D}) - \text{Cos.}^2\text{R} : \text{Sin.}^2(\text{R}+\text{D}) - \text{Sin.}^2 r : \text{Sin.}^2 r$$

or,

$$\text{Cos.}^2(r+D)-\text{Cos.}^2R=\text{Sin.}(R+r+D)\text{Sin.}(R-r-D)\ ,$$

$$\text{Sin.}^2(R+D)-\text{Sin.}^2r=\text{Sin.}(R+r+D)\text{Sin.}(R-r+D)\ ,$$

mettant donc ces valeurs et supprimant le facteur $\text{Sin.}(R+r+D)$, facteur commun d'abord aux deux termes du premier rapport, puis aux deux antécédans, il viendra

$$\text{Cos.}^2R:\text{Sin.}(R-r-D)::\text{Sin.}(R-r+D):\text{Sin.}^2r\ ;$$

d'où, en égalant le produit des extrêmes à celui des moyens,

$$\text{Sin.}^2r\text{Cos.}^2R=\text{Sin.}^2(R-r)-\text{Sin.}^2D\ ,$$

c'est-à-dire,

$$\text{Sin.}^2D=\text{Sin.}^2(R-r)-\text{Sin.}^2r\text{Cos.}^2R\ ,$$

ou

$$\text{Sin.}^2D=\{\text{Sin.}(R-r)+\text{Sin.}r\text{Cos.}R\}\{\text{Sin.}(R-r)-\text{Sin.}r\text{Cos.}R\}\ ;$$

mais

$$\text{Sin.}r\text{Cos.}R=\frac{\text{Sin.}(R+r)-\text{Sin.}(R-r)}{2}\ ;$$

donc, finalement,

$$\text{Sin.}^2D=\frac{\text{Sin.}(R+r)+\text{Sin.}(R-r)}{2}\cdot\frac{3\text{Sin.}(R-r)-\text{Sin.}(R+r)}{2}\ ;$$

c'est-à-dire,

$$\because \frac{\text{Sin.}(R+r)+\text{Sin.}(R-r)}{2} : \text{Sin.}D : \frac{3\text{Sin.}(R-r)-\text{Sin.}(R+r)}{2} ;$$

comme nous l'avions annoncé.

Si le cercle tangent aux trois côtés du triangle, au lieu d'être inscrit, était exinscrit, la proportion serait

$$\because \frac{\text{Sin.}(R+r)+\text{Sin.}(R-r)}{2} : \text{Sin.}D : \frac{3\text{Sin.}(R+r)-\text{Sin.}(R-r)}{2} .$$

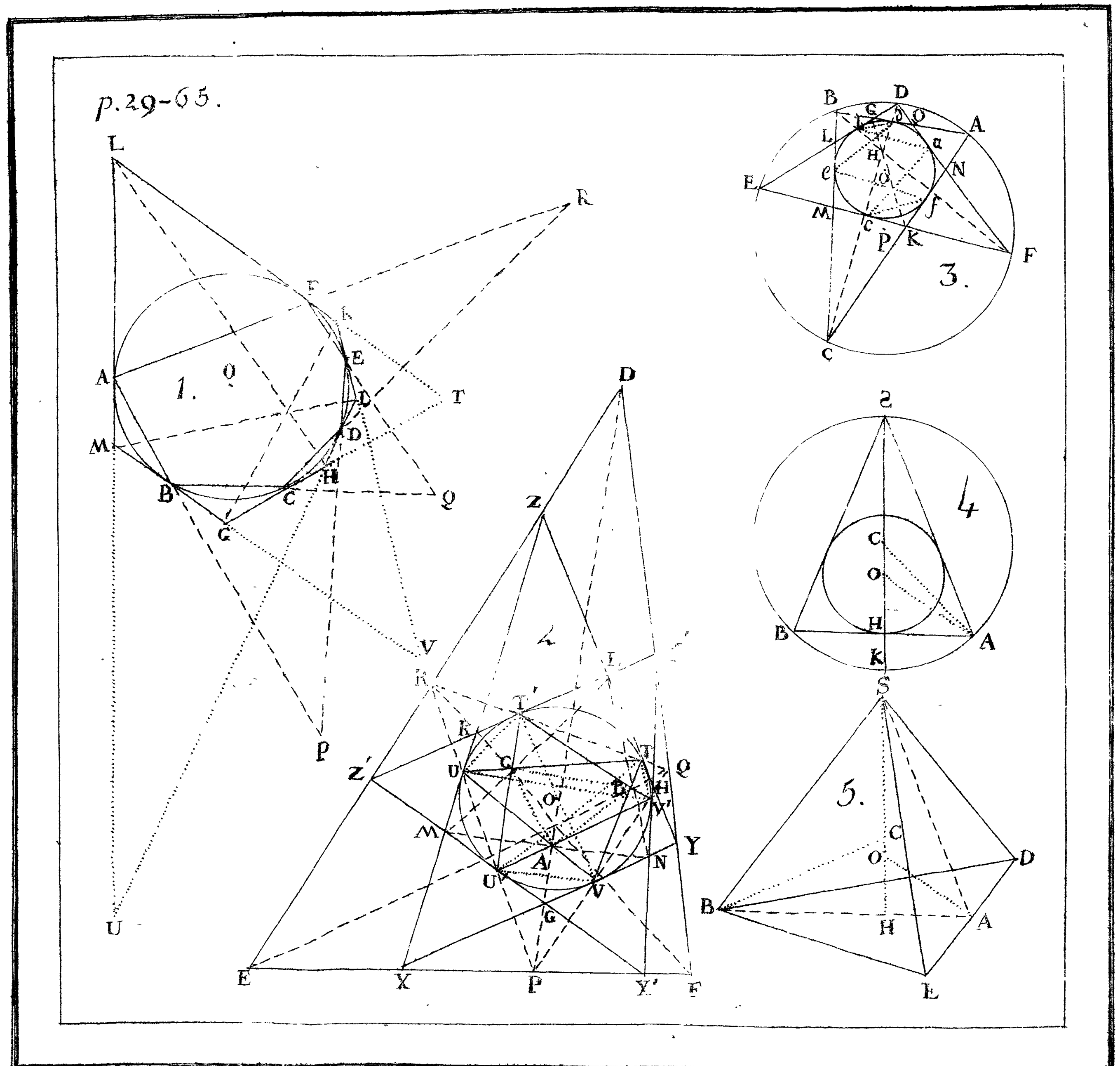
Le résultat auquel nous venons de parvenir, et qui n'était point encore connu, avait été demandé dans les *Annales de mathématiques* (tom. VI, pag. 224). Il se lie d'ailleurs parfaitement avec celui du *Théorème XX*, dans lequel il se change immédiatement, lorsqu'on suppose le rayon de la sphère infini.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorèmes de Géométrie.

I. Soit, dans l'espace, un polygone rectiligne quelconque, plan ou gauche ABCD.......IK, et une droite indéfinie quelconque. Soient menés, par cette droite et par les n sommets du polygone, un pareil nombre de plans. Chacun de ces plans, par ses $n-2$ intersections avec les côtés du polygone non adjacens au sommet par où il passe, déterminera, sur chacun de ces côtés, deux segmens, comptés à partir de ses deux extrémités. Soit formé le produit continuel de tous les segmens déterminés sur les côtés AB, BC, CD,.......IK, KA, à partir des sommets A, B, C,........I, K, respectivement. Soit aussi formé le produit de tous les autres segmens formés sur les mêmes côtés, à partir des sommets B, C, D,.........K, A, respectivement; ces deux produits, composés d'un même nombre de facteurs, seront égaux entre eux.

II. Soit, dans l'espace, un polygone rectiligne quelconque, plan ou gauche ABCD,..........IK, et un point quelconque. Soient menés, par ce point et par les n côtés du polygone, un pareil nombre de plans. Chacun de ces plans, par ses intersections avec les $n-3$ côtés du polygone non adjacens au côté par où il passe, déterminera, sur chacun de ces côtés, deux segmens comptés de ses extrémités. Soit formé le produit continuel des segmens déterminés sur les côtés AB, BC, CD, ... IK, KA, à partir de leurs extrémités A, B, C, ... I, K. Soit aussi formé le produit continuel des segmens déterminés sur ces mêmes côtés, à partir de leurs extrémités B, C, D, ... K, A, respectivement ; ces deux produits, composés d'un même nombre de facteurs, seront égaux entre eux.



J. D. G. fecit.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Essai sur l'interprétation géométrique des équations entre un nombre quelconque de variables ;

Par M. E. Péclet, professeur des sciences physiques du collége royal et de la ville de Marseille.

§. 1.

Soit l'équation de forme quelconque

$$F(x,y,z,t)=0\,, \qquad \text{(A)}$$

entre trois coordonnées x, y, z et un paramètre variable t. Cette équation exprime une infinité de surfaces, dont chacune répond à une valeur particulière du paramètre t.

Ce paramètre variant d'une manière continue depuis $+\infty$ jusqu'à $-\infty$, la surface (A) variera ou du moins pourra varier à la fois de situation, de forme et même de nature, mais toujours par des degrés continus ; de manière à ne jamais passer brusquement d'une nature à une autre, et à prendre nécessairement une forme intermédiaire entre celle qu'elle quitte et celle qu'elle doit acquérir.

On peut remarquer, en effet, que l'équation étant développée et ordonnée par rapport aux trois variables x, y, z, le paramètre t entrera dans tout ou partie des coefficiens ; et tant que, par la variation de ce paramètre, ces coefficiens ne changeront pas de signe, la surface ne changera pas de nature. Il faudra donc nécessairement, pour qu'elle passe d'une nature à une autre, que la variation de t fasse changer les signes d'un ou de plusieurs de ces coefficiens, ce qui, comme l'on sait, ne pourra avoir lieu qu'autant qu'ils passeront par zéro ou par l'infini.

Ainsi, par exemple, l'équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z\sqrt{t}}{c}\right)^2=1,$$

tant que t est positif, exprime un ellipsoïde dont les diamètres dirigés suivant les axes des x et des y sont constans et égaux à $2a$ et $2b$, tandis que le diamètre $\frac{2c}{\sqrt{t}}$, dirigé suivant l'axe des z, est variable et croît sans cesse à mesure que t devient plus petit. Si, au contraire, t est négatif, cette même équation exprime un hyperboloïde à une nappe, dont les élémens ont une courbure inverse de celle des élémens de l'ellipsoïde. Mais, entre ces deux cas, se trouve le cas intermédiaire de $t=0$, pour lequel l'équation exprime une surface cylindrique, qui est aussi intermédiaire aux deux systèmes de surfaces, et leur sert de lieu commun.

Les surfaces exprimées par l'équation $F(x, y, z, t)=0$ peuvent se succéder de telle sorte que chacune d'elles touche dans tous ses points celle qui lui est consécutive; et alors elles pourront occuper la totalité de l'espace, comme il arriverait pour un plan perpendiculaire à une droite, dont la distance variable à un point de cette droite serait t, ou pour une sphère dont le rayon variable serait égal à $\frac{t^2}{r}$ (*); ou bien elles n'occuperont qu'une portion limitée, finie ou infinie, de cet espace, comme il arriverait pour un plan perpendi-

(*) L'espace entier peut également être exprimé par l'équation $0=0$, qui est évidemment satisfaite quels que soient x, y et z.

J. D. G.

culaire à une droite, dont la distance variable à un point fixe de cette droite serait $\frac{ta}{1+t}$, ou pour une sphère dont le rayon variable serait $\frac{t^2r}{1+t^2}$. Mais, ni dans l'un ni dans l'autre cas, une même surface ne pourra toucher à la fois toutes les surfaces exprimées par l'équation proposée, de manière que ces surfaces n'auront point une enveloppe commune.

Mais, généralement parlant, les surfaces consécutives se coupent les unes et les autres, et alors la totalité de ces surfaces n'embrasse qu'une portion limitée de l'espace, portion qui peut être d'ailleurs finie ou infinie. Si, par exemple, il s'agit d'une série de sphères de même rayon ayant leurs centres sur une même droite, la portion de l'espace qu'elles occuperont sera une surface cylindrique indéfinie; ce sera au contraire une surface conique indéfinie, si les rayons sont variables et proportionnels aux distances des centres à un point fixe de la droite qui les contient tous; ce sera enfin une portion annulaire finie de l'espace, si, le rayon étant constant, les centres se trouvent sur la circonférence d'un cercle, ou plus généralement sur une courbe fermée, plane ou à double courbure quelconque.

On pourra donc dire, dans ce dernier cas, que l'équation $F(x, y, z, t)=0$ exprime un corps, c'est-à-dire une portion limitée, finie ou infinie, de l'espace indéfini, en ce sens que tous les points et les seuls points de cette portion de l'espace seront tels que leurs coordonnées satisferont à cette équation, pourvu que l'on détermine le paramètre t d'une manière convenable; c'est-à-dire, pourvu que la valeur qu'on lui donnera fasse devenir l'équation celle d'une surface passant par le point que l'on aura considéré en particulier (*).

(*) On peut aussi très-simplement exprimer un corps, fini ou infini, par une inégalité entre les seules variables x, y, z, en ce sens que cette inégalité est satisfaite par tous les points et par les seuls points de ce corps. Ainsi par exemple, S'il existait un second paramètre variable ; c'est-à-dire si l'équation était de la forme

$$F(x, y, z, t, u)=0 ;$$

en vertu des variations de ce nouveau paramètre, le système de surfaces résultant des variations du premier, et par suite la surface limite ou enveloppe de ces surfaces varierait de forme et de situation dans l'espace, et le système des surfaces limites pourrait lui-même avoir une limite qui serait la surface au-delà de laquelle ne pourraient jamais se trouver des points satisfaisant à l'équation proposée, de quelque manière d'ailleurs qu'on déterminât les deux paramètres. On pourrait donc dire que l'équation proposée exprime le corps terminé par cette surface.

Il est aisé de concevoir qu'ici la limite des surfaces limites sera susceptible de deux modes de génération suivant celui des deux paramètres que l'on voudra considérer comme variant le premier. Supposons, par exemple, que, pour des valeurs déterminées de t et u, la proposée exprime une sphère, qu'en vertu de la seule variation de t le centre de cette sphère décrive un cercle, et qu'ensuite en vertu de la variation de u le centre de ce cercle décrive une droite perpendiculaire à son plan ; la limite des sphères provenant de la seule variation de t sera un anneau, et la limite des anneaux provenant de la variation de u sera le système de deux cylindres concentriques, comprenant entre eux le corps exprimé par l'équation proposée.

---

l'inégalité $x^2+y^2+z^2<r^2$ exprime une sphère ; l'inégalité $x^2+y^2<Az^2$ exprime un cône ; l'inégalité $x^2+y^2<r^2$ exprime un cylindre, et l'inégalité

$$\left(x-\frac{Rx}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(y-\frac{Ry}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+z^2<r^2$$

exprime un anneau. Nous avons déjà fait cette remarque ailleurs (*Annales*, tom. II, page 194). *J. D. G.*

Mais, si l'on fait d'abord varier u, le centre de la sphère décrira une droite ; et, en faisant ensuite varier t, cette droite fera une révolution autour d'un axe qui lui sera parallèle. La limite des sphères provenant de la variation de u sera un cylindre, et la limite des cylindres provenant de la variation de t sera de nouveau le système des deux cylindres concentriques auquel nous étions déjà parvenus par le premier mode de génération (*).

Il en irait de même s'il y avait dans la proposée un plus grand nombre de paramètres variables, et l'on voit qu'en général l'équation

$$F(x,y,z,t,u,v,\ldots\ldots)=0$$

exprime un corps solide terminé par une surface susceptible de $1.2.3\ldots n$ modes de générations, si n désigne le nombre des paramètres.

§. II.

La variation d'un seul paramètre donne, comme nous l'avons dit, naissance à un système de surfaces dont l'ensemble occupe

---

(*) Le corps infini compris entre ces deux cylindres peut, sans le secours d'aucun paramètre, être exprimé par le système des deux inégalités

$$x^2+y^2>r^2, \qquad x^2+y^2<R^2,$$

ou par l'inégalité unique équivalente

$$(x^2+y^2-r^2)(x^2+y^2-R^2)<0.$$

On pourrait également exprimer une sphère creuse, dont les rayons intérieur et extérieur seraient r et R, par l'inégalité

$$(x^2+y^2+z^2-r^2)(x^2+y^2+z^2-R^2)<0.$$

J. D. G.

dans l'espace un certain lieu, circonscrit par une surface particulière ; c'est la détermination de cette surface, enveloppe ou limite de toutes les autres, qui va présentement nous occuper.

Remarquons d'abord qu'en général les surfaces consécutives du système se coupent toutes deux à deux, suivant des courbes qui sont elles-mêmes consécutives et qui sont en même temps les lignes de contact de ces surfaces avec l'enveloppe cherchée ; d'où il suit que l'ensemble de ces courbes forme l'enveloppe elle-même (*).

Soit, par exemple, l'équation

$$(x-R\text{Cos}.t)^2+(y-R\text{Sin}.t)+z^2=r^2 \ ;$$

elle représente évidemment un système de sphères du rayon r dont les centres sont situés sur une circonférence tracée sur le plan des xy, ayant son centre à l'origine et son rayon égal à R ; chacune de ces sphères coupe celle qui lui est consécutive suivant un cercle dont le rayon est r, dont le centre est sur le plan des xy à une distance R de l'origine, et dont le plan passe par l'axe des z. Le lieu de toutes les intersections est une surface annulaire, enveloppe de l'espace occupé par toutes les sphères.

Soit, en général,

$$\text{F}(x\,,y\,,z\,,t_1)=0$$

(*) C'est à Monge qu'on doit la considération de l'enveloppe des surfaces déduites d'une même équation contenant un paramètre variable. Cet illustre géomètre y a été conduit en cherchant à interpréter les solutions singulières des équations différentielles partielles du premier ordre, lesquelles résultent, comme on le sait, de l'élimination de la constante arbitraire entre l'intégrale générale et sa différentielle par rapport à cette constante. Monge a encore considéré le cas de plusieurs paramètres variables ; mais, en les supposant liés par tel nombre de relations qu'il n'en reste qu'un seul d'indépendant. On voit que le point de vue sous lequel nous considérons ici les équations à paramètres variables est fort différent du sien.

(*Note de l'auteur.*)

l'équation commune à toutes les surfaces enveloppées. On sait que l'intersection de l'une quelconque de ces surfaces avec celle qui lui est consécutive, intersection qu'avec Monge nous appellerons à l'avenir la *Caractéristique de la surface limite*, sera donnée par le système des deux équations

$$F(x,y,z,t_1)=0\,,\qquad \frac{d.F(x,y,z,t_1)}{dt_1}=0\,;$$

et que l'élimination de t_1 entre ces deux équations donnera une équation

$$F_1=0\,,$$

en x, y, z seulement qui sera l'équation de l'enveloppe du système de surfaces exprimé par l'équation proposée.

S'il existait un second paramètre t_2, il se retrouverait dans $F_1=0$, et alors l'équation de l'enveloppe résultant des variations de t_1 et t_2 serait donnée par l'élimination de t_2 entre les deux équations

$$F_1=0\qquad \frac{dF^1}{dt_2}=0\,;$$

et il faudrait poursuivre ainsi, pour parvenir à l'enveloppe finale, quel que pût être le nombre des paramètres variables.

Parvenus donc à l'équation de l'avant-dernière enveloppe, équation que nous représenterons par $F_{n-1}=0$, ne renfermant plus qu'un seul paramètre t_n, si l'on écrit

$$F_{n-1}=0\,,\quad \frac{dF_{n-1}}{dt_n}=0\,,\quad \frac{d^2F_{n-1}}{d^2t_n}\,,\quad \frac{d^3F_{n-1}}{d^3t_n}\,;$$

l'ensemble des deux premières équations appartiendra aux caractéristiques de l'enveloppe finale; de sorte que l'élimination de t_n entre elles, donnera l'équation de cette enveloppe. Si l'on élimine t_n entre les trois premières, on obtiendra deux équations en x, y, z qui appartiendront à l'arête de rebroussement de l'enveloppe; et si enfin on élimine t_n entre toutes les quatre, les trois équations résultantes en x, y, z appartiendront aux points de rebroussement de cette arête (*).

Si, d'après ces principes, on veut parvenir à l'équation de l'enveloppe des sphères exprimées par l'équation

$$(x-R\mathrm{Cos}.t)^2+(y-R\mathrm{Sin}.t)^2+z^2=r^2\ ;$$

on la différentiera d'abord par rapport au paramètre t, ce qui donnera

$$x\mathrm{Sin}.t=y\mathrm{Cos}.t\ ,$$

et le système de cette équation et de la précédente appartiendra aux caractéristiques de l'enveloppe cherchée.

De la dernière on tirera ensuite

$$\mathrm{Cos}.t=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ , \qquad \mathrm{Sin}.t=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,$$

valeurs qui, substituées dans la première, donneront pour l'équation de l'enveloppe

$$(x^2+y^2+r^2-z^2-R^2)^2=4(x^2+y^2)(r^2-z^2)\ ;$$

équation que l'on reconnaîtra facilement pour celle de la surface annulaire, lieu de toutes les caractéristiques.

(*) On peut voir, à la page 361 du III.e volume du présent recueil, comment toutes ces choses peuvent être nettement démontrées sans le secours des infiniment petits ou des limites, ou de tout autre genre de considérations métaphysiques équivalentes.

J. D. G.

Mais

Mais la détermination de l'équation de l'enveloppe, au moyen de l'élimination de t entre les deux équations

$$F(x, y, z, t)=0, \qquad \frac{d.F(x, y, z, t)}{dt}=0,$$

communes à toutes les caractéristiques, peut offrir diverses circonstances particulières, sur lesquelles il est bon d'être prévenu.

Et d'abord il pourrait se faire que la dernière de ces deux équations ne renfermât plus aucune des coordonnées x, y, z, auquel cas son premier membre serait une quantité constante ou une simple fonction de t; dans le premier cas, cette équation serait absurde, d'où il suit qu'il n'y aurait alors ni caractéristiques ni enveloppes. La proposée devrait être, dans ce cas, de la forme

$$\Phi(x, y . z)+At=0,$$

et il est aisé de voir qu'elle exprimerait tous les points de l'espace; puisque, quelque valeur qu'on donnât à x, y, z, on trouverait toujours une valeur réelle pour t, du moins en supposant, comme nous le faisons, que l'équation ne renferme point de radicaux. Ce serait, par exemple, le cas des plans exprimés par l'équation

$$z=mx+ny+t,$$

lesquels seraient tous parallèles, ou des sphères exprimées par l'équation

$$x^2+y^2+z^2=rt,$$

lesquelles seraient toutes concentriques.

Si le premier membre de la seconde équation se réduisait à une simple fonction de t, on ne pourrait, dans la recherche des caractéristiques, donner à t, dans la première équation, que les valeurs données par celle-ci; toutes les caractéristiques devraient donc se trouver sur un nombre déterminé de surfaces comprises dans la proposée ; ces surfaces ne se couperaient donc pas consécutivement, c'est-à-dire, en d'autres termes, qu'il n'y aurait pas de caractéristiques ni conséquemment de surface enveloppe proprement dite. On voit d'ailleurs que l'équation en t serait satisfaite, quelque valeur que l'on attribuât à x, y, z, pourvu qu'on y fît t égal à l'une quelconque de ces valeurs ; d'où l'on voit qu'alors cette équation exprimerait toutes les surfaces imaginables ; de sorte qu'alors les caractéristiques seraient toutes les courbes tracées à volonté sur les surfaces individuelles dont il a été question ci-dessus.

On peut remarquer que, dans le cas dont il s'agit, l'équation proposée ne saurait être que de la forme

$$\Phi(x, y, z)+\mathrm{f}(t)=0 ;$$

qu'alors sa différentielle, par rapport à t, étant simplement $\frac{\mathrm{d.f}(t)}{\mathrm{d}t}=0$, doit donner pour t les valeurs qui répondent aux *maxima* et *minima* de la fonction $\mathrm{f}(t)$ et conséquemment des surfaces comprises dans l'équation proposée. Il n'y a donc ici qu'une ou plusieurs surfaces qui bornent l'espace occupé par toutes les autres, mais qui les enveloppe sans les toucher. C'est, en particulier, le cas des sphères comprises dans l'équation

$$x^2+y^2+z^2=\left(\frac{r^3}{r^2-t^2}\right)^2 ;$$

lesquelles se trouvent toutes comprises entre une sphère dont le rayon est nul et une autre dont le rayon est r.

Il pourrait aussi se faire que la différentielle par rapport à t fût de la forme

$$\mathrm{f}(x, y, z)=0 ,$$

c'est-à-dire, indépendante de t, ce qui ne pourrait avoir lieu qu'autant que la proposée serait de la forme

$$\Phi(x, y, z)+t\mathrm{f}(x, y, z)=0\ ;$$

dans ce cas, le système des deux équations se réduirait au système de ces deux-ci :

$$\Phi(x, y, z)=0\ ,\qquad \mathrm{f}(x, y, z)=0\ ;$$

il n'y aurait donc alors qu'une caractéristique unique, suivant laquelle se couperaient toutes les surfaces du système qui n'auraient point d'enveloppe et embrasseraient l'espace entier ; attendu que tout système de valeurs de x, y, z donnerait pour t une valeur réelle. C'est, par exemple, le cas d'une suite de plans passant par la même droite.

Enfin l'équation obtenue par la différentiation du paramètre pourrait être de la forme

$$\varphi(t).\mathrm{f}(x, y, z)=0\ ;$$

elle pourrait alors être satisfaite des deux manières,

$$\varphi(t)=0\ ,\qquad \mathrm{f}(x, y, z)=0\ ,$$

ce qui offrirait la combinaison de deux des cas précédens. Ainsi on aurait à la fois ici une caractéristique unique, sans enveloppe proprement dite, et une ou plusieurs surfaces circonscrivant l'espace occupé par toutes les autres, mais sans les toucher.

Lorsque le système est de nature à être terminé par plusieurs enveloppes, l'équation résultant de l'élimination de t entre la proposée et sa différentielle prise par rapport à ce paramètre, se décompose en facteurs rationnels fonctions de x, y, z, ou du moins de quelques-unes de ces variables ; et ces facteurs égalés séparément à zéro donnent les équations des diverses enveloppes.

Par exemple, si la proposée appartient à une suite de cylindres droits de même rayon, dont les axes, situés dans un même plan, passent tous par un même point de ce plan, le corps engendré sera limité d'une part par une sphère ayant même rayon que ces cylindres et son centre au point commun à leurs axes, et d'une autre, par deux plans parallèles à celui des axes, et distans de part et d'autre de celui-là d'une quantité égale à ce même rayon.

Le plan des axes étant le plan des xy, et leur point commun étant l'origine, si r est le rayon commun, l'équation commune à tous les cylindres sera

$$(x-ty)^2+(1+t^2)(z^2-r^2)=0\ ,$$

dont la différentielle par rapport à t sera

$$txy(y^2+z^2-r^2)=0\ ,$$

éliminant donc t entre l'une et l'autre, il viendra

$$(z^2-r^2)(x^2+y^2+z^2-r^2)=0\ ,$$

équation qui est satisfaite par ces trois-ci :

$$z-r=0\ ,\qquad z+r=0\ ,\qquad x^2+y^2+z^2=r^2\ ,$$

qui appartiennent en effet à deux plans et à une sphère.

§. III.

Nous venons de voir qu'une équation entre trois coordonnées x, y, z et tant de paramètres variables qu'on voudra est en général satisfaite par les coordonnées d'une suite continue de points en nombre infini dont le système forme dans l'espace un certain corps que l'on peut dire être exprimé par cette équation, et nous avons enseigné ce qu'il fallait faire pour déterminer la surface par laquelle ce corps est terminé. Renversons présentement le problème et proposons-nous de déterminer l'équation d'un corps au moyen de celle de la surface qui le termine (*).

Soit $F(x, y, z)=0$ l'équation de la snrface donnée ; d'après ce que nous avons déjà dit, l'équation cherchée $U=0$ devra renfermer x, y, z, avec autant de paramètres variables t, u, v,.... que l'on voudra admettre de mouvemens différens dans la génération du corps terminé par la surface donnée. De plus, cette équation devra être telle qu'en éliminant un premier paramètre entre elle et sa différentielle prise par rapport à ce paramètre, puis un second paramètre entre l'équation résultante et sa différentielle prise par rapport à celui-ci, et ainsi de suite, on parvienne enfin, après l'élimination du dernier paramètre, à l'équation donnée $F(x, y, z)=0$.

On voit donc que le problème est d'abord indéterminé à raison du nombre des paramètres variables qu'on peut admettre dans la composition de la fonction U ; mais, lors même qu'on a statué sur le nombre de ces paramètres, il demeure encore indéterminé relativement à la forme de cette fonction qu'ou peut choisir telle qu'on voudra, sous la seule condition d'y admettre, avec un coefficient arbitraire, un terme que les différentiations successives ne fassent pas disparaître, et dont on déterminera finalement le coefficient, en égalant le résultat de la dernière élimination à $F(x, y, z)$.

Cette grande indétermination du problème tient à ce qu'un corps peut être engendré d'une infinité de manières par une infinité de surfaces différentes. Ainsi, pour n'en citer qu'un exemple, si l'on

(*) Si, comme nous l'avons proposé ci-dessus, on veut employer à cela des inégalités, la chose deviendra extrêmement facile ; l'équation d'une surface étant $F(x, y, z)=0$, l'inégalité du corps qu'elle termine sera $F(x, y, z)>0$ ou $F(x, y, z)<0$ suivant qu'on voudra que le corps soit situé d'un côté ou de l'autre de la surface dont il s'agit.

J. D. G.

à une série de surfaces toutes inscriptibles à un même cylindre, et si on les fait avancer dans l'espace suivant la droite qui, passant par chacune d'elles, se confondrait avec l'axe du cylindre, si elles lui étaient inscrites, quelque différence qu'il y ait d'ailleurs entre ces mêmes surfaces, leur mouvement engendrera également ce cylindre auquel chacune d'elles est inscriptible.

Si l'on exigeait simplement que l'équation $F(x, y, z)=0$ fût celle d'une limite du corps enveloppant l'espace occupé par toutes les surfaces cherchées, sans les toucher toutes, et conséquemment sans en être une enveloppe proprement dite, on parviendrait bien simplement au but en choisissant l'équation commune à toutes ces surfaces de la forme

$$F(x, y, z)+t^{2m}=0 .$$

On voit, en effet, sur-le-champ, que cette équation satisfait à la condition demandée. Nous prenons l'exposant de t pair, parce qu'autrement l'équation appartiendrait à tous les points de l'espace.

Ainsi, par exemple, l'équation d'un corps sphérique, rapporté à des axes rectangulaires qui passent par son centre, pourra être choisie de la forme

$$x^2+y^2+z^2-r^2+t^2=0 ;$$

équation qu'il est d'ailleurs facile d'interpréter *à priori*; car, mise sous la forme

$$x^2+y^2+z^2=R^2-t^2 ,$$

on voit qu'elle appartient à une suite d'enveloppes sphériques concentriques ayant des rayons croissant, sans interruption, de o à r; d'où il suit qu'elle sera satisfaite par tous les points et par les seuls points de l'intérieur d'une sphère ayant son centre à l'origine et son rayon égal à r.

Si, au lieu d'avoir ajouté r^2, nous l'eussions retranché, l'équation aurait appartenu à une suite d'enveloppes sphériques concentriques ayant leurs rayons croissant, sans interruption, de r à l'infini; d'où il suit qu'elle aurait été satisfaite par tous les points et par les seuls points de l'espace extérieurs à une sphère ayant son centre à l'origine et son rayon égal à r (*).

Lorsqu'on peut connaître directement l'enveloppe et les lois de sa génération, on peut facilement en déduire l'équation du corps enveloppé, mais souvent sous une forme plus compliquée. Si, par exemple, une sphère d'un rayon égal à r fait une révolution autour de l'une quelconque de ses tangentes, elle engendrera une surface annulaire qui, faisant à son tour une révolution autour d'une perpendiculaire quelconque, menée à cette tangente par son point de contact, donnera naissance à une nouvelle sphère d'un rayon égal à $2r$; et voici la manière la plus simple d'obtenir l'équation du corps terminé par celle-ci.

On considérera pour cela que notre surface sphérique est l'enveloppe de la portion de l'espace occupée par toutes les sphères d'un rayon égal à r qui passeraient constamment par son centre. Prenant donc ce centre pour origine, et désignant par t, u, v les coordonnées variables du centre de la sphère mobile, l'équation du corps dont il s'agit sera

$$(x-t)^2+(y-u)^2+(z-v)^2=r^2 ;$$

mais t, u, v ne seront point indépendantes et devront être assujetties à la condition

---

(*) Tout ceci rentre exactement dans le contenu de la précédente note; car la double équation $F(x, y, z)\pm t^{2m}=0$ dans laquelle t est une quantité réelle indéterminée, équivaut évidemment à la double inégalité $F(x, y, z)\lesseqgtr 0$.

J. D. G.

$$t^2+u^2+v^2=r^2 ,$$

ce qui réduira d'abord notre équation à

$$x^2+y^2+z^2-2(tx+uy+vz)=0 .$$

Tirant ensuite de l'équation de condition la valeur de v pour la substituer dans celle-ci, elle deviendra

$$x^2+y^2+z^2-2(tx+uy)=2z\sqrt{r^2-t^2-u^2} ,$$

puis, en chassant le radical,

$$z^4+2(x^2+y^2-2tx-2uy+2t^2+2u^2-2r^2)z^2+(x^2+y^2-2tx-2uy)^2=0 ;$$

équation équivalente à l'équation

$$x^2+y^2+z^2-4r^2+v^2=0 ;$$

bien qu'elle soit beaucoup plus compliquée (*).

Par des considérations analogues, on parviendrait à former l'équation des corps terminés par deux ou un plus grand nombre de surfaces

(*) Cette différence paraît tenir à ce que l'une des équations exprime chacun des points du corps une infinité de fois, tandis que l'autre ne l'exprime qu'une fois seulement. Il est évident en effet que, dans le premier mode de génération, il peut passer par un même point une infinité de sphères de la série, tandis que, dans le second, il n'en peut passer qu'une seule par ce point.

J. D. G.

surfaces dont les équations seraient données ; il suffirait pour cela de faire coexister les équations des corps auxquels appartiendraient ces diverses surfaces. Ainsi, généralement parlant, un corps sera exprimé par autant d'équations qu'il y aura de surfaces indépendantes qui lui serviront de bornes. Cependant si la nature de ces surfaces est telle qu'elles puissent toutes résulter d'un même mode de génération, le corps sera exprimé par une équation unique.

Si, par exemple, il s'agit d'une sphère creuse dont les surfaces intérieure et extérieure soient concentriques et données par les deux équations

$$x^2+y^2+z^2=4a^2\ , \qquad x^2+y^2+z^2=4a'^2\ ,$$

on remarquera que ces deux surfaces sont les enveloppes de l'espace occupé par une infinité de sphères égales d'un rayon $a-a'$, dont les centres seraient sur une sphère ayant pour équation

$$x^2+y^2+z^2=(a+a')^2\ .$$

En désignant donc par t, u, v les coordonnées variables des centres de ces sphères, l'équation unique du corps dont il s'agit serait

$$(x-t)^2+(y-u)^2+(z-v)^2=(a-a')^2$$

équation dans laquelle les trois paramètres t, u, v seraient liés entre eux par la condition

$$t^2+u^2+v^2=(a+a')^2\ .$$

Cette condition réduirait d'abord l'équation à

$$x^2+y^2+z^2-2(tx+uy+vz)+4aa'=0 ;$$

et ensuite, par l'élimination de v, à

$$\{x^2+y^2+z^2-2(tx+uy)+4aa'\}^2+4z^2\{(t^2+u^2)-(a+a')^2\}=0 . \text{ (*)}$$

On peut aussi considérer ce même corps comme composé d'une suite de sphères concentriques dont les rayons croissent d'une manière continue de a' à a ; son équation sera alors simplement

$$x^2+y^2+z^2+(t-a)(t-a')=0 ,$$

qui ne renferme plus qu'un seul paramètre variable.

§. IV.

On voit, par tout ce qui précède, qu'une équation

$$\mathrm{F}(x, y, z, t, u, v, \ldots\ldots)=0 ,$$

renfermant n paramètres variables, appartient en général à un corps solide, terminé par une surface dont l'équation peut être déduite

---

(*) Il a déjà été remarqué que, sans le secours d'aucun paramètre, cette sphère creuse peut être exprimée par sa seule inégalité

$$(x^2+y^2+z^2-4a^2)(x^2+y^2+z^2-4a'^2)<0 .$$

J. D. G.

de celle-là ; et qu'à l'inverse, cette dernière équation étant donnée, on peut toujours en conclure l'équation du corps limité par la surface à laquelle elle appartient, avec cette seule différence que, tandis que le premier problème est déterminé, l'autre au contraire est susceptible d'une infinité de solutions, et peut toujours, en particulier, être résolu par une équation ne renfermant qu'un seul paramètre variable.

Il suit donc de là qu'une équation qui renferme n paramètres variables peut être remplacée par une équation équivalente n'en renfermant qu'un seul. Mais, pour exécuter cette transformation, il n'est pas nécessaire de remonter jusqu'à l'équation de la dernière enveloppe, pour en conclure ensuite celle du corps enveloppé ; car le corps engendré par la surface primitive en vertu de l'existence de n paramètres l'est aussi par la première enveloppe, en vertu de l'existence des $n-1$ paramètres restans, ou par la seconde, en vertu de l'existence des $n-2$ paramètres qui suivent les deux premiers, et ainsi de suite, et par conséquent par l'avant-dernière enveloppe, en vertu de l'existence du dernier paramètre ; d'où il suit que l'équation de la surface primitive est équivalente à toutes celles qui la suivent, excepté la dernière.

Si quelques-unes des équations différentielles successives tombaient dans les cas d'exception que nous avons discutés ci-dessus (§. II), le résultat de l'élimination donnerait une surface limite qui ne serait pas proprement une enveloppe ; mais tout ce qui précède serait encore applicable à ce cas ; car la détermination des surfaces limites est assujettie aux mêmes procédés que la détermination des enveloppes.

§. V.

Tout ce que nous avons dit jusqu'ici de la géométrie de l'espace et des équations entre trois coordonnées et un nombre quelconque de paramètres variables, peut être appliqué, sans aucune restrictiou à la géométrie plane et aux équations entre deux coordonnées et un nombre quelconque de paramètres variables ; c'est-à-dire que de telles équations expriment toujours, quel que soit d'ailleurs le nombre des paramètres, une portion limitée finie ou infinie du plan des coordonnées ; et que l'on peut toujours soit descendre de ces équations à celles des courbes qui terminent les surfaces planes qu'elles expriment, soit remonter de celles-ci aux premières ; mais tandis que le premier de ces deux problèmes est déterminé, l'autre, au contraire, est susceptible d'uue infinité de solutions.

Ainsi, pour n'en donner qu'un exemple simple, l'équation

$$x^2+y^2+(t-a)(t-a')=0\ ,$$

étant satisfaite par tous les points et par les seuls points de l'intérieur d'une couronne circulaire qui ayant son centre à l'origine a ses rayons intérieurs et extérieurs égaux à a' et a, on peut dire, en ce sens, que cette équation exprime la surface de cette couronne (*).

On voit par là que, si dans l'équation

(*) La surface de cette même couronne peut aussi être très-simplement exprimée, sans le secours d'aucun paramètre par l'inégalité

$$(x^2+y^2-a^2)(x^2+y^2-a'^2)<0\ .$$

On peut faire plus encore et on peut, par le système d'une équation et d'une inégalité, exprimer une portion limitée, finie ou infinie, d'une surface courbe. Ainsi, par exemple, le système.

$$x^2+y^2+z^2=r^2\ ,\qquad x^2+y^2<a^2\ ,$$

exprime évidemment la surface d'une calotte sphérique qui, ayant son centre à l'origine et son rayon égal à r, aura son pôle sur l'axe des z et le rayon de sa base égal à a.

J. D. G.

$$F(x, y, z)=0,$$

d'une surface courbe, au lieu de considérer z comme une troisième coordonnée, on veut le considérer comme un paramètre variable, cette équation exprimera tous les points et les seuls points de la projection, finie ou infinie, de la surface courbe sur le plan des xy.

Et ce que nous disons ici de la géométrie à deux dimensions et des équations entre deux coordonnées et un nombre quelconque de paramètres variables, peut encore être appliqué à la géométrie à une dimension et aux équations entre une seule ordonnée et tant de paramètres variables qu'on voudra ; c'est-à-dire que de telles équations expriment toujours, quel que soit d'ailleurs le nombre des paramètres, une portion limitée, finie ou infinie, de la droite indéfinie sur laquelle se comptent les ordonnées ; et qu'on peut toujours soit descendre de ces équations à celles des points qui terminent les portions de droites qu'elles expriment, soit remonter de celles-ci aux premières ; mais, dans ce dernier cas, le problème est indéterminé.

Ainsi, par exemple, l'équation

$$(x-a)(x-a')+t^2=0,$$

étant satisfaite par tous les points et par les seuls points de l'axe des x compris entre les limites $x=a$ et $x=a'$; on peut dire que cette équation exprime toute la portion de cet axe comprise entre ces mêmes limites (*).

(*) On peut exprimer cette portion de l'axe, sans le secours d'aucun paramètre variable, par la simple inégalité

On voit par là que si, dans l'équation

$$F(x, y)=0 ,$$

d'une courbe plane, au lieu de considérer y comme un ordonnée, on la considère comme un paramètre variable, cette équation exprimera tous les points et les seuls points de la projection, finie ou infinie, de la courbe sur l'axe des x.

§. VI.

On voit donc, en résumé, que toute équation, entre un nombre quelconque de variables, a toujours une signification géométrique, et peut indistinctement être considérée comme exprimant ou un corps terminé par une surface courbe, ou une surface plane terminée par une ligne courbe, ou enfin une ligne droite comprise entre des points donnés ; et c'est tout ce que nous

---

$$(x-a)(x-a')<0 .$$

On peut faire plus encore et on peut, par le système d'une équation et d'une inégalité, exprimer une portion limitée, finie ou infinie, d'une courbe plane. Ainsi, par exemple, le système.

$$x^2+y^2=r^2 , \qquad x^2<a^2 ,$$

exprime un arc de cercle dont le centre est à l'origine et le rayon égal à r, ayant son milieu sur l'axe des y et sa corde parallèle à l'axe des x et égale à $2a$.

J. D. G.

avons en vue d'établir dans l'essai que l'on vient de lire (*).

(*) Nous croyons devoir saisir cette occasion d'indiquer un autre usage très-important des paramètres variables, dans les équations entre des coordonnées, et qui serait d'une merveilleuse utilité dans les recherches physico-mathématiques.

Jusqu'ici la géométrie a fait abstraction de toutes les propriétés physiques de l'étendue et n'a considéré les points qui la compose comme ne différant les uns des autres que par leur situation seulement; mais il est clair que, si l'on a une équation de la forme

$$F(x\,,\,y\,,\,z\,,\,t)=0\,,$$

dans laquelle t est un paramètre variable, cette équation peut être considérée comme exprimant un milieu hétérogène, et t comme exprimant l'intensité d'une propriété physique de ce milieu en chacun de ses points $(x\,,\,y\,,\,z)$, propriété qui pourra être indistinctement sa densité, son état hygrométrique, sa température, son pouvoir refringent, sa tension électrique, etc., suivant la nature des questions qu'on aura à traiter.

Nous savons très-bien que souvent les géomètres ont fait usage de semblables équations, mais seulement dans des cas particuliers; tandis que, quelle que puisse être la cause d'hétérogénéité d'un milieu donné, ce milieu, en sa seule qualité de milieu hétérogène doit avoir des propriétés générales qu'il serait intéressant de découvrir une fois pour toutes, et de réduire en formules.

Certes, avant l'invention de la géométrie analitique, les géomètres avaient souvent déterminé les plans tangens, les normales, les surfaces osculatrices, etc., des surfaces individuelles qu'ils avaient à considérer; mais il leur fallait, à chaque nouvelle recherche de ce genre, tirer leurs formules de la considération des propriétés particulières des surfaces dont ils s'occupaient, tandis qu'aujourd'hui, ils n'ont, pour parvenir au même but, que des substitutions à faire dans des formules construites à l'avance.

Ce que nous désirerions donc, parce que nous pensons qu'il en résulterait une très-grande simplification dans la recherche des propriétés physiques des corps, ce serait qu'il existât des traités de géométrie analitique de l'étendue hétérogène, dans lesquels on exposerait toutes les propriétés gé-

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution des problèmes d'analise transcendante, proposés à la page 247 du XIII.e volume du présent recueil ;

Par M. W. H. Talbot, membre de la société philosophique de Cambridge.

V page 187

1. Pour sommer la série

$$S=\frac{a\text{Cos}.x}{1}-\frac{a^3\text{Cos}.3x}{3}+\frac{a^5\text{Cos}.5x}{5}-\frac{a^7\text{Cos}.7x}{7}+\ldots$$

posons $\text{Cos}.x=\frac{1}{2}(u+v)$, avec la relation $uv=1$; nous aurons, comme l'on sait,

---

nérales dont jouit cette espèce d'étendue ; car certainement, de même que toute surface courbe, quelle qu'en soit la nature, a en tous ses points deux courbures principales, *maximum* et *minimum*, perpendiculaires l'une à l'autre ; un milieu dont la densité varie suivant une loi mathématique quelconque, doit avoir en tous ses points quelque propriété indépendante de la nature particulière de cette loi.

Nous ne donnons ceci, au surplus, que comme un exemple, et la géométrie nouvelle que nous concevons et dont nous désirons voir composer des traités aurait bien d'autres objets à embrasser.

J. D. G.

Cos.nx

$$\text{Cos.}nx=\tfrac{1}{2}(u^n+v^n)\ ;$$

de sorte qu'en posant

$$U=\frac{au}{1}-\frac{a^3u^3}{3}+\frac{a^5u^5}{5}-\frac{a^7u^7}{7}+\ldots\ ,$$

$$V=\frac{av}{1}-\frac{a^3v^3}{3}+\frac{a^5v^5}{5}-\frac{a^7v^7}{7}+\ldots\ ,$$

nous aurons

$$S=\tfrac{1}{2}(U+V)\ ;$$

cela donne

$$U=\text{Arc}(\text{Tang.}=au)\ ,\qquad V=\text{Arc}(\text{Tang.}=av)\ ;$$

mais, en renversant le théorème connu,

$$\text{Tang.}(p+q)=\frac{\text{Tang.}p+\text{Tang.}q}{1-\text{Tang.}p\,\text{Tang.}q}\ ,$$

on a

$$\text{Arc}(\text{Tang.}=p')+\text{Arc}(\text{Tang.}=q')=\text{Arc}\left(\text{Tang.}=\frac{p'+q'}{1-p'q'}\right)\ ;$$

et, par suite,

$$\text{Arc}(\text{Tang.}=au)+\text{Arc}(\text{Tang.}=av)=\text{Arc}\left(\text{Tang.}=\frac{a(u+v)}{1-a^2uv}\right)\ ;$$

remettant donc $2\text{Cos.}x$ pour $u+v$ et 1 pour uv, il viendra finalement

$$S=\tfrac{1}{2}\,\text{Arc}\left(\text{Tang.}=\frac{2a\text{Cos}.x}{1-a^2}\right).$$

II. Pour sommer la seconde série

$$S=\frac{\text{Cos}.x}{1}+\frac{1}{2}\;\frac{\text{Cos}.3x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\;\frac{\text{Cos}.5x}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\;\frac{\text{Cos}.7x}{7}+\ldots\,;$$

nous poserons encore $\text{Cos}.x=\frac{1}{2}(u+v)$, avec la condition $uv=1$; alors, en posant

$$U=u+\frac{1}{2}\cdot\frac{u^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{u^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{u^7}{7}+\ldots\ldots=\text{Arc}(\text{Sin}.=u)\,,$$

$$V=v+\frac{1}{2}\cdot\frac{v^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{v^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{v^7}{7}+\ldots\ldots=\text{Arc}(\text{Sin}.=v)\,,$$

nous aurons

$$S=\tfrac{1}{2}(U+V)=\tfrac{1}{2}\{\text{Arc}(\text{Sin}.=u)+\text{Arc}(\text{Sin}.=v)\};$$

donc

$$\left.\begin{array}{l}u=\text{Sin}.U\\ v=\text{Sin}.V\end{array}\right\}\ \text{d'où}\ \left\{\begin{array}{l}\sqrt{1-u^2}=\text{Cos}.U\,,\\ \sqrt{1-v^2}=\text{Cos}.V\,,\end{array}\right.$$

donc aussi

$$\text{Sin}.2S=\text{Sin}.(U+V)=u\sqrt{1-v^2}+v\sqrt{1-u^2}\,,$$

ou, en quarrant,

$$\text{Sin}.^2 2S=u^2(1-v^2)+v^2(1-u^2)+2uv\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)}\,,$$

en développant et observant que $uv=1$, et que conséquemment

$$u^2+v^2=(u+v)^2-2uv=(u+v)^2-2=4\text{Cos.}^2x-2\ ,$$

on trouvera

$$\text{Sin.}^2 2S=4\text{Cos.}^2x-4+2\sqrt{4-4\text{Cos.}^2x}=4\text{Sin.}x-4\text{Sin.}^2x\ ,$$

donc

$$\text{Sin.}2S=2\sqrt{\text{Sin.}x-\text{Sin.}^2x}\quad \text{et}\quad 2S=\text{Arc}(\text{Sin.}=2\sqrt{\text{Sin.}x-\text{Sin.}^2x})\ ,$$

c'est-à-dire,

$$S=\tfrac{1}{2}\text{Arc}(\text{Sin.}=2\sqrt{\text{Sin.}x-\text{Sin.}^2x})\ .\ (*)$$

(*) M. Querret trouve (tom. XIII, pag. 357)

$$S=\tfrac{1}{2}\text{Arc}(\text{Cos.}=2\text{Sin.}x\text{Cos.}x-1)\ ,$$

résultat inconciliable avec celui que nous venons d'obtenir. Afin donc de découvrir quel est celui des deux qui doit être admis, recourons à des cas particuliers. Si, dans la série, nous faisons, tour-à-tour, $x=0$ et $x=\frac{\varpi}{1}$ elle deviendra, dans le premier cas,

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}+\ldots..\ ,$$

développement connu de $\frac{\varpi}{2}$, tandis que, dans le second, elle deviendra zéro; et c'est aussi ce que donne notre formule sommatoire; tandis que celle de M. Querret donne constamment, dans les mêmes circonstances,

$$S=\frac{\varpi}{2}\ .$$

III. Pour sommer la troisième série

$$S=\frac{\text{Cos}.x\text{Cos}.y}{1}-\frac{\text{Cos}.2x\text{Cos}.2y}{2}+\frac{\text{Cos}.3x\text{Cos}.3y}{3}-\ldots\ldots,$$

faisant d'abord, comme ci-dessus,

$$\text{Cos}.x=\tfrac{1}{2}(u+v)\,,\qquad uv=1\;;$$

en posant

$$U=\frac{u\text{Cos}.y}{1}-\frac{u^2\text{Cos}.2y}{2}+\frac{u^3\text{Cos}.3y}{3}-\frac{u^4\text{Cos}.4y}{4}+\ldots\ldots,$$

$$V=\frac{v\text{Cos}.y}{1}-\frac{v^2\text{Cos}.2y}{2}+\frac{v^3\text{Cos}.3y}{3}-\frac{v^4\text{Cos}.4y}{4}+\ldots\ldots;$$

nous aurons

L'erreur de cet habile géomètre paraît provenir de ce qu'après avoir posé (page 356)

$$\text{Sin}.P=\text{Cos}.x+\sqrt{-1}\text{Sin}.x\,,$$

il en conclut ensuite

$$\text{Cos}.P=\sqrt{-2\sqrt{-1}\text{Sin}.x\text{Cos}.x}\,,$$

tandis qu'on doit avoir

$$\text{Cos}.P=\sqrt{2\text{Sin}.x(\text{Sin}.x-\sqrt{-1}\text{Cos}.x)}\,.$$

On est facilement exposé à ces sortes de méprises par l'emploi explicite des imaginaires, à raison de la complication des calculs. La méthode que nous employons ici n'est pas sujette à cet inconvénient.

Il y a, au surplus, une faute d'impression à la page 360, où le cosinus est devenu un sinus.

$$S=\tfrac{1}{2}(U+V)\ ;$$

de sorte que tout se réduira à sommer les séries U et V.

Pour y parvenir, nous poserons

$$\mathrm{Cos}.y=\tfrac{1}{2}(p+q)\ ,\qquad pq=1\ ;$$

alors, en faisant

$$P=\frac{up}{1}-\frac{u^2p^2}{2}+\frac{u^3p^3}{3}-\frac{u^4p^4}{4}+\ldots\ldots=\mathrm{Log}.(1+up)\,,$$

$$Q=\frac{uq}{1}-\frac{u^2q^2}{2}+\frac{u^3q^3}{3}-\frac{u^4q^4}{4}+\ldots\ldots=\mathrm{Log}.(1+uq)\,,$$

$$P'=\frac{vp}{1}-\frac{v^2p^2}{2}+\frac{v^3p^3}{3}-\frac{v^4p^4}{4}+\ldots\ldots=\mathrm{Log}.(1+vp)\,,$$

$$Q'=\frac{vq}{1}-\frac{v^2q^2}{2}+\frac{v^3q^3}{3}-\frac{v^4q^4}{4}+\ldots\ldots=\mathrm{Log}.(1+vq)\,,$$

nous aurons

$$U=\tfrac{1}{2}(P+Q)=\tfrac{1}{2}\{\mathrm{Log}.(1+up)+\mathrm{Log}.(1+uq)\}\,,$$

$$V=\tfrac{1}{2}(P'+Q')=\tfrac{1}{2}\{\mathrm{Log}.(1+vp)+\mathrm{Log}.(1+uq)\}\ ;$$

c'est-à-dire,

$$U=\tfrac{1}{2}\mathrm{Log}.(1+up)(1+uq)=\tfrac{1}{2}\mathrm{Log}.[1+(p+q)u+u^2]\ ,$$

$$V=\tfrac{1}{2}\mathrm{Log}.(1+vp)(1+vq)=\tfrac{1}{2}\mathrm{Log}.[1+(p+q)v+v^2]\ ,$$

ou encore

$$2U=\mathrm{Log}.(1+2u\mathrm{Cos}.y+u^2)\ ,\qquad 2V=\mathrm{Log}.(1+2v\mathrm{Cos}.y+v^2)\ ;$$

donc

$$4S=2U+2V=\text{Log.}(1+2u\text{Cos.}y+u^2)+\text{Log.}(1+2v\text{Cos.}y+v^2)\ ;$$

c'est-à-dire ,

$$4S=\text{Log.}(1+2u\text{Cos.}y+u^2)(1+2v\text{Cos.}y+v^2)\ ;$$

en développant et se rappelant que $uv=1$, cela donnera

$$4S=\text{Log.}[2+u^2+v^2+4(u+v)\text{Cos.}y+4\text{Cos.}^2y]\ ;$$

mais

$$u+v=2\text{Cos.}x\quad,\qquad u^2+v^2=(u+v)^2-2=4\text{Cos.}^2x-2\ ;$$

donc

$$4S=\text{Log.}4(\text{Cos.}^2x+2\text{Cos.}x\text{Cos.}y+\text{Cos.}^2y)=\text{Log.}4(\text{Cos.}x+\text{Cos.}y)^2$$

ou

$$4S=2\text{Log.}(2\text{Cos.}x+2\text{Cos.}y)\ ,$$

d'où finalement

$$S=\tfrac{1}{2}\text{Log.}2(\text{Cos.}x+\text{Cos.}y)=\tfrac{1}{2}\text{Log.}4\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(x+y)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(x-y)\ .$$

Nous avons donc , en résumé ,

$$1.^\circ\quad \frac{a\text{Cos.}x}{1}-\frac{a^3\text{Cos.}3x}{3}+\frac{a^5\text{Cos.}5x}{5}-\ldots=\tfrac{1}{2}\text{Arc}\left(\text{Tang.}=\frac{2a\text{Cos.}x}{1-a^2}\right)\ ,$$

$$2.^\circ\quad \frac{\text{Cos}\,x}{1}+\frac{1}{2}\,\frac{\text{Cos.}3x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{\text{Cos.}5x}{5}+\ldots=\tfrac{1}{2}\text{Arc}(\text{Cos.}=1-2\text{Sin.}x)\ ,$$

$$3.^\circ\quad \frac{\text{Cos}\,x\text{Cos}\,y}{1}-\frac{\text{Cos.}2x\text{Cos.}2y}{2}+\frac{\text{Cos.}3x\text{Cos.}3y}{3}-\ldots\ldots$$

$$=\tfrac{1}{2}\text{Log.}4\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(x+y)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(x-y)\ .$$

Il est aisé de parvenir , en suivant la même marche , à des sommes de séries beaucoup plus compliquées. Nous nous bornerons à en rapporter deux exemples , en nous dispensant de développer les calculs qui sont en tout semblables à ceux qu'on a vu ci-dessus.

On trouve, en premier lieu,

$$\frac{a\text{Cos}.x\text{Cos}.y}{1}-\frac{a^3\text{Cos}\,3x\text{Cos}.3y}{3}+\frac{a^5\text{Cos}.5x\text{Cos}.5y}{5}-\ldots$$

$$=\frac{1}{4}\,\text{Arc}\left\{\text{Tang.}=\frac{4a(1-a^2)\text{Cos}.x\text{Cos}.y}{(1+a^2)^2-4a^2(\text{Cos}.^2x\text{Cos}.^2y)}\right\}.$$

Dans le cas de $y=0$ ou $\text{Cos}.y=1$, cette somme devient celle de la première de nos trois séries, quoique sous une forme un peu différente.

On trouve, en second lieu,

$$\frac{a\text{Cos}.x}{1}+\frac{1}{2}\,\frac{a^3\text{Cos}.3x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{a^5\text{Cos}.x}{5}+\ldots=\frac{1}{2}\text{Arc}(\text{Cos}.=a-\sqrt{(1+a^2)^2-4a^2\text{Cos}.^2x})$$

qui se change immédiatement dans la seconde série, lorsqu'on y fait $a=1$.

Si, dans ces diverses séries, on attribue à x, y, a des valeurs particulières, on en fera dériver une multitude d'autres plus ou moins remarquables. La troisième, par exemple, en supposant $y=x$, devient

$$\frac{\text{Cos}.x}{1}-\frac{2\text{Cos}^22x}{2}+\frac{3\text{Cos}.^33x}{3}-\ldots=\frac{1}{2}\,\text{Log}.4\text{Cos}.x\,.$$

On trouve, plus généralement,

$$\frac{a\text{Cos}.^2x}{1}-\frac{a^2\text{Cos}.^22x}{2}+\frac{a^3\text{Cos}.^23x}{3}-\ldots=\frac{1}{4}\text{Log}.\{(1-a^2)^2+4a(1+a^2)^2\text{Cos}.^2x\}.$$

Rome (mai 1823).

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème d'optique.

Deux milieux transparens, séparés par une surface donnée (S), sont de telle nature que le sinus d'incidence dans l'un est au sinus de réfraction dans l'autre, dans le rapport donné de m à n.

En supposant que, dans l'un de ces milieux, il existe un faisceau (F) de rayons lumineux, se succédant sans interruption les uns aux autres, suivant une loi mathématique donnée quelconque; ces rayons, après s'être réfractés à la rencontre de la surface (S), formeront un nouveau faisceau (F′) dans lequel ils se succèderont aussi sans interruption suivant une loi mathématique tout-à-fait déterminée.

On demande si l'on ne pourrait pas présenter au faisceau (F) une suite de surfaces réfléchissantes (s), (s'), (s'')..... de telle nature et situation que les rayons, après la dernière réflexion, formassent le faisceau (F′).

En d'autres termes, la réfraction ne peut-elle pas, généralement parlant, être remplacée par une ou plusieurs réflexions ?

ANALISE TRANSCENDANTE.

Nouvelle méthode analitico-géométrique pour déterminer les propriétés de l'intégrale d'une équation différentielle du 1.er ordre à deux variables ;

Par M. J. L. Woisard, ancien élève de l'école polytechnique, répétiteur de mathématiques à l'école d'artillerie de Metz.

Si l'on désigne par $\varphi=0$ une équation entre deux variables, renfermant une constante arbitraire c, on pourra toujours supposer qu'elle représente une infinité de lignes, dont on obtiendra les équations individuelles en faisant varier c depuis l'infini négatif jusqu'à l'infini positif.

Si l'on élimine c entre

$$\varphi=0 \quad \text{et} \quad \frac{d\varphi}{dx}dx+\frac{d\varphi}{dy}dy=0,$$

et que, dans le résultat, on remplace $\frac{dy}{dx}$ par p, on parviendra à une équation en x, y et p que, pour abréger, nous représenterons par $\varphi'=0$.

Nous avons fait voir (*Annales*, tom. XIII, pag. 333—343) que l'équation $\varphi'=0$, en y considérant p comme une constante arbitraire, représente un système de lignes dont chacune rencontre toutes celles que représente l'équation $\varphi=0$, en un point pour lequel la tangente fait avec l'axe des x un angle déterminé par la valeur particulière que l'on suppose à p ; et la considération de cette sorte de transversales nous a conduit directement à la détermination des règles à suivre pour obtenir les solutions particulières des équations différentielles du premier ordre.

En considérant ainsi les équations $\varphi=0$ et $\varphi'=0$ comme représentant chacune un système de lignes déterminé par le système de lignes que l'autre représente, on trouvera souvent l'occasion d'appliquer des méthodes géométriques à la recherche des relations qui existent entre une équation différentielle et son intégrale ; ce qui, dans quelques circonstances, sera plus expéditif que l'emploi des méthodes purement analitiques, et pourra même conduire quelquefois à des résultats que l'usage exclusif de ces dernières n'eût pas fait apercevoir.

On a pu voir un exemple des avantages de cette manière d'envisager les équations différentielles du premier ordre, par la facilité avec laquelle elle nous a conduit à la théorie des solutions particulières. Nous nous proposons aujourd'hui d'en présenter quelques nouvelles applications, et nous commencerons par exposer deux méthodes générales dont on peut faire usage, quand on veut introduire des raisonnemens géométriques dans une question d'analise. Dans tout ce qui va suivre nous supposerons que les axes des coordonnées sont rectangulaires ; nous désignerons $\frac{dy}{dx}$ par p, et nous conserverons aux notations $\varphi=0$ et $\varphi'=0$ la signification indiquée ci-dessus.

1. *Première méthode.* Supposons que l'équation $\varphi=0$ soit donnée ; remplaçons-y c par des valeurs arbitraires c, c', c'', ... ; nous obtiendrons ainsi les équations d'une suite de lignes MN, M'N', M''N'', ... (fig. 1). Menons à chacune d'elles une tangente parallèle à une droite quelconque AB ; alors la suite MM'M''....... des

points de contact appartiendra (*Annales*, tom. XIII, pag. 336) à celle des transversales que représente l'équation $\varphi'=0$, lorsqu'on y fait $p=$Tang.BAX. En joignant ces points par des droites, on obtiendra un polygone ouvert, qui différera d'autant moins de la transversale à laquelle il se trouvera inscrit qu'on aura rendu plus petites les différences $c'-c$, $c''-c'$,.....; de sorte que l'étude des propriétés de ce polygone pourra conduire à la découverte des propriétés de la transversale elle-même ; et, comme d'ailleurs la direction AB est arbitraire, il suffira de la faire varier pour obtenir successivement toutes les lignes représentées par l'équation $\varphi'=0$, et parvenir ainsi à déterminer *à quelles conditions doit satisfaire une équation différentielle, pour que son intégrale satisfasse à des conditions données.*

2. *Seconde méthode.* Supposons, au contraire, que l'équation $\varphi'=0$ soit l'équation donnée. Remplaçons successivement p par des valeurs arbitraires p, p', p'',..... et nous obtiendrons une suite de transversales MN, M'N', M''N''..... (fig. 2). Par un point M, pris arbitrairement sur la première, soit menée une droite faisant avec l'axe des x un angle dont la tangente tabulaire soit p ; par le point où cette droite rencontre la seconde, soit menée une nouvelle droite faisant avec le même axe un angle dont la tangente tabulaire soit p', et soit continuée cette construction, en passant constamment de chaque transversale à celle qui la suit consécutivement, on obtiendra ainsi un polygone ouvert qui différera d'autant moins de celle MM'M''...... des lignes exprimées par l'équation $\varphi=0$ qui passe par le point M, qu'on aura rendu plus petites les différences $p'-p$, $p''-p'$,.....; et, comme d'ailleurs la situation du point de départ M sur MN est arbitraire, on pourra, par ce moyen, construire approximativement autant de courbes comprises dans l'équation $\varphi=0$ qu'on le voudra, et reconnaître ainsi *à quelles conditions doit satisfaire une équation intégrale, que pour sa différentielle satisfasse à des conditions données.*

Les deux méthodes que nous venons d'exposer sont générales et ramènent à des problèmes de géométrie plane toutes les questions qu'on peut se proposer sur les équations différentielles du premier ordre à deux variables et sur leurs intégrales. Il ne reste plus alors qu'à examiner, dans chaque cas particulier, si la solution géométrique offre moins de difficultés que l'emploi des méthodes analitiques ; et les applications que nous allons offrir au lecteur prouveront qu'il en est ainsi, en effet, dans un grand nombre de cas.

3. *PROBLÈME I. Quelle doit être la forme d'une équation différentielle, pour que son intégrale ne renferme les variables qu'au premier degré seulement ?*

Solution. Si $\varphi=0$ est une équation du premier degré en x et y, elle représentera un système de droites lesquelles pourront être parallèles ou tangentes à une même courbe ou concourantes en un même point.

Premier cas. Soient CD, C'D', C''D'',..... (fig. 3) les parallèles représentées par l'équation $\varphi=0$, et a la tangente tabulaire de l'angle qu'elles font avec l'axe des x. Conformément à la première méthode nous chercherons à mener à chacune d'elles une tangente parallèle à une droite quelconque AB. Si AB est parallèle à ces droites, ces tangentes se confondront avec elles dans toute leur longueur, et conséquemment la transversale représentée par $\varphi'=0$, pour la valeur $p=a$, sera une ligne tout-à-fait arbitraire ; d'où l'on voit déjà que l'équation $\varphi'=0$ doit être satisfaite d'elle-même, lorsqu'on y fait $p=a$, et qu'ainsi elle ne saurait être que de la forme $(p-a)^m k=0$; m étant un exposant positif quelconque. Si, en second lieu, AB n'est point parallèle à nos droites, on ne pourra, par aucun de leurs points, leur mener des tangentes parallèles à AB ; il faudra donc que l'équation $\varphi'=0$ ou $(p-a)^m k=0$ ne puisse être satisfaite par aucune valeur de p autre que a ; et, comme alors elle se réduit à $k=0$, il faudra que cette dernière soit impossible, quelque valeur qu'on attribue à p.

4. Par des raisonnemens analogues à ceux qui viennent d'être

employés, on s'assurera facilement que, lorsque l'équation $\varphi=0$ est de la forme

$$(y-ax-b)(y-a'x-b')(y-a''x-b'')\ldots\ldots\ldots=0\ ,$$

a, a', a'',...... étant des constantes absolues, et b, b', b'',....... des fonctions déterminées de la constante arbitraire c, l'équation $\varphi'=0$ doit être de la forme

$$(p-a)^m(p-a')^{m'}(p-a'')^{m''}\ldots\ldots k=0\ ,$$

m, m', m'',...... étant des nombres positifs quelconques, et k étant un facteur inutile, attendu qu'il ne peut devenir nul pour aucune valeur de p.

5. *Deuxième cas.* Soient CD, C'D', C''D'',.... (fig. 4) les droites représentées par l'équation $\varphi=0$; suivant la première méthode, nous chercherons à mener à chacune d'elles une tangente parallèle à la droite arbitraire AB. En essayant la construction sur les droites non parallèles à AB, la chose sera impossible; si, au contraire, on l'essaye sur les droites du système, en nombre limité, qui sont parallèles à AB, tous leurs points seront des points de contact; de sorte qu'en variant la direction de AB, les transversales que l'on obtiendra ne seront autres que les droites du système elles-mêmes; l'équation $\varphi'=0$ doit donc représenter les mêmes droites que représente l'équation $\varphi=0$; elle doit donc être de la forme $y=Mx+P$, M et P représentant des fonctions de p.

De plus, si dans l'équation $\varphi'=0$ on fait $p=\text{Tang.BAX}$, on devra obtenir celle des droites du système qui est parallèle à AB; on doit donc avoir, dans ce cas, $M=\text{Tang.BAX}$; or, cette condition ne saurait être satisfaite pour toutes les directions que peut prendre la droite AB qu'autant que M sera identiquement égal à p; donc finalement l'équation $\varphi'=0$ doit alors être de la forme $y=px+P$, P étant toujours une fonction de p.

6. Puisque les lignes représentées par les équations $\varphi=0$ et $\varphi'=0$ se confondent alors, ces deux équations peuvent être rendues identiques en y faisant $p=c$; donc on obtiendra l'intégrale de l'équation $y=px+P$, en y remplaçant simplement p par la constante arbitraire c.

Troisième cas. Il est évident que ce cas rentre entièrement dans le second, dont il se déduit en supposant que l'enveloppe des droites du système se réduit à un point. Tout ce que nous venons de dire doit donc lui être applicable.

7. *PROBLÈME II. Quelle doit être la forme de l'équation intégrale, pour que l'équation différentielle soit de la forme* $y=ax+P$, a *étant une constante absolue, et* P *une fonction déterminée de* p ?

Solution. Conformément à la seconde méthode, nous donnerons successivement à p les valeurs p, p', p'',..... ; il en résultera pour P les valeurs P, P', P'',..... ; nous construirons les droites parallèles CD, C'D', C''D'',..... (fig. 5) données par les équations

$$y=ax+P\,,\qquad y=ax+P'\,,\qquad y=ax+P''\,,\ldots\ldots\ldots$$

Par un point M, pris arbitrairement sur CD, nous menerons une droite MM' faisant avec l'axe des x un angle dont la tangente tabulaire soit p, puis par le point M' de C'D' une droite M'M'' faisant avec le même axe un angle dont la tangente tabulaire soit p' ; et ainsi de suite. Nous obtiendrons ainsi un polygone MM'M''..... ayant pour limite une des courbes représentées par l'équation $\varphi=0$.

Si ensuite au point M nous substituons un autre point N de CD, nous obtiendrons un nouveau polygone NN'N''..... dont les côtés seront égaux et parallèles à ceux du premier, et dont la limite sera encore une des courbes représentées par l'équation $\varphi=0$. Il n'en faut pas davantage pour apercevoir que toutes les courbes exprimées par l'équation $\varphi=0$ sont des courbes égales et disposées les unes à la suite des autres, de telle sorte que leurs points homologues se trouvent appartenir à des droites parallèles dont la direction commune est donnée par l'équation $y=ax$.

8. Cela ainsi reconnu, il devient facile de déterminer la forme de l'intégrale $\varphi=0$. Soit AB (fig. 6) la droite dont l'équation est $y=ax$; soit MM′ la courbe représentée par l'équation $\varphi=0$, lorsqu'on y suppose la constante nulle, et soit NN′ une autre courbe exprimée par la même équation, pour la valeur c de cette constante; d'après ce qui vient d'être démontré, ces deux courbes seront égales; et, en prenant sur l'une et l'autre des points homologues M et N, la droite MN qui les joindra sera parallèle à AB, et sa longueur sera indépendante du choix du point M sur MN. Soient donc désignées par x', y' les coordonnées de ce point et par x et y celles du point N; en abaissant de ces deux points des perpendiculaires MP, NQ sur l'axe des x et la parallèle MK=PQ à cet axe, nous aurons

$$x-x'=\mathrm{MK}=\mathrm{MN}\,Cos.\mathrm{NMK}=\mathrm{MN}\,Cos.\mathrm{BAX}\ ,$$

$$y-y'=\mathrm{NK}=\mathrm{MN}\,Sin.\mathrm{NMK}=\mathrm{MN}\,Sin.\mathrm{BAX}\ ,$$

d'où l'on voit que $x-x'$ et $y-y'$ seront constans, quel que soit le point N sur la courbe NN′; or, on tire de là

$$\frac{y-y'}{x-x'}=\frac{Sin.\mathrm{BAX}}{Cos.\mathrm{BAX}}=Tang.\mathrm{BAX}=a\ ;$$

posant donc $x-x'=c$, on aura $y-y'=ac$, d'où

$$x'=x-c\ , \qquad y'=y-ac\ ,$$

ainsi $f(x', y')=0$ étant l'équation individuelle de la courbe MN, l'équation générale $\varphi=0$ de toutes les autres sera de la forme

$$f(x-c, y-ac)=0,$$

où c est la constante arbitraire.

9. La construction du polygone MM′M″..... (fig. 5) donne un moyen fort simple d'obtenir approximativement l'une quelconque des courbes représentées par l'équation $\varphi=0$, d'en assigner les limites et d'en étudier les principales propriétés.

Si, en effet, P est réel, quelle que soit la valeur donnée à p, on en conclura que la courbe admet des tangentes dans toutes sortes de directions; et, dans le cas contraire, on pourra assigner la direction des tangentes extrêmes. En prenant les *maxima* et les *minima* de P, on déterminera celles des droites MN qui limitent les différentes branches de la courbe. Enfin, en égalant P à une quantité quelconque k, et discutant les racines de l'équation $P-k=0$, résolue par rapport à p, on connaîtra si la courbe s'étend indéfiniment dans tous les sens, ou bien l'on assignera la position des droites qui la renferment ou qui en séparent les diverses branches.

10. On peut aussi déduire de l'équation $y=ax+P$ une expression fort simple de la différentielle de l'arc et de la longueur du rayon de courbure. Soit, en effet, MM′ (fig. 7) un élément de la courbe, compris entre deux transversales consécutives, θ l'angle qu'il fait avec l'axe des x et α l'angle que font les transversales avec le même axe; on aura $p=\text{Tang.}\theta$ et $a=\text{Tang.}\alpha$. Par le point M soit mené MK, parallèle à l'axe des y, et comprise entre les transversales, le triangle MM′K donnera

$$\text{MM}' \quad \text{ou} \quad ds=\text{MK}\,.\,\frac{Sin.\text{M}'\text{KM}}{Sin.\text{KM}'\text{M}};$$

or, si N et N′ sont les points où les transversales coupent l'axe des y, on aura $\text{MK}=\text{NN}'=\frac{dP}{dp}\,dp$; d'un autre côté

$Sin.$M′KM

$$Sin.\mathrm{M'KM}=\mathrm{Sin.}(100^\circ+\alpha)=\mathrm{Sin.}(100^\circ-\alpha)=\mathrm{Cos.}\alpha\ ,$$

$$Sin.\mathrm{KM'M}=\mathrm{Sin.}(\theta-\alpha)\ ;$$

donc

$$\mathrm{d}s=\frac{\mathrm{Cos.}\alpha}{\mathrm{Sin.}(\theta-\alpha)}\,\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}p}\,\mathrm{d}p\ .$$

Si l'on élimine θ de cette expression, au moyen de l'équation $p=\mathrm{Tang.}\theta$, il ne restera plus qu'à intégrer une fonction d'une seule variable, pour obtenir la longueur d'un arc de la courbe compris entre deux transversales données quelconques.

Pour obtenir le rayon de courbure, il suffit de remarquer qu'il est égal à $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}$; or, l'équation $p=\mathrm{Tang.}\theta$ donne

$$\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}p}{1+p^2}\ ;$$

donc

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}=\frac{(1+p^2)\mathrm{Cos.}\alpha}{\mathrm{Sin.}(\theta-\alpha)}\,\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}p}\ .$$

Cette expression du rayon de courbure fournit un moyen facile d'assigner les points d'inflexion et les asymptotes de la courbe ; elle fera aussi immédiatement reconnaître si la ligne droite ou le cercle fait partie des lignes comprises dans l'équation $\varphi=0$.

11. *PROBLÈME III. Quelle doit être la forme de l'équation intégrale, lorsque l'équation différentielle est de la forme* $y-\beta=\mathrm{P}(x+\alpha)$, *$\alpha$ et β étant des constantes et* P *une fonction de* p ?

Solution. Dans ce cas, les transversales représentées par l'équation $\varphi'=0$ sont des droites passant par le même point (α,β). Soient O ce point (fig. 8), OM, OM$'$, OM$''$,..... les droites qui correspondent aux valeurs p, p', p'', ..., et MM'M''....., NN'N''.... deux polygones obtenus par l'application de la seconde méthode, ils auront leurs côtés parallèles chacun à chacun, et leurs sommets homologues sur les droites concourant en O ; d'où il est facile de conclure que ces polygones, et par suite les courbes dont ils sont les limites, et qui sont comprises dans l'équation $\varphi=0$, seront semblables et semblablement situées, et auront le point O pour point homologue commun ou *centre de similitude* ; d'où il suit que les cordes et tangentes homologues seront parallèles, et que le rapport des dimensions de deux courbes quelconques sera le même que celui des distances du point O à des points homologues quelconques de ces deux courbes. Or, il n'en faut pas davantage pour parvenir à la forme générale de l'équation $\varphi=0$, ainsi que nous allons le voir.

12. Soit MM' (fig. 9) la courbe représentée par l'équation $\varphi=0$, lorsqu'on suppose la constante égale à l'unité et NN' celle des courbes exprimée par cette équation qui répond à une autre valeur c de cette même constante. Soient x', y' les coordonnées du point M et x, y celles de son homologue N, tous deux en ligne droite avec le centre de similitude O. Soient abaissées de ces trois points sur l'axe des x les perpendiculaires OP, MP, NQ ; et soit menée, par le point O, une parallèle au même axe, coupant MP et NQ respectivement en K et S, et l'axe des y en L ; on aura, à cause des parallèles,

$$\frac{\mathrm{OK}}{\mathrm{OS}}=\frac{\mathrm{MK}}{\mathrm{NS}}=\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{ON}}\,;$$

or, le rapport de OM à ON, variable seulement d'une courbe à l'autre, reste le même pour les deux mêmes courbes, quels que soient les points homologues M et N ; donc en représentant ce rapport par c, et remarquant d'ailleurs que

$$\mathrm{OK}=x'-\alpha\,, \qquad \mathrm{MK}=y'-\beta\,,$$

$$\mathrm{OS}=x-\alpha\,, \qquad \mathrm{NS}=y-\beta\,,$$

nous aurons

$$\frac{x'-\alpha}{x-\alpha}=\frac{y'-\beta}{y-\beta}=c\,,$$

d'où

$$x'-\alpha=c(x-\alpha)\,, \qquad y'-\beta=c(y-\beta)\,;$$

donc, si $\mathrm{f}(x'-\alpha\,,y'-\beta)=0$ est l'équation individuelle de la courbe MM$'$, l'équation générale de toutes les autres sera

$$\mathrm{f}[c(x-\alpha)\,,\,c(y-\beta)]=0\,,$$

où c est la constante arbitraire.

13. Par des considérations tout-à-fait analogues à celles que nous avons employées ci-dessus (9), on reconnaîtra si les courbes comprises dans l'intégrale $\varphi=0$ admettent des tangentes dans toutes les directions; et on déterminera les droites qui les limitent ou qui en séparent les différentes branches.

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

Recherches analitiques, sur une classe de problèmes de géométrie dépendant de la théorie des maxima *et* minima ;

Par M. CH. STURM.

SOIENT p, p', p'',..... les distances d'un point cherché M à des points fixes, donnés dans l'espace ; soient q, q', q'', ... les distances du même point à d'autres points qui doivent être trouvés sur autant de courbes fixes données, planes ou à double courbure ; soient enfin r, r', r'', ... les distances de ce point à des points qui sont assujettis à se trouver sur autant de surfaces données ; et l'équation

$$u=\mathrm{F}(p\,,p'\,,p''\,,.....\,q\,,q'\,,q''\,,.....\,r\,,r'\,,r''\,,.....)\ ,$$

dans laquelle F désigne une fonction connue quelconque, étant donnée, proposons-nous d'assigner les conditions nécessaires pour que la fonction u soit *maximum* ou *minimum*.

Rapportons l'espace à trois plans rectangulaires quelconques. Soient a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', ... respectivement, les coordonnées des points d'où partent les droites p, p', p'',..... pour se diriger vers M ; soient d, e, f, d', e', f', d'', e'', f'', ... respectivement les coordonnées des points d'où partent les droites q, q', q'', ... pour se diriger vers ce point ; et soient enfin g,

h, k, g', h', k', g'', h'', k'', ... respectivement, les points d'où partent les droites r, r', r'', ..., pour se diriger vers le même point.

Convenons encore de désigner par (p, x), (p, y), (p, z), (p', x), (p', y), (p', z), ... les angles que font les droites p, p', ... avec les trois axes ; par (q, x), (q, y), (q, z), (q', x), (q', y), (q', z), ... les angles que font les droites q, q', ... avec ces axes ; et enfin par (r, x), (r, y), (r, z), (r', x), (r', y), (r', z), ... les angles que font les droites r, r', ... avec les mêmes axes ; et soient x, y, z, les coordonnées du point M.

La condition commune au *maximum* et au *minimum* de la fonction u, est, comme l'on sait, que sa différentielle totale du premier ordre soit égale à zéro. Il est connu d'ailleurs que cette condition, toujours nécessaire pour qu'il y ait *maximum* ou *minimum*, ne suffit pas néanmoins, dans tous les cas, pour en assurer l'existence.

En posant donc, pour abréger,

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}p}\right)=P\,, \quad \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}p'}\right)=P'\,, \quad \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}p''}\right)=P''\,, ...$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}q}\right)=Q\,, \quad \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}q'}\right)=Q'\,, \quad \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}q''}\right)=Q''\,, ...$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)=R\,, \quad \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r'}\right)=R'\,, \quad \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r''}\right)=R''\,, ...$$

l'équation commune au *maximum* et au *minimum* sera

$$P\mathrm{d}p+P'\mathrm{d}p'+P''\mathrm{d}p''+.......+Q\mathrm{d}q+Q'\mathrm{d}q'+Q''\mathrm{d}q''+.......$$

$$+R\mathrm{d}r+R'\mathrm{d}r'+R''\mathrm{d}r''+......=0\,.$$

Or, nous avons

$$p=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}\ ,$$

$$q=\sqrt{(x-d)^2+(y-e)^2+(z-f)^2}\ ,$$

$$r=\sqrt{(x-g)^2+(y-h)^2+(z-k)^2}\ ,$$

d'où

$$dp=\frac{x-a}{p}dx+\frac{y-b}{p}dy+\frac{z-c}{p}dz\ ,$$

$$dq=\frac{x-d}{q}(dx-dd)+\frac{y-e}{q}(dy-de)+\frac{z-f}{q}(dz-df)\ ,$$

$$dr=\frac{x-g}{r}(dx-dg)+\frac{y-h}{r}(dy-dh)+\frac{z-k}{r}(dz-dk)\ ,$$

mais on a

$$\frac{x-a}{p}=\text{Cos.}(p,x)\ ,\quad \frac{y-b}{p}=\text{Cos.}(p,y)\ ,\quad \frac{z-c}{p}=\text{Cos.}(p,z)\ ,$$

$$\frac{x-d}{q}=\text{Cos.}(q,x)\ ,\quad \frac{y-e}{q}=\text{Cos.}(q,y)\ ,\quad \frac{z-f}{q}=\text{Cos.}(q,z)\ ,$$

$$\frac{x-g}{r}=\text{Cos.}(r,x)\ ,\quad \frac{y-h}{r}=\text{Cos.}(r,y)\ ,\quad \frac{z-k}{r}=\text{Cos.}(r,z)\ ;$$

donc

$$dp=dx\,\text{Cos.}(p,x)+dy\,\text{Cos.}(p,y)+dz\,\text{Cos.}(p,z)\ , \qquad (1)$$

$$dq=(dx-dd)\text{Cos.}(q,x)+(dy-de)\text{Cos.}(q,y)+(dz-df)\text{Cos.}(q,z)\ ,$$

$$dr=(dx-dg)\text{Cos.}(r,x)+(dy-dh)\text{Cos.}(r,y)+(dz-dk)\text{Cos.}(r,z)\ ;$$

et l'on aura des valeurs analogues pour dp', dq', dr', dp'', dq'', dr'', ...

Soient désignées par t la tangente au point $(d\,,e\,,f)$ à la courbe sur laquelle ce point doit se trouver, et par s l'arc de cette courbe, on aura

$$\mathrm{d}d=\mathrm{d}s\,\mathrm{Cos.}(t\,,x)\,,\quad \mathrm{d}e=\mathrm{d}s\,\mathrm{Cos.}(t\,,y)\,,\quad \mathrm{d}f=\mathrm{d}s\,\mathrm{Cos.}(t\,,z)\;;$$

substituant ces valeurs dans celle de $\mathrm{d}q$, en observant que

$$\mathrm{Cos.}(t,x)\mathrm{Cos.}(q,x)+\mathrm{Cos.}(t,y)\mathrm{Cos.}(q,y)+\mathrm{Cos.}(t,z)\mathrm{Cos.}(q,z)=\mathrm{Cos.}(t,q)$$

elle deviendra

$$\mathrm{d}q=\mathrm{d}x\mathrm{Cos.}(q,x)+\mathrm{d}y\mathrm{Cos.}(q,y)+\mathrm{d}z\mathrm{Cos.}(q\,,z)+\mathrm{d}s\mathrm{Cos.}(t,q) \qquad (2)$$

Soit ensuite désignée par n la normale au point $(g\,,h\,,k)$ à la surface sur laquelle ce point doit se trouver ; l'équation différentielle de cette surface pourra, comme l'on sait, être mise sous la forme

$$\mathrm{d}g\mathrm{Cos.}(n\,,x)+\mathrm{d}h\mathrm{Cos.}(n\,,y)+\mathrm{d}k\mathrm{Cos.}(n\,,z)=0\,,$$

d'où

$$-\mathrm{d}k=\frac{\mathrm{Cos.}(n\,,x)}{\mathrm{Cos.}(n\,,z)}\,\mathrm{d}g+\frac{\mathrm{Cos.}(n\,,y)}{\mathrm{Cos.}(n\,,z)}\,\mathrm{d}h\,,$$

valeur qui, substituée dans celle de $\mathrm{d}r$, donnera

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}r=\mathrm{d}x\mathrm{Cos.}(r,x)&+\mathrm{d}y\mathrm{Cos.}(r\,,y)+\mathrm{d}z\mathrm{Cos.}(r\,,z)\\ &+\left\{\frac{\mathrm{Cos.}(r\,,z)\mathrm{Cos.}(n\,,x)}{\mathrm{Cos.}(n\,,z)}-\mathrm{Cos.}(r,x)\right\}\mathrm{d}g\\ &+\left\{\frac{\mathrm{Cos.}(r\,,z)\mathrm{Cos.}(n\,,y)}{\mathrm{Cos.}(n\,,z)}-\mathrm{Cos.}(r\,,y)\right\}\mathrm{d}h\;;\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

et les valeurs de $\mathrm{d}q'$, $\mathrm{d}r'$, $\mathrm{d}q''$, $\mathrm{d}r''$, ... seront susceptibles de transformations analogues.

En substituant donc ces diverses valeurs dans l'équation

$$Pdp+P'dp'+.....+Qdq+Q'dq'+....+Rdr+R'dr'+....=0\ ,$$

que nous avons vu ci-dessus exprimer la condition commune au *maximum* et au *minimum*, elle deviendra, en employant le signe Σ, par forme d'abréviation,

$$\{\Sigma[P\text{Cos.}(p,x)]+\Sigma[Q\text{Cos.}(q,x)]+\Sigma[R\text{Cos.}(r,x)]\}dx$$

$$+\{\Sigma[P\text{Cos.}(p,y)]+\Sigma[Q\text{Cos.}(q,y)]+\Sigma[R\text{Cos.}(r,y)]\}dy$$

$$+\{\Sigma[P\text{Cos.}(p,z)]+\Sigma[Q\text{Cos.}(q,z)]+\Sigma[R\text{Cos.}(r,z)]\}dz$$

$$-\Sigma\{Qds\text{Cos.}(t,q)\}$$

$$+\Sigma\left\{R\left[\frac{\text{Cos.}(r,z)\text{Cos.}(n,x)}{\text{Cos.}(n,z)}-\text{Cos.}(r,x)\right]dg\right\}$$

$$+\Sigma\left\{R\left[\frac{\text{Cos}(r,z)\text{Cos}(n,y)}{\text{Cos}(n,z)}-\text{Cos.}(r,y)\right]dh\right\}=0. \qquad \text{(I)}$$

Or, présentement que les différentielles ds, dg, dh, ds', dg', dh',..... sont tout-à-fait indépendantes, il faudra, dans l'équation (I), égaler leurs coefficiens à zéro; et comme d'ailleurs aucune des fonctions Q, R, Q', R',..... ne doit être nulle, cela donnera d'abord

$$\text{Cos.}(t,q)=0\ ,\quad \text{Cos.}(t',q')=0\ ,\quad \text{Cos.}(t'',q'')=0\ ,$$

ce qui nous apprend, en premier lieu, que les droites q, q', q'',.... doivent être respectivement perpendiculaires aux tangentes t, t', t'',.... et par conséquent normales aux courbes auxquelles elles se terminent.

On aura ensuite

Cos.

$$\frac{\text{Cos.}(r\,,\,x)}{\text{Cos.}(n\,,\,x)}=\frac{\text{Cos.}(r\,,\,y)}{\text{Cos.}(n\,,y)}=\frac{\text{Cos.}(r\,,z)}{\text{Cos.}(n\,,\,z)}\,,$$

et les autres équations analogues, d'où

$$\text{Cos.}(r\,,\,x)=\text{Cos.}(n\,,\,x)\,,\qquad \text{Cos.}(r'\,,\,x)=\text{Cos.}(n'\,,\,x)\,,\ldots.$$

$$\text{Cos.}(r\,,\,y)=\text{Cos.}(n\,,y)\,,\qquad \text{Cos.}(r'\,,\,y)=\text{Cos.}(n'\,,y)\,,\ldots.$$

$$\text{Cos.}(r\,,\,z)=\text{Cos.}(n\,,\,z)\,,\qquad \text{Cos.}(r'\,,\,z)=\text{Cos.}(n'\,,\,z)\,,\ldots.$$

ce qui montre que les droites r, r', r'',..... doivent aussi être respectivement normales aux surfaces auxquelles elles se terminent.

Concevons présentement qne le point M soit sollicité par des forces proportionnelles à P, Q, R, P', Q', R', ..., et dirigé suivant les droites p, q, r, p', q', r', ... respectivement.

Soit V la résultante de toutes ces forces, et soient α, β, γ les angles qu'elle fait avec les axes. Les quantités qui multiplient dx, dy, dz, dans l'équation (I) reviennent visiblement à VCos.α, VCos.β, VCos.γ; de sorte que cette équation, de laquelle nous avons déjà fait disparaître les derniers termes, se réduit à

$$V(\mathrm{d}x\text{Cos.}\alpha+\mathrm{d}y\text{Cos.}\beta+\mathrm{d}z\text{Cos.}\gamma)=0\,. \qquad \text{(II)}$$

Celle-ci sera toujours satisfaite, lorsqu'on aura $V=0$, c'est-à-dire, lorsque les forces proportionnelles à P, Q, R, P', Q', R',..... se feront équilibre, à quelque conditions que le point M puisse être d'ailleurs assujetti.

Si ce point est parfaitement libre dans l'espace, les différentielles dx, dy, dz seront indépendantes, et il faudra encore que $V=0$; parce que Cos.α, Cos.β, Cos.γ ne sauraient être nuls à la fois.

Si le point M doit être pris sur une surface donnée ; en représentant par δ, ε, ζ les angles que fait avec les axes la normale à cette surface en ce point, son équation différentielle sera

$$\mathrm{d}x\mathrm{Cos.}\delta+\mathrm{d}y\mathrm{Cos.}\varepsilon+\mathrm{d}z\mathrm{Cos.}\zeta=0\ ;$$

en tirant de cette équation la valeur de dz, pour la substituer dans l'équation (II), celle-ci deviendra, en divisant par V,

$$\left(\mathrm{Cos.}\alpha-\frac{\mathrm{Cos.}\delta\mathrm{Cos.}\gamma}{\mathrm{Cos.}\zeta}\right)\mathrm{d}x+\left(\mathrm{Cos.}\beta-\frac{\mathrm{Cos.}\varepsilon\mathrm{Cos.}\gamma}{\mathrm{Cos.}\zeta}\right)\mathrm{d}y=0\ ;$$

d'où, à cause de l'indépendance de dx et dy,

$$\frac{\mathrm{Cos.}\alpha}{\mathrm{Cos.}\delta}=\frac{\mathrm{Cos.}\beta}{\mathrm{Cos.}\varepsilon}=\frac{\mathrm{Cos.}\gamma}{\mathrm{Cos.}\zeta}\ ;$$

ou bien

$$\mathrm{Cos.}\alpha=\mathrm{Cos.}\delta\ ,\quad \mathrm{Cos.}\zeta=\mathrm{Cos.}\varepsilon\ ,\quad \mathrm{Cos.}\gamma=\mathrm{Cos.}\zeta\ ,$$

c'est-à-dire que la résultante des forces qui sollicitent le point M doit, lorsqu'elle n'est pas nulle, être normale à la surface sur laquelle ce point doit être situé ; de sorte qu'on peut la regarder comme détruite par la résistance de cette surface.

Si le point M doit être pris sur une ligne donnée, droite ou courbe, plane ou à double courbure ; en représentant par ds l'élément de cette ligne, au point dont il s'agit et par δ, ε, ζ les angles que fait cet élément avec les axes, on aura

$$\mathrm{d}x=\mathrm{d}s\mathrm{Cos.}\delta\ ,\quad \mathrm{d}y=\mathrm{d}s\mathrm{Cos.}\varepsilon\ ,\quad \mathrm{d}z=\mathrm{d}s\mathrm{Cos.}\zeta\ ;$$

ces valeurs étant substituées dans l'équation (II), elle deviendra, en divisant par Vds,

$$\mathrm{Cos.}\alpha\mathrm{Cos.}\delta+\mathrm{Cos.}\beta\mathrm{Cos.}\varepsilon+\mathrm{Cos.}\gamma\mathrm{Cos.}\zeta=0\ ;$$

d'où l'on voit que, dans ce cas, si la résultante V n'est pas nulle, sa direction devra être normale à la ligne sur laquelle le point M doit être situé; de sorte qu'elle sera en équilibre sur cette ligne, considérée comme obstacle à l'action qu'elle tend à produire.

On peut donc, en résumé, établir le théorème général que voici:

Soient p, p′, p″,.... *les distances d'un point* M *à des points fixes dans l'espace. Soient* q, q′, q″,..... *les distances du même point à des points mobiles sur des lignes fixes. Soient enfin* r, r′, r″,..... *les distances de ce point à des points mobiles sur des surfaces fixes.*

Supposons que ce point M *soit tellement choisi dans l'espace qu'une fonction déterminée* u *des distances* p, p′, p″,.... q, q′, q″,.... r, r′, r″,.... *soit un* maximum *ou un* minimum*; et concevons ce même point sollicité, suivant les directions de ces distances, par des forces proportionnelles aux valeurs actuelles des dérivées partielles de* u, *prises par rapport à ces mêmes distances; alors,*

1.° *Les droites* q, q′, q″,.... r, r′, r″,.... *seront respectivement normales aux lignes et surfaces auxquelles elles se termineront.*

2.° *Si le point* M *est parfaitement libre dans l'espace, il devra se trouver en équilibre sous l'action des forces que nous avons supposé le solliciter; et s'il est assujetti à se trouver sur une surface ou sur une ligne donnée, la résultante de ces mêmes forces, lorsqu'elle ne sera pas nulle, devra être normale à cette surface ou à cette ligne; de sorte qu'on pourra dire, dans tous les cas, que le point* M *est en équilibre.*

L'inverse de ce théorème n'est pas généralement vrai, c'est-à-dire que toutes ces diverses conditions peuvent fort bien être remplies, sans que, pour cela, il y ait nécessairement maximum *ou* minimum.

Dans le cas particulier où la fonction u sera simplement la somme des distances p, p', p'', ..., q, q', q'', ..., r, r', r'', ..., ou la somme des produits respectifs de ces mêmes distances par des multiplicateurs a, a', a'', ..., b, b', b'', ..., c, c', c'', ..., les forces sollicitant le point M devront être égales entre elles ou proportionnelles à ces multiplicateurs (*).

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solutions du premier des deux problèmes de géométrie énoncés à la page 360 *du XIII.e volume des* Annales ;

PROBLÈME. Déterminer la surface convexe et le volume de l'onglet conique détaché d'un cône droit, du côté de sa base, par un plan passant par le centre de cette base ?

Première solution ;

Par M. STEIN, ancien élève de l'école polytechnique, professeur de mathématiques au gymnase de Trèves.

Soient S (fig. 10) le sommet du cône, C le centre de sa base, DE le diamètre suivant lequel le plan coupant rencontre cette base, AB un diamètre perpendiculaire à celui-là, et CG la droite suivant laquelle le plan du triangle ASB rencontre le plan coupant ; le triangle GCA divisera en deux parties parfaitement symétriques tant la surface que le volume demandés ; de

(*) A cette théorie générale se rattachent un grand nombre de problèmes traités dans le présent recueil, notamment tom. I, pag. 285, 297, 373 et 375.
J. D. G.

sorte qu'il nous suffira d'obtenir la surface et le volume de l'une des parties et de les doubler, pour résoudre la question proposée.

Les données du problème sont la hauteur du cône que nous désignerons par k, son angle générateur que nous représenterons par α, et enfin l'angle ACG que fait le plan coupant avec l'axe ; angle que nous appellerons β. En conséquence le rayon de la base du cône sera $k\text{Tang.}\alpha$.

Soit décomposée la surface cherchée en élémens infiniment petits, par des droites partant du sommet du cône ; soient N, N′ les points où deux droites consécutives rencontrent la circonférence de sa base et M, M′ ceux où les deux mêmes droites rencontrent le contour DGE de la section ; le quadrilatère NMM′N′ sera la différentielle de la surface DMN ; de sorte qu'il ne s'agira que d'en intégrer l'expression depuis *Ang.*DCN=0 jusqu'à *Ang.*DCN=90° pour obtenir la moitié de la surface cherchée. En outre, si sur SN on abaisse la perpendiculaire CP, le produit de la surface NMM′N′ par le tiers de cette perpendiculaire sera l'élément différentiel du volume de la pyramide conique ayant pour base le triangle DMN et son sommet en C ; de sorte qu'en intégrant encore l'expression de cet élément, entre Ang.DCN=0 et Ang.DCN=90°, on aura la moitié du volume du corps cherché.

Soient

$$\text{Ang.DCN}=x\,,\qquad \text{Ang.MCN}=y\,,\qquad \text{MN}=z\;;$$

l'angle trièdre dont les arêtes sont CD, CM, CN, rectangle suivant la dernière, donnera, par les principes connus,

$$\text{Tang.}y=\text{Cot.}\beta\text{Sin.}x\;;$$

mais le triangle rectiligne MCN donne

$$z=k.\frac{\text{Tang.}\alpha\text{Sin.}y}{\text{Cos.}(\alpha-y)}=k.\frac{\text{Tang.}\alpha\text{Tang.}y}{\text{Cos.}\alpha+\text{Sin.}\alpha\text{Tang.}y}\;;$$

on aura donc, en substituant pour Tang.y sa valeur,

$$z=k.\frac{\text{Tang}\,\alpha\text{Cot}.\beta\text{Sin}.x}{\text{Cos}.\alpha+\text{Sin}.\alpha\text{Cot}.\beta\text{Sin}.x}=\frac{k}{\text{Cos}.\beta}.\frac{\text{Tang}.\alpha\text{Cot}.\beta\text{Sin}.x}{1+\text{Tang}.\alpha\text{Cot}.\beta\text{Sin}.x}.$$

posant donc, pour abréger,

$$\frac{k}{\text{Cos}.\,\beta}=a,\qquad \text{Cot}.\alpha\text{Tang}.\beta=n,$$

nous aurons

$$z=a\,\frac{\text{Sin}.x}{n+\text{Sin}.x}.$$

Si, par le point M, nous concevons un plan perpendiculaire à l'axe, ce plan déterminera une section circulaire dont l'arc intercepté entre SN et SN′ sera MH, semblable à NN′; et dans l'évaluation de la surface NMM′N′, nous pourrons faire abstraction du triangle MHM′, infiniment petit par rapport à elle; cette surface deviendra ainsi un trapèze; et, en représentant par S la surface DNM, nous aurons

$$\text{d}S=\text{MN}.\,\frac{\text{NN}'+\text{MH}}{2};$$

or, nous avons

$$\text{MH}=\text{NN}'.\frac{\text{SM}}{\text{SN}}=\text{NN}'.\frac{\text{SN}-\text{MN}}{\text{SN}}=\text{NN}'.\left(1-\frac{\text{MN}}{\text{SN}}\right);$$

donc

$$\text{NN}'+\text{MH}=\text{NN}'\left(2-\frac{\text{MN}}{\text{SN}}\right),$$

ce qui donne

$$\text{d}S=\text{MN}.\text{NN}'\left(1-\frac{\text{MN}}{2\text{SN}}\right);$$

or, nous avons

$$MN=z\ ,\quad SN=\frac{k}{\text{Cos.}\alpha}=a\ ,\quad NN'=k\text{d}x\text{Tang.}\alpha=a\text{d}x\text{Sin.}\alpha\ ;$$

donc

$$\text{d}S=az\text{d}x\text{Sin.}\alpha\left(1-\frac{z}{2a}\right)=\frac{z\text{d}x\text{Sin.}\alpha}{2}\left[a+(a-z)\right]$$

en mettant donc ici pour z sa valeur en x, on aura

$$\text{d}s=\frac{a^2\text{Sin.}\alpha}{2}\left\{\frac{\text{d}x\text{Sin.}x}{n+\text{Sin.}x}+\frac{n\text{d}x\text{Sin.}x}{(n+\text{Sin.}x)^2}\right\}. \qquad \text{(I)}$$

Le triangle rectangle SCN donne

$$CP=\frac{SC.CN}{SN}=k\text{Sin.}\alpha=a\text{Sin.}\alpha\text{Cos.}\alpha,$$

mais, en représentant par V le volume de la pyramide qui a la surface S pour base et son sommet en C, on a

$$\text{d}V=\tfrac{1}{3}CP.\text{d}S\ ;$$

donc, en substituant, on aura

$$\text{d}V=\frac{a^3\text{Sin.}^2\alpha\text{Cos.}\alpha}{6}\left\{\frac{\text{d}x\text{Sin.}x}{n+\text{Sin.}x}+\frac{n\text{d}x\text{Sin.}x}{(n+\text{Sin.}x)^2}\right\}; \qquad \text{(II)}$$

tout se réduit donc à intégrer les deux formules

$$\frac{\text{d}x\text{Sin.}x}{n+\text{Sin.}x}\ ,\qquad \frac{\text{d}x\text{Sin.}x}{(n+\text{Sin.}x)^2}\ .$$

Or, il suffit pour cela de savoir intégrer la première ; car en différentiant sous le signe, par rapport à n, l'intégrale

$$\int\frac{\text{d}x\text{Sin.}x}{n+\text{Sin.}x}\ ,$$

il vient

$$-\int \frac{dx\,\text{Sin}.x}{(n+\text{Sin}.x)^2}\ ;$$

d'où l'on voit qu'en posant

$$\int \frac{dx\,\text{Sin}.x}{n+\text{Sin}.x}=\text{f}(n)\,,$$

on aura

$$\int \frac{dx\,\text{Sin}.x}{(n+\text{Sin}.x)^2}=-\frac{d\,\text{f}(n)}{dn}\ ,$$

et par suite

$$\int \frac{dx\,\text{Sin}.x}{n+\text{Sin}.x}+n\int \frac{dx\,\text{Sin}.x}{(n+\text{Sin}.x)^2}=\text{f}(n)-n.\frac{d.\text{f}(n)}{dn}=-n^2.\frac{d.\left[\frac{\text{f}(n)}{n}\right]}{dn}.\ (*)$$

valeur qu'il ne s'agira plus que de substituer dans les formules (I) et (II).

Pour intégrer donc la formule

$$\frac{dx\,\text{Sin}.x}{n+\text{Sin}.x}\ ,$$

nous poserons d'abord

$$\text{Sin}.x=y\ ,\quad \text{d'où}\quad dx\,\text{Cos}.x=dy\quad \text{et}\quad dx=\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\ ;$$

elle deviendra ainsi

(*) On peut remarquer qu'en général

$$\frac{d^m.\left\{\int \frac{dx\,\text{f}(x)}{n+\varphi(x)}\right\}}{dn}=\pm 1.2.3....m\int \frac{dx\,\text{f}(x)}{[n+\varphi(x)]^{m+1}}\ ;$$

$\text{f}(x)$ et $\varphi(x)$ étant des fonctions indépendantes de n et le signe supérieur ou le signe inférieur devant être pris suivant que m est un nombre pair ou un nombre impair.

$y\,dy$

$$\frac{y\mathrm{d}y}{(y+n)\sqrt{1-y^2}},$$

qu'il faudra intégrer entre $y=0$ et $y=1$.

Nous poserons ensuite

$$\sqrt{1-y^2}=t(1-y),$$

d'où

$$y=\frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad \mathrm{d}y=\frac{4t\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}, \quad \sqrt{1-y^2}=\frac{2t}{t^2+1};$$

ce qui donnera, en substituant,

$$\frac{2(t^2-1)\mathrm{d}t}{(t^2+1)[(n+1)t^2+(n-1)]};$$

différentielle qui se rapporte aux fractions rationnelles, et dont il faudra prendre l'intégrale entre $t=1$ et $t=\infty$.

Mais pour poursuivre l'intégration sans tomber dans les imaginaires ou dans l'indétermination, il est nécessaire de distinguer les trois cas de $n>1$, $n<1$, $n=1$; on obtiendra alors les intégrales définies que voici :

Pour $n>1$, ... $\frac{\varpi}{2}-\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}\text{Arc.}\left(\text{Cos.}=\frac{1}{n}\right)$,

Pour $n<1$, ... $\frac{\varpi}{2}+\frac{n}{\sqrt{1-n^2}}\text{Log.}\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}$,

Pour $n=1$, ... $\frac{\varpi}{2}-1$.

En achevant le calcul, comme il a été dit ci-dessus, et ayant toujours égard aux limites des intégrales, on trouvera finalement, en doublant le résultat, Pour $n>1$ (*Section elliptique*),

$$S=a^2\mathrm{Sin}.\alpha\left\{\frac{\pi}{2}+\frac{n}{n^2-1}\left[1-\frac{n^2}{\sqrt{n^2-1}}\mathrm{Arc}\left(\mathrm{Cos.}=\frac{1}{n}\right)\right]\right\},$$

$$V=\frac{a^3\mathrm{Sin.}^2\alpha\mathrm{Cos.}\alpha}{3}\left\{\frac{\pi}{2}+\frac{n}{n^2-1}\left[1-\frac{n^2}{\sqrt{n^2-1}}\mathrm{Arc}\left(\mathrm{Cos.}=\frac{1}{n}\right)\right]\right\};$$

Pour $n<1$ (*Section hyperbolique*),

$$S=a^2\mathrm{Sin}.\alpha\left\{\frac{\pi}{2}-\frac{n}{1-n^2}\left[1+\frac{n^2}{\sqrt{1-n^2}}\mathrm{Log.}\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right]\right\},$$

$$V=\frac{a^3\mathrm{Sin.}^2\alpha\mathrm{Cos.}\alpha}{3}\left\{\frac{\pi}{2}-\frac{n}{1-n^2}\left[1+\frac{n^2}{\sqrt{1-n^2}}\mathrm{Log.}\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right]\right\},$$

Enfin, pour $n=1$ (*Section parabolique*),

$$S=a^2\mathrm{Sin}.\alpha\left\{\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right\},$$

$$V=\frac{a^3\mathrm{Sin.}^2\alpha\mathrm{Cos.}\alpha}{3}\left\{\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right\},$$

A la vérité, les deux dernières formules ne sauraient, à cause de la disparition de n, s'obtenir par le procédé général que nous avons indiqué; mais lorsque $n=1$, l'intégration est de première facilité.

Si l'on remarque que a est l'arête ou côté du cône, et que conséquemment on a pour sa demi-surface convexe et son demi-volume $\frac{\pi a^2\mathrm{Sin}.\alpha}{2}$ et $\frac{\pi a^3\mathrm{Sin.}^2\alpha\mathrm{Cos}\,\alpha}{6}$, on verra que la partie de ces intégrales indépendante de ϖ exprime SDGES et le volume compris entre cette surface et les deux plans DGE et DSE.

Les quatre premières formules se simplifient assez et deviennent plus commodes pour le calcul par logarithme, en y introduisant un angle auxiliaire; soit posé,

Pour les deux premières $n=\frac{1}{\text{Cos.}\theta}$,

Et pour les deux autres $p=\text{Sin.}\theta$

elles deviendront alors, savoir, les deux premières,

$$3V=aS\text{Sin.}\alpha\text{Cos.}\alpha=a^3\text{Sin.}^2\alpha\text{Cos.}\alpha\left\{\frac{\pi}{2}-\frac{\theta-\text{Sin.}\theta\text{Cos.}\theta}{\text{Sin.}^3\theta}\right\},$$

et les deux autres

$$3V=aS\text{Sin.}\alpha\text{Cos.}\alpha=a^3\text{Sin.}^2\alpha\text{Cos.}\alpha\left\{\frac{\pi}{2}-\frac{\text{Tang.}\theta}{\text{Cos.}\theta}-\text{Tang.}^3\theta\text{Log.Tang.}\frac{\theta}{2}\right\}$$

Il est presque inutile de dire que dans les premières, l'arc θ devra être réduit en parties du rayon.

Seconde solution, présentant la démonstration d'un théorème;

Par M. W. H. Talbot, membre de la société philosophique de Cambridge (*).

I. Avant d'entrer en matière, nous rappellerons d'abord un théorème très-connu, et qui se trouve, en particulier, démontré à la page 269 du XIII.e volume du présent recueil, lequel consiste

---

(*) Pour faciliter la comparaison entre cette solution et la précédente, nous avons cru convenable d'y introduire les mêmes notations. *J. D. G.*

en ce que l'*aire de toute figure fermée quelconque, tracée sur la surface convexe d'un cône droit, multipliée par le sinus tabulaire de l'angle générateur du cône, donne un produit égal à l'aire de la projection de cette figure sur un plan quelconque perpendiculaire à l'axe.*

II. Avant de nous occuper du problème proposé, occupons-nous d'abord de la solution de celui-ci : *Connaissant l'angle générateur d'un cône droit, la distance du sommet à laquelle son axe est rencontré par un plan qui le coupe et l'angle que fait le plan coupant avec l'axe, déterminer les dimensions de la section qui en résulte ?*

Concevons que le plan de la figure (fig. 11) soit le plan conduit par l'axe, perpendiculairement au plan coupant. Soient α l'angle générateur du cône, k la distance de son sommet au point où le plan coupant rencontre son axe, et β l'angle que fait ce plan axec l'axe.

Soient S le sommet de ce cône, SCD la direction de son axe SGA et SBH les droites suivant lesquelles sa surface est coupée par le plan de la figure, GCH l'intersection du même plan avec le plan coupant, et enfin ACB son intersection avec un plan conduit par le point C perpendiculairement à l'axe ; GH sera alors le premier axe de la section, et si, sur AB comme diamètre, on décrit un demi-cercle coupant l'axe en D, $CD=CA=CB=k\mathrm{Tang}.\alpha$ sera évidemment l'ordonné correspondant aux deux segmens CG et CH de ce grand axe.

Ces choses ainsi entendues, les deux triangles SCG et SCH donnent

$$CG=k.\frac{\mathrm{Sin}.\alpha}{\mathrm{Sin}.(\beta+\alpha)}, \qquad CH=k.\frac{\mathrm{Sin}.\alpha}{\mathrm{Sin}.(\beta-\alpha)};$$

si donc on représente par $2a$ la longueur du premier axe, on aura

$$2a=\mathrm{CG}+\mathrm{CH}=k\left\{\frac{\mathrm{Sin}.\alpha}{\mathrm{Sin}.(\beta+\alpha)}+\frac{\mathrm{Sin}.\alpha}{\mathrm{Sin}.(\beta-\alpha)}\right\}=2k\,\frac{\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Cos}.\alpha\mathrm{Sin}.\beta}{\mathrm{Sin}.(\beta+\alpha)\mathrm{Sin}.(\beta-\alpha)}\,,$$

d'où

$$a=k.\frac{\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Cos}.\alpha\mathrm{Sin}.\beta}{\mathrm{Sin}.(\beta+\alpha)\mathrm{Sin}.(\beta-\alpha)}\,.$$

En outre, en représentant par $2b$ le second axe, on devra avoir

$$\frac{\overline{\mathrm{CD}}^2}{\mathrm{CG.CH}}=\frac{b^2}{a^2}\,,$$

d'où

$$b^2=a^2.\frac{\overline{\mathrm{CD}}^2}{\mathrm{CG.CH}}\,;$$

substituant donc, et extrayant la racine quarrée, on trouvera

$$b=k.\frac{\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Sin}.\beta}{\sqrt{\mathrm{Sin}.(\beta+\alpha)\mathrm{Sin}.(\beta-\alpha)}}\,.$$

Si ensuite on désigne le paramètre par p, on aura, comme l'on sait,

$$p=\frac{2b^2}{a}=2k\mathrm{Tang}.\alpha\mathrm{Sin}.\beta\,.$$

Désignant encore par e l'excentricité, on aura

$$e^2=a^2-b^2=k^2.\frac{\mathrm{Sin}.^2\alpha\mathrm{Sin}.^2\beta\mathrm{Cos}.^2\beta}{\mathrm{Sin}.^2(\beta+\alpha)\mathrm{Sin}.^2(\beta-\alpha)}\,,$$

d'où

$$e=k.\frac{\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Sin}.\beta\mathrm{Cos}.\beta}{\mathrm{Sin}.(\beta+\alpha)\mathrm{Sin}.(\beta-\alpha)}\,;$$

d'après quoi le rapport de l'excentricité au demi-grand axe sera

$$\frac{e}{a}=\frac{\mathrm{Cos}.\beta}{\mathrm{Cos}.\alpha}\,.$$

Si l'on désigne par c la distance d'un sommet au foyer le plus voisin, on aura

$$c=a-c=k.\frac{\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Sin}.\beta(\mathrm{Cos}.\alpha-\mathrm{Cos}.\beta)}{\mathrm{Sin}.(\beta+\alpha)\mathrm{Sin}.(\beta-\alpha)}\,,$$

ou encore

$$c=\frac{k}{2}\cdot\frac{\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\beta}{\text{Cos.}\frac{1}{2}(\beta+\alpha)\text{Cos.}\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}\,.$$

Dans la recherche de toutes ces formules, nous avons tacitement supposé que la section était elliptique, ou qu'on avait $\beta>\alpha$; mais elles subsisteraient encore si la section était hyperbolique ou parabolique ; il arriverait seulement, dans le premier cas, que b serait imaginaire, et dans le second que a, b et e seraient infinis.

Nous avons donc complètement résolu le problème que nous nous étions proposé, et des formules que nous avons obtenues, il serait aisé de conclure la solution de ce problème inverse : *Par quel point de l'axe d'un cône droit et sous quel angle faut-il conduire un plan, pour qu'il en résulte une section conique de dimensions données ?*

III. En nous occupant de la question proposée, nous avons rencontré un théorème assez curieux, que nous allons préalablement démontrer, et que l'on peut énoncer comme il suit :

THÉORÈME. Si l'on projette orthogonalement, sur un plan quelconque perpendiculaire à l'axe d'un cône droit, une section plane quelconque faite dans ce cône, le point d'intersection de son axe avec le plan de la projection sera le foyer de cette projection (*).

Démonstration. La démonstration de ce théorème est très-facile à déduire des formules précédemment obtenues. En désignant, en effet, par $2a'$ et $2b'$ les deux axes de la projection, nous aurons

$$a'=a\text{Sin.}\beta\,,\qquad b'=b\,;$$

c'est-à-dire, en substituant,

$$a'=k\,.\,\frac{\text{Sin.}\alpha\text{Cos.}\alpha\text{Sin.}^2\beta}{\text{Sin.}(\beta+\alpha)\text{Sin.}(\beta-\alpha)}\,,\qquad b'=k\,.\,\frac{\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\beta}{\sqrt{\text{Sin.}(\beta+\alpha)\text{Sin.}(\beta-\alpha)}}\,.$$

(*) Il serait curieux d'examiner si, en projetant obliquement une section faite dans un cône oblique, sur le plan de sa base, par des parallèles à la droite qui joint son sommet au centre de cette base, ce centre ne serait pas le foyer de la projection. J. D. G.

En désignant donc par e' l'excentricité de cette projection, nous aurons

$$e'^2=a'^2-b'^2=k^2.\frac{\text{Sin.}^4\alpha\text{Sin.}^2\beta\text{Cos.}^2\beta}{\text{Sin.}^2(\beta+\alpha)\text{Sin.}^2(\beta-\alpha)};$$

d'où

$$e'=k.\frac{\text{Sin.}^2\alpha\text{Sin.}\beta\text{Cos.}\beta}{\text{Sin.}(\beta+\alpha)\text{Sin.}(\beta-\alpha)}, \quad \text{et} \quad \frac{e'}{a'}=\frac{\text{Tang.}\alpha}{\text{Tang.}\beta}.$$

Si ensuite on représente par c' la distance d'un sommet au foyer le plus voisin, on aura

$$c'=a'-e'=k.\frac{\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\beta}{\text{Sin.}(\beta+\alpha)}=\text{CGSin.}\beta;$$

cette distance sera donc la projection de CG sur le plan dont il s'agit; or, la projection de G sera le sommet de la courbe; donc le point C en sera le foyer.

IV. Venons présentement à la question qui a été proposée ; et remarquons d'abord que, comme l'on sait déterminer la surface convexe et le volume du demi-cône dont l'onglet fait partie, toute la question se réduit à savoir évaluer la surface convexe et le volume de ce qui reste de ce demi-cône lorsqu'on en a retranché l'onglet. Il ne s'agit même que de la seule évaluation de la surface convexe de ce corps ; car, pour en avoir le volume, il suffit évidemment de multiplier cette surface par le tiers de la perpendiculaire abaissée du centre de la base du cône sur l'une quelconque de ses arêtes, laquelle a pour expression $k\text{Sin.}\alpha$.

Mais, d'après ce que nous avons remarqué (I), pour avoir l'aire de cette surface, il suffit de diviser par $\text{Sin.}\alpha$ l'aire de sa projection que nous venons de voir être une section conique dont le foyer est en C; la question se trouve donc ramenée à déterminer l'aire d'un segment de section conique qui a pour corde le paramètre.

Or, il est connu que, $\frac{1}{n}$ désignant le rapport de l'excentricité au demi-grand axe, et a' ce demi-grand axe, l'aire d'un tel segment est, pour l'ellipse,

$$a'^2\left\{\text{Arc}\left(\text{Cos.}=\frac{1}{n}\right)-\frac{n^2-1}{n^3}\right\}\frac{\sqrt{n^2-1}}{n},$$

et pour l'hyperbole,

$$a'^2\left\{\frac{\sqrt{1-n^2}}{n^2}-\text{Log.}(1+\sqrt{1-n^2})\right\}\frac{\sqrt{1-n^2}}{n};$$

quant à la parabole, en représentant par c' la distance du sommet au foyer, l'aire du pareil segment sera

$$\tfrac{4}{3}c'^2,$$

en mettant donc, dans ces trois formules, pour a' et c', les valeurs déterminées ci-dessus, et observant qu'ici

$$n=\frac{a'}{e'}=\text{Tang.}\beta\text{Cot.}\alpha,$$

on aura l'aire du segment, pour les trois cas, en fonction des données du problème. Le quotient de sa division par Sin.α donnera la surface convexe de ce qui reste du demi-cône lorsqu'on en a retranché l'onglet. Cette surface retranchée de celle du demi-cône sera donc la surface convexe de l'onglet, dont on obtiendra ensuite le volume, en la multipliant par $\frac{1}{3}k$Sin.α (*).

QUESTIONS PROPOSÉES.

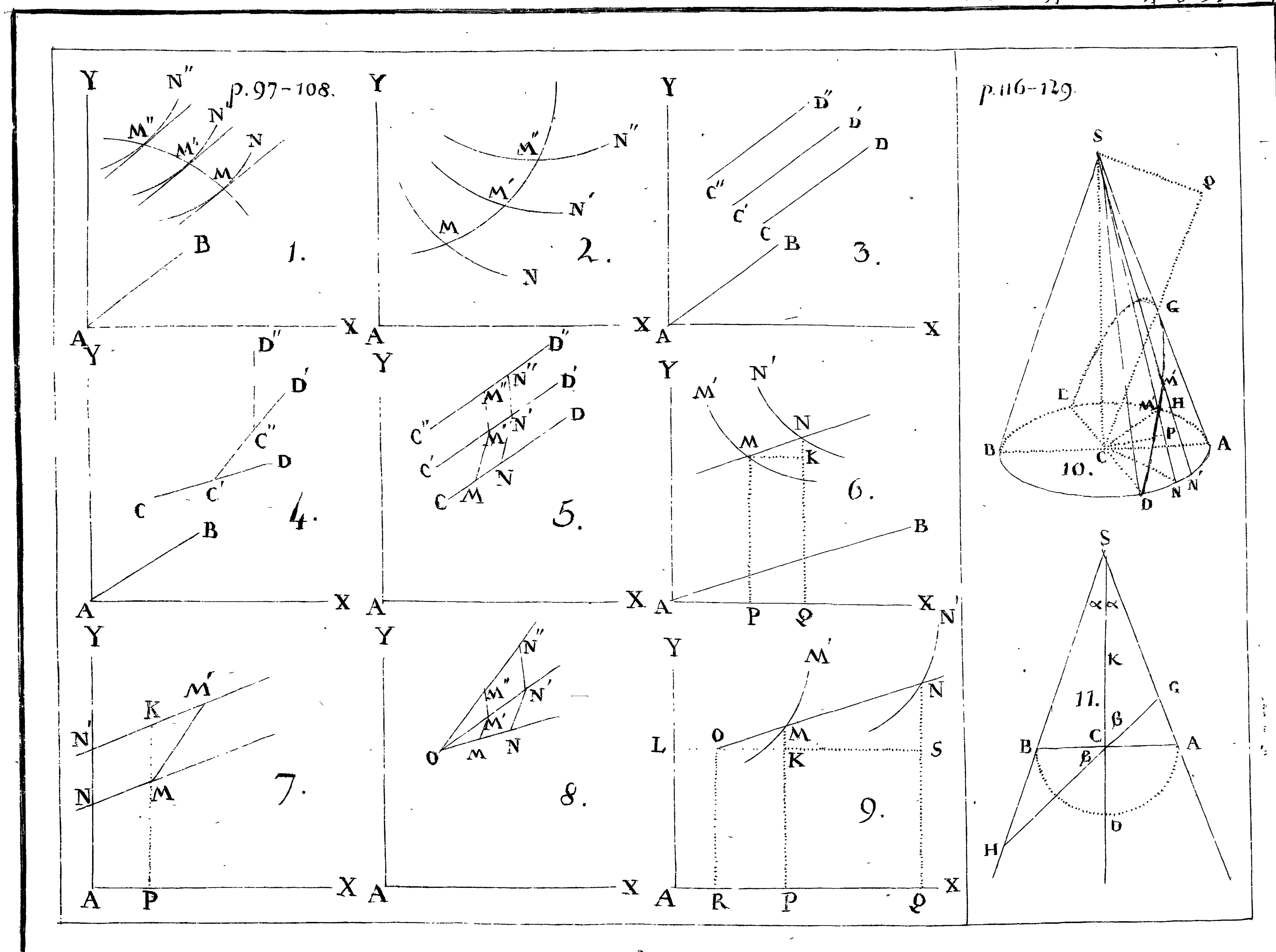
Problème d'analise transcendante.

QUELLE est la forme la plus générale des équations différentielles qui admettent une intégrale de la forme

$$\mathrm{f}(x-\alpha\,,\,y-\beta)=0,$$

dans laquelle α et β représentent des fonctions déterminées quelconques de la constante arbitraire c?

(*) M. Talbot a aussi traité la question par le calcul intégral ; mais les développemens présentés sur ce sujet par M. Stein rendent superflue cette partie de son travail. J. D. G.



J. D. G. fecit.

OPTIQUE.

Recherche analitique des propriétés les plus générales des faisceaux lumineux directs, réfléchis et réfractés ;

Par M. GERGONNE.

MALUS, dans le XIV^{e} cahier du *Journal de l'école polytechnique*, et postérieurement dans son *Mémoire sur la double rétraction*, a remarqué le premier que, *à quelque loi mathématique que les rayons de lumière d'un même faisceau soient assujettis, ces rayons se distribuent, généralement parlant, en deux séries continues de surfaces développables, dont ils sont, à la fois, les élémens rectilignes et les intersections, de manière que ces rayons sont tous tangens, soit à deux sarfaces distinctes soit à deux nappes d'une même surface, lieu des arêtes de rebroussement des surfaces développables des deux séries.* Il a démontré de plus que, *suivant que les surfaces développables de chaque série coupent ou non orthogonalement les surfaces développables de l'autre série, les rayons dont le faisceau se compose peuvent ou non être traversés orthogonalement par une même surface courbe.*

Malus a reconnu en outre, que, si des rayons incidens étaient émanés d'un point fixe, ou parallèles à une droite fixe, ces rayons, après avoir été réfléchis ou réfractés, suivant les lois de l'optique, à la rencontre d'une surface mathématique quelconque, pouvaient être traversés orthogonalement par une même surface courbe ; mais il ne pensait pas qu'en général il pût en être encore de même pour ces mêmes rayons, après avoir été réfléchis ou réfractés de nouveau, à la rencontre d'une seconde surface courbe.

Dans un ouvrage recommandable d'ailleurs à beaucoup d'autres titres (*), M. Dupin, en traitant de la théorie des *déblais et remblais*, que le principe de la moindre action rattache à celle des mouvemens de la lumière, a reconnu que le principe de Malus était trop restreint, et que, pour que des rayons réfléchis ou réfractés pussent être traversés orthogonalement par une même surface courbe, il suffisait simplement que les rayons incidens offrissent la même possibilité; d'où il a conclu ce beau théorème, savoir, que *des rayons susceptibles d'être traversés orthogonalement par une même surface courbe, conservent constamment cette propriété, après avoir subi un nombre quelconque de réflexions et de réfractions, à la rencontre de quelques surfaces mathématiques que ce puisse être.*

En cherchant à nous démontrer à nous-mêmes le théorème de M. Dupin, nous en avons rencontré un autre, lequel consiste en ce que, *pour des rayons incidens susceptibles d'être traversés orthogonalement par une même surface, l'effet de tant de réflexions et de réfractions qu'on voudra peut toujours être remplacé soit par une réflexion soit par une réfraction unique.*

C'est principalement à établir cette dernière proposition et à en développer les conséquences les plus importantes que nous destinons ce qu'on va lire; mais, afin d'épargner au lecteur la peine de chercher autre part la démonstration des principes sur lesquels nous aurons besoin de nous appuyer, et de lui offrir un ensemble qui se soutienne de lui-même, nous démontrerons d'abord les théorèmes de Malus et ceux de M. Dupin. Ce soin nous paraît d'autant plus convenable que, d'une part, comme le remarque M. Dupin, les calculs de Malus, assez compliqués d'ailleurs, doivent être entachés de quelque erreur; que d'un autre, M. Dupin n'a donné

(*) *Applications de géométrie.* (Paris 1822.)

de démonstration directe de son théorème que pour le cas de la réflexion seulement, et qu'il se trouve même dans cette démonstration une assertion tout au moins hasardée.

Pour éviter une trop grande multiplicité d'accens, nous emploîrons constamment les majuscules X, Y, Z comme symboles des coordonnées courantes, lesquelles seront toujours rectangulaires; les diveres surfaces (s), (s′), (s″) ......, que nous aurons à considérer auront respectivement leurs coordonnées représentées par x, y, z; x', y', z', x'', y'', z'', ...; et les différentielles partielles successives des fonctions z, z', z'', ...; des variables indépendantes x, y, x', y', x'', y'', ..., seront représentées suivant l'usage par p, q, r, s, t, ..., p', q', r', s′, t', ...; p'', q'', r'', s″, t'', ... Nous aurons soin d'ailleurs, à mesure que nous avancerons, d'éclairer l'usage de nos formules générales, en les appliquant à des cas particuliers.

§. I.

Manière d'exprimer des faisceaux de droites dans l'espace, et d'en étudier les propriétés.

1. Soient des droites se succédant sans interruption les unes aux autres, suivant une loi mathématique quelconque, telle néanmoins que, par chacun des points d'un espace donné, circonscrit ou illimité, il en doive, en général, passer une et une seule; comme il arriverait, par exemple, pour des droites émanées d'un même point fixe, ou parallèles à une même droite fixe ou, plus généralement encore, normales à une même surface donnée.

Pour exprimer analitiquement de telles droites, d'une manière à la fois commode et générale, qui permette d'en étudier les diverses propriétés, concevons qu'à travers leur système on fasse passer une surface arbitraire, donnée par l'équation

$$z=\mathrm{f}(x\,,\,y)\,. \qquad \text{(s)}$$

Comme on pourra supposer toutes les droites du système émanées de cette surface, nous l'appellerons la *base* du faisceau ; et le point $(x\,,y\,,z)$ où chacune d'elles percera cette même surface, et duquel elle sera censée émaner, sera dit le *point d'application* de cette droite ; de sorte que la base du faisceau sera le lieu des points d'application des droites qui le composent. Alors une quelconque des droites du système pourra être généralement exprimée par deux équations de la forme

$$X-x+P(Z-z)=0\;, \qquad Y-y+Q(Z-z)=0\,; \qquad \text{(D)}$$

P et Q étant des fonctions déterminées des variables indépendantes x et y, dont la nature décidera de celle du système. On conçoit au surplus, que P et Q pourraient bien aussi renfermer z, et même $p\,,\,q,\,r\,,\,s\,,\,t\,,\ldots\ldots$; mais alors ces lettres ne devraient y être considérées que comme des symboles de fonctions de x et y données par l'équation (s). Il est même souvent bon d'introduire de tels symboles dans les équations (D), soit pour éviter les irrationnels dans P et Q, soit seulement pour obtenir ces coefficiens sous une forme plus simple.

Que, par exemple, l'équation de la base du faisceau soit

$$x+y+z=c\,,$$

et que les équations générales des droites qui le composent soient

$$X-x-\frac{(z-c)+(2x-y)}{2(z-c)+(x+y)}(Z-z)=0\,,\quad Y-y-\frac{(z-c)+(2y-x)}{2(z-c)+(x+y)}(Y-y)=0\,,$$

en mettant dans les numérateurs pour $z-c$ sa valeur $-(x+y)$;

donnée par l'équation de la base, et pour $x+y$, dans les dénominateurs, sa valeur $-(z-c)$, donnée par la même équation, ces équations prendront cette forme plus simple, mais équivalente

$$X-x+\frac{2y-x}{z-c}(Z-z)=0\ ,\quad Y-y+\frac{2x-y}{z-c}(Z-z)=0\ .$$

2. Il est clair qu'avec les équations générales des droites du faisceau, on pourra construire tant de ces droites qu'on voudra. En se donnant en effet arbitrairement les deux variables indépendantes x et y, l'équation de la base fera connaître z; on connaîtra donc ainsi un des points de la droite à construire; et la substitution des valeurs de x, y, z, dans P et Q fera connaître la direction de cette droite.

A l'inverse, dès que l'on connaîtra la loi mathématique à laquelle les droites d'un même faisceau seront assujetties, on pourra toujours en conclure les équations générales de ces droites. Supposons par exemple, que tous les points d'un plan donné par l'équation

$$x+y+z=c$$

pris pour base, on abaisse des perpendiculaires sur une droite donnée par les équations

$$x=y=-(z-c),$$

ces droites formeront un certain faisceau, et, pour en trouver les équations générales, voici comment on opérera. Désignant par (x', y', z') le pied de la perpendiculaire abaissée du point (x, y, z) sur la droite dont il s'agit, on aura d'abord

$$x'=y'=-(z'-c);$$

et les équations de cette perpendiculaire seront de la forme

$$X-x=\frac{x-x'}{z-z'}(Z-z)\ ,\quad Y-y=\frac{y-y'}{z-z'}(Z-c).$$

La condition de perpendicularité donnera ensuite

$$1-\frac{x-x'}{z-z'}-\frac{y-y'}{z-z'}=0\ ,$$

ou

$$z-z'=(x-x')+(y-y')\ ;$$

nous aurons donc, entre x', y', z' trois équations desquelles nous tirerons

$$x'=y'=-(z'-c)=-\frac{(z-c)-(x+y)}{3}\ ,$$

et de là

$$x-x'=\frac{(z-c)+(2x-y)}{3}\ ,\ y-y'=\frac{(z-c)+(2y-x)}{3}\ ,\ z-z'=\frac{2(z-c)+(x+y)}{3}\ ;$$

d'où

$$\frac{x-x'}{z-z'}=\frac{(z-c)+(2x-y)}{2(z-c)+(x+y)}\ ,\qquad \frac{y-y'}{z-z'}=\frac{(z-c)+(2y-x)}{2(z-c)+(x+y)}\ ;$$

de sorte que les équations générales des droites du faisceau seront

$$X-x-\frac{(z-c)+(2x-y)}{2(z-c)+(x+y)}(Z-z)=0\ ,\ Y-y-\frac{(z-c)+(2y-x)}{2(z-c)+(x+y)}(Z-z)=0,$$

qu'au moyen de l'équation de la base, on pourra réduire ensuite à

$$X-x+\frac{2y-x}{z-c}(Z-z)=0\ ,\ Y-y+\frac{2x-y}{z-c}(Z-z)=0\ ;$$

c'est précisément le faisceau que nous avions d'abord pris pour exemple, et dont nous connaissons présentement le mode de génération.

3. A l'aide des trois équations

$$z=\mathrm{f}(x,y) \qquad (\mathrm{s})$$

$$X-x+P(Z-z)=0\;, \qquad Y-y+Q(Z-z)=0\;, \qquad (\mathrm{D})$$

il sera toujours facile d'assigner les droites du faisceau qui ont une situation déterminée par rapport à sa base. Pour en donner deux exemples simples, supposons, en premier lieu, qu'on demande quels sont les points de cette base d'où les droites émanent dans des directions tangentes; en observant que la normale à la base au point (x, y, z) a pour ses équations

$$X-x+p(Z-z)=0\;, \qquad Y-y+q(Z-z)=0\;, \qquad (\mathrm{N})$$

on verra que, pour cela, il faut qu'on ait

$$1+pP+qQ=0\;,$$

équation d'une surface qui coupera la base suivant une ligne courbe à double courbure, pour tous les points de laquelle cette circonstance aura lieu. D'où l'on voit que, dans le cas particulier où cette dernière équation ne différerait de l'équation (s) que par un simple facteur, les droites du faisceau seraient toutes des tangentes à sa base.

Appliquons ces considérations au faisceau donné par les trois équations

$$x+y+z=c\;,$$

$$X-x+\frac{2y-x}{z-c}(Z-z)=0\;, \quad Y-y+\frac{2x-y}{z-c}(Z-z)=0\,.$$

Ayant ici

$$P=\frac{2y-x}{z-c}\,,\qquad Q=\frac{2x-y}{z-c}\,,\qquad p=q=-1\,,$$

l'équation du problème sera

$$1-\frac{2y-x}{z-c}-\frac{2x-y}{z-c}=0\,,$$

c'est-à-dire,

$$z-x-y=c\,;$$

équation d'un plan qui coupe la base suivant une droite donnée par les équations

$$x+y=0\,,\qquad z=c\,.$$

Tel est donc le lieu de tous les points de la base d'où les droites du faisceau émanent dans des directions tangentes à cette base, et se confondent conséquemment avec elle, puisque celle-ci est une surface plane.

4. Supposons, en second lieu, que l'on demande quels sont les points de la base d'où les droites du faisceau émanent dans des directions normales à cette base. Il est clair qu'ici il faudra poser les deux équations

$$P=p\,,\qquad Q=q\,,$$

qui, combinées avec l'équation (s) feront connaître les points de la base, en nombre limité, pour lesquels cette circonstance aura lieu. Si cependant, dans des cas particuliers, chacune de ces équations se trouvait comportée par les deux autres, alors il y aurait sur la base une courbe à double courbure de chacun des points de laquelle les droites du faisceau émaneraient dans des directions normales à cette base. Et si ces trois équations ne différaient les unes des autres que par un simple facteur, toutes les droites du système seraient des normales à sa base.

Appliquons

Appliquons ces considérations au faisceau de droites donné par les trois équations

$$x+y+z=c\ ;$$

$$X-x+\frac{2y-x}{z-c}(Z-z)=0\ , \qquad Y-y+\frac{2x-y}{z-c}(Z-z)=0\ .$$

Ayant ici

$$P=\frac{2y-x}{z-c}\ , \qquad Q=\frac{2x-y}{z-c}\ , \qquad p=q=-1\ ,$$

les deux équations du problème seront

$$\frac{2y-x}{z-c}=-1\ , \qquad \frac{2x-y}{z-c}=-1\ ;$$

c'est-à-dire,

$$(z-c)+(2y-x)=0\ , \qquad (z-c)+(2x-y)=0\ ;$$

équations qui, conjointement avec l'équation

$$x+y+z=c$$

de la base du faisceau, sont satisfaites en posant

$$x=y=0\ , \qquad z=c\ ;$$

mais il est aisé de voir (2) que cette solution ne saurait être admise. Elle se trouve introduite à raison de la forme $\frac{0}{0}$ que prennent alors P et Q.

5. La base d'un faisceau de droite étant une surface tout-à-fait arbitraire, on peut se proposer de substituer une nouvelle base à une base donnée. Les équations générales des droites du faisceau changent alors de forme ; et on opère ainsi une transformation assez analogue à celle des coordonnées. Mais voyons auparavant comment

on peut transporter le point d'application (x, y, z) de l'une des droites du faisceau de l'endroit où cette droite perce la base en un autre lieu quelconque (x', y', z') sur sa direction ; de telle sorte qu'alors les coordonnées x', y', z' deviendront tout-à-fait indépendantes les unes des autres. Supposons qu'alors les équations de (D) soient

$$X-x'+P'(Z-z')=0\ ,\qquad Y-y'+Q'(Z-z')=0\ ;\qquad \text{(D}'\text{)}$$

P' et Q' devront être des fonctions déterminées de x', y', z' ; et c'est à la recherche de ces fonctions que se réduira la résolution du problème.

Or, parce que le point (x, y, z) doit être sur la droite (D′), on devra avoir

$$x-x'+P'(z-z')=0\ ,\qquad y-y'+Q'(z-z')=0\ .$$

Ensuite, parce que la direction de cette droite doit toujours demeurer la même, on aura aussi

$$P'=P\ ,\qquad Q'=Q\ .$$

Joignant donc à ses quatre équations l'équation (s), pour en éliminer les trois coordonnées x, y, z, il en résultera, entre P' et Q', deux équations desquelles on tirera les valeurs cherchées de ces inconnues, fonctions de x', y', z'.

A ce procédé il sera peut-être quelquefois plus commode de substituer le suivant : l'élimination de P' et Q' entre les quatre premières équations donne les deux suivantes

$$x-x'+P(z-z')=0\ ,\qquad y-y'+Q(z-z')=0\ ;$$

en y joignant donc l'équation (s), on en pourra tirer les valeurs de x, y, z en x', y', z', lesquelles substituées dans P et Q les changeront en P' et Q'.

Quelque procédé qu'on emploie d'ailleurs, il s'offrira un moyen fort simple de vérifier les valeurs obtenues pour P' et Q'. Ce moyen consiste en ce qu'en établissant entre x', y', z' la même relation qui existait entre x, y, z, les valeurs de P' et Q' doivent évidemment, en vertu de cette relation, être susceptibles de prendre une forme telle qu'elles ne diffèrent plus que par les accens des valeurs de P et Q. Cette manière simple de vérifier les valeurs obtenues pour P' et Q' est d'autant plus précieuse que, le plus souvent, on trouve pour ces fonctions plnsieurs systèmes de valeurs entre lesquelles il devient nécessaire de choisir.

Appliquons ces procédés et ces réflexions au faisceau de droites données par les trois équations

$$x+y+z=c\ ,$$

$$X-x+\frac{2y-x}{z-c}(Z-z)=0\ , \qquad Y-y+\frac{2x-y}{z-c}(Z-z)=0\ .$$

Pour appliquer la première méthode, nous poserons les cinq équations

$$x-x'+P'(z-z')=0\ , \qquad y-y'+Q'(z-z')=0\ ,$$

$$(z-c)P'=2y-x\ , \qquad (z-c)Q'=2x-y\ ,$$

$$x+y+z=c\ ,$$

tirant d'abord les valeurs de x et y des deux premières, pour les substituer dans les trois autres, celles-ci deviendront

$$2Q'z=2Q'z'-P'(z'-c)+(2y'-x')\ , \quad 2P'z=2P'z'-Q'(z'-c)+(2x'-y')\ ,$$

$$(P'+Q'-1)z=(P'+Q'-1)z'+(x'+y'+z'-c)\ ,$$

entre lesquelles il ne sera plus question que d'éliminer z. Tirant donc de la dernière la valeur de cette coordonnée, pour la substituer dans les deux autres, on aura, pour déterminer les inconnues P' et Q', les deux équations

$$P'(P'+Q')(z'-c)-P'\{(z'-c)+(2y'-x')\}+Q'\{2(z'-c)+3x'\}+(2y'-x')=0,$$

$$Q'(P'+Q')(z'-c)-Q'\{(z'-c)+(2x'-y')\}+P'\{2(z'-c)+3y'\}+(2x'-y')=0.$$

En prenant leur somme, réduisant et décomposant, on trouve

$$(P'+Q'+1)\{(P'+Q')(z'-c)+(x'+y')\}=0.$$

Pour savoir quel est celui de ces deux facteurs qu'on doit égaler à zéro, supposons pour un moment qu'on ait

$$x'+y'+z'-c=0,$$

cette équation deviendra, en substituant et divisant par $z'-c$

$$(P'+Q'+1)(P'+Q'-1)=0;$$

mais alors P' et Q' ne devront différer de P et Q que par les accens. Or, en vertu de la relation

$$x+y+z=c.$$

on trouve aisément $P+Q+1=0$; donc, en vertu de la relation $x'+y'+z'=c$: on doit aussi avoir $P'+Q'+1=0$ et non $P'+Q'-1=0$; c'est donc le premier facteur qu'il faut égaler à zéro; cela donne

$$P'+Q'=-1,$$

valeur qui, introduite dans les deux équations en P' et Q', les change en celles-ci

$$P'\{2(z'-c)+(2y'-x')\}-Q'\{2(z'-c)+3x'\}=2y'-x' \ ,$$

$$Q'\{2(z'-c)+(2x'-y')\}-P'\{2(z'-c)+3y'\}=2x'-y' \ ,$$

dont la différence est

$$\{4(z'-c)+(5y'-x')\}P'-\{4(z'-c)+(5x'-y')\}Q'+3(x'-y')=0 \ ,$$

qui, combinée avec

$$P'+Q'+1=0 \ ,$$

donne

$$P'=-\frac{(z'-c)+(2x'-y')}{2(z'-c)+(x'-y')} \ , \qquad Q'=-\frac{(z'-c)+(2y'-x')}{2(z'-c)+(x'+y')} \ ,$$

comme nous l'avions déjà trouvé (2).

Si, au contraire, nous voulons faire usage de la seconde méthode, nous poserons les trois équations

$$(z-c)(x-x')+(2y-x)(z-z')=0 \ , \ (z-c)(y-y')+(2x-y)(z-z')=0 \ ,$$

$$x+y+z=c \ ,$$

desquelles il s'agira de tirer les valeurs de x, y, z. Pour y parvenir facilement, prenons d'abord la somme des deux premières. En substituant, dans cette somme, pour $x+y$ sa valeur $-(z-c)$, et divisant ensuite par $z-c$, il viendra

$$2z=c+z'-x'-y' \ ,$$

d'où

$$2(z-c)=(z'-c)-(x'+y') \ , \quad 2(z-z')=-(z'-c)-(x'+y') \ ;$$

substituant ces valeurs dans les deux premières équations, elles deviendront

$$2(z'-c)x-2\{(z'-c)+(x'+y')\}y=x'\{(z'-c)-(x'+y')\}\ ,$$

$$2(z'-c)y-2\{(z'-c)+(x'+y')\}x=y'\{(z'-c)-(x'+y')\}\ ;$$

d'où

$$x=-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{(z'-c)-(x'+y')}{2(z'-c)+(x'+y')}\{(z-c)+y\},\quad y=-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{(z'-c)-(x'+y')}{2(z'-c)+(x'+y')}\{(z'-c)+x'\}$$

et de là

$$2y-x=-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{(z'-c)-(x'+y')}{2(z'-c)+(x'+y')}\{(z'-c)+(2x'-y')\}\ ,$$

$$2x-y=-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{(z'-c)-(x'+y')}{2(z'-c)+(x'+y')}\{(z'-c)+(2y'-x')\}\ ;$$

donc

$$P'=\frac{2y-x}{z-c}=-\frac{(z'-c)+(2x'-y')}{2(z'-c)+(x'+y')},\quad Q'=\frac{2x-y}{z-c}=-\frac{(z'-c)+(2y-x')}{2(z'-c)+(x'+y')}\ .$$

comme ci-dessus. Ainsi, les droites du faisceau pourront simplement être exprimées par les deux équations

$$X-x'-\frac{(z'-c)+(2x'-y')}{2(z'-c)+(x'+y')}(Z-z')=0,\quad Y-y'-\frac{(z'-c)+(2y'-x')}{2(z'-c)+(x'+y')}(Z-z')=0\ ,$$

où les trois coordonnées x', y', z' sont tout-à-fait indépendantes les unes des autres.

Du moment qu'on est ainsi parvenu à exprimer les droites d'un faisceau en coordonnées indépendantes les unes des autres, on peut établir entre ces coordonnées quelle relation on voudra ; ce qui revient évidemment à donner au faisceau une nouvelle base tout-à-fait arbitraire. On pourra donc choisir cette base de manière à rendre les fonctions P' et Q' les plus simples possibles, et notamment à en faire disparaître les irrationnels. On pourra donc la choisir aussi de telle sorte qu'elle ait une situation déterminée par rapport aux droites dont le faisceau se compose.

7. Pour en donner deux exemples simples, supposons d'abord qu'on exige que toutes les droites du faisceau soient tangentes à la nouvelle base ; il ne s'agira pour cela (3) que de prendre pour l'équation de cette base l'intégrale de l'équation différentielle partielle

$$1+p'P'+q'Q'=0\,.$$

On sent au surplus que, le problème étant déterminé de sa nature, ce ne sera ni l'intégrale générale, ni même l'intégrale complète de cette équation, avec ses deux constantes arbitraires, qui pourra le résoudre. Elle devra donc admettre une solution particulière qui sera la base cherchée.

En appliquant ces considérations au faisceau déjà pris pour exemple, nous aurons pour l'équation différentielle partielle de la surface à laquelle sont tangentes toutes les droites dont ce faisceau se compose, en supprimant les accens, pour plus de simplicité,

$$\{(z-c)+(2x-y)\}p+\{(z-c)+(2y-x)\}q=2(z-c)+(x+y)\,.$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$x+y-z=\mathrm{F}\left(\frac{y+z-c}{x+z-c}\right)\,.$$

On y satisfait aussi en posant

$$z=Ax+By+c\;;$$

pourvu qu'on lie les deux constantes arbitraires A et B par la relation

$$A+B+1=0\;;$$

elle admet enfin la solution particulière

$$\{(z-c)+(2x-y)\}^2+\{(z-c)+(2y-x)\}^2+\{2(z-c)+(x+y)\}^2=0\,,$$

laquelle revient aux deux suivantes :

$$x=y=-(z-c)\ ,$$

qui sont en effet (2) celles de l'axe du cylindre auquel sont normales toutes les droites du faisceau. Nous donnerons plus loin, au surplus, un procédé direct, pour parvenir à la surface à laquelle toutes les droites d'un faisceau sont tangentes, à quelque base d'ailleurs que ce faisceau soit rapporté.

8. En second lieu ; si l'on voulait que toutes les droites du faisceau fussent normales à la nouvelle base, il faudrait qu'on eût à la fois

$$p'=P'\ , \qquad q'=Q'\ ;$$

en sorte que l'équation différentielle totale de la nouvelle base devrait être

$$\mathrm{d}z'=P'\mathrm{d}x'+Q'\mathrm{d}y'\ ;$$

mais on voit par là même que le problème n'est pas toujours possible; puisqu'une équation différentielle totale n'est pas toujours intégrable. La condition d'intégrabilité est ici

$$\frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}y'}-\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}x'}=P'\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}z'}-Q'\frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}z'}\ ;$$

et, quand un faisceau sera de nature à y satisfaire, à cause de la constante arbitraire qui entrera dans l'intégrale, une infinité de surfaces différentes pourront couper orthogonalement les droites dont le faisceau sera composé. Ces surfaces seront, les unes à l'égard des autres, ce que M. Crelle a appelé *surfaces parallèles* (*ANNALES*, *tom. XII*, pag. 1 et suiv.)

Pour le faisceau déjà pris pour exemple, on a, en supprimant les accens,

$P=$

$$P=-\frac{(z-c)+(2x-y)}{2(z-c)+(x+y)}\,, \qquad Q=-\frac{(z-c)+(2y-x)}{2(z-c)-(x+y)}\,,$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}=3.\frac{(z-c)+x}{\{2(z-c)+(x+y)\}^2}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}=3.\frac{(z-c)+y}{\{2(z-c)+(x+y)\}^2}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}z}=-3.\frac{x-y}{\{2(z-c)+(x+y)\}^2}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}=+3.\frac{x-y}{\{2(z-c)+(x+y)\}^2}\,;$$

et delà

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}=P\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}z}-Q\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}=3.\frac{x-y}{\{2(z-c)+(x+y)\}^2}\,;$$

la condition d'intégrabilité se trouve donc ici satisfaite, comme on pouvait bien s'y attendre (2); l'équation des surfaces trajectoires orthogonales de toutes les droites du faisceau est donc l'intégrale de l'équation différentielle

$$\{(z-c)+(2x-y)\}\mathrm{d}x+\{(z-c)+(2y-x)\}\mathrm{d}y+\{2(z-c)+(x+y)\}\mathrm{d}z=0\,.$$

On peut la mettre sous cette forme

$$(x+z-c)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}z)+(y+z-c)(\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)+(x-y)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)=0\,,$$

ou, en multipliant par 2,

$$\mathrm{d}.(x+z-c)^2+\mathrm{d}.(y+z-c)^2+\mathrm{d}.(x-y)^2=0\,;$$

ce qui donne, en intégrant,

$$(x+z-c)^2+(y+z-c)^2+(x-y)^2=r^2\,,$$

r étant la constante arbitraire. Les droites du faisceau sont donc normales à une série de cylindres concentriques, dont l'axe commun est donné par la double équation

$$x=y=-(z-c),$$

ce qui est conforme (2) au mode de génération du faisceau.

9. Un faisceau de droites étant rapporté à une base déterminée quelconque, on peut désirer de reconnaître immédiatement s'il existe ou non des surfaces trajectoires orthogonales des droites dont ce faisceau se compose ; et c'est par la recherche de la condition de laquelle dépend cette circonstance que nous terminerons ce paragraphe. Nous venons déjà de voir qu'on devait avoir pour cela.

$$\frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}y'}-\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}x'}=P'\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}z'}-Q'\frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}z'} ;$$

mais nous pouvons écrire simplement

$$\frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}y'}=\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}x'},$$

pourvu qu'il demeure entendu que dans P' et Q' on fera varier z' comme fonction de x' et y'. Avec cette attention, cette dernière équation revient en effet à

$$\frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}y'}+\frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}z'}q'=\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}x'}+\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}z'}p',$$

qui, en remettant pour p' et q' leurs valeurs P' et Q', rentre exactement dans la première.

Mais, comme nous avons (5)

$$P'=P, \qquad Q'=Q,$$

nous pourrons remplacer cette équation de condition par la suivante

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y'}=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x'} ; \qquad (\alpha)$$

de sorte que toute la question se réduira à traduire cette dernière en données primitives du problème, c'est-à-dire, à en éliminer x', y', z' au moyen des relations qui les lient à x, y, z.

Pour cela, nous remarquerons d'abord que P et Q n'étant fonctions de x' et y' que par l'intermédiaire de x et y, on doit avoir

$$\left.\begin{aligned}\frac{dP}{dx'}=\frac{dP}{dx}\,\frac{dx}{dx'}+\frac{dP}{dy}\,\frac{dy}{dx'}\,,\quad \frac{dP}{dy'}=\frac{dP}{dx}\,\frac{dx}{dy'}+\frac{dP}{dy}\,\frac{dy}{dy'}\,,\\ \frac{dQ}{dy'}=\frac{dQ}{dx}\,\frac{dx}{dy'}+\frac{dQ}{dy}\,\frac{dy}{dy'}\,,\quad \frac{dQ}{dx'}=\frac{dQ}{dx}\,\frac{dx}{dx'}+\frac{dQ}{dy}\,\frac{dy}{dx'}\,,\end{aligned}\right\}(\beta)$$

au moyen de quoi la condition (α) se transforme en

$$\frac{dP}{dx}\,\frac{dx}{dy'}+\frac{dP}{dy}\,\frac{dy}{dy'}=\frac{dQ}{dx}\,\frac{dx}{dx'}+\frac{dQ}{dy}\,\frac{dy}{dy'}\,. \qquad (\gamma)$$

D'un autre côté, nous avons (5) les deux équations

$$x-x'+P(z-z')=0\ ,\qquad y-y'+Q(z-z')=0$$

que nous pouvons différentier, l'une et l'autre, successivement par rapport à x' et par rapport à y'. En ayant égard aux relations (β), observant d'ailleurs que

$$\frac{dz}{dx'}=p\,\frac{dx}{dx'}+q\,\frac{dy}{dx'}\,,\qquad \frac{dz}{dy'}=p\,\frac{dx}{dy'}+q\,\frac{dy}{dy'}\,,$$

qu'en outre

$$\frac{dz'}{dx'}=p'=P\ ,\qquad \frac{dz'}{dy'}=q'=Q\,,$$

et posant enfin, pour abréger,

$$1+pP+(z-z')\frac{dP}{dx}=M\,,\quad qP+(z-z')\frac{dP}{dy}=M'\,,$$

$$1+qQ+(z-z')\frac{dQ}{dy}=N\,,\quad pQ+(z-z')\frac{dQ}{dx}=N'\,,$$

on en tirera ainsi

$$M\frac{dx}{dx'}+M'\frac{dy}{dx'}=1+P^2\,,\quad M\frac{dx}{dy'}+M'\frac{dy}{dy'}=PQ\,,$$

$$N\frac{dy}{dy'}+N'\frac{dx}{dy'}=1+Q^2\,,\quad N\frac{dy}{dx'}+N'\frac{dx}{dx'}=PQ\,,$$

équations qui donnent

$$\frac{dx}{dx'}=\frac{(1+P^2)N-PQM'}{MN-M'N'}\,,\quad \frac{dy}{dy'}=\frac{(1+Q^2)M-PQN'}{MN-M'N'}\,,$$

$$\frac{dy}{dx'}=\frac{PQM-(1+P^2)N'}{MN-M'N'}\,,\quad \frac{dx}{dy'}=\frac{PQN-(1+Q^2)M'}{MN-M'N'}\,;$$

substituant toutes ces valeurs dans l'équation de condition (γ), elle deviendra

$$(1+P^2)\left(N\frac{dQ}{dx}-N'\frac{dQ}{dy}\right)-(1+Q^2)\left(M\frac{dQ}{dy}-M'\frac{dP}{dx}\right)$$

$$=PQ\left(N\frac{dP}{dx}-N'\frac{dP}{dy}-M\frac{dQ}{dy}+M'\frac{dQ}{dx}\right)\,;$$

mettant enfin dans cette dernière, pour M, N, M', N' les fonctions dont ces lettres sont les symboles, on trouvera, toutes réductions faites,

$$P(Q-q)\frac{dP}{dx}-Q(P-p)\frac{dQ}{dy}+(1+Q^2+pP)\frac{dP}{dy}-(1+P^2+qQ)\frac{dQ}{dx}=0\,;(\delta)$$

sur quoi il faudra se rappeler de faire varier z dans P et Q, comme fonctions de x et y.

Si présentement nous remarquons que

$$1+Q^2+pP=1+P^2+Q^2-P(P-p),$$

$$1+P^2+qQ=1+P^2+Q^2-Q(Q-q),$$

qu'en outre

$$\frac{dq}{dx}=\frac{dp}{dy}=s,$$

et que, par suite,

$$\frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy}=\frac{d(Q-q)}{dx}-\frac{d(P-p)}{dy},$$

l'équation (δ) pourra être écrite ainsi

$$(Q-q)\left(P\frac{dP}{dx}+Q\frac{dQ}{dx}\right)-(P-p)\left(P\frac{dP}{dy}+Q\frac{dQ}{dy}\right)$$

$$+(1+P^2+Q^2)\left\{\frac{d(P-p)}{dy}-\frac{d(Q-q)}{dx}\right\}=0;$$

mais on a

$$P\frac{dP}{dx}+Q\frac{dQ}{dx}=\tfrac{1}{2}.\frac{d(1+P^2+Q^2)}{dx},\quad P\frac{dP}{dy}+Q\frac{dQ}{dy}=\tfrac{1}{2}.\frac{d(1+P^2+Q^2)}{dy};$$

donc notre équation revient encore à

$$2(1+P^2+Q^2)\frac{d(Q-q)}{dx}-(Q-q)\frac{d(1+P^2+Q^2)}{dx}$$

$$=2(1+P^2+Q^2\frac{d(P-p)}{dy}-(P-p)\frac{d(1+P^2+Q^2)}{dy};$$

en divisant alors ses deux membres par $(1+P^2+Q^2)^{\frac{3}{2}}$, elle prendra finalement cette forme très-simple

$$\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}x}\,\frac{Q-q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}=\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}y}\,\frac{P-p}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\,. \qquad (\varepsilon)$$

Il faudra donc que cette équation soit immédiatement identique, ou du moins qu'elle devienne, après en avoir chassé z et ses coefficiens différentiels, au moyen de l'équation (s), pour que les droites (D) dont le faisceau se compose puissent être traversées orthogonalement par une même surface. L'équation de condition (ε) peut être regardée comme fondamentale, dans les recherches qui vont présentement nous occuper.

Faisons-en l'application au faisceau de droites données par les trois équations

$$x+y+z=c\,,$$

$$X-x+\frac{2y-x}{z-c}(Z-z)=0\,, \quad Y-y+\frac{2x-y}{z-c}(Z-z)=0\,.$$

Ayant ici

$$P=\frac{2x-y}{z-c}\,, \qquad Q=\frac{2x-y}{z-c}\,, \qquad p=q=-1\,,$$

il viendra

$$P-p=\frac{(z-c)+(2y-x)}{z-c}\,, \qquad Q-q=\frac{(z-c)+(2x-y)}{z-c}\,,$$

$$\sqrt{1+P^2+Q^2}=\frac{\sqrt{(2x-y)^2+(2y-x)^2+(z-c)^2}}{z-c}\,,$$

et par suite

$$\frac{P-p}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}=\frac{(z-c)+(2y-x)}{\sqrt{(2x-y)^2+(2y-x)^2+(z-c)^2}},$$

$$\frac{Q-q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}=\frac{(z-c)+(2x-y)}{\sqrt{(2x-y)^2+(2y-x)^2+(z-c)^2}};$$

cela donne

$$\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}y}\frac{P-p}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}=\frac{2(z-c)^2-\{(2y-x)q+(5y-4x)\}(z-c)+\{(6x^2-8xy-5y^2)q+3x(2x-y)\}}{\{(2x-y)^2+(2y-x)^2+(z-c)^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}x}\frac{Q-q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}=\frac{2(z-c)^2-\{(2x-y)p+(5x-4y)\}(z-c)+\{(6y^2-8xy-5x^2)p+3y(2y-x)\}}{\{(2x-y)^2+(2y-x)^2+(z-c)^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

résultats qui, en y mettant pour p et q leurs valeurs -1 et pour $z-c$ sa valeur $-(x+y)$, se réduisent également à

$$\frac{9xy}{\{6(x^2-xy+y^2)\}^{\frac{3}{2}}};$$

ce qui nous apprendrait, si nous ne le savions déjà, que les droites dont ce faisceau se compose peuvent être traversées orthogonalement par une même surface.

§. II.

Démonstration des théorèmes de MALUS.

10. Reprenons le faisceau de droites donné par les trois équations

$$z=\mathrm{f}(x,y), \qquad \text{(s)}$$

$$X-x+P(Z-z)=0, \qquad Y-y+Q(Z-z)=0, \qquad \text{(D)}$$

et concevons que les variables indépendantes x et y reçoivent respectivement les accroissemens simultanés αi et βi, dans lesquels α

et β sont des nombres abstraits, arbitraires et indépendans, et i une longueur indéterminée (*). En posant, pour abréger,

$$\gamma = p\alpha + q\beta + (r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2)\frac{i}{1.2} + \ldots.$$

$$G = \frac{dP}{dx}\alpha + \frac{dP}{dy}\beta + \left(\frac{d^2P}{dx^2}\alpha^2 + 2\frac{d^2P}{dxdy}\alpha\beta + \frac{d^2P}{dy^2}\beta^2\right)\frac{i}{1.2} + \ldots.$$

$$H = \frac{dQ}{dx}\alpha + \frac{dQ}{dy}\beta + \left(\frac{d^2Q}{dx^2}\alpha^2 + 2\frac{d^2Q}{dxdy}\alpha\beta + \frac{d^2Q}{dy^2}\beta^2\right)\frac{i}{1.2} + \ldots.$$

on verra, en vertu du théorème de Taylor, qu'alors, tandis que x et y deviennent respectivement $x+\alpha i$ et $y+\beta i$, z, P et Q se changent respectivement en $z+\gamma i$, $P+Gi$, $Q+Hi$; de sorte que les équations de la droite émanée du point $(x+\alpha i, y+\beta i, z+\gamma i)$ de la base du faisceau seront

$$\left.\begin{aligned} X-x-\alpha i+(P+Gi)(Z-z-\gamma i)=0, \\ Y-y-\beta i+(Q+Hi)(Z-z-\gamma i)=0. \end{aligned}\right\} \quad (D')$$

Chercher le point d'intersection des deux droites (D) et (D′) serait vouloir résoudre un problème plus que déterminé; puisqu'on aurait *quatre* équations pour déterminer trois inconnues X, Y, Z seulement. Le point (x, y, z) étant donc pris arbitrairement sur la base (s) du faisceau, lorsqu'on se sera donné la longueur arbitraire i, un second point $(x+\alpha i, y+\beta i, z+\gamma i)$ de cette base ne pourra être tel que la droite (D′) qui en émanera rencontre la droite (D),

(*) Dans la vue d'abréger, nous avions d'abord voulu nous appuyer ici sur la considération des infiniment petits; mais nous n'avons guère tardé de reconnaître qu'en procédant ainsi, en même temps que nous abrégions fort peu, nous devenions beaucoup moins clairs.

émanée

émanée du premier, et soit conséquemment dans le même plan avec elle, qu'autant qu'il existera une certaine relation entre les deux nombres α et β. Cherchons donc cette relation, et voyons, lorsqu'elle a lieu, quels sont alors le plan des deux droites et leur point de concours.

11. Il est clair que, pour obtenir la relation cherchée, il ne s'agit que d'éliminer les *trois* inconnues X, Y, Z entre les *quatre* équations (D) et (D′) des deux droites. Mais il reviendra au même, et il sera plus commode d'éliminer entre elles les trois binomes $X-x$, $Y-y$, $Z-z$: on obtiendra ainsi, pour l'équation de relation cherchée,

$$G(\beta+Q\gamma)=H(\alpha+P\gamma) : \qquad (\zeta)$$

Cette condition étant supposée remplie, et les deux droites (D) et (D′) se trouvant ainsi dans un même plan, il suffira, pour obtenir l'équation de ce plan, de l'assujettir simplement à passer par la droite (D) et par le point $(x+\alpha i,\ y+\beta i,\ z+\gamma i)$ de la droite (D′). On trouvera ainsi, très-facilement, pour l'équation de ce plan, et sous la condition (ζ),

$$(Q\alpha-P\beta)(Z-z)=(\beta+Q\gamma)(X-x)-(\alpha+P\gamma)(Z-z)\ . \qquad (\eta)$$

Quant au point d'intersection des deux droites, présentement qu'en vertu de la condition (ζ) les quatre équations (D) et (D′) ont lieu à la fois, il nous sera facile de l'obtenir. Mais, pour conserver quelque symétrie dans les résultats, nous éliminerons $Z-z$ d'abord entre les premières équations (D) et (D′), puis entre les dernières, ce qui nous conduira aux valeurs de $X-x$ et $Y-y$ qui, substituées ensuite dans les unes ou dans les autres, donneront celle de $Z-z$, sous deux formes différentes. On trouvera ainsi, toujours sous la condition (ζ),

$$\left.\begin{array}{l} X-x=-P.\dfrac{(\alpha+P\gamma)+G\gamma i}{G}\,, \quad Y-y=-Q.\dfrac{(\beta+Q\gamma)+H\gamma i}{H}\,, \\ Z-z=+\dfrac{(\alpha+P\gamma)+G\gamma i}{G}=+\dfrac{(\beta+Q\gamma)+H\gamma i}{H}\,; \end{array}\right\}\ \theta)$$

sur quoi on peut remarquer que l'équivalence des deux valeurs de $Z-z$ revient précisement à la condition (ζ).

12. Après avoir ainsi déterminé, pour une valeur quelconque de la longueur arbitraire i, une seconde droite (D′) qui rencontre la première, on peut, par un semblable procédé, soit pour la même valeur de i, soit pour toute autre, déterminer une troisième droite (D″) qui rencontre la seconde, puis une quatrième (D‴) qui rencontre la troisième, et ainsi indéfiniment. Ces droites seront les arêtes consécutives d'une certaine surface polyèdre ; et leurs points d'intersection seront les sommets consécutifs d'un polygone ouvert, gauche et rectiligne, dont les côtés se prolongeront suivant les arêtes de la surface polyèdre, laquelle coupera la base (s) du faisceau suivant un autre polygone gauche ouvert, mais curviligne.

A mesure que l'on prendra la longueur i plus petite et qu'en même temps on multipliera davantage le nombre des droites (D), (D′), (D″), ..., les arêtes de la surface polyèdre, et par suite les sommets des deux polygones gauches, tant rectiligne que curviligne, se rapprocheront de plus en plus, jusqu'à ce qu'enfin cette longueur étant devenue tout-à-fait nulle et le nombre des droites infini, ces arêtes deviendront les élémens rectilignes d'une surface développable dont nos deux polygones ouverts deviendront, le premier l'arête de rebroussement et l'autre l'intersection avec la base (s) du faisceau. Cette intersection indiquera donc le chemin qu'on doit tenir sur la surface (s), pour ne rencontrer que des droites du système qui se coupent consécutivement ou, en d'autres termes, qui soient toutes tangentes à une même courbe à double courbure.

Si, sur la base (s) du faisceau, on prend un nouveau point de départ, hors de la direction de cette première courbe, mais d'ailleurs si rapproché d'elle qu'on le voudra; il passera par ce second point une nouvelle courbe, intersection de cette base avec une seconde surface développable, dont les élémens rectilignes seront encore des droites du faisceau, toutes conséquemment tangentes à une seconde courbe à double courbure. Il en sera évidemment de même pour un troisième point de (s), pris hors de la direction des deux premières courbes, pour un quatrième, pris hors de la direction des trois premières, et ainsi indéfiniment; quelque rapprochés d'ailleurs les uns des autres que ces points soient supposés.

Il n'en faut pas davantage pour conclure qu'à quelque loi mathématique que puissent être assujetties des droites se succédant sans interruption les unes aux autres dans l'espace, ces droites se distribuent constamment en une série continue de surfaces développables dont elles sont les élémens rectilignes. Les arêtes de rebroussement de ces surfaces développables sont, à leur tour, les élémens curvilignes d'une certaine surface, à laquelle toutes les droites du faisceau doivent être tangentes.

13. Cherchons le plan tangent suivant (D) à la surface développable qui passe par cette droite. Ce plan est différent du plan (η), qui passe par les deux droites (D) et (D'); mais, à mesure que la longueur arbitraire i décroîtra, et qu'ainsi (D') marchera vers (D), toujours sous la condition (ζ), ce plan (η) tournera sur (D), comme sur un axe, de manière à faire un angle de plus en plus petit avec le plan tangent cherché. Il se confondra donc enfin avec ce dernier, lorsque la longueur i sera devenue tout-à-fait nulle.

Remarquons aussi que (D') marchant vers (D), sous la condition (ζ), leur point (θ) d'intersection marchera le long de (D), en s'approchant sans cesse du point de contact de cette droite avec l'arête de rebroussement de la surface développable dont elle fait partie; de sorte que le point (θ) deviendra ce point de contact lui-même, lorsque la longueur i sera tout-à-fait nulle.

Mais, lorsque $i=0$, on a simplement (10)

$$\gamma = p\alpha + q\beta\ , \quad G = \frac{dP}{dx}\alpha + \frac{dP}{dy}\beta\ , \quad H = \frac{dQ}{dx}\alpha + \frac{dQ}{dy}\beta\ ;$$

l'équation de condition (ζ) devient donc alors

$$\left(\frac{dP}{dx}\alpha + \frac{dP}{dy}\beta\right)\{pQ\alpha + (1+qQ)\beta\} = \left(\frac{dQ}{dy}\beta + \frac{dQ}{dx}\alpha\right)\{qP\beta + (1+pP)\alpha\}. \quad (\iota)$$

Les mêmes valeurs de γ, G, H, substituées dans les équations (η) et (θ), en faisant en outre dans les dernières $i=0$, donnent, pour l'équation du plan tangent suivant (D) à la surface développable qui passe par cette droite

$$(Q\alpha - P\beta)(Z-z) = \{pQ\alpha + (1+qQ)\beta\}(X-x) - \{qP\beta + (1+pP)\alpha\}(Y-y)\ , \quad (\varkappa)$$

et ensuite pour les équations du point de contact de (D) avec l'arête de rebroussement de cette surface, et par suite avec la surface à laquelle toutes les droites du faisceau sont tangentes,

$$\left.\begin{array}{c} X-x = -P.\dfrac{qP\beta + (1+pP)\alpha}{\dfrac{dP}{dx}\alpha + \dfrac{dP}{dy}\beta}\ , \qquad Y-y = -Q.\dfrac{pQ\alpha + (1+qQ)\beta}{\dfrac{dQ}{dx}\alpha + \dfrac{dQ}{dy}\beta} \\ Z-z = +\dfrac{qP\beta + (1+pP)\alpha}{\dfrac{dP}{dx}\alpha + \dfrac{dP}{dy}\beta} = +\dfrac{pQ\alpha + (1+qQ)\beta}{\dfrac{dQ}{dx}\alpha + \dfrac{dQ}{dy}\beta}\ . \end{array}\right\} \quad (\lambda)$$

Il ne s'agira donc plus, pour obtenir ces résultats en simples fonctions de x, y, z, p, q, P, Q, que de substituer dans les formules ($\varkappa$) et (λ), la valeur de l'un quelconque des deux nombres α et β, tirée de l'équation (ι), ce qui en fera aussi disparaître l'autre.

14. Mais, parce que l'équation (ι) est du second degré en α et β, elle donnera, généralement parlant, pour l'un de ces deux nombres, en fonction de l'autre, deux valeurs distinctes, lesquelles, substituées

dans l'équation (*), donneront naissance à deux plans tangens se coupant suivant la droite (D). Il y aura donc aussi deux surfaces développables se coupant suivant cette droite; et, comme on pourrait en dire autant de toute autre droite du faisceau, il faut en conclure qu'en général, *à quelque loi mathématique que soient assujetties des droites qui se succèdent sans interruption dans l'espace, ces droites se distribuent toujours en deux séries continues de surfaces développables, dont elles sont à la fois les élémens rectilignes et les intersections; de manière à être toutes tangentes à la fois, soit à deux surfaces courbes, soit à deux nappes d'une même surface courbe, lieux des arêtes de rebroussement des surfaces développables des deux séries.* Nous disons en général, parce que ceci suppose que l'équation (ι) a deux racines effectives, réelles et inégales. Il serait plus long que difficile de discuter les divers cas particuliers qui peuvent faire exception, et à cause de cela nous nous en dispenserons.

Si l'on suppose que les droites dont il s'agit sont les rayons de lumière d'un même faisceau, les surfaces courbes lieux des arêtes de rebroussement des surfaces développables des deux séries seront les surfaces caustiques auxquelles le faisceau donnera naissance.

15. En développant et ordonnant l'équation de condition (ι), par rapport à α et β, elle devient

$$\left\{qP\frac{dQ}{dy}-(1+qQ)\frac{dP}{dy}\right\}\beta^2$$

$$-\left\{pQ\frac{dP}{dy}-qP\frac{dQ}{dx}+(1+qQ)\frac{dP}{dx}-(1+pP)\frac{dQ}{dy}\right\}\alpha\beta$$

$$-\left\{pQ\frac{dP}{dx}-(1+pP)\frac{dQ}{dx}\right\}\alpha^2=0\,;$$

de sorte qu'en posant

$$\varrho+\varrho'=\frac{pQ\frac{dP}{dy}-qP\frac{dQ}{dx}+(1+qQ)\frac{dP}{dx}-(1+pP)\frac{dQ}{dy}}{qP\frac{dQ}{dy}-(1+qQ)\frac{dP}{dy}},$$

$$\varrho\varrho'=-\frac{pQ\frac{dP}{dx}-(1+pP)\frac{dQ}{dx}}{qP\frac{dQ}{dy}-(1+qQ)\frac{dP}{dy}},$$

on en tirera

$$\beta=\varrho\alpha\,,\qquad \beta=\varrho'\alpha\,;$$

valeurs qui, substituées tour à tour dans l'équation (*) donneront, pour les équations des plans tangens, suivant (D), aux deux surfaces développables qui passent par cette droite

$$(Q-\varrho P)(Z-z)=\{pQ+\varrho(1+qQ)\}(X-x)-\{(1+pP)+\varrho qP\}(Y-y)\,,$$

$$(Q-\varrho'P)(Z-z)=\{pQ+\varrho'(1+qQ)\}(X-x)-\{(1+pP)+\varrho'qP\}(Y-y)\,.$$

16. Il nous serait facile, d'après cela, d'assigner l'angle sous lequel se coupent les deux surfaces développables qui passent par l'une quelconque des droites du faisceau : bornons-nous à chercher comment ce faisceau doit être conditionné pour que les surfaces développables des deux séries se coupent partout orthogonalement. Il faudra évidemment pour cela que, quelles que soient les deux variables indépendantes x et y, nos deux plans tangens soient perpendiculaires l'un à l'autre, ce qu'on exprimera, comme l'on sait, en écrivant

$$(Q-\varrho P)(Q-\varrho'P)$$

$$+\{pQ+\varrho(1+qQ)\}\{pQ+\varrho'(1+Qq)\}+\{(1+pP)+\varrho qP\}\{(1+pP)+\varrho'qP\}=0;$$

ou en développant et en rassemblant les termes affectés de $\rho\rho'$ et $\rho+\rho'$

$$\{(1+q^2)P^2+(1+qQ)^2\}\rho\rho'$$

$$+\{pQ(1+qQ)+qP(1+pP)-PQ\}(\rho+\rho')$$

$$+\{(1+p^2)Q^2+(1+pP)^2\}=0\ ;$$

ou enfin, en remettant pour $\rho\rho'$ et $\rho+\rho'$ leurs valeurs et chassant les dénominateurs,

$$\{(1+q^2)P^2+(1+qQ)^2\}\left\{pQ\frac{dP}{dx}-(1+pP)\frac{dQ}{dx}\right\}$$

$$-\{pQ(1+qQ)+qP(1+pP)-PQ\}\times$$

$$\left\{pQ\frac{dP}{dy}-qP\frac{dQ}{dx}+(1+qQ)\frac{dP}{dx}-(1+pP)\frac{dQ}{dy}\right\}$$

$$-\{(1+p^2)Q^2+(1+pP)^2\}\left\{qP\frac{dQ}{dy}-(1+qQ)\frac{dP}{dy}\right\}=0.$$

Telle est donc l'équation qui doit être identique, quels que soient x et y, pour que les surfaces développables des deux séries se coupent partout orthogonalement. En la développant, ordonnant par rapport aux coefficiens différentiels de P et Q et décomposant, elle devient

$$(1+pP+qQ)\left\{P(Q-q)\frac{dP}{dx}-Q(P-p)\frac{dQ}{dy}\right.$$

$$\left.+(1+Q^2+pP)\frac{dP}{dy}-(1+P^2+qQ)\frac{dQ}{dx}\right\}=0.$$

Or, le premier facteur ne saurait être nul de lui-même (3) qu'autant qu'on admettrait que toutes les droites du faisceau sont tangentes à sa base (s), ce que nous n'avons pas supposé ; c'est donc l'autre qui devra être nul de lui-même pour que la condition dont il s'agit se trouve satisfaite ; mais ce facteur égalé à zéro n'est autre chose que l'équation (δ) du précédent paragraphe, qui exprime, comme nous l'avons vu, que les droites dont le faisceau se compose peuvent être traversées orthogonalement par une même surface, et que nous avons mise ensuite sous la forme plus simple

$$\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}x}\frac{Q-q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}=\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}y}\frac{P-p}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\;; \qquad (\varepsilon)$$

il y a donc une parfaite identité entre les deux conditions ; ainsi, *dire que les deux séries de surfaces développables dans lesquelles se distribuent des droites qui se succèdent sans interruption dans l'espace, suivant une loi mathématique quelconque se coupent partout orthogonalement, ou dire que ces droites peuvent être traversées orthogonalement par une même surface, c'est dire une seule et même chose en des termes différens* (*).

17. Si l'on introduit tour-à-tour les deux valeurs de β en α trouvées ci-dessus (15) dans les formules (λ), on aura pour les équations des points de contact de (D) avec les deux surfaces auxquelles toutes les droites du faisceau sont tangentes,

---

(*) Il nous eut sans doute été facile de déduire l'identité entre ces deux conditions de la belle théorie d'Euler sur la courbure des surfaces; et dès-lors il nous eut suffi d'assigner l'une d'entre elles pour pouvoir ensuite en conclure l'autre. Si donc nous en avons usé autrement, c'est, d'une part, afin de ne rien emprunter ailleurs, et d'une autre, dans la vue de soumettre notre équation (ε) à une vérification d'autant plus convenable que, comme nous en avons déjà prévenu, cette équation est fondamentale dans la théorie qui nous occupe.

$$\left.\begin{array}{l} X-x=-P.\dfrac{\varrho qP+(1+pP)}{\dfrac{dP}{dx}+\varrho\dfrac{dP}{dy}}\,, \quad Y-y=-Q.\dfrac{pQ+\varrho(1+qQ)}{\dfrac{dQ}{dx}+\varrho\dfrac{dQ}{dy}}\,, \\ Z-z=+\dfrac{\varrho qP+(1+pP)}{\dfrac{dP}{dx}+\varrho\dfrac{dP}{dy}}=+\dfrac{pQ+\varrho(1+qQ)}{\dfrac{dQ}{dx}+\varrho\dfrac{dQ}{dy}}\,; \end{array}\right\}(\mu)$$

$$\left.\begin{array}{l} X-x=-P.\dfrac{\varrho' qP+(1+pP)}{\dfrac{dP}{dx}+\varrho'\dfrac{dP}{dy}}\,, \quad Y-y=-Q.\dfrac{pQ+\varrho'(1+qQ)}{\dfrac{dQ}{dx}+\varrho'\dfrac{dQ}{dy}}\,, \\ Z-z=+\dfrac{\varrho' qP+(1+pP)}{\dfrac{dP}{dx}+\varrho'\dfrac{dP}{dy}}=+\dfrac{pQ+\varrho'(1+qQ)}{\dfrac{dQ}{dx}+\varrho'\dfrac{dQ}{dy}}\,. \end{array}\right\}(\nu)$$

Si, entre l'équation (s) et l'un ou l'autre des systèmes d'équations (8) et (9), on élimine les trois coordonnées x, y, z; l'équation résultante en X, Y, Z sera celle de l'une ou de l'autre des deux surfaces auxquelles toutes les droites du faisceau sont tangentes. Or, comme ϱ et ϱ' sont les deux racines d'une même équation du second degré, excepté le seul cas où l'équation (ι) sera décomposable en deux facteurs rationnels du premier degré, les deux surfaces dont il s'agit ne seront proprement que deux nappes d'une même surface.

18. Mais, dans la recherche de l'équation commune à ces deux nappes, on peut procéder plus rapidement en opérant comme il suit: la double valeur de $Z-z$, dans les formules (λ), laquelle renferme implicitement l'équation de condition, donne, en chassant les dénominateurs et ordonnant par rapport à α et β,

$$\left\{\frac{dP}{dx}(Z-z)-(1+pP)\right\}\alpha=\left\{qP-\frac{dP}{dy}(Z-z)\right\}\beta\,,$$

$$\left\{\frac{dQ}{dy}(Z-z)-(1+qQ)\right\}\beta=\left\{pP-\frac{dQ}{dx}(Z-z)\right\}\alpha\,;$$

d'où, en multipliant membre à membre, réduisant et ordonnant par rapport à $Z-z$,

$$\left.\begin{array}{c}\left\{\frac{dP}{dx}\,\frac{dQ}{dy}-\frac{dP}{dy}\,\frac{dQ}{dx}\right\}(Z-z)^2 \\ -\left\{(1+pP)\frac{dQ}{dy}+(1+qQ)\frac{dP}{dx}-qP\frac{dQ}{dx}-pQ\frac{dP}{dy}\right\}(Z-z) \\ +(1+pP+qQ)=0\ .\end{array}\right\}\ (\xi)$$

Dans cette équation, la coordonnée Z appartient toujours au point de contact qui d'ailleurs, se trouvant sur (D), doit satisfaire à ses équations. La recherche de l'équation du lieu des points de contact, c'est-à-dire, de l'équation de la surface à laquelle chacune des droites du faisceau se trouve deux fois tangente, se réduira donc simplement à éliminer x, y, z entre l'équation (s), les deux équations (D) et l'équation (ξ). C'est le procédé que nous avons promis (7).

Appliquons ce procédé au faisceau donné par les trois équations

$$x+y+z=c\ ,$$

$$X-x+\frac{2y-x}{z-c}(Z-z)=0\ ,\quad Y-y+\frac{2x-y}{z-c}(Z-z)\ .$$

Ayant ici

$$P=\frac{2y-x}{z-c}\ ,\qquad Q=\frac{2x-y}{z-c}\ ,\qquad p=q=-1\ ,$$

on trouvera successivement

$$1+pP=\frac{(z-c)-(2y-x)}{z-c}\ ,\qquad qP=-\frac{2y-x}{z-c}\ ,$$

$$1+Qq=\frac{(z-c)-(2x-y)}{z-c}\,,\qquad pQ=-\frac{2x-y}{z-c}\,,$$

$$1+pP+qQ=\frac{(z-c)-(x+y)}{z-c}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=-\frac{(z-c)+p(2y-x)}{(z-c)^2}=-\frac{(z-c)-(2y-x)}{(z-c)^2}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}y}=-\frac{(z-c)+q(2x-y)}{(z-c)^2}=-\frac{(z-c)-(2x-y)}{(z-c)^2}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}=\frac{2(z-c)-q(2y-x)}{(z-c)^2}=\frac{2(z-c)+(2y-x)}{(z-c)^2}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}=\frac{2(z-c)-p(2x-y)}{(z-c)^2}=\frac{2(z-c)+(2x-y)}{(z-c)^2}\,,$$

et de là

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}y}-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}=-3.\frac{(z-c)+(x+y)}{(z-c)^3}\,.$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation (ξ) devient

$$3\{(z-c)+(x+y)\}(Z-z)^2-2(z-c)\{(z-c)-2(x+y)\}(Z-z)-(z-c)^2\{(z-c)-(x+y)\}=0\,;$$

et il ne s'agit plus que d'éliminer x, y, z ou, ce qui revient au même, x, y, $z-c$ entre elle et les trois équations du faisceau. Mais on peut remarquer auparavant que cette équation se décompose comme il suit :

$$\{3(Z-z)+(z-c)\}\{[(z-c)+(x+y)](Z-z)-(z-c)[(z-c)-(x+y)]\}=0$$

En égalant d'abord le premier facteur à *zéro*, il viendra

$$3(Z-c)-2(z-c)=0\,,$$

équation au moyen de laquelle on pourra éliminer $z-c$ des trois équations du faisceau, qui deviendront ainsi

$$3(Z-c)+2(x+y)=0\ ,$$

$$2(x+y)=3X, \qquad 2(x+y)=3Y\ ;$$

on n'aura donc plus que la seule inconnue $x+y$ à éliminer entre elles, ce qui conduira à deux résultats distincts ; d'où on peut conclure que, dans le cas particulier qui nous occupe, les droites dont le faisceau se compose sont toutes tangentes, non à une même surface mais à une ligne. L'élimination de $x+y$ effectuée, on obtient, pour la double équation de cette ligne,

$$X=Y=-(Z-c)\ .$$

C'est précisément (8) la double équation de l'axe du cylindre auquel toutes les droites du faisceau sont normales, comme on pouvait bien s'y attendre.

En égalant, au contraire, le second facteur à zéro, en vertu de l'équation $x+y+z=c$, on obtient simplement

$$z-c=0\ ,$$

équation au moyen de laquelle celles du faisceau se réduisent à

$$x+y=0\ , \qquad 2y-x=0\ , \qquad 2x-y=0\ ,$$

équations auxquelles on ne peut satisfaire qu'en posant

$$x=0\ , \qquad y=0\ , \qquad \text{d'où} \qquad z=c\ .$$

Ce sont les équations du point que nous avons déjà rencontré (4) et qui ne saurait être admis comme solution du problème, puisque X, Y, Z ont disparu.

§. III.

Démonstration des théorèmes de M. Dupin.

19. A quelque loi mathématique que soient assujettis les rayons de lumière qui composent un même faisceau, et à quelque base qu'ils soient rapportés ; s'il se trouve sur leur route une surface à la rencontre de laquelle ils doivent se réfléchir ou se réfracter, on pourra toujours (§. I.) substituer cette surface, comme nouvelle base, à leur base primitive ; et dès-lors la direction du rayon incident émanée de chacun de ses points, ne dépendra plus uniquement que des coordonnées de ce point.

Soit donc (x, y, z) un point d'incidence, située sur une surface soit réfléchissante soit séparatrice de deux milieux, donnée par l'équation

$$z=\mathrm{f}(x, y)\ ; \qquad \text{(s)}$$

à quelque faisceau qu'appartienne d'ailleurs le rayon incident, ses équations pourront toujours être amenées à la forme

$$X-x+P'(Z-z)=0\ , \quad Y-y+Q'(Z-z)=0\ ; \qquad (\mathrm{R}')$$

P', Q' étant des fonctions déterminées des variables indépendantes x et y, dont la forme dépendra, à la fois, de la loi mathématique à laquelle les rayons du faisceau seront assujettis et de la nature de la surface (s).

20. Soient prises pour les équations du rayon réfléchi ou réfracté

$$X-x+P''(Z-z)=0\ , \quad Y-y+Q''(Z-z)=0\ ; \qquad (\mathrm{R}'')$$

si, comme nous le supposons, la surface réfléchissante ou séparatrice est donnée, et que de plus, dans le cas de la réfraction, la nature des milieux séparés par cette surface soit connue, P'' et Q'' seront des fonctions déterminées, bien qu'encore inconnues, de P' et Q', et par suite de x et y. Cherchons, d'après les lois de l'optique, les valeurs de ces deux fonctions.

Les équations de la normale au point d'incidence sont

$$X-x+p(Z-z)=0\ , \qquad Y-y+q(Z-z)=0\ , \qquad \text{(N)}$$

et l'on sait que d'abord elle doit se trouver dans un même plan avec le rayon incident et le rayon réfléchi ou réfracté; ce qui donne, pour première équation du problème,

$$\frac{P'-p}{Q'-q}=\frac{P''-p}{Q''-q}\ . \qquad \text{(I)}$$

En second lieu, s'il s'agit de réflexion, on devra avoir

$$Sin.(R', N)=-Sin.(R'', N) \text{ ou } Sin.^2(R', N)=Sin.^2(R'', N)\ ;$$

tandis que, s'il s'agit de réfraction, on aura

$$\frac{Sin.(R', N)}{\lambda'}=\frac{Sin.(R'', N)}{\lambda''} \quad \text{ou} \quad \frac{Sin.^2(R', N)}{\lambda'^2}=\frac{Sin.^2(R'', N)}{\lambda''^2}\ ;$$

λ' et λ'' étant deux nombres constans, dépendant de la nature des milieux séparés par la surface (s). On voit par là que le cas de la réflexion rentre, comme cas particulier, dans celui de la réfraction, et qu'il se déduit de ce dernier en posant $\lambda''=-\lambda'$; de sorte qu'il nous suffira de nous occuper de ce dernier.

Or, on a, par les formules connues

$$Cos.(R', N)=\frac{1+pP'+qQ'}{\sqrt{(1+p^2+q^2)(1+P'^2+Q'^2)}},\ Cos.(R'', N)=\frac{1+pP''+qQ''}{\sqrt{(1+p^2+q^2)(1+P''^2+Q''^2)}}$$

d'où

$$Sin.^2(R',N)=\frac{(1+p^2+q^2)(1+P'^2+Q'^2)-(1+pP'+qQ')^2}{(1+p^2+q^2)(1+P'^2+Q'^2)},$$

$$Sin.^2(R'',N)=\frac{(1+p^2+q^2)(1+P''^2+Q''^2)-(1+pP''+qQ'')^2}{(1+p^2+q^2)(1+P''^2+Q''^2)},$$

on aura donc, en substituant et supprimant le facteur commun aux dénominateurs des deux membres de l'équation résultante,

$$\frac{(1+p^2+q^2)(1+P'^2+Q'^2)-(1+pP'+qQ')^2}{\lambda'^2(1+P'^2+Q'^2)}=\frac{(1+p^2+q^2)(1+P''^2+Q''^2)-(1+pP''+qQ'')^2}{\lambda''^2(1+P''^2+Q''^2)}.\text{(II)}$$

21. Telles sont donc les deux équations qui devront donner P'' et Q'' en P' et Q'; elles donneront, à la vérité, deux systèmes de valeurs pour ces deux inconnus, tandis que la nature de la question n'en comporte qu'un seul, attendu qu'à un même rayon incident il ne saurait jamais répondre qu'un seul rayon réfléchi ou réfracté; mais on reconnaîtra toujours facilement quel est celui de ces deux systèmes qui doit répondre à chaque cas, en observant que, pour le cas de la réflexion, où il faut faire $\lambda''=-\lambda'$, on doit rejeter le système $P''=P'$, $Q''=Q'$, puisqu'en général le rayon réfléchi ne doit pas se confondre avec le rayon incident. On reconnaîtra, au contraire, le système de valeurs qui convient à la réfraction en ce qu'en y faisant $\lambda''=\lambda'$, il doit donner $P''=P'$, $Q''=Q'$; puisque, lorsque les deux milieux séparés par la surface (s) sont de même nature, le rayon incident, après avoir rencontré cette surface, doit poursuivre sa route sans changer de direction.

22. La recherche de P'' et Q'' en P' et Q', au moyen des équations (I) et (II), étant assez laborieuse, essayons de les combiner entre elles de manière à en déduire deux autres qui se montrent plus traitables, ou que même nous puissions nous dispenser de résoudre pour parvenir au but que nous avons principalement en vue. En vertu de l'équation (I), on a

$$(1+q^2)\left(\frac{P'-p}{Q'-q}\right)^2-2pq\left(\frac{P'-p}{Q'-q}\right)+(1+p^2)=(1+q^2)\left(\frac{P''-p}{Q''-q}\right)^2-2pq\left(\frac{P''-p}{Q''-q}\right)+(1+p^2)$$

ou bien

$$\frac{(1+q^2)\left(\frac{P'-p}{Q'-q}\right)^2-2pq\left(\frac{P'-p}{Q'-q}\right)+(1+p^2)}{(1+q^2)\left(\frac{P''-p}{Q''-q}\right)^2-2pq\left(\frac{P''-p}{Q''-q}\right)+(1+p^2)}=1,$$

d'où

$$\left(\frac{Q'-q}{Q''-q}\right)^2\cdot\frac{(1+q^2)\left(\frac{P'-p}{Q'-q}\right)^2-2pq\left(\frac{P'-p}{Q'-q}\right)+(1+p^2)}{(1+q^2)\left(\frac{P''-p}{Q''-q}\right)^2-2pq\left(\frac{P''-p}{Q''-q}\right)+(1+p^2)}=\left(\frac{Q'-q}{Q''-q}\right)^2=\left(\frac{P'-p}{P''-p}\right)^2$$

ou, en exécutant la multiplication dans le premier membre,

$$\frac{(1+q^2)(P'-p)^2-2pq(P'-p)(Q'-q)+(1+p^2)(Q'-q)^2}{(1+q^2)(P''-p)^2-2pq(P''-p)(Q''-q)+(1+p^2)(Q''-q)^2}=\left(\frac{Q'-q}{Q''-q}\right)^2=\left(\frac{P'-p}{P''-p}\right)^2,$$

ou encore

$$\frac{(1+p^2+q^2)(1+P'^2+Q'^2)-(1+pP'+qQ')^2}{(1+p^2+q^2)(1+P''^2+Q''^2)-(1+pP''+qQ'')^2}=\left(\frac{Q'-q}{Q''-q}\right)^2=\left(\frac{P'-p}{P''-q}\right)^2;$$

mais l'équation (II) peut être écrite ainsi :

$$\frac{(1+p^2+q^2)(1+P'^2+Q'^2)-(1+pP'+qQ')^2}{(1+p^2+q^2)(1+P''^2+Q''^2)-(1+pP''+qQ'')^2}=\frac{\lambda'^2(1+P'^2+Q'^2)}{\lambda''^2(1+P''^2+Q''^2)};$$

donc

$$\left(\frac{Q'-q}{Q''-q}\right)^2=\left(\frac{P'-p}{P''-p}\right)^2=\frac{\lambda'^2(1+P'^2+Q'^2)}{\lambda''^2(1+P''^2+Q''^2)};$$

c'est-à-dire,

$$\left.\begin{aligned}\frac{P''-p}{\lambda''\sqrt{1+P''^2+Q''^2}}&=\pm\frac{P'-p}{\lambda'\sqrt{1+P'^2+Q'^2}}\,,\\ \frac{Q''-q}{\lambda''\sqrt{1+P''+Q''^2}}&=\pm\frac{Q'-q}{\lambda'\sqrt{1+P'^2+Q'^2}}\,.\end{aligned}\right\}\quad\text{(III)}$$

équations qui pourront remplacer (I) et (II), dans la recherche de P'' et Q'' en P' et Q'. Dans le cas de la réflexion, on prendra les signes inférieurs, en posant $\lambda''=\lambda'$, tandis qu'au contraire, dans le cas de la réfraction, ce sera les signes supérieurs qu'il faudra prendre (21).

23. On tire des équations (III), par différentiation,

$$\frac{1}{\lambda''}\cdot\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}y}\frac{P''-p}{\sqrt{1+P''^2+Q''^2}}=\pm\frac{1}{\lambda'}\cdot\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}y}\frac{P'-p}{\sqrt{1+P'^2+Q'^2}}\,,$$

$$\frac{1}{\lambda''}\cdot\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}x}\frac{Q''-q}{\sqrt{1+P''^2+Q''^2}}=\pm\frac{1}{\lambda'}\cdot\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}x}\frac{Q'-q}{\sqrt{1+P'^2+Q'^2}}\,;$$

d'où en retranchant,

$$\frac{1}{\lambda''}\left\{\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}y}\frac{P''-p}{\sqrt{1+P''^2+Q''^2}}-\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}x}\frac{Q'-p}{\sqrt{1+P''^2+Q''^2}}\right\}$$

$$=\pm\frac{1}{\lambda'}\left\{\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}y}\frac{P'-p}{\sqrt{1+P'^2+Q'^2}}-\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}x}\frac{Q'-q}{\sqrt{1+P'^2+Q'^2}}\right\};$$

donc, suivant qu'on aura ou qu'on n'aura pas

$$\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}y}\frac{P'-p}{\sqrt{1+P'^2+Q'^2}}=\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}x}\frac{Q'-q}{\sqrt{1+P'^2+Q'^2}}\,,$$

on aura ou on n'aura pas

$$\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}y}\frac{P''-p}{\sqrt{1+P''^2+Q''^2}}=\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}x}\frac{Q''-q}{\sqrt{1+P''^2+Q''^2}}\,,$$

et réciproquement ; or, la première de ces équations exprime (9) et (16), que les rayons incidens peuvent être traversés orthogonalement par une même surface ; et la seconde exprime la même chose à l'égard des rayons réfléchis ou réfractés ; donc, *suivant que des rayons incidens sont ou ne sont pas de nature à pouvoir être traversés orthogonalement par une même surface, les rayons réfléchis ou réfractés sont aussi ou ne sont pas de nature à pouvoir être traversés orthogonalement par une même surface.*

24. Soient présentement un nombre quelconque de surfaces réfléchissantes et séparatrices de divers milieux, se succédant comme on voudra dans l'espace. Suivant que les rayons incidens qui tomberont sur la première de ces surfaces pourront ou ne pourront pas être traversés orthogonalement par une même surface, les rayons réfléchis ou réfractés par celle-ci, et se dirigeant vers la seconde, pourront eux-mêmes ou ne pourront pas être traversés orthogonalement par une même surface ; mais ces derniers peuvent, à leur tour, être considérés comme incidens par rapport à cette seconde surface ; d'où il suit que les rayons réfléchis ou réfractés par celle-ci, et se dirigeant comme incidens vers la troisième, se trouveront encore dans les mêmes circonstances, et ainsi de suite, jusqu'à la dernière surface ; d'où l'on voit que, *pour les rayons de lumière qui composent un même faisceau, la faculté de pouvoir être traversés orthogonalement par une même surface ne saurait être perdue ni acquise par l'effet d'une suite de réflexions et de réfractions, en nombre quelconque, opérées à la rencontre de surfaces mathématiques quelconques, séparant des milieux homogènes de quelque nature qu'ils puissent être.*

25. Et, comme la vérité de cette proposition, dans le cas où il n'y a que des réfractions, est indépendante tant du nombre et de la proximité des surfaces séparatrices des divers milieux que de la variation de nature plus ou moins rapide des milieux que ces surfaces séparent, il doit encore en être de même pour des rayons de lumière qui traversent un milieu dont la densité ou la

nature chimérique varie par degrés insensibles, suivant une loi mathématique quelconque; c'est-à-dire, qu'après être sortis d'un tel milieu, ces rayons seront ou ne seront pas normaux à une même surface suivant qu'avant d'y pénétrer ils étaient déjà ou n'étaient pas normaux à une même surface.

26. Soient des rayons de lumière décrivant des lignes courbes dans un milieu variant continuellement de densité ou de nature chimique, suivant une loi mathématique quelconque; concevons à travers le milieu deux surfaces courbes passant par des points jouissant d'un même pouvoir réfringent; par les points où les rayons curvilignes percent ces deux surfaces, menons-leur des tangentes; ces tangentes formeront deux faisceaux de droites; or, il est aisé de conclure de ce qui précède que, suivant que les droites de l'un des faisceaux pourront ou ne pourront pas être traversées orthogonalement par une même surface courbe, les droites de l'autre faisceau pourront aussi ou ne pourront pas être traversées orthogonalement par une même surface courbe.

27. En particulier, des rayons émanés d'un même point fixe ou parallèles à une même droite fixe, ce qui revient à être émanés d'un point infiniment éloigné, sont normaux à une même surface sphérique, laquelle se réduit à un plan, dans le second cas; donc, des rayons émanés d'un même point fixe ou parallèles à une même droite fixe, ce qui est le cas le plus ordinaire, après avoir subi un nombre quelconque de réflexions et de réfractions à la rencontre de surfaces mathématiques quelconques, séparant des milieux homogènes de quelle nature on voudra, ou encore après avoir traversé un milieu variant continuellement de densité ou de nature chimique suivant une loi mathématique quelconque, peuvent toujours être traversés orthogonalement par une même surface. Ainsi, par exemple, les rayons de lumière qui partent de l'un des points d'un corps céleste, après avoir traversé l'atmosphère, parviennent à notre œil dans des directions normales à une même surface.

28. On voit aussi par là que la recherche de la surface caustique

à laquelle donnent naissance des rayons qui, émanés du point fixe, ont subi des réflexions et des réfractions en nombre quelconque, et que conséquemment l'étude de toutes les circonstances de la vision, dans les cas même les plus compliqués, se réduit finalement à la recherche de la surface, lieu des centres de courbure d'une certaine surface déterminée. C'est la recherche de cette dernière surface qui doit donc présentement nous occuper.

29. Mais, pour parvenir au but, il nous faut d'abord résoudre, par rapport à P'' et Q'', les équations (I) et (II) ou, ce qui revient au même, les équations (III), par lesquelles nous les avons remplacées (22). Pour y parvenir simplement, posons

$$\pm\frac{\lambda''}{\lambda'}\cdot\frac{P'-p}{\sqrt{1+P'^2+Q'^2}}=a\,,\qquad \pm\frac{\lambda''}{\lambda'}\cdot\frac{Q'-q}{\sqrt{1+P'^2+Q'^2}}=b\,;$$

ces équations deviendront ainsi

$$P''-p=a\sqrt{1+P''^2+Q''^2}\,,$$

$$Q''-q=b\sqrt{1+P''^2+Q''^2}\,,$$

qui, successivement divisées et multipliées membre à membre, donnent

$$b(P''-p)=a(Q''-q)\,,$$

$$(P''-p)(Q''-q)=ab(1+P''^2+Q'')^2\,;$$

posant alors

$$P''-p=A\,,\qquad Q''-q=B\,,\qquad 1+p^2+q^2=k\,,\qquad (o)$$

et remarquant que

$$1+P''^2+Q''^2=(P''-p)^2+(Q''-q)^2+2p(P''-p)+2q(Q''-q)+(1+p^2+q^2)\,,$$

on pourra leur donner cette autre forme

bA

$$bA=aB\ ,$$

$$AB=ab(A^2+B^2+2pA+2qB+k)\ ;$$

on en tirera alors, par élimination,

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{-(pa+qb)\pm\sqrt{(pa+qb)^2-k(a^2+b^2-1)}}{a^2+b^2-1}\ ,$$

c'est-à-dire,

$$A=a\,.\,\frac{-(pa+qb)\pm\sqrt{(pa+qb)^2-k(a^2+b^2-1)}}{a^2+b^2-1}\ ,$$

$$B=b\,.\,\frac{-(pa+qb)\pm\sqrt{(pa+qb)^2-k(a^2+b^2-1)}}{a^2+b^2-1}\ .$$

En remettant pour A, B, a, b leurs valeurs et posant, pour abréger,

$$1+P'^2+Q'^2=g\ , \qquad 1+pP'+qQ'=h\ , \qquad (\varpi)$$

il viendra

$$\left.\begin{aligned} P''-p&=\lambda''(P'-p)\,.\,\frac{\lambda''(k-h)\pm\sqrt{\lambda''^2h^2+(\lambda'^2-\lambda''^2)gk}}{\lambda''^2(k-2h)-(\lambda'^2-\lambda''^2)g}\ ,\\ Q''-q&=\lambda''(Q'-q)\,.\,\frac{\lambda''(k-h)\pm\sqrt{\lambda''^2h^2+(\lambda'^2-\lambda''^2)gk}}{\lambda''^2(k-2h)-(\lambda'^2-\lambda''^2)g}\ .\end{aligned}\right\}\ (\rho)$$

Il est visible (21) que, pour le cas de la réfraction, où lorsqu'on fait $\lambda''=\lambda'$, on doit avoir $P''=P'$ et $Q''=Q'$, ce sera les signes inférieurs qu'il faudra prendre ; d'où il suit que, pour le cas de la réflexion, il faudra prendre les signes supérieurs, en posant $\lambda''=\lambda'$. Alors les formules se simplifieront d'une manière notable, et l'on aura

$$P''-p=\frac{k(P'-p)}{k-2h}\,,\qquad Q''-q=\frac{k(Q'-q)}{k-2h}\,,$$

d'où

$$\left.\begin{aligned}P''&=\frac{kP'-2ph}{k-2h}=\frac{(1+p^2+q^2)P'-2p(1+pP'+qQ')}{(1+p^2+q^2)-2(1+pP'+qQ')}\,,\\ Q''&=\frac{kQ'-2qh}{k-2h}=\frac{(1+p^2+q^2)Q'-2q(1+pP'+qQ')}{(1+p^2+q^2)-2(1+pP'+qQ')}\,,\end{aligned}\right\}\quad(\sigma)$$

Pour appliquer ces dernières formules à un exemple, supposons que la surface donnée par l'équation

$$x+y+z=c\,,$$

soit une surface réfléchissante; que, cette surface étant prise pour base, les équations des rayons incidens soient

$$X-x+\frac{2y-x}{z-c}(Z-z)=0\,,\quad Y-y+\frac{2x-y}{z-c}(Z-z)=0\,;$$

et cherchons les équations des rayons réfléchis. Ayant ici

$$P'=\frac{2y-x}{z-c}\,,\qquad Q'=\frac{2x-y}{z-c}\,,\qquad p=q=-1\,,$$

nous trouverons

$$1+pP'+qQ'=\frac{(z-c)+p(2y-x)+q(2x-y)}{z-c}=\frac{(z-c)-(2y-x)(2x-y)}{z-c}=\frac{(z-c)-(x+y)}{z-c}\,,$$

c'est-à-dire,

$$1+pP'+qQ'=\frac{2(z-c)}{z-c}=2\,,$$

et, comme d'ailleurs

$$1+p^2+q^2=3\ ,$$

il viendra, en substituant dans les formules (σ),

$$P''=-\frac{4(z-c)+3(2y-x)}{z-c}=\frac{4(x+y)-3(2y-x)}{z-c}=\frac{7x-2y}{z-c}\ ,$$

$$Q''=-\frac{4(z-c)+3(2x-y)}{z-c}=\frac{4(x+y)-3(2x-y)}{z-c}=\frac{7y-2x}{z-c}\ ;$$

de manière que les équations du rayon réfléchi seront

$$X-x+\frac{7x-2y}{z-c}(Z-z)=0\ ,\qquad Y-y+\frac{7y-2x}{z-c}(Z-z)=0\ .$$

Puisque, dans cet exemple, les rayons incidens sont tous (8) normaux à une même surface, il doit en être de même (23) des rayons réfléchis ; et c'est ce qu'on peut vérifier immédiatement. En posant ici

$$P=\frac{7x-2y}{z-c}\ ,\qquad Q=\frac{7y-2x}{z-c}\ ,\qquad p=q=-1\ ,$$

nous aurons

$$P-p=\frac{(z-c)+(7x-2y)}{z-c}=\frac{(7x-2y)-(x+y)}{z-c}=\frac{3(2x-y)}{z-c}\ ,$$

$$Q-q=\frac{(z-c)+(7y-2x)}{z-c}=\frac{(7y-2x)-(x+y)}{z-c}=\frac{3(2y-x)}{z-c}$$

$$\sqrt{1+P^2+Q^2}=\frac{\sqrt{(z-c)^2+(7x-2y)^2+(7y-2x)^2}}{z-c}=\frac{\sqrt{(x+y)^2+(7x-2y)^2+(7y-2x)^2}}{z-c}$$

c'est-à-dire,

$$\sqrt{1+P^2+Q^2}=\frac{3\sqrt{6(x^2-xy+y^2)}}{z-c}\ ;$$

donc

$$\frac{P-p}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}=\frac{2x-y}{\sqrt{6(x^2-xy+y^2)}}\,, \quad \frac{Q-q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}=\frac{2y-x}{\sqrt{6(x^2-xy+y^2)}}\,;$$

et de là

$$\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}y}\,\frac{P-p}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}=\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}x}\,\frac{Q-q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}=-\frac{9xy}{\{6(x^2-xy+y^2)\}^{\frac{3}{2}}}\,,$$

qui est en effet (9) et (16) le caractère auquel on reconnaît que les droites d'un faisceau sont normales à une même surface.

Si l'on veut présentement connaître à quelles surfaces les rayons réfléchis, donnés par les trois équations

$$x+y+z=c\,,$$

$$X-x+\frac{7x-2y}{z-c}(Z-z)=0\,, \quad Y-y+\frac{7y-2x}{z-c}(Z-z)=0$$

sont normaux, il faudra opérer comme nous l'avons enseigné (8), et pour cela il faudra d'abord rendre les équations de ces rayons indépendantes de la base, ce qu'on fera (5) en posant d'abord les trois équations

$$(z-c)(x-x')+(7x-2y)(z-z')=0\,,\ (z-c)(y-y')+(7y-2x)(z-z')=0\,,$$

$$x+y+z=c\,,$$

desquelles on tirera

$$x=-\frac{1}{6}\cdot\frac{5(z'-c)-(x'+y')}{2(z'-c)+5(x'+y')}\{(z'-c)+(4x'+y')\}\,,$$

$$y=-\frac{1}{6}\cdot\frac{5(z'-c)-(x'+y')}{2(z'-c)+5(x'+y')}\{(z'-c)+(4y'+x')\}\,,$$

$$z-c=+\frac{1}{6}\cdot\frac{5(z'-c)-(x'+y')}{2(z'-c)+5(x'+y')}\{2(z'-c)+5(x'+y')\}\,;$$

de là

$$7x-2y=-\frac{1}{6}\cdot\frac{5(z'-c)-(x'+y')}{2(z'-c)+5(x'+y')}\{5(z'-c)+(26x'-y')\}\ ,$$

$$7y-2x=-\frac{1}{6}\cdot\frac{5(z'-c)-(x'+y')}{2(z'-c)+5(x'+y')}\{5(z'-c)+(26y'-x')\}\ ;$$

donc

$$P'=P=\frac{7x-2y}{z-c}=-\frac{5(z'-c)+(26x'-y')}{2(z'-c)+5(x'+y')}\ ,$$

$$Q'=Q=\frac{7y-2x}{z-c}=-\frac{5(z'-c)+(26y'-x')}{2(z'-c)+5(x'+y')}\ ;$$

de sorte que les équations du faisceau réfléchi, rendues indépendantes de sa base réfléchissante, sont

$$X-x-\frac{5(z'-c)+(26x'-y')}{2(z'-c)+5(x'+y')}(Z-z)=0\ ,$$

$$Y-y-\frac{5(z'-c)+(26y'-x')}{2(z'-c)+5(x'+y')}(Z-z)=0\ :$$

En conséquence, l'équation différentielle des surfaces auxquelles tous ces rayons sont normaux sera (8), en supprimant les accents désormais superflus et chassant les dénominateurs,

$$\{5(z-c)+(26x-y)\}dx+\{5(z-c)+(26y-x)\}dy+\{2(z-c)+5(x+y)\}dz=0.$$

En l'écrivant ainsi

$$\{(z-c)+5x\}(dz+5dx)+\{(z-c)+5y\}(dz+5dy)+(x-y)(dx-dy)=0\ ,$$

elle devient, en multipliant par 2,

$$d.\{(z-c)+5x\}^2+d.\{(z-c)+5y\}^2+d.(x-y)^2=0\ ;$$

d'où, en intégrant

$$(5x+z-c)^2+(5y+z-c)^2+(x-y)^2=r'^2 \;;$$

r' étant la constante arbitraire. Cette équation est évidemment celle d'une suite de cylindres droits concentriques, dont l'axe commun est donné par la double équation

$$5x=5y=-(z-c)\,.\;(*)$$

(*) Il demeure bien établi, par ce qui précède, que si des rayons incidens, normaux à une cylindrique de révolution dont l'axe est donné par la double équation

$$x=y=-(z-c)\,,$$

se réfléchissent à la rencontre d'un miroir plan, dont l'équation soit

$$x+y+z=c\,,$$

ces rayons, ainsi réfléchis, seront normaux à une autre surface cylindrique de révolution, dont l'axe sera donné par la double équation

$$5x=5y=-(z-c)\;;$$

et rien n'indique, dans notre analise, qu'il doive jamais en être autrement, en général, et que les trajectoires orthogonales des rayons incidens et réfléchis ne doivent être que deux nappes différentes d'une même surface courbe; puisque les formules (σ) sont rationnelles et du premier degré seulement.

On a donc lieu d'être surpris que M. Dupin ait cru voir (pag. 236) qu'en général, un faisceau de rayons, normaux à une première surface quelconque, se réfléchit à la rencontre d'un miroir de forme pareillement quelconque, de manière à former un nouveau faisceau dont les rayons sont normaux *à la même surface*, et ait regardé comme de pures exceptions les cas où la trajectoire orthogonale des rayons incidens et celle des rayons réfléchis sont deux surfaces distinctes, indépendantes l'une de l'autre. Cette proposition peut d'autant moins être

30. En général, des rayons lumineux incidens, normaux, à une surface donnée (s′), se réfléchissant ou se réfractant à la rencontre d'une seconde surface donnée (s); si l'on veut savoir à quelle surface inconnue (s″) les rayons réfléchis ou réfractés seront normaux, il faudra d'abord (5) amener le faisceau incident à avoir pour base la surface réfléchissante ou séparatrice; conclure ensuite les valeurs de P'' et Q'' dans les équations du faisceau réfléchi ou réfracté de celles de P' et Q' dans les équations du faisceau incident, à l'aide des formules (o), (ϖ), (ρ); rendre enfin ces valeurs de P'' et Q'' (5) indépendantes de toute base; et alors l'équation différentielle de la surface cherchée (s″) sera

$$dz''=P''dx''+Q''dy'' .$$

Si les rayons réfléchis ou réfractés, devenus ainsi normaux à cette dernière surface, devaient subir une seconde réflexion ou une seconde réfraction; par l'application du même procédé on déterminerait la surface à laquelle ils devraient devenir normaux après l'avoir subi; on pourrait en faire de même à l'égard d'une troisième réflexion ou réfraction, d'une quatrième, et ainsi indéfiniment; de sorte qu'au moyen de ce qui précède nous sommes en état de résoudre ce problème général: *étant données une suite de surfaces réfléchissantes et séparatrices de divers milieux*,

---

admise que, d'après le beau théorème découvert par M. Dupin lui-même, il s'ensuivrait que des rayons de lumière à qui l'on fait successivement subir un nombre quelconque de réflexions, à la rencontre de surfaces quelconques, demeureraient constamment normaux à la même surface, et conserveraient conséquemment, dans tout leur cours, la même surface caustique. Au surplus, ce qu'il nous reste à dire sur ce sujet montrera mieux encore combien il s'en faut qu'on puisse admettre cette assertion de M. Dupin qui heureusement n'a aucune influence sur le reste de son beau travail.

ainsi que la nature des milieux séparés par ces surfaces, *et connaissant la surface à laquelle sont normaux*, *avant d'avoir atteint la première*, *les rayons d'un faisceau qui doit les rencontrer toutes*, *déterminer la surface à laquelle seront normaux les rayons du même faisceau*, *après avoir quitté la dernière ?*

§. IV.

Démonstration de quelques THÉORÈMES NOUVEAUX.

31. Nous venons de voir comment, étant données une première surface à laquelle des rayons incidens sont normaux, et une seconde surface, à la rencontre de laquelle ces rayons doivent se réfléchir ou se réfracter, on peut assigner une troisième surface à laquelle, après la réflexion ou la réfraction, ces rayons devront être normaux.

Renversons présentement le problème, et demandons-nous *à la rencontre de quelle surface des rayons de lumière*, *normaux à une surface donnée*, *doivent-ils se réfléchir ou se réfracter*, *pour qu'après la réflexion ou la réfraction ils se trouvent normaux à une autre surface donnée ?*

En admettant que le problème soit généralement possible, la solution s'en offrira, pour ainsi dire d'elle-même, d'après les résultats déjà obtenus. Soient, en effet, deux surfaces données

$$z'=\mathrm{f}'(x',y')\,,\quad (\mathrm{s}')\quad \text{d'où}\quad \mathrm{d}z'=p'\,\mathrm{d}x'+q'\,\mathrm{d}y'\,,\quad (\mathrm{ds}')$$

$$z''=\mathrm{f}''(x'',y'')\,,\quad (\mathrm{s}'')\quad \text{d'où}\quad \mathrm{d}z''=p''\mathrm{d}x''+q''\mathrm{d}y''\,,\quad (\mathrm{ds}'')$$

et supposons que, les rayons incidens devant être normaux à la première et les rayons réfléchis ou réfractés normaux à la seconde, il faille trouver la surface réfléchissante ou séparatrice, dont nous supposerons l'équation

$z=\mathrm{f}$

$$z=\mathrm{f}(x,y)\ , \qquad (\mathrm{s}) \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{d}z=p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y\ ; \qquad (\mathrm{ds})$$

la question se trouvera réduite à trouver p, q en fonction de x, y, z que nous supposerons les coordonnées du point d'incidence.

En prenant la surface (s′) pour base du faisceau incident, les équations de ce faisceau seront

$$X-x'+p'(Z-z')=0\ , \qquad Y-y'+q(Z-z')=0\ ;$$

si l'on veut ensuite à cette base substituer la surface inconnue (s), il faudra (5) chercher les valeurs de P', Q', en fonction de x, y, z, au moyen de l'éliminaton de x', y', z' entre les cinq équations

$$\left.\begin{array}{c}x-x'+P'(z-z')=0\ , \qquad y-y'+Q'(z-z')=0\ ,\\ P'=p'\ , \qquad\qquad Q'=q'\ ,\\ z'=\mathrm{f}'(x',y')\ .\end{array}\right\}\ (\tau')$$

Pareillement, en prenant la surface (s″) pour base du faisceau réfléchi ou réfracté, les équations de ce faisceau seront

$$X-x''+p''(Z-z'')=0\ , \qquad Y-y''+q''(Z-z'')=0\ ;$$

et, pour les ramener à la base inconnue (s), il faudra (5) déterminer P'', Q'', en fonction de x, y, z, au moyen de l'élimination de x'', y'', z'' entre les cinq équations

$$\left.\begin{array}{c}x-x''+P''(z-z'')=0\ , \qquad y-y''+Q''(z-z')=0\ ,\\ P''=p''\ , \qquad\qquad Q''=q''\ ,\\ z''=\mathrm{f}''(x'',y'')\ .\end{array}\right\}\ (\tau'')$$

Cela posé, les équations (III) du §. II donnent

$$\left.\begin{aligned} p&=\frac{\lambda' P''\sqrt{1+P'^2+Q'^2}\mp\lambda'' P'\sqrt{1+P''^2+Q''^2}}{\lambda'\sqrt{1+P'^2+Q'^2}\mp\lambda''\sqrt{1+P''^2+Q''^2}}\,,\\ q&=\frac{\lambda' Q''\sqrt{1+P'^2+Q'^2}\mp\lambda'' Q'\sqrt{1+P''^2+Q''^2}}{\lambda'\sqrt{1+P'^2+Q'^2}\mp\lambda''\sqrt{1+P''^2+Q''^2}}\,; \end{aligned}\right\}\quad (v)$$

en se rappelant toujours que, pour le cas de la réfraction, il faut prendre les signes supérieurs, tandis que, pour celui de la réflexion, ce sont au contraire les signes inférieurs qu'il faut prendre, en posant $\lambda''=\lambda'$. Substituant donc, dans ces deux formules, les valeurs de P', Q', P'', Q'' en x, y, z, obtenues par le procédé qui vient d'être indiqué plus haut, si alors l'équation

$$\mathrm{d}z=p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y \qquad (\mathrm{ds})$$

est intégrable, son intégrale

$$z=\mathrm{f}(x,y)\,, \qquad (\mathrm{s})$$

sera l'équation de la surface réfléchissante ou séparatrice cherchée.

Si l'on introduit dans l'équation (ds) les valeurs de p et q, données par les formules (v), et qu'après avoir chassé les dénominateurs on rassemble les termes affectés des mêmes radicaux, on pourra donner à l'équation résultante la forme suivante, beaucoup plus commode pour les applications,

$$\frac{\mathrm{d}z-P'\mathrm{d}x-Q'\mathrm{d}y}{\lambda'\sqrt{1+P'^2+Q'^2}}=\pm\frac{\mathrm{d}z-P''\mathrm{d}x-Q''\mathrm{d}y}{\lambda''\sqrt{1+P''^2+Q''^2}}\,. \qquad (\varphi)$$

Il faudra, pour la réfraction, prendre le signe supérieur du second membre, tandis que, pour la réflexion, on prendra son signe inférieur, en posant $\lambda''=\lambda'$.

Pour appliquer ces généralités à un exemple, proposons-nous de rechercher quelle devrait être une surface réfléchissante pour que les rayons incidens et les rayons réfléchis fussent respectivement normaux à deux surfaces cylindriques, données par les équations

$$(x'+z'-c)^2+(y'+z'-c)^2+(x'-y')^2=r'^2\,,$$

$$(5x''+z''-c'')^2+(5y''+z''-c)^2+(x''-y'')^2=r''^2\,.$$

Nous savons déjà, (5) et (29), qu'on aura ici

$$P'=-\frac{(z-c)+(2x-y)}{2(z-c)+(x+y)}\,,\qquad Q'=-\frac{(z-c)+(2y-x)}{2(z-c)+(x+y)}\,,$$

$$P''=-\frac{5(z-c)+(26x+y)}{2(z-c)+5(x+y)}\,,\qquad Q''=-\frac{5(z-c)+(26y+x)}{2(z-c)+5(x+y)}\,;$$

et par suite

$$\sqrt{1+P'^2+Q'^2}=\frac{\sqrt{6\{(z-c)^2+(x+y)(z-c)+(x^2-xy+y^2)\}}}{2(z-c)+(x+y)}\,,$$

$$\sqrt{1+P''^2+Q''^2}=\frac{3\sqrt{6\{(z-c)^2+5(x+y)(z-c)+(13x^2-xy+13y^2)}}{2(z-c)+5(x+y)}\,.$$

Ces valeurs étant substituées dans l'équation (φ), on obtiendra, pour l'équation différentielle de la surface cherchée,

$$\frac{\{(z-c)+(2x-y)\}\,\mathrm{d}x+\{(z-c)+(2y-x)\}\,\mathrm{d}y+\{2(z-c)+(x+y)\}\,\mathrm{d}z}{\sqrt{6\{(z-c)^2+(x+y)(z-c)+(x^2-xy+y^2)\}}}$$

$$=-\frac{\{5(z-c)+(26x-y)\}\,\mathrm{d}x+\{5(z-c)+(26y-x)\}\,\mathrm{d}y+\{2(z-c)+(x+y)\}\,\mathrm{d}z}{3\sqrt{6\{(z-c)^2+5(x+y)(z-c)+(13x^2-xy+13y^2)\}}}\,.$$

En multipliant ses deux membres par $\sqrt{6}$, cette équation revient à

$$\mathrm{d}.\sqrt{(z-c)^2+(x+y)(z-c)+(x^2-xy+y^2)}$$

$$=-\tfrac{1}{3}\mathrm{d}.\sqrt{(z-c)^2+5(x+y)(z-c)+(13x^2-xy+13y^2)}\ ;$$

d'où en intégrant

$$C+3\sqrt{(z-c)^2+(x+y)(z-c)+(x^2-xy+y^2)}+\sqrt{(z-c)^2+5(x+y)(z-c)+(13x^2-xy+13y^2)}=0.$$

Le problème, à raison de la constante C, a donc une infinité de solutions. En posant cette constante nulle, et chassant les radicaux, il vient, en réduisant,

$$2(z-c)^2+(x+y)(z-c)-(x+y^2)=0\ ,$$

ou bien

$$(x+y+z-c)\{2(z-c)-(x+y)\}=0\ ;$$

équation commune de deux plans dont les équations individuelles sont

$$x+y+z=c\ , \qquad x+y=2(z-c)\ ;$$

ce sont les équations des deux plans perpendiculaires l'un à l'autre qui divisent en deux parties égales les quatre angles formés par les axes des deux cylindres et sont perpendiculaires au plan de ces axes. On reconnaît le premier pour le plan réfléchissant des exemples précédens.

32. Dans l'exemple que nous avons choisi, nous étions bien sûrs de rencontrer une équation différentielle intégrable, puisque le problème que nous nous étions proposé n'était que le renversement d'un problème antérieurement résolu ; mais il est très-aisé de

prouver que généralement non seulement l'équation (φ) sera toujours intégrable; mais que même ses deux membres le seront séparément et immédiatement, sans l'intervention d'aucun facteur. Si en effet on y met pour dz sa valeur $pdx+qdy$, elle devient, en changeant les signes,

$$\frac{(P'-p)dx+(Q'-q)dy}{\lambda'\sqrt{1+P'^2+Q'^2}}=\frac{(P''-p)dx+(Q''-q)dy}{\lambda''\sqrt{1+P''^2+Q''^2}},$$

et alors les conditions d'intégrabilité de ses deux membres sont respectivement

$$\frac{d.}{dy}\frac{P'-p}{\sqrt{1+P'^2+Q'^2}}=\frac{d.}{dx}\frac{Q'-q}{\sqrt{1+P'^2+Q'^2}},\quad \frac{d.}{dy}\frac{P''-p}{\sqrt{1+P''^2+Q''^2}}=\frac{d.}{dx}\frac{Q''-q}{\sqrt{1+P''^2+Q''^2}};$$

or, nous avons vu (9) et (16) que ces conditions sont toujours satisfaites, lorsque les rayons (R′) et (R″) sont normaux à une surface courbe; ce qui est précisément le cas où nous nous trouvons ici.

Ainsi, *deux surfaces courbes étant données et quelconques, on peut toujours, et même d'une infinité de manières différentes, trouver une surface réfléchissante ou séparatrice de deux milieux donnés, telle que des rayons incidens, normaux à l'une des deux surfaces données, après avoir été réfléchis ou réfractés, à la rencontre d'une telle surface, deviennent normaux à l'autre surface donnée* (*).

33. Soient maintenant des rayons incidens normaux à une même surface courbe, assujettis à un nombre quelconque de réflexions et de réfractions, à la rencontre d'une suite de surfaces quelconques, séparant des milieux également quelconques; ces rayons en s'échap-

---

(*) Ceci prouve de nouveau que la surface trajectoire orthogonale des rayons réfléchis ne saurait généralement être la même que la surface trajectoire orthogonale des rayons incidens.

pant de la dernière surface, seront encore (24) normaux à une même surface courbe, entièrement déterminée; et il résulte de ce qui précède qu'on pourrait également faire devenir les rayons incidens normaux à cette même surface soit par une réflexion soit par une réfraction unique; donc, *pour des rayons de lumière normaux à une même surface, l'effet de tant de réflexions et de réfractions qu'on voudra, à la rencontre de surfaces quelconques, séparant des milieux homogènes également quelconques, peut toujours être remplacé, et même d'une infinité de manières différentes, soit par une réflexion, soit par une réfraction unique.*

34. Donc aussi (25) *pour des rayons de lumière normaux à une même surface courbe, l'effet d'un trajet à travers un milieu variant insensiblement de densité ou de nature chimique peut toujours être remplacé, et même d'une infinité de manières différentes, soit par une réflexion unique à la rencontre d'un miroir d'une forme et d'une situation déterminées, soit par une réfraction unique à la rencontre d'une surface également déterminée, séparant deux milieux homogènes d'une nature donnée.* Ainsi, par exemple, l'effet de la réfraction atmosphérique sur les rayons de lumière émanés d'une même étoile fixe peut être remplacé par l'action sur ces mêmes rayons d'un miroir de forme invariable mais mobile, qui sera évidemment une surface de révolution autour de la droite qui joindra l'étoile au centre de la terre, et dont l'axe fera une révolution en vingt-quatre heures autour de l'axe du monde.

35. On peut donc ramener toutes les recherches relatives aux circonstances de la vision, par l'intermédiaire de tant de miroirs et de milieux qu'on voudra, à celle des circonstances de la vision à l'aide d'un simple miroir d'une forme et d'une situation déterminée. A la vérité, dans tout ceci nous avons fait abstraction de la différente réfrangibilité des rayons de la lumière; mais, si l'on veut y avoir égard, il arrivera seulement que le rapport de λ' à λ'' aura plusieurs valeurs, et qu'on aura en conséquence autant de miroirs que de rayons différens. Les surfaces et les milieux dont on aura

employé l'intermédiaire pour aider à la vision corrigeront donc d'autant mieux l'aberration de réfrangibilité que la série de miroirs dont il vient d'être question occupera un moindre espace et cette aberration deviendra tout-à-fait nulle, si les miroirs extrêmes de cette série coïncident exactement.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Note sur l'article de la page 88 *du présent volume* ;

Par M. W. H. TALBOT, membre de la société philosophique de Cambridge.

Au Rédacteur des *Annales* ;

MONSIEUR,

PERMETTEZ-MOI de relever quelques légères inexactitudes qui se sont glissées dans l'impression de l'article de la page 88 de votre XIV.e volume.

En posant

$$S=\frac{\mathrm{Cos}.x}{1}+\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{Cos}.3x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{\mathrm{Cos}.5x}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{\mathrm{Cos}.7x}{7}+\ldots.$$

on trouve

$$S=\tfrac{1}{2}\mathrm{Arc}(\mathrm{Sin.}=2\sqrt{\mathrm{Sin}.x-\mathrm{Sin}.^2x})\;;$$

à ce sinus répond le cosinus

$$\sqrt{1-4\mathrm{Sin}.x+4\mathrm{Sin}.^2x}=\pm(1-2\mathrm{Sin}.x)\;;$$

ce qui donnerait en général

$$S=\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Arc}\{\mathrm{Cos.}=\pm(1-2\mathrm{Sin}.x)\}.$$

Mais, d'après la forme de la série, aux valeurs $x=0$ et $x=\frac{\pi}{2}$ doivent répondre respectivement $S=\frac{\pi}{2}$ et $S=0$, d'où il suit que c'est le signe inférieur qu'il faut prendre, et qu'on doit avoir

$$\frac{\mathrm{Cos}.x}{1}+\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{Cos}.3x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{\mathrm{Cos}.5x}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{\mathrm{Cos}.7x}{7}+\ldots=\tfrac{1}{2}\mathrm{Arc}(\mathrm{Cos.}=2\mathrm{Sin}.x-1)$$

et non pas $\frac{1}{2}\mathrm{Arc}(\mathrm{Cos.}=1-2\mathrm{Sin}.x)$, comme il avait été annoncé au bas de la page 94. Je remarquerai, en passant, que, dans la note de la page 91, on a mis une première fois $\frac{\pi}{1}$ au lieu de $\frac{\pi}{2}$.

Par de semblables considérations, on trouve pour la somme de la série de la page 95,

$$\frac{a\mathrm{Cos}.x}{1}+\frac{1}{2}\,\frac{a^3\mathrm{Cos}.3x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{a^5\mathrm{Cos}.5x}{5}+\ldots=\tfrac{1}{2}\mathrm{Arc}(\mathrm{Cos.}=\sqrt{(1+a^2)^2-4a^2\mathrm{Cos}.^2x}-a^2)$$

et non pas $\frac{1}{2}\mathrm{Arc}(\mathrm{Cos.}=a^2-\sqrt{(1+a^2)^2-4a^2\mathrm{Cos}.^2x})$ comme dans le texte, où d'ailleurs on a écrit a pour a^2 hors du radical ; car il faut que cette somme rentre dans la précédente en y faisant $a=1$.

A la même page 95, dans le dénominateur du second membre de la première équation, un signe plus a été omis entre $\mathrm{Cos}.^2x$ et $\mathrm{Cos}.^2y$.

Même page encore, à la troisième équation, le premier membre doit être

$$\frac{\mathrm{Cos}.^2x}{1}-\frac{\mathrm{Cos}.^2 2x}{2}+\frac{\mathrm{Cos}.^2 3x}{3}-\frac{\mathrm{Cos}.^2 4x}{4}+\ldots=\tfrac{1}{2}\mathrm{Log}.4\mathrm{Cos}.x.$$

Enfin, dans la dernière équation de la même page un a^2 a pris la place de a, et ce second membre doit être

$$\tfrac{1}{4}\mathrm{Log}.\{(1-a^2)^2+4a(1+a)^2\mathrm{Cos}.^2x\}.$$

On vérifie cette correction en posant $x=0$, d'où $\text{Cos}.x=1$, il vient ainsi

$$\frac{a}{1}-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}+\ldots=\tfrac{1}{4}\text{Log}.(1+a)^4=\text{Log}.(1+a)\ ,$$

comme cela doit être.

J'allais fermer ma lettre lorsque la remarque suivante m'a frappé. On a, comme l'on sait,

$$\text{Cos}.2p=2\text{Cos}.^2p-1\ ,$$

d'où il résulte

$$\text{Arc}(\text{Cos}.=p')=\tfrac{1}{2}\text{Arc}(\text{Cos}.=2p'^2-1)\ :$$

puis donc qu'on a

$$\frac{\text{Cos}.x}{1}+\frac{1}{2}\,\frac{\text{Cos}.3x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{\text{Cos}.5x}{5}+\ldots=\tfrac{1}{2}\,\text{Arc}(\text{Cos}.=2\text{Sin}.x-1)\,,$$

on aura aussi

$$\frac{\text{Cos}.x}{1}+\frac{1}{2}\,\frac{\text{Cos}.3x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{\text{Cos}.5x}{5}+\ldots=\text{Arc}(\text{Cos}.=\sqrt{\text{Sin}.x})\ ,$$

résultat extrêmement simple.

Voici une singulière conséquence de ce résultat. On a

$$\text{Arc}(\text{Cos}.=p)=\frac{\pi}{2}-\text{Arc}(\text{Sin}.=p)=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{p}{1}+\frac{1}{2}\,\frac{p^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{p^5}{5}+\ldots\right)\,,$$

en faisant donc $p=\sqrt{\text{Sin}x}$ on aura

$$\frac{\text{Cos}\,x}{1}+\frac{1}{2}\,\frac{\text{Cos}.3x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{\text{Cos}.5x}{5}+\ldots=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\text{Sin}.^{\frac{1}{2}}x}{1}+\frac{1}{2}\,\frac{\text{Sin}.^{\frac{3}{2}}x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{\text{Sin}.^{\frac{5}{2}}x}{5}+\ldots\right)$$

équation d'où on tire cette valeur remarquable du quart de la circonférence

$$\frac{\pi}{2}=\left\{\begin{array}{l}\quad(\text{Cos.}\,x+\text{Sin.}^{\frac{1}{2}}x)\\ +\frac{1}{2}(\text{Cos.}3x+\text{Sin.}^{\frac{3}{2}}x)\\ +\frac{1.3}{2.4}(\text{Cos.}5x+\text{Sin.}^{\frac{5}{2}}x)\\ +\frac{1.3.5}{2.4.6}(\text{Cos.}7x+\text{Sin.}^{\frac{7}{2}}x)\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}$$

quel que soit l'arc x (*).

Agréez, etc.

Milan, octobre 1823.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du dernier des deux problèmes de géométrie, énoncés à la page 360 du XIII.e volume des Annales ;

Par M. Querret, ancien chef d'institution,
Et M. Vecten, licencié ès sciences.

PROBLÈME. *On a tracé sur un plan une droite d'une longueur égale à la moitié de l'un des méridiens d'une sphère, prise d'un*

(*) Nous saisissons avec empressement cette occasion de déclarer que l'erreur signalée par M. W. H. Talbot, dans la note de la page 91 du présent volume, n'est point le fait de M. Querret, comme nous nous en sommes assurés en consultant son manuscrit ; elle ne doit être attribuée qu'à une correction d'épreuve faite un peu trop à la hâte.

J. D. G.

pôle à l'autre ; par les points de cette droite on lui a élevé des perpendiculaires que l'on a fait de part et d'autre égales en longueur à la moitié du parallèle passant par le point correspondant du demi-méridien ; on demande sur quelle courbe fermée se trouvent les extrémités de ces perpendiculaires et quelle est la surface circonscrite par cette courbe.

Solution. Pour plus de généralité, ne considérons qu'un simple fuseau sphérique. Supposons qu'ayant tracé le demi-méridien qui le divise en deux parties égales et les arcs de parallèles qui répondent à tous ses points, on étende ce demi-méridien en ligne droite en redressant les arcs de parallèles qui y ont leurs milieux, de manière à les faire devenir des droites perpendiculaires à celle-là, toutes situées dans un même plan ; on obtiendra ainsi une sorte de développement du fuseau dont il s'agit ; et la question consistera à savoir quelle figure affectera ce développement et quelle en sera la surface.

On voit d'abord aisément que le développement du demi-méridien du milieu du fuseau et celui de l'arc de l'équateur que ce fuseau intercepte seront deux diamètres principaux de la courbe cherchée. Nous prendrons le premier pour axe des y et le second pour axe des x, de manière que l'origine sera le centre de la courbe.

En représentant à l'ordinaire par ϖ deux angles droits et nommant 2α l'angle que forment entre eux les plans des méridiens extrêmes du fuseau, si l'on désigne par r le rayon de la sphère, les longueurs des deux demi-diamètres de la courbe dirigés suivant l'axe des x et celui des y seront respectivement

$$\alpha r\,, \qquad \frac{\varpi r}{2}\,.$$

Les coordonnées de l'un quelconque des points de la courbe seront le demi-arc de parallèle répondant à une latitude quelconque θ et l'arc du méridien du milieu du fuseau compris entre l'équateur et ce même parallèle ; de sorte qu'on aura

$$x=\alpha r\mathrm{Cos}.\theta\,, \qquad y=\theta r\,;$$

éliminant donc θ entre ces deux équations, nous obtiendrons pour l'équation de la courbe cherchée

$$x=\alpha r\text{Cos.}\frac{y}{r} \qquad \text{ou} \qquad y=r\text{Arc}\left(\text{Cos.}=\frac{x}{\alpha r}\right). \qquad (1)$$

Si l'on désigne respectivement par a et b les deux demi-diamètres principaux de la courbe, on aura, par ce qui précède,

$$a=\alpha r\,, \qquad b=\frac{\pi r}{2}\,;$$

d'où

$$r=\frac{2b}{\pi}\,, \qquad \alpha=\frac{\pi a}{2b}\,.$$

Ainsi, les deux demi-diamètres principaux étant donnés, on pourra toujours savoir quels sont le rayon de la sphère et l'angle du fuseau qui leur répondent. En introduisant ces valeurs dans l'équation de la courbe, elle deviendra

$$x=a\text{Cos.}\frac{\pi y}{2b} \qquad \text{ou} \qquad y=\frac{2b}{\pi}\text{Arc}\left(\text{Cos.}=\frac{x}{a}\right). \qquad (2)$$

En différentiant cette équation, on en tire

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2b}{\varpi a\text{Sin.}\frac{\pi y}{2b}}=-\frac{1}{\alpha\text{Sin.}\frac{y}{r}}\,. \qquad (3)$$

On voit, par cette expression, que la tangente à l'extrémité de l'axe des x sera perpendiculaire à cet axe; qu'elle s'inclinera de plus en plus sur cet axe en marchant vers l'extrémité de l'axe des y, où son inclinaison sera la plus grande; mais qu'en ce point même elle ne sera pas parallèle à l'axe des x, et qu'il s'en faudra d'autant plus que α sera plus petit. La courbe aura donc deux branches qui se couperont en ce point qui sera conséquemment un point double au-delà duquel elle se prolongera, en serpentant de part et d'autre autour de l'axe des y.

Dans le cas particulier où l'on aura $\alpha=\varpi$, ce qui est proprement le cas de la question proposée, on aura en ce point

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{\pi}=-0{,}3183100\ ;$$

ce nombre, considéré comme tangente tabulaire répond à un arc d'environ $17^\circ.39'.24''$; tel est donc l'angle que feront avec l'axe des x, dans ce cas, les tangentes menées à la courbe à l'extrémité du petit axe.

En multipliant l'équation (1) par $\mathrm{d}y$, on peut lui donner cette forme

$$x\mathrm{d}y=\alpha r^2.\mathrm{d}\frac{y}{r}.\mathrm{Cos.}\frac{y}{r}=\alpha r^2.\mathrm{dSin.}\frac{y}{r}\ ;$$

ce qui donne en intégrant

$$\int x\mathrm{d}y=C+\alpha r^2\mathrm{Sin.}\frac{y}{r}\ ;$$

prenant cette intégrale entre y et y' et entre α et α', nous aurons, pour la portion de la surface de notre courbe comprise entre les développemens des parallèles qui répondent aux latitudes $\frac{y}{r}$ et $\frac{y'}{r}$ et les développemens des méridiens qui répondent aux longitudes α et α'

$$r^2(\alpha'-\alpha)\left(\mathrm{Sin.}\frac{y'}{r}-\mathrm{Sin.}\frac{y}{r}\right)\ ;$$

or, il est aisé de voir que cette expression est aussi celle de l'aire du quadrilatère sphérique dont notre quadrilatère plan mixtiligne est le développement, et il est facile d'en conclure que si, sur la sphère, on trace une figure fermée quelconque, le développement de cette figure sur le développement plan de cette sphère, exécuté comme nous le concevons ici, sera une figure plane équivalente à la portion de surface sphérique circonscrite par la première.

Donc, en particulier, la surface plane totale dont il est question dans l'énoncé du problème sera équivalente à celle de la sphère, et vaudra conséquemment quatre de ses grands cercles (*).

Les considérations qui viennent de nous occuper ne sont pas particulières à la sphère, et peuvent être étendues à une surface quelconque de révolution. Quelle que soit en effet cette surface, on peut concevoir qu'on étend en ligne droite un de ses méridiens qui emporte avec lui les parallèles qui passent par tous ses points, et qu'on redresse ensuite ces parallèles, en les maintenant perpendiculaires à ce méridien, et en les assujettissant à être tous dans un même plan. On peut même, comme pour la sphère, ne conserver à droite et à gauche du méridien devenu rectiligne qu'une fraction déterminée de chaque demi-parallèle étendue en ligne droite ; les extrémités de ces portions de parallèles appartiendront alors à une certaine courbe plane dont on pourra se proposer de déduire l'équation de l'équation de la ligne génératrice de la surface de révolution.

Supposons qu'en prenant arbitrairement un point de l'axe de révolution pour origine des coordonnées rectangulaires et cet axe pour axe des y, l'équation du méridien sur lequel s'exécute le développement, c'est-à-dire, l'équation de la ligne génératrice soit

$$y=\mathrm{f}(x)\ ;$$

(*) Nous avons eu autrefois en notre possession une mappe-monde gravée, assujettie au système de développement dont il est question ici, qui est proprement la projection de Flamstedt, et où conséquemment la totalité de la surface de la terre se trouvait représentée dans l'intérieur d'une seule courbe ovale, deux fois plus longue que haute. Les méridiens autres que celui du milieu de la carte y étaient figurés par des courbes transcendantes qui coupaient en parties égales les parallèles figurés par des droites équidistantes. Ce système de développement défigure d'une manière assez notable les contrées représentées vers les bords de la carte ; mais il leur conserve leur étendue ; ce qui n'arrive dans aucun autre système de projection.

J. D. G.

en désignant par x' et y' les coordonnées de la courbe cherchée, prenant le méridien développé pour axe des y' et le développement du parallèle qui répond à l'origine des y pour axe des x', représentant encore par α la fraction de chaque demi-parallèle que l'on développe de part et d'autre du méridien redressé, et enfin par s l'axe de la courbe génératrice qui répond à y', on aura

$$y'=s \ , \qquad x'=\alpha x \ ;$$

et la question se réduira à éliminer x, y et s entre ces deux équations et les deux équations

$$y=\mathrm{f}(x) \ , \qquad \mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2 \ .$$

L'élimination donne finalement

$$\alpha\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}=\sqrt{1+\left[\mathrm{f}'\left(\frac{x'}{\alpha}\right)\right]^2} \ , \qquad (4)$$

où f' désigne la dérivée de la fonction représentée par f; et telle est conséquemment l'équation différentielle de la courbe cherchée.

S'il s'agit, par exemple, d'une sphère dont le rayon est r, en prenant l'origine de la génératrice au centre, l'équation de cette génératrice sera

$$y=\sqrt{r^2-x^2} \ ;$$

on aura donc ici

$$\mathrm{f}(x)=\sqrt{r^2-x^2} \ , \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{f}'(x)=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}} \ ,$$

et par conséquent

$$\mathrm{f}'\left(\frac{x'}{\alpha}\right)=-\frac{x'}{\sqrt{\alpha^2r^2-x'^2}} \ ;$$

ce qui donnera, en substituant dans l'équation (4),

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x'}=\pm\frac{r}{\sqrt{\alpha^2r^2-x'^2}} \ ,$$

qui est précisément l'équation (3) dans laquelle on aurait mis pour Sin. $\frac{y}{r}$ sa valeur donnée par l'équation (1).

On se convaincra encore facilement ici que chaque portion de la surface développée est, comme dans le cas de la sphère, équivalente à la portion correspondante de la surface dont elle est le développement; c'est d'ailleurs ce qu'on peut conclure facilement de ce qui a été dit ci-dessus, en considérant une surface de révolution comme composée d'une infinité de zônes sphériques de rayons variables, ayant toutes leurs centres aux points où l'axe de la surface est rencontré par les normales à la ligne génératrice. (*)

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes d'optique.

I. Quel miroir pourrait remplacer l'effet de l'eau d'un bassin, sur les rayons de lumière émanés d'un point situé au fond de ce bassin, considérés hors de l'eau ?

II. Quel miroir pourrait remplacer, pour des rayons de lumière émanés d'un point, l'effet d'un prisme de cristal interposé ?

III. Quel miroir pourrait remplacer, pour des rayons de lumière émanés de l'un des points de l'axe d'une lentille biconvexe ou biconcave, à faces sphériques, l'effet que cette lentille produit sur eux ?

IV. Depuis quelques années, on a répandu dans le commerce, pour l'usage des myopes et des presbytes, des lentilles biconcaves ou biconvexes, à faces cylindriques de mêmes rayons, tellement construites que les courbures des deux surfaces se croisent à angle droit. On propose de comparer ces lentilles aux lentilles ordinaires sous le double point de vue de l'aberration de sphéricité et de celle de réfrangibilité ?

(*) M. Vecten remarque que l'équivalence entre les portions correspondantes de la surface de révolution et de son développement deviendra manifeste, si l'on fait attention que, par ce développement, on ne fait que substituer aux zônes coniques élémentaires dont cette surface se compose une suite de trapèzes équivalens.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Recherches sur les conditions d'intégrabilité des fonctions différentielles ;

Par M. F. Sarrus, docteur ès sciences.

La recherche des conditions d'intégrabilité des fonctions différentielles, recherche qui a principalement occupé Euler et Condorcet, constitue une des branches les plus importantes de la haute analise. La méthode des variations conduit très-simplement à ces conditions ; mais, outre que l'emploi de cette méthode, dans des recherches de calcul intégral proprement dit, peut sembler indirecte, elle n'offre aucune ressource pour remonter de la différentielle à son intégrale, lorsque les conditions d'intégrabilité se trouvent remplies.

Euler et Condorcet ont bien prouvé, par leur analise, que les conditions qu'ils avaient obtenues sont *nécessaires* ; mais Lexell paraît être le premier qui ait tenté de démontrer (*), sans rien emprunter d'étranger au calcul intégral, que ces conditions sont aussi *suffisantes* ; c'est-à-dire qu'elles entraînent d'elles-mêmes la possibilité d'intégrer ; ce qui est le point important dans cette théorie. Malheureusement, comme l'observe Lagrange (*Leçons sur les fonctions*, leçon XXI), la démonstration de Lexell *est si compliquée, qu'il est difficile de juger de sa justesse et de sa généralité.*

(*) Voyez le tome XV des *Novi Commentarii* de Pétersbourg.

En réfléchissant sur ce sujet, il nous a paru que les procédés du calcul différentiel, proprement dit, pouvaient, à eux seuls, conduire d'une manière assez simple aux conditions d'intégrabilité et à la démonstration de l'importante proposition de Lexell ; et c'est à le faire voir que nous destinons ce petit essai.

Dans tout ce qui va suivre, x et y seront des fonctions quelconques d'une troisième variable dont nous prenons la différentielle pour unité, et de tant de constantes qu'on voudra. Nous représenterons respectivement, pour abréger,

$$\mathrm{d}x\,,\quad \mathrm{d}^2x\,,\quad \mathrm{d}^3x\,,\ldots\ldots \quad \text{par} \quad x_1\,,\quad x_2\,,\quad x_3\,,\ldots\ldots$$

$$\mathrm{d}y\,,\quad \mathrm{d}^2y\,,\quad \mathrm{d}^3y\,,\ldots\ldots \quad \text{par} \quad y_1\,,\quad y_2\,,\quad y_3\,,\ldots\ldots$$

P_1, P_2, P_3, ..., seront des fonctions quelconques de

$$x\,,\ x_1\,,\ x_2\,,\ x_3\,,\ldots\ldots x_{m-1}\,,$$

$$y\,,\ y_1\,,\ y_2\,,\ y_3\,,\ldots\ldots y_{n-1}\,,$$

dont les différentielles seront respectivement p, p_1, p_2, ...

Cela posé, on a identiquement

$$p=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}x_1+\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x_1}x_2+\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x_2}x_3+\ldots\ldots+\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x_{m-1}}$$

$$+\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}y_1+\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y_1}y_2+\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y_2}y_3+\ldots\ldots+\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y_{n-1}}y_n\,,$$

et, par suite,

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{dp}{dx} = d\frac{dP}{dx}\,, \\
\frac{dp}{dx_1} = d\frac{dP}{dx_1} + \frac{dP}{dx}\,, \\
\frac{dp}{dx_2} = d\frac{dP}{dx_2} + \frac{dP}{dx_1}\,, \\
\dots\dots\dots\dots \\
\frac{dp}{dx_{m-1}} = d\frac{dP}{dx_{m-1}} + \frac{dP}{dx_{m-2}}\,, \\
\frac{dp}{dx_m} = \frac{dP}{dx_{m-1}}\,.
\end{array}\right\}(1)
\qquad
\left.\begin{array}{l}
\frac{dp}{dy} = d\frac{dP}{dy}\,, \\
\frac{dp}{dy_1} = d\frac{dP}{dy_1} + \frac{dP}{dy}\,, \\
\frac{dp}{dy_2} = d\frac{dP}{dy_2} + \frac{dP}{dy_1}\,, \\
\dots\dots\dots\dots \\
\frac{dp}{dy_{n-1}} = d\frac{dP}{dy_{n-1}} + \frac{dP}{dy_{n-2}}\,, \\
\frac{dp}{dy_n} = \frac{dP}{dy_{n-1}}\,.
\end{array}\right\}(2)$$

Du premier de ces deux systèmes d'équations on déduit, par l'élimination successive des différentielles de $\frac{dP}{dx_{m-1}}, \frac{dP}{dx_{m-2}}, \dots \frac{dP}{dx_1}, \frac{dP}{dx}$,

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{dP}{dx_{m-1}} = \frac{dp}{dx_m}\,, \\
\frac{dP}{dx_{m-2}} = \frac{dp}{dx_{m-1}} - d\frac{dp}{dx_m}\,, \\
\frac{dP}{dx_{m-3}} = \frac{dp}{dx_{m-2}} - d\frac{dp}{dx_{m-1}} + d^2\frac{dp}{dx_m}\,, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{dP}{dx} = \frac{dp}{dx_1} - d\frac{dp}{dx_2} + d^2\frac{dp}{dx_3} - \dots\dots\dots \mp d^{m-1}\frac{dp}{dx_m}\,, \\
0 = \frac{dp}{dx} - d\frac{dp}{dx_1} - d^2\frac{dp}{dx_2} - \dots\dots \mp d^{m-1}\frac{dp}{dx_{m-1}} \pm d^m\frac{dp}{dx_m}\,.
\end{array}\right\}(3)$$

La dernière de ces équations est une équation de condition à laquelle doit satisfaire la différentielle p de la fonction P.

Les équations (2), traitées exactement de la même manière, donnent

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dP}{dy_{n-1}}=\frac{dp}{dy_n}\,,\\
&\frac{dP}{dy_{n-2}}=\frac{dp}{dy_{n-1}}-d\frac{dp}{dy_n}\,,\\
&\frac{dP}{dy_{n-3}}=\frac{dp}{dy_{n-2}}-d\frac{dp}{dy_{n-1}}+d^2\frac{dp}{dy_n}\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{dP}{dy}=\frac{dp}{dy_1}-d\frac{dp}{dy_2}+d^2\frac{dp}{dy_3}-\ldots\ldots\mp d^{n-1}\frac{dp}{dy_n}\,,\\
&0=\frac{dp}{dy}-d\frac{dp}{dy_1}+d^2\frac{dp}{dy_2}-\ldots\ldots\mp d^{n-1}\frac{dp}{dy_{n-1}}\pm d^n\frac{dp}{dy_n}\,.
\end{aligned}\right\}\ (4)$$

Equations dont la dernière est une nouvelle équation de condition à laquelle doit encore satisfaire la différentielle p de la fonction P.

Avant d'aller plus loin, remarquons que, si P est une fonction de

$$x_i\,,\,x_{i+1}\,,\,x_{i+2}\,,\ldots\ldots\ldots x_{m-1}\,,$$

$$y\,,\,y_1\,,\,y_2\,,\ldots\ldots y_i\,,\,y_{i+1}\,,\,y_{i+2}\,,\ldots\ldots\ldots y_{n-1}\,,$$

seulement, c'est-à-dire, si cette fonction ne contient aucune des quantités

$$x\,,\,x_1\,,\,x_2\,,\ldots\ldots\ldots x_{i-1}\,;$$

auquel cas on aura

$$\frac{dP}{dx}=0,\quad \frac{dP}{dx_1}=0,\quad \frac{dP}{dx_2}=0,\ldots\ldots\ldots\frac{dP}{dx_{i-1}}=0,$$

$$\frac{dp}{dx}=0,\quad \frac{dp}{dx_1}=0,\quad \frac{dp}{dx_2}=0,\ldots\ldots\ldots\frac{dp}{dx_{i-1}}=0;$$

l'application du même procédé nous conduira aux résultats,

$$d\frac{dP}{dx_i}=\frac{dp}{dx_i}, \tag{5}$$

$$0=\frac{dp}{dx_i}-d\frac{dp}{dx_{i+1}}+d^2\frac{dp}{dx_{i+2}}-\ldots\ldots\ldots\pm d^{m-i}\frac{dp}{dx_m}. \tag{6}$$

Cette remarque nous sera utile dans la suite de ces recherches.

Lorsqu'on se sera assuré que p est une différentielle exacte, les équations (3) et (4) offriront le moyen le plus simple pour remonter à son intégrale P, par les quadratures seulement. Mais il nous reste à démontrer présentement que toute fonction différentielle qui satisfait identiquement aux dernières équations (3) et (4) est nécessairement par là même une différentielle exacte.

Premièrement, soit u_i une fonction quelconque de

$$x_i,\ x_{i+1},\ x_{i+2},\ldots\ldots x_m,\ y,\ y_1,\ y_2,\ldots\ldots y_n,$$

assujettie à la seule condition de satisfaire à l'équation

$$A_i=\frac{du_i}{dx_i}-d.\frac{du_i}{dx_{i+1}}+d^2\frac{du_i}{dx_{i+2}}-\ldots\ldots\pm d^{m-i}\frac{du_i}{dx_m} \tag{7}$$

dans laquelle A_i est une quantité constante quelconque.

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$\frac{du_i}{dx_i}=A_i+d\left\{\frac{du_i}{dx_{i+1}}-d\frac{du_i}{dx_{i+2}}+d^2\frac{du_i}{dx_{i+3}}-\ldots\mp d^{m-i-1}\frac{du_i}{dx_m}\right\};$$

d'où l'on conclura que, comme le premier membre ne renferme pas de différentielles de x et y d'un ordre plus élevé que x_m, y_n, la partie du second membre comprise entre les crochets ne saurait renfermer de différentielles des mêmes variables d'un ordre supérieur à x_{m-1} et y_{n-1}; et que, par conséquent, il est possible de trouver une fonction P_i de x_i, x_{i+1}, ... x_{m-1}, y, y_1, y_2, y_3, ... y_{n-1} qui satisfasse à l'équation

$$\frac{dP_i}{dx_i}=\frac{du_i}{dx_{i+1}}-d\frac{du_i}{dx_{i+2}}+d^2\frac{du_i}{dx_{i+3}}-\ldots\ldots\mp d^{m-i-1}\frac{du_i}{dx_m},$$

au moyen de laquelle nous aurons, en ayant égard à l'équation (5),

$$\frac{du_i}{dx_i}=A_i+d\frac{dP_i}{dx_i}=A_i+\frac{dp_i}{dx_i},$$

et par suite

$$u_i=A_ix_i+p_i+u_{i+1}, \qquad (8)$$

en désignant par u_{i+1} une fonction de x_{i+1}, x_{i+2}, ... x_m, y, y_1, y_2, ... y_n, qu'il faudra déterminer d'une manière convenable.

Substituant cette valeur de u_i dans l'équation (7) et observant, équation (6), que, puisque p_i est une différentielle exacte, on doit avoir identiquement,

$$o=\frac{dp_i}{dx_i}-d\frac{dp_i}{dx_{i+1}}+d^2\frac{dp_i}{dx_{i+2}}-\ldots\ldots\pm d_{m-i}\frac{dp_i}{dx_m},$$

nous trouverons, réductions faites,

$$o=d\frac{du_{i+1}}{dx_{i+1}}-d^2\frac{du_{i+1}}{dx_{i+1}}+d^3\frac{du_{i+1}}{dx_{i+1}}-\ldots\ldots\mp d^{m-i}\frac{du_{i+1}}{dx_m},$$

ou, en intégrant,

$$A_{i+1}=\frac{du_{i+1}}{dx_{i+1}}-d\frac{du_{i+1}}{dx_{i+2}}+d^2\frac{du_{i+1}}{dx_{i+3}}-\ldots\ldots\mp d^{m-i-1}\frac{du_{i+1}}{dx_m};$$

ce qui fait voir que u_{i+1} est entièrement de même nature que u_i.

Cela posé, si u est une fonction de x, x_1, x_2, ... x_m, y, y_1, y_2, ... y_n, qui satisfasse à la condition

$$o=\frac{du}{dx}-d\frac{du}{dx_1}+d^2\frac{du}{dx_2}-\ldots\ldots\pm d^m\frac{du}{dx_m},$$

nous en tirerons, par des opérations analogues à celles qui viennent de nous conduire à l'équation (8)

$$u=p+u_1,$$

$$u_1=A_1x_1+p_1+u_2,$$

$$u_2=A_2x_2+p_2+u_3,$$

$$u_3=A_3x_3+p_3+u_4,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_{m-1}=A_{m-1}x_{m-1}+p_{m-1}+u_m,$$

$$u_m=A_mx_m+p_m+Y;$$

Y étant, dans la dernière, une fonction de y, y_1, y_2, ... y_n seulement.

Ajoutant ces diverses équations, et faisant, pour abréger,

$$q=A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+\ldots\ldots+A_mx_m$$
$$+p_1+p_2+p_3+\ldots\ldots\ldots+p_m,$$

nous trouverons enfin

$$u=q+Y, \qquad (9)$$

dans laquelle q est évidemment une différentielle exacte, puisque chacun des termes dont cette fonction se compose est une semblable différentielle.

Si u ne renfermait ni y ni ses dérivées y_1, y_2, y_3,..... y_n, la fonction que nous avons représentée par Y serait constante et par conséquent nulle, sans quoi u serait composée de termes hétérogènes, ce qui ne peut jamais avoir lieu, ainsi u serait alors *une différentielle exacte*.

Si, au contraire, u renfermait y et ses dérivées y_1, y_2, y_3,..... y_n, mais qu'elle rendît identique l'équation

$$o=\frac{du}{dy}-d\frac{du}{dy_1}+d^2\frac{du}{dy_2}-\ldots\ldots\ldots\pm d^n\frac{du}{dy_n},$$

la fonction Y pourrait ne pas être nulle; mais, en substituant dans cette équation la valeur de u que nous venons de donner, et observant que, puisque q est une différentielle exacte, l'on a

$$o=\frac{dq}{dy}-d\frac{dq}{dy_1}+d^2\frac{dq}{dy_2}-\ldots\ldots\ldots\pm d^n\frac{dq}{dy_n},$$

nous trouverions, réductions faites,

$$o=\frac{dY}{dy}-d\frac{dY}{dy_1}+d^2\frac{dY}{dy_2}-\ldots\ldots\ldots\pm d^n\frac{dY}{dy_n};$$

et de là on conclut, comme ci-dessus, que, puisque Y ne renferme que y et ses dérivées y_1, y_2, y_3,..... y_n, cette fonction Y est nécessairement une différentielle exacte, de sorte que, dans ce cas comme dans le précédent, u est encore *une différentielle exacte.*

Pour simplifier la question, nous avons supposé que toutes ces fonctions ne renfermaient que deux variables x et y et leurs dérivées;

rivées ; mais il est facile de voir qu'elle ne se compliquerait pas beaucoup, si l'on voulait considérer une fonction d'un plus grand nombre de variables, et que de plus, les conclusions seraient absolument les mêmes.

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstration abrégée du BINOME DE NEWTON, *pour le cas de l'exposant entier et positif ;*

Par M. L. C. BOUVIER, ex-officier de génie, ancien élève de l'école polytechnique.

SOIT, pour abréger,

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\cdots\frac{m-\mu+2}{\mu-1}=\mathrm{f}(m\,,\,\mu)\ ;$$

il s'agit de prouver que le terme général du développement de $(x+a)^m$ est $\mathrm{f}(m,\mu)a^{\mu-1}x^{m-\mu+1}$, ou, ce qui revient au même, que

$$(x+a)^m=\Sigma\{\mathrm{f}(m\,,\,\mu)a^{\mu-1}x^{m-\mu+1}\}\ ; \qquad (1)$$

en développant le second membre depuis $\mu=1$ jusqu'à $\mu=\infty$.

Cette assertion se vérifiant facilemeut pour les quelques premières valeurs de m, tout se réduit à prouver que l'équation (1) aura lieu si l'on a

$$(x+a)^{m-1}=\Sigma\{\mathrm{f}(m-1\,,\,\mu)a^{\mu-1}x^{m-\mu}\}\ ; \qquad (2)$$

or, on tire de là, en multipliant de part et d'autre par $x+a$,

$$(x+a)^m=(x+a)\Sigma\{f(m-1\,,\mu)a^{\mu-1}x^{m-\mu}\}\,; \qquad (3)$$

d'où il suit, en comparant (3) à (1) que tout se réduit à prouver que

$$(x+a)\Sigma\{f(m-1\,,\mu)a^{\mu-1}x^{m-\mu}\}=\Sigma\{f(m\,,\mu)a^{\mu-1}x^{m-\mu+1}\}. \qquad (4)$$

Or, en faisant, tour à tour, la multiplication par x et par a, et prenant les termes généraux correspondans des deux produits, on trouve

$$x\Sigma\{f(m-1\,,\mu)a^{\mu-1}x^{m-\mu}\}=\Sigma\{f(m-1\,,\mu)a^{\mu-1}x^{m-\mu+1}\}\,,$$

$$a\Sigma\{f(m-1\,,\mu)a^{\mu-1}x^{m-\mu}\}=\Sigma\{f(m-1\,,\mu-1)a^{\mu-1}x^{m-\mu+1}\}\,;$$

donc, en ajoutant

$$(x+a)\Sigma\{f(m-1,\mu)a^{\mu-1}x^{m-\mu}\}=\Sigma\{[f(m-1,\mu)+f(m-1,\mu-1)]a^{\mu-1}x^{m-\mu+1}\} \quad (5)$$

or, il est très-facile de s'assurer que

$$f(m-1\,,\mu)+f(m-1\,,\mu-1)=f(m\,,\mu)\,;$$

donc l'équation (4), et par suite l'équation (1) se trouve pleinement justifiée (*).

(*) On a déjà donné dans ce recueil (tom. II, pag. 207) une démonstration de la formule du binome, indépendante, comme celle-ci, de la théorie des combinaisons.

J. D. G.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du premier des quatre problèmes de géométrie énoncés à la page 304 du précédent volume ;

Par M. Roche, capitaine d'artillerie de la marine, l'un des collaborateurs du *Bulletin général et universel des annonces et des nouvelles scientifiques.*

PROBLÈME. *Quelle est la courbe enveloppe de l'espace parcouru par l'un des côtés d'un angle droit, dont le sommet décrit une ellipse donnée, tandis que son autre côté passe constamment par le centre de cette ellipse ?*

Ou, en d'autres termes,

Quelle est la courbe à laquelle sont tangentes les perpendiculaires aux extrémités de tous les diamètres d'une ellipse donnée ?

Solution. Soient pris respectivement le grand axe $2a$ et le petit axe $2b$ de l'ellipse dont il s'agit pour axes des x et des y, et soit (t, u) un quelconque des points de son périmètre; on aura

$$b^2t^2+a^2u^2=a^2b^2\;; \qquad (1)$$

la droite menée du centre à ce point aura pour équation

$$y=\frac{u}{t}x\;;$$

l'équation de la perpendiculaire à cette droite par le même point sera donc

$$y-u=-\frac{t}{u}(x-t)\ ,$$

c'est-à-dire,

$$tx+uy=t^2+u^2 \qquad (2)$$

où t et u sont deux paramètres indéterminés, liés entre eux par la relation (1).

Suivant donc les principes sur la matière (*), il faudra, pour obtenir l'équation de la courbe cherchée, éliminer t et u, entre les équations (1) et (2) et celle qu'on obtiendra en éliminant dt et du entre leurs différentielles, prises par rapport à ces seules lettres. Or ces différentielles sont

$$b^2t\mathrm{d}t+a^2u\mathrm{d}u=0\ ,$$

$$(y-2u)\mathrm{d}u+(x-2t)\mathrm{d}t=0\ ;$$

lesquelles, en transposant et multipliant ensuite membre à membre, donnent, pour la troisième équation cherchée,

$$a^2ux-b^2ty=2(a^2-b^2)tu\ . \qquad (3)$$

L'équation de la courbe cherchée sera donc le résultat de l'élimination de t et u entre ces trois-là.

Au lieu de ramener le problème à éliminer deux quantités entre trois équations, on peut facilement le réduire à en éliminer une seule entre deux. Remarquons pour cela que l'équation (2), en y

---

(*) Tom. III, pag. 361.

considérant t et u comme deux constantes liées par l'équation (1), et conséquemment équivalentes à une seule, est l'équation primitive complète de toutes les droites auxquelles la courbe cherchée doit être tangente. En la différentiant donc par rapport à x et y seulement, et éliminant ensuite t et u entre l'équation résultante et les équations (1) (2), on obtiendra l'équation différentielle commune à toutes nos droites, privée de ses deux constantes; de sorte que l'équation de la courbe cherchée en sera la solution particulière.

Or, en posant, suivant l'usage, $\frac{dy}{dx}=p$, la différentielle de l'équation (2) est

$$t+pu=0\,.$$

Tirant de là la valeur de t, pour la substituer dans les équations (1) et (2), il viendra

$$(a^2+b^2p^2)u^2=a^2b^2\,, \qquad\qquad y-px=(1+p^2)u\,;$$

éliminant enfin u entre ces deux-ci, on aura, pour l'équation différentielle commune à toutes les droites auxquelles la courbe cherchée doit être tangente,

$$y-px=\frac{ab(1+p^2)}{\sqrt{a^2+b^2p^2}}\,; \qquad (4)$$

et l'équation de la courbe cherchée sera la solution particulière de cette dernière.

Suivant donc les principes connus, nous différentierons cette dernière équation, ce qui donnera, en supprimant le facteur q, dont l'égalité à zéro répondrait à l'intégrale complète,

$$x=-abp\,.\,\frac{(a^2+b^2p^2)+(a^2-b^2)}{(a^2+b^2p^2)^{\frac{3}{2}}}\,. \qquad (5)$$

et l'équation de la courbe cherchée sera le résultat de l'élimination de p entre les équations (4) et (5).

En considérant x et y comme inconnus, dans ces deux équations, elles donnent

$$x=-abp.\frac{(a^2+b^2p^2)+(a^2-b^2)}{(a^2+b^2p^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad y=+ab.\frac{(a^2+b^2p^2)-(a^2-b^2)p^2}{(a^2+b^2p^2)^{\frac{3}{2}}};$$

posant alors, pour abréger,

$$a^2+b^2p^2=z, \qquad a^2-b^2=c^2,$$

d'où

$$p=\frac{\pm\sqrt{z-a^2}}{b}, \qquad (6)$$

il viendra, en substituant dans les valeurs de x et y et en quarrant,

$$x^2=\frac{a^2(z+c^2)^2(z-a^2)}{z^3}, \quad y^2=\frac{a^2}{b^2}.\frac{\{(b^2-c^2)z+a^2c^2\}^2}{z^3}; \qquad (7)$$

et la recherche de l'équation de la courbe se trouvera réduite à l'élimination de z entre ces deux-ci.

Si l'on ne veut que construire la courbe par points, cette élimination, qui conduirait à une équation du sixième degré assez compliquée, ne sera point nécessaire. Que l'on construise, en effet, séparément les courbes exprimées par les équations (7), en prenant dans l'une et dans l'autre les z pour les abscisses ; si l'on construit ensuite une troisième courbe dont les coordonnées soient les ordonnées correspondantes de ces deux-là ; cette troisième courbe sera la courbe cherchée ; et la valeur (6) de p, répondant aux mêmes abscisses, indiquera la direction de la tangente en chaque point.

Ceci revient encore à considérer les équations (7) comme celles des projections d'une courbe à double courbure sur les plans des xz et des yz, à tracer ces projections, et à en déduire la projection de la même courbe sur le plan des xy, laquelle sera la courbe cherchée (*).

Mais on peut fort bien discuter la courbe et découvrir toutes les circonstances de son cours, sans qu'il soit pour cela nécessaire de la construire ; et d'abord on voit clairement que cette courbe est symétrique par rapport à chacun des axes des coordonnées, qui en sont conséquemment des diamètres principaux, puisqu'à chaque valeur de z répondent pour x et y deux valeurs égales et de signes contraires ; c'est d'ailleurs une conséquence de sa définition.

Si l'on veut savoir en quels points la courbe coupe l'axe des y, il faudra faire $x=0$, dans la première des deux équations (7), ce qui donnera, pour la seule valeur de z qui puisse répondre à cette circonstance $z=a^2$, valeur qui, substituée dans celle de y^2 et dans la formule (6) donne $y=\pm b$ et $p=0$; ainsi la courbe touche l'ellipse aux deux extrémités de son petit axe, et ces points sont les seuls qu'elle puisse avoir de communs avec cet axe.

Quant aux intersections de la courbe avec l'axe des x, il est nécessaire de distinguer trois cas, qui sont ceux de $b^2=c^2$, $b^2>c^2$ et $b^2<c^2$. Supposons d'abord $b^2=c^2$ ou $a^2=2b^2$ (**); nous trouverons $y^2=\frac{8b^8}{z^3}$, valeur qui ne saurait être nulle que lorsque z est infini ; cela donne $x=\pm a$ et $p=\infty$; ainsi, dans ce cas, la courbe

---

(*) Cette ressource, qui n'est point ici indispensable, est quelquefois la seule dont on puisse user, lorsque la troisième variable à éliminer entre d'une manière transcendante dans l'une ou l'autre des équations, ou dans toutes les deux. Elle présente toutefois cet inconvénient que des valeurs réelles de x et y peuvent fort bien répondre à des valeurs imaginaires de z, et qu'alors il devient impossible de les construire.

J. D. G.

(**) C'est le cas de l'ellipse dont il a déjà été question dans le présent volume (pag. 17).

J. D. G.

ne coupe le grand axe de l'ellipse qu'à ses extrémités, où elle est tangente à cette courbe.

On peut remarquer au surplus que, quelle que puisse être la valeur de b^2-c^2, toujours à la valeur $z=\infty$ répondront les valeurs $x=\pm a$, $y=0$, $p=\infty$; ainsi, dans tous les cas, la courbe touche l'ellipse à ses quatre sommets.

Si b^2-c^2 est positif, il arrivera, comme dans le cas où cette quantité est nulle, que y ne pourra être nulle qu'autant que z sera infini. Mais si l'on a $c^2>b^2$, on pourra écrire

$$y^2=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{\{(c^2-b^2)z-a^2c^2\}^2}{z^3},$$

et dès-lors on pourra rendre y nulle en posant

$$z=\frac{a^2-c^2}{c^2-b^2},$$

il en résultera

$$x=\pm\frac{2bc}{a}, \qquad p=\pm\frac{a}{\sqrt{c^2-b^2}}.$$

Ainsi, passé le degré d'alongement pour lequel on a $c^2=b^2$ ou $a^2=2b^2$, la courbe cherchée coupe encore le grand axe de l'ellipse en deux autres points, lesquels sont des points doubles, puisqu'on y trouve deux valeurs pour p ; et comme ces deux valeurs sont égales et de signes contraires, il s'ensuit que les branches de courbe qui se coupent en ces points font un angle curviligne que l'axe des x partage en deux parties égales.

On voit aisément que moins a sera grand par rapport à b et plus ces points doubles seront éloignés du centre de l'ellipse. Cependant ils ne lui seront jamais extérieurs ; car, si l'on pouvait avoir $\frac{2bc}{a}>a$, on en conclurait, en chassant le dénominateur et quarrant,

$$4b^2c^2>a^4 \qquad \text{ou} \qquad 4b^2(a^2-b^2)>a^4,$$

c'est-à-dire,

$$0>a^4$$

$$0 > a^4 - 4a^2b^2 + 4b^4 \quad \text{ou} \quad 0 > (a^2 - 2b^2)^2 ,$$

ce qui est absurde.

On voit que, lorsqu'on aura $a^2 = 2b^2$, ces points se confondront avec les sommets de l'ellipse ; mais qu'ils se rapprocheront de plus en plus de son centre à mesure que a deviendra plus grand par rapport à b ; ils ne pourront toutefois se confondre avec ce centre que lorsque a sera infini. En particulier, ils se confondront avec les foyers de l'ellipse lorsqu'on aura $a = 2b$. On a alors $p = \sqrt{2}$.

Pour pouvoir suivre plus exactement toutes les circonstances du cours de la courbe, cherchons ses limites extrêmes dans le sens des x et dans celui des y. Pour cela différentions les équations (7), en y considérant z comme la variable indépendante, il viendra ainsi

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} = a \cdot \frac{(b^2 - c^2)z + 3a^2c^2}{2z^4} \sqrt{\frac{z^3}{z - a^2}} ,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = -\frac{a}{b} \cdot \frac{(b^2 - c^2)z + 3a^2c^2}{2z^4} \sqrt{z^3} .$$

Les valeurs de z qui rendront x ou y les plus grands ou les plus petits possibles seront donc celles qui rendront ces coefficiens différentiels nuls. Or, en faisant abstraction des cas déjà discutés, on voit qu'elles deviendront nulles l'une et l'autre en posant

$$z = -\frac{3a^2c^2}{b^2 - c^2} ,$$

il en résulte

$$z + c^2 = 2c^2 \frac{a^2 + b^2}{b^2 - c^2} , \quad z - a^2 = -a^2 \cdot \frac{a^2 + c^2}{b^2 - c^2} , \quad (b^2 - c^2)z + a^2c^2 = -2a^2c^2 ,$$

et par suite

$$x=\pm 2\frac{a^2+b^2}{3ac}\sqrt{\frac{a^2+c^2}{3}}\,,\quad y=\pm\frac{2(b^2-c^2)}{3bc}\sqrt{-\frac{b^2-c^2}{3}}\,,$$

$$p=\pm\frac{a}{b}\sqrt{-\frac{a^2+c^2}{b^2-c^2}}\,.$$

Les valeurs de x sont réelles dans tous les cas ; mais celles de y et de p ne le sont qu'autant que c n'est pas moindre que b ou que a^2 n'est pas moindre que $2b^2$. Si l'on a précisément $c=b$ ou $a^2=2b^2$, on trouve

$$x=\pm\frac{2b^2}{a}=\pm a\,,\qquad y=0\,,\qquad p=\infty\,;$$

ainsi alors les points limites sont aux deux extrémités du grand axe.

Si l'on a $a=2b$: cas où, comme nous l'avons vu, les nœuds ou points doubles sont aux deux foyers, il viendra

$$x=\pm a\sqrt{\frac{343}{324}}\,,\quad y=\pm b\sqrt{\frac{32}{81}}\,,\quad p=\sqrt{14}\,.$$

Voilà donc quatre points hors de l'ellipse qui appartiennent à la courbe, et qui sont les plus distans du centre.

On peut aussi discuter la courbe comme si l'on avait son équation polaire, en exprimant séparément le rayon vecteur et l'angle qu'il fait avec l'axe en fonction de la variable auxiliaire z. Appelant r ce rayon vecteur et t l'angle qu'il fait avec l'axe, le pôle étant au centre, si l'on prend la somme et ensuite le quotient des formules (7), on aura

$$r^2=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{b^2z^3-c^2(b^2-c^2)z^2-c^4(a^2+c^2)z+a^2c^4}{z^3}\,,$$

$$\text{Tang.}t=\frac{(b^2-c^2)z+a^2c^2}{b(z+c^2)\sqrt{z-a^2}}\,.$$

Si l'on veut savoir, par exemple, à quelle valeur de z répond le plus grand rayon vecteur, il faudra égaler à zéro la différentielle de r^2 prise par rapport à z; cela donnera finalement

$$(z-c^2)\{(b^2-c^2)z+3a^2c^2\}=0 .$$

Le premier de ces deux facteurs égalé à zéro donne x imaginaire; l'autre est la fonction que nous avons déjà employée ci dessus, et nous fait retrouver nos quatre points extérieurs à l'ellipse.

En discutant le cours de la courbe aux environs de ces quatre points on reconnaît aisément que ce sont des points de rebroussement; et, pour se faire une idée de la manière dont ils se lient avec le reste de la courbe, on peut recourir à la construction suivante :

Soit inscrit à un cercle un rectangle tel que ses petits côtés soient moindres que le rayon ou la corde de 60 degrés; l'excès du cercle sur le rectangle sera le système de quatre segmens égaux et opposés deux à deux, ayant pour cordes les côtés de ce rectangle. Que l'on fasse faire à ces segmens une demi-révolution autour de leurs cordes respectives, en les repliant dans l'intérieur du rectangle; en supprimant alors les cordes, les quatre arcs restans formeront par leur assemblage une courbe ayant deux nœuds et quatre points de rebroussement qui sera assez semblable à la courbe dont il s'agit, lorsque les quatre sommets de l'ellipse correspondent aux milieux des quatre arcs. Mais il ne faut pas perdre de vue que les nœuds et les points de rebroussement n'ont lieu qu'autant que le demi-petit axe de l'ellipse proposée est moindre que son excentricité.

Toute la discussion que l'on vient de lire s'applique littéralement à l'hyperbole, pourvu que l'on change b en $b\sqrt{-1}$ et qu'on pose conséquemment $c^2=a^2+b^2$; mais alors la courbe a une figure toute différente.

Démonstration des deux théorèmes de géométrie énoncés à la page 63 du présent volume ;

Par MM. Vecten, licencié ès sciences,
Querret, ancien chef d'institution,
Vernier, professeur au collége royal de Caen.
Et Ch. Sturm.

Les géomètres qui nous ont adressé des démonstrations de ces deux élégans théorèmes les ont tous démontrés géométriquement ; M. Sturm, à qui ils sont dûs, a seul accompagné la sienne d'une démonstration analitique. Les démonstrations géométriques ne différant guère que par la forme, nous les fondrons, pour abréger, dans une rédaction commune. Nous donnerons ensuite la démonstration analitique de M. Sturm.

LEMME. Si, par un point P, *pris arbitrairement sur le plan d'un polygone rectiligne fermé quelconque, de* n *côtés,* ABC...... LMN, *et par chacun de ses sommets on mène des droites indéfinies* PA, PB, PC, ... PL, PM, PN ; *chacune d'elles, par ses* n—2 *intersections avec les directions des côtés du polygone non adjacens au sommet qu'elle contient, déterminera, sur chacun de ces côtés, deux segmens, comptés du point où elle coupera sa direction à ses deux extrémités. Or, si l'on forme le produit des segmens déterminés sur les côtés consécutifs* AB, BC, CD, ... LM, MN, NA, *à partir des sommets* A, B, C, ... L, M, N, *respectivement, lesquels sont au nombre de* n(n—2), *ce pro-*

duit se trouvera égal à celui des segmens restans, déterminés sur ces mêmes côtés, à partir des sommets B, C, D,..... M, N, A, *respectivement, lesquels sont aussi au nombre de* $n(n-2)$.

Démonstration. Convenons de représenter par A, B, C,..... L, M, N, non seulement les sommets du polygone, mais encore les droites menées respectivement du poiut P par tous ces sommets, de telle sorte cepeudant qu'il n'en résulte jamais d'équivoque.

Conveuons en outre de représenter l'angle que fait l'une quelconque de ces droites avec l'un quelconque des côtés du polygone par la lettre de la droite séparée par une virgule des deux lettres du côté dont il s'agit, en enfermant le tout eutre deux parenthèses.

Convenons enfin de représenter l'intersection de l'une quelconque de ces mêmes droites avec l'un quelconque des côtés du polygone par la lettre de cette droite affectée d'un indice composé de deux lettres minuscules de même nature que les deux lettres majuscules qui désignent le côté dont il s'agit.

Considérons d'abord ce qui se passe sur la droite A. Cette droite peut être considérée comme la direction commune des bases d'une suite de triangles ayant leurs sommets aux sommets B, C, D,.... L, M, N du polygone, et dont les deux autres côtés sont les côtés même du polygone qui concourent à ces sommets, respectivement, et en se rappelant en outre la proportionnalité de ces côtés avec les sinus des angles opposés, nous aurons cette suite d'équations, au nombre de $n-1$,

$$\mathrm{AB}\,\mathit{Sin.}(\mathrm{A}\,,\,\mathrm{AB})=\mathrm{BA}_{bc}\mathit{Sin.}(\mathrm{A}\,,\,\mathrm{BC})\ ,$$

$$\mathrm{CA}_{bc}\mathit{Sin.}(\mathrm{A}\,,\,\mathrm{BC})=\mathrm{CA}_{cd}\mathit{Sin.}(\mathrm{A}\,,\,\mathrm{CD})\ ,$$

$$\mathrm{DA}_{cd}\mathit{Sin.}(\mathrm{A}\,,\,\mathrm{CD})=\mathrm{DA}_{de}\mathit{Sin.}(\mathrm{A}\,,\,\mathrm{DE})\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,$$

$$\mathrm{LA}_{kl}\mathit{Sin.}(\mathrm{A}\,,\,\mathrm{KL})=\mathrm{LA}_{lm}\mathit{Sin.}(\mathrm{A}\,,\,\mathrm{LM})\ ,$$

$$\text{MA}_{lm}\textit{Sin.}(\text{A},\text{LM})=\text{MA}_{mn}\textit{Sin.}(\text{A},\text{MN}) ,$$

$$\text{NA}_{mn}\textit{Sin.}(\text{A},\text{MN})=\text{NA}\ \ \textit{Sin.}(\text{A},\text{NA}) .$$

lesquelles, étant multipliées membre à membre, donneront, par la suppression des facteurs communs aux deux membres de l'équation résultante, en remarquant d'ailleurs que

$$\textit{Sin.}(\text{A},\text{AB})=\textit{Sin.}\text{PAB} ,\qquad \textit{Sin.}(\text{A},\text{NA})=\textit{Sin.}\text{PAN} ,$$

$$\text{AB.CA}_{bc}.\text{DA}_{cd}\ldots\text{LA}_{kl}.\text{MA}_{lm}.\text{NA}_{mn}.\textit{Sin.}\text{PAB}=\text{NA.BA}_{bc}.\text{CA}_{cd}.\text{DA}_{de}\ldots\text{LA}_{lm}.\text{MA}_{mn}.\textit{Sin.}\text{PAN} .$$

Chacune des droites A, B, C, ... L, M, N, devant fournir une équation analogue, on aura ces n équations

$$\left.\begin{array}{l}
\text{AB.CA}_{bc}.\text{DA}_{cd}\ldots\text{MA}_{lm}.\text{NA}_{mn}.\textit{Sin.}\text{PAB}=\text{NA.BA}_{bc}.\text{CA}_{cd}\ldots\text{LA}_{lm}.\text{MA}_{mn}.\textit{Sin.}\text{PAN} ,\\
\text{BC.DB}_{cd}.\text{EB}_{de}\ldots\text{NB}_{mn}.\text{AB}_{na}.\textit{Sin.}\text{PBC}=\text{AB.CB}_{cd}.\text{DB}_{de}\ldots\text{MB}_{mn}.\text{NB}_{na}.\textit{Sin.}\text{PBA} ,\\
\text{CD.EC}_{de}.\text{FC}_{ef}\ldots\text{AC}_{na}.\text{BC}_{ab}.\textit{Sin.}\text{PCD}=\text{BC.DC}_{de}.\text{EC}_{ef}\ldots\text{NC}_{na}.\text{AC}_{ab}.\textit{Sin.}\text{PCB} ,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\text{LM.NL}_{mn}.\text{AL}_{na}\ldots\text{IL}_{hi}.\text{KL}_{ik}.\textit{Sin.}\text{PLM}=\text{KL.ML}_{mn}.\text{NL}_{na}\ldots\text{HL}_{hi}.\text{IL}_{ik}.\textit{Sin.}\text{PLK} ,\\
\text{MN.AM}_{na}.\text{BM}_{ab}\ldots\text{KM}_{ik}.\text{LM}_{kl}.\textit{Sin.}\text{PMN}=\text{LM.NM}_{na}.\text{AM}_{ab}\ldots\text{IM}_{ik}.\text{KM}_{kl}.\textit{Sin.}\text{PML} ,\\
\text{NA.BN}_{ab}.\text{CN}_{bc}\ldots\text{LN}_{kl}.\text{MN}_{lm}.\textit{Sin.}\text{PNA}=\text{MN.AN}_{ab}.\text{BN}_{bc}\ldots\text{KN}_{kl}.\text{LN}_{lm}.\textit{Sin.}\text{PNM} ,
\end{array}\right\}\ (1)$$

Considérons présentement le triangle APB. Ses deux côtés PA et PB étant proportionnels aux sinus des angles opposés, il s'ensuit qu'on doit avoir

$$\mathrm{PA}\,Sin.\mathrm{PAB}=\mathrm{PB}\,Sin.\mathrm{PAB}\,.$$

Chaque côté du polygone devant donc fournir une équation analogue, on aura

$$\mathrm{PA}\,Sin.\mathrm{PAB}=\mathrm{PB}\,Sin\,\mathrm{PBA}\,,$$

$$\mathrm{PB}\,Sin.\mathrm{PBC}=\mathrm{PC}\,Sin.\mathrm{PCB}\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\mathrm{PM}\,Sin.\mathrm{PMN}=\mathrm{PN}\,Sin.\mathrm{PNM}\,,$$

$$\mathrm{PN}\,Sin.\mathrm{PNA}=\mathrm{PA}\,Sin.\mathrm{PAN}\,,$$

équations qui par leur multiplication membre à membre et la suppression des facteurs communs aux deux membres de l'équation résultante, donneront

$$Sin.\mathrm{PAB}.Sin.\mathrm{PBC}..Sin.\mathrm{PMN}.Sin.\mathrm{PNA}$$

$$=Sin.\mathrm{PAN}.Sin.\mathrm{PBA}...Sin.\mathrm{PML}.Sin.\mathrm{PMN}\,. \qquad (2)$$

On voit, en vertu de cette dernière équation, que, si l'on prend le produit des équations (1) membre à membre, les sinus disparaîtront des deux membres de l'équation résultante; il est d'ailleurs visible que les côtés du polygone en disparaîtront aussi; de sorte qu'il ne restera plus, de part et d'autre, que les produits de segmens dont il s'agissait précisément de démontrer l'égalité.

THÉORÈME I. *Soit, dans l'espace, un polygone rectiligne fermé quelconque, plan ou gauche, de* n *côtés*, ABC....LMN, *et une droite indéfinie, aussi quelconque. Soient menés, par cette droite et par les* n *côtés du polygone, un pareil nombre de plans. Chacun d'eux, par ses* n—2 *intersections avec les côtés du polygone* *non adjacens au sommet qui s'y trouve contenu, déterminera, sur chacun de ces côtés, deux segmens, comptés de cette intersection aux deux extrémités de ce côté. Or, si l'on forme le produit des segmens déterminés sur les côtés consécutifs* AB, BC, CD,.... LM, MN, NA, *à partir des sommets* A, B, C,...... L, M, N, *respectivement, lesquels sont au nombre de* n(n—2), *ce produit se trouvera égal à celui des segmens restant, déterminés sur ces mêmes côtés, à partir des sommets* B, C, D,.....M, N, A, *respectivement, lesquels sont aussi au nombre de* n(n—2).

Démonstration. Soit conduit un plan indéfini, perpendiculaire à la droite donnée, et par conséquent à tous les plans menés par cette droite et par les sommets du polygone, et soit P′ le point où ce plan indéfini est percé par cette droite. Soit fait, sur ce même plan, une projection orthogonale A′B′C′......L′M′N′ du polygone donné; les plans couduits par la droite donnée couperont le plan perpendiculaire à la droite donnée suivant des droites P′A′, P′B′, P′C′, ...P′L′, P′M′, P′N′ menées du point P′ à tous les sommets de la projection. On se trouvera donc exactement dans le cas du lemme précédemment démontré, et conséquemment l'équation annoncée par ce lemme se trouvera avoir lieu. Elle aura donc lieu aussi en divisant ses deux membres par la $(n-2)^{me}$ puissance du produit des cosinus des angles que font respectivement les côtés du polygone avec ceux de sa projection. Mais alors on pourra disposer des facteurs des dénominateurs des deux membres de telle sorte que chaque segment de côté de la projection du polygone se trouve divisé par le cosinus de l'inclinaison de ce segment par rapport au segment de côté correspondant du polygone projeté. Substituant ensuite au quotient de chaque projection de segment par le cosinus de son inclinaison sur le segment projeté, ce segment projeté lui-même, comme on le peut en effet, on parviendra à l'équation qu'il s'agissait de démontrer.

THÉORÈME II. Soit, dans l'espace, un polygone rectiligne fermé quelconque, plan ou gauche, de n *côtés,* ABC.....LMN, *et un* *un point* P *également quelconque. Soient menés, par ce point* P *et par les* n *côtés du polygone un pareil nombre de plans. Chacun de ces plans, par ces* n—3, *intersections avec les côtés du polygone autres que celui qui s'y trouve contenu et les deux entre lesquels il se trouve situé, déterminera, sur chacun de ces* n—3 *côtés deux segmens, comptés de cette intersection aux deux extrémités de ce côté. Or, si l'on forme le produit des segmens déterminés sur les côtés consécutifs* AB, BC, CD,.....LM, MN, NA, *à partir des sommets* A, B, C,.......L, M, N, *respectivement, lesquels sont au nombre de* n(n—3), *ce produit se trouvera égal à celui des segmens restans, déterminés sur ces mêmes côtés, à partir des sommets* B, C, D,......M, N, A, *respectivement, lesquels sont aussi au nombre de* n(n—3).

Démonstration. Convenons de désigner respectivement les plans conduits par le point P et par chacun des côtés du polygone par deux lettres minuscules de même sorte que celles qui désignent ce côté, de sorte que le plan qui passe par les trois points P, A, B soit appelé le plan *ab*, et ainsi des autres.

Convenons ensuite de désigner l'intersection de l'un quelconque des côtés du polygone avec l'un quelconque de ces plans par les deux lettres qui désignent ce côté, enfermées entre deux parenthèses, et portant pour indice, hors de la seconde parenthèse les deux lettres qui désignent ce plan ; de telle sorte que, par exemple, $(AB)_{gh}$ désigne le point où la droite AB est coupée par le plan *gh*.

Convenons enfin de désigner l'angle que fait un de ces côtés avec un quelconque de nos plans par les deux lettres de ce côté séparées par une virgule des deux lettres du plan, en renfermant le tout entre deux parenthèses ; de telle sorte que, par exemple, (AB, *gh*) désigne l'angle que fait la droite AB avec le plan *gh*.

Ces choses ainsi entendues, concevons que, de tous les sommets autres que les sommets A et B, on abaisse sur le plan *ab* des perpendiculaires dont nous désignerons les pieds par les lettres de ces mêmes sommets affectées d'un accent. Le triangle dont les sommets sont, par exemple, K, K′ et $(IK)_{ab}$ et qui est rectangle en K′, donnera

$$KK'=K(IK)_{ab}.\mathrm{Sin}.(IK\,,\,ab)\ ;$$

mais le triangle dont les sommets sont K, K′ et $(KL)_{ab}$ donnera pareillement

$$KK'=K(KL)_{ab}.\mathrm{Sin}.(KL\,,\,ab)\ ;$$

d'où on conclura, en égalant ces deux valeurs,

$$K(IK)_{ab}.\mathrm{Sin}.(IK,ab)=K(KL)_{ab}.\mathrm{Sin}.(KL,ab)\ .$$

Chaque sommet autre que A et B fournissant donc une équation pareille, on aura cette suite d'équations, au nombre de $n-2$,

$$BC.Sin.(BC\,,\,ab)=C(CD)_{ab}.Sin.(CD\,,\,ab)\ ,$$

$$D(CD)_{ab}.Sin.(CD\,,\,ab)=D(DE)_{ab}.Sin.(DE\,,\,ab)\ ,$$

$$E(DE)_{ab}.Sin.(DE\,,\,ab)=E(EF)_{ab}.Sin.(EF\,,\,ab)\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,$$

$$L(KL)_{ab}.Sin.(KL,ab)=L(LM)_{ab}.Sin.(LM,ab)\ ,$$

$$M(LM)_{ab}.Sin.(LM,ab)=M(MN)_{ab}.Sin.(MN,ab)\ ,$$

$$N(MN)_{ab}.Sin.(MN\,,\,ab)=NA.Sin.(NA\,,\,ab),$$

lesquelles, étant multipliées membre à membre, donneront, par la suppression des facteurs communs aux deux membres de l'équation résultante

$$BC.D(CD)_{ab}.E(DE)_{ab}..M(LM)_{ab}.N(MN)_{ab}.Sin.(BC,ab)=NA.C(CD)_{ab}.D(DE)_{ab}..L(LM)_{ab}.M(MN)_{ab}Sin.(NA,ab).$$

Chacun des côtés AB, BC, CD, ... LM, MN, NA devant fournir une équation analogue, on aura ces n équations

$$\left.\begin{array}{l}
BC.D(CD)_{ab}.E(DE)_{ab}....M(LM)_{ab}.N(MN)_{ab}.Sin.(BC,ab)=NA.C(CD)_{ab}.D(DE)_{ab}....L(LM)_{ab}.M(MN)_{ab}.Sin.(NA,ab)\ ,\\
CD.E(DE)_{bc}.F(EF)_{bc}....N(MN)_{bc}.A(NA)_{bc}.Sin.(CD,bc)=AB.D(DE)_{bc}.E(EF)_{bc}....M(MN)_{bc}.N(NA)_{bc}.Sin.(AB,bc)\ ,\\
DE.F(EF)_{cd}.G(FG)_{cd}....A(NA)_{cd}.B(AB)_{cd}.Sin(DE,cd)=BC.E(EF)_{cd}.F(FG)_{cd}....N(NA)_{cd}.A(AB)_{cd}Sin.(BC,cd)\ ,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
MN.A(NA)_{lm}.B(AB)_{lm}....I(HI)_{lm}.K(IK)_{lm}.Sin.(MN,lm)=KL.N(NA)_{lm}.A(AB)_{lm}....H(HI)_{lm}.I(IK)_{lm}.Sin.(KL,lm)\ ,\\
NA.B(AB)_{mn}.C(BC)_{mn}....K(IK)_{mn}.L(KL)_{mn}.Sin.(NA,mn)=LM.A(AB)_{mn}.B(BC)_{mn}....I(IK)_{mn}.K(KL)_{mn}.Sin.(LM,mn)\ ,\\
AB.C(BC)_{na}.D(CD)_{na}....L(KL)_{na}.M(LM)_{na}.Sin.(AB,na)=MN.B(BC)_{na}.C(CD)_{na}....K(KL)_{na}.L(LM)_{na}.Sin(MN,na)\ ,
\end{array}\right\}(3)$$

Considérons présentement le tétraèdre PNAB ; en désignant respectivement par NN′ et BB′ les perpendiculaires abaissées de ses sommets N et B sur les plans des faces opposées APB et NPA, son volume pourra également être exprimé par les deux produits

$$APB.\tfrac{1}{3}NN'\ ,\qquad NPA.\tfrac{1}{3}BB'\ ;$$

d'où il suit qu'on aura

$$NPA.BB'=APB.NN'\ ;$$

mais on a évidemment

$$BB'=AB.Sin.(AB\,,\,na)\ ,\qquad NN'NA.Sin.(NA\,,\,ab)\ ;$$

il viendra donc, en substituant,

$$\text{NPA.AB.}Sin.(\text{AB}\,,\,na)=\text{APB.NA}Sin.(\text{NA}\,,\,ab)\ .$$

Chacun des sommets A, B, C, ... L, M, N fournissant une équation analogue, on aura ces n équations

$$\text{NPA.AB.}Sin.(\text{AB}\,,\,na)=\text{APB.NA.}Sin.(\text{AN}\,,\,ab)\ ,$$

$$\text{APB.BC.}Sin.(\text{BC}\,,\,ab)=\text{BPC.AB.}Sin.(\text{AB}\,,\,bc)\ ,$$

$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ,$$

$$\text{LPM.MN.}Sin.(\text{MN},lm)=\text{MPN.LM.}Sin.(\text{LM},mn)\ ,$$

$$\text{MPN.NA.}Sin.(\text{NA},mn)=\text{NPA.MN.}Sin.(\text{MN},na)\ ,$$

lesquelles, étant multipliées membre à membre, donneront, par la suppression des facteurs communs aux deux membres de l'équation résultante,

$$\left.\begin{array}{l} Sin.(\text{AB}\,,\,na).Sin.(\text{BC}\,,\,ab)\,.....\,Sin.(\text{MN}\,,\,lm).Sin.(\text{NA}\,,\,mn) \\ =Sin.(\text{NA}\,,\,ab).Sin.(\text{AB}\,,\,bc)\,.....\,Sin.(\text{LM}\,,\,mn).Sin.(\text{MN}na\,,\,) \end{array}\right\}\quad(4)$$

On voit, en vertu de cette dernière équation, que, si l'on prend le produit des équations (3) membre à membre, les sinus disparaîtront des deux membres de l'équation résultante ; il est d'ailleurs visible que les côtés du polygone en disparaîtront aussi ; de sorte qu'il ne restera plus alors, de part et d'autre, que les produits de segmens dont il s'agissait précisément de démontrer l'égalité.

Dans la démonstration de ces théorèmes, on peut s'appuyer sur les propositions démontrées par Carnot, dans sa *Théorie des transversales*, et c'est ainsi qu'en ont usé quelques-uns des géomètres qui ont traité les deux questions proposées ; mais il n'en résulte pas une très-grande abréviation, et dès-lors il nous paraît plus convenable de ne s'appuyer, pour parvenir au but, que sur des principes universellement connus. Passons présentement aux démonstrations analitiques de M. Sturm.

Pour le premier théorème, prenons la droite donnée pour axe des z, l'origine étant d'ailleurs quelconque et les coordonnées étant rectangulaires.

Soient a, a', a'' les coordonnées du sommet A,

b, b', b'' les coordonnées du sommet B,

c, c', c'' les coordonnées du sommet C,

. . . .

n, n', n'' les coordonnées du sommet N.

Soient en outre α, α', α'' les cosinus des angles que forme la direction du premier côté AB du polygone avec les trois axes; ce côté, considéré comme droite indéfinie, pourra également être exprimé par les deux systèmes d'équations

$$(1)\ \begin{cases} x=a+\alpha p\,, \\ y=a'+\alpha' p\,, \\ z=a''+\alpha'' p\,, \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x=b+\alpha q\,, \\ y=b'+\alpha' q\,, \\ z=b''+\alpha'' q\,; \end{cases}$$

p et q représentant les distances respectives d'un point quelconque de cette droite aux deux points A et B.

Le plan conduit par l'axe des z et par le sommet N a pour équation

$$n'x=ny\,. \qquad (3)$$

Ce plan coupe AB en un certain point, et on peut admettre que p et q sont les distances de ce point aux deux points A et B. En substituant donc tour à tour pour x et y dans l'équation (3) les valeurs données par les équations (1) et (2) on trouvera, pour les deux segmens déterminés sur AB, par le plan dont il s'agit

$$p=\frac{na'-n'a}{n'\alpha-n\alpha'}, \qquad q=\frac{nb'-n'b}{n'\alpha-n\alpha'},$$

d'où il suit que le rapport entre les deux segmens que détermine sur AB le plan conduit par la droite donnée et par le sommet N est

$$\frac{na'-n'a}{nb'-n'b}.$$

Appliquant donc, tour à tour, les mêmes considérations aux côtés consécutifs AB, BC, CD, ... LM du polygone coupés par ce même plan, on trouvera, pour les rapports de longueur des segmens déterminés sur ces divers côtés,

$$\frac{na'-n'a}{nb'-n'b}, \frac{nb'-n'b}{nc'-n'c}, \frac{nc'-n'c}{nd'-n'd}, \ldots\ldots\ldots \frac{nl'-n'l}{nm'-n'm}.$$

Donc, si l'on dénote par P_n le produit continuel des segmens déterminés sur ces côtés, à partir de leurs extrémités A, B, C ..... L, et par Q_n le produit continuel des segmens déterminés sur ces mêmes côtés, à partir de leurs extrémités B, C, D, ... M, le rapport du premier produit au second sera

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{na'-n'a}{nm'-n'm}.$$

Si présentement nous considérons tour à tour les plans qui passent par les sommets A, B, C, ... N, en employant des notations analogues, nous trouverons

$$\frac{P_a}{Q_a}=\frac{ab'-ba'}{n'a-na'}\,,\quad \frac{P_b}{Q_b}=\frac{bc'-cb'}{a'b-ab'}\,,\quad \frac{P_c}{Q_c}=\frac{cd'-dc'}{b'c-c'b}\,,\ \ldots\ldots\ \frac{P_n}{Q_n}=\frac{na'-n'a}{m'n-mn'}\,,$$

d'où nous conclurons

$$\frac{P_a}{Q_a}\cdot\frac{P_b}{Q_b}\cdot\frac{P_c}{Q_c}\cdots\cdots\frac{P_n}{Q_n}=1\,;$$

c'est-à-dire,

$$P_a\,.\,P_b\,.\,P_c\,\ldots\ldots\,P_n=Q_a\,.\,Q_b\,.\,Q_c\,\ldots\ldots\,Q_n\,,$$

comme le veut le théorème.

Tout étant supposé dans le second théorème comme dans le premier, avec cette circonstance particulière que le point donné P est pris pour origine; l'équation du plan mené par ce point P et par le côté MK du polygone sera

$$(m'n''-m''n')x+(m''n-mn'')y+(mn'-m'n)z=0\,, \qquad (4)$$

en mettant tour à tour dans cette équation, pour x, y, z les valeurs (1) et (2) ci-dessus, p, q deviendront respectivement les distances des extrémités A et B du côté AB au point où ce côté est coupé par le plan conduit par MN et par le point P. On trouvera ainsi pour ces deux segmens

$$p=-\frac{a(m'n''-n'm'')+a'(m''n-mn'')+a''(mn'-m'n)}{\alpha(m'n''-n'm'')+\alpha'(m''n-mn'')+\alpha''(mn'-m'n)}\,,$$

$$q=-\frac{b(m'n''-n'm'')+b'(m''n-mn'')+b''(mn'-m'n)}{\alpha(m'n''-n'm'')+\alpha'(m''n-mn'')+\alpha''(mn'-m'n)}\,,$$

de sorte que le rapport $\frac{p}{q}$ de ces deux segmens aura pour expression

$$\frac{mn'a''-ma'n''+am'n'-nm'a''+na'm''-an'm''}{mn'b''-mb'n''-bm'n''-nm'b''+nb'm''-bn'm''}\,.$$

On trouvera de même pour le rapport entre les segmens retranchés par le même plan sur le côté BC et comptés tour à tour de ses extrémités B et C,

$$\frac{mn'b''-mb'n''+bm'n''-nm'b''+nb'm''-bn'm''}{mn'c''-mc'n''+cm'n''-nm'c''+nc'm''-cn'm''}\,.$$

et ainsi des autres, jusqu'au côté KL, pour lequel le rapport de ces mêmes segmens sera

$$\frac{mn'k''-mk'n''+km'n''-nm'k''+nk'm''-km'n''}{mn'l''-ml'n''+lm'n''-nm'l''+nl'm''-lm'n''}\,.$$

En conséquence, si l'on dénote par P_{mn} le produit continu des segmens déterminés par le plan MPN sur les côtés consécutifs AB, BC, CD, ... KL, à partir de leurs extrémités A, B, C, ... K, et par Q_{mn} le produit continu des segmens déterminés par ce même plan sur les mêmes côtés, à partir de leurs extrémités B, C, D, ... L, on aura

$$\frac{P_{mn}}{Q_{mn}}=\frac{mn'a''-ma'n''+am'n''-nm'a''+na'm''-am'n''}{mn'l''-ml'n''+lm'n''-nm'l''+nl'm''-lm'n''}\,.$$

Par l'emploi de notations analogues, on trouvera

$$\frac{P_{ab}}{Q_{ab}}=\frac{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}{ab'n''-an'b''+na'b''-ba'n''+bn'a''-nb''a'}\,,$$

$$\frac{P_{bc}}{Q_{bc}}=\frac{bc'd''-bd'c''+db'c''-cb'd''+cd'b''-dc'b''}{bc'a''-ba'c''+ab'c''-ab'c''+ca'b''-ac'b''}\,,$$

et ainsi de suite, et enfin

$$\frac{P_{na}}{Q_{na}}=\frac{na'b''-nb'a''+bn'a''-an'b''+ab'n''-ba'n''}{na'm''-nm'a''+mn'a''-an'm''+am'n''-ma'n''}\,,$$

d'où nous conclurons

$$\frac{P_{ab}}{Q_{ab}}\cdot\frac{P_{bc}}{Q_{bc}}\cdot\frac{P_{cd}}{Q_{cd}}\cdots\cdots\cdots\frac{P_{mn}}{Q_{mn}}\cdot\frac{P_{na}}{Q_{na}}=1\,.$$

c'est-à-dire,

$$P_{ab}\,.\,P_{bc}\,.\,P_{cd}\,.....\,P_{mn}\,.\,P_{na}=Q_{ab}\,.\,Q_{bc}\,.\,Q_{cd}\,.....\,Q_{mn}\,.\,Q_{na}\,,$$

comme le veut le théorème.

HYDRODYNAMIQUE.

Recherches sur les lois générales du mouvement des fluides ;

Par M. F. SARRUS, docteur ès sciences.

1. LA théorie du mouvement des fluides est une des plus épineuses de la mécanique. On connaît depuis long-temps les équations différentielles de ce mouvement ; mais elles se montrent, pour la plupart, extrêmement rebelles, et ce n'est que dans quelques cas particuliers seulement que les géomètres modernes sont parvenus à les intégrer. En étudiant les découvertes dont ils ont enrichi cette partie de la science, nous avons cru reconnaître qu'ils avaient donné trop d'étendue à une proposition fort importante, et qu'en outre, la démonstration qu'ils en avaient donnée n'était pas à l'abri de toute objection. En cherchant à remplir cette lacune, nos recherches sur le même sujet se sont peu à peu étendues ; et nous sommes ainsi parvenu à quelques résultats nouveaux qui nous ont paru assez utiles ou du moins assez curieux pour mériter d'être connus. C'est l'ensemble de tout notre travail que nous nous proposons ici de mettre sous les yeux du lecteur.

2. Commençons par bien fixer le sens des notations dont nous nous proposons de faire usage dans la suite de cet écrit. Le temps sera constamment désigné par t ; et nous nommerons x, y, z les coordonnées rectangulaires, pour l'époque t, d'une molécule quelconque M de la masse du fluide.

Toute quantité relative à cette molécule pourra, pour cette même époque t, être considérée comme une fonction déterminée des variables t, x, y, z, et de constantes qui devront être les mêmes pour toutes les autres molécules. C'est dans cette supposition, en en regardant les variables t, x, y, z comme absolument indépendantes, que seront prises, suivant les principes du calcul différentiel partiel, les dérivées

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z},$$

quelle que puisse être d'ailleurs la fonction u.

3. Les coordonnées x, y, z sont nécessairement fonctions du temps t et des coordonnées primitives. Nommant ces dernières a, b, c, toute quantité relative à la même molécule M pourra être encore considérée comme une fonction déterminée de t, a, b, c. En conséquence, pour éviter toute méprise, et ne pas confondre les valeurs de $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}$, $\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}t^3}$, ... prises dans la première hypothèse avec ce qu'elles doivent être dans celle-ci, nous représenterons ces dernières respectivement par $\mathrm{d}'u$, d'^2u, d'^3u, ... Quant aux coefficiens différentiels

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a}, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}b}, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}c},$$

comme on ne saurait les confondre avec les dérivées d'une autre nature, nous n'emploîrons point de notations particulières pour les désigner.

On voit d'après cela que les vitesses de la molécule M, parallèles aux coordonnées x, y, z seront représentées respectivement par $\mathrm{d}'x$, $\mathrm{d}'y$, $\mathrm{d}'z$; que sa vitesse absolue aura conséquemment pour expression

$$\sqrt{d'x^2+d'y^2+d'z^2} ,$$

et que les forces accélératrices correspondantes seront représentées par d'^2x, d'^2y, d'^2z.

4. On peut observer, d'après ces conventions, que $d'udt$ n'est autre chose que la différentielle totale de u, prise en regardant x, y, z comme fonctions de t, et que, par suite, on doit avoir identiquement

$$d'u = \frac{du}{dt} + \frac{du}{dx}d'x + \frac{du}{dy}d'y + \frac{du}{dz}d'z .$$

On trouvera aussi

$$\frac{du}{da} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{da} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{da} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{da} ,$$

$$\frac{du}{db} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{db} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{db} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{db} ,$$

$$\frac{du}{dc} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dc} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dc} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dc} ;$$

transformations dont nous ferons usage par la suite.

5. D'après les principes connus du calcul différentiel partiel, on aura identiquement

$$\frac{d^2u}{dtdx} = \frac{d^2u}{dxdt} , \quad \frac{d^2u}{dtdy} = \frac{d^2u}{dydt} , \quad \frac{d^2u}{dtdz} = \frac{d^2u}{dzdt} ,$$

$$\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d^2u}{dydx} , \quad \frac{d^2u}{dxdz} = \frac{d^2u}{dzdx} , \quad \frac{d^2u}{dydz} = \frac{d^2u}{dzdy} ,$$

et encore

$$\mathrm{d}'\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a}=\frac{\mathrm{dd}'u}{\mathrm{d}a}\;,\quad \mathrm{d}'\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}b}=\frac{\mathrm{dd}'u}{\mathrm{d}b}\;,\quad \mathrm{d}'\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}c}=\frac{\mathrm{dd}'u}{\mathrm{d}c}\;,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}=\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}b\mathrm{d}a}\;,\quad \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}a\mathrm{d}c}=\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}c\mathrm{d}a}\;,\quad \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}b\mathrm{d}c}=\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}c\mathrm{d}b}\;;$$

mais il faudrait bien se garder de croire que l'on a de même

$$\mathrm{d}'\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{dd}'u}{\mathrm{d}t}\;,\; \mathrm{d}'\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{dd}'u}{\mathrm{d}x}\;,\; \mathrm{d}'\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{dd}'u}{\mathrm{d}y}\;,\; \mathrm{d}'\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{dd}'u}{\mathrm{d}z}\;.$$

En effet, en vertu du n.° 4, on a, par exemple,

$$\mathrm{d}'\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}\mathrm{d}'x+\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}\mathrm{d}'y+\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z\mathrm{d}t}\mathrm{d}'z\;,$$

tandis que l'équation identique

$$\mathrm{d}'u=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}'x+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}'y+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}'z\;,$$

différentiée par rapport à t, en regardant x, y, z comme constans donne

$$\frac{\mathrm{dd}'u}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t\mathrm{d}x}\mathrm{d}'x+\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t\mathrm{d}y}\mathrm{d}'y+\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t\mathrm{d}z}\mathrm{d}'z$$
$$+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{dd}'x}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\,\frac{\mathrm{dd}'y}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\,\frac{\mathrm{dd}'z}{\mathrm{d}t}\;,$$

et par suite

$$\frac{\mathrm{dd}'u}{\mathrm{d}t}=\mathrm{d}'\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{dd}'x}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\,\frac{\mathrm{dd}'y}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\,\frac{\mathrm{dd}'z}{\mathrm{d}t}\;,$$

et non pas simplement

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}'u}{\mathrm{d}t} = \mathrm{d}'\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}.$$

6. Nous supposerons que la caractéristique δ des variations est uniquement relative aux coordonnées primitives a, b, c, et non au tems t. Dès lors nous aurons

$$\delta x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a}\delta a + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}b}\delta b + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}c}\delta c,$$

$$\delta y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a}\delta a + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}b}\delta b + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}c}\delta c,$$

$$\delta z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}a}\delta a + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}b}\delta b + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}c}\delta c,$$

et en général

$$\delta u = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\delta x + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\delta y + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\delta z = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a}\delta a + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}b}\delta b + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}c}\delta c;$$

d'où il est facile de conclure

$$\delta\mathrm{d}'u = \mathrm{d}'\delta u, \qquad \delta\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\delta u}{\mathrm{d}t},$$

et toutes les autres relations qu'on en peut déduire par des différentiations répétées.

Si l'on avait

$$\psi = \delta\varphi + H,$$

on en tirerait

$$\mathrm{d}'\psi = \mathrm{d}'\delta\varphi + \mathrm{d}'H,$$

et

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\delta\varphi}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}.$$

Dans les cas où H sera une fonction de a, b, c, sans t, on aura $\mathrm{d}'H = 0$, et par suite

$$\mathrm{d}'\psi = \mathrm{d}'\delta\varphi = \delta\mathrm{d}'\varphi.$$

Si, au contraire, H est une fonction de x, y, z, sans t, on aura $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0$, et par suite

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\delta\varphi}{\mathrm{d}t} = \delta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \quad ;$$

et comme, dans ce cas ou les autres, H peut ne pas être une variation exacte, ce qui pourtant serait nécessaire pour que ψ fut une pareille variation, on en conclura que ψ *peut ne pas être une variation exacte, bien que l'une ou l'autre des dérivées* $\mathrm{d}'\psi$ *ou* $\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}$ *soit une telle variation.*

C'est pour avoir négligé de faire cette observation, ou peut-être même pour avoir cru que le contraire était vrai, que les divers auteurs qui ont écrit sur l'hydrodynamique ont réputé, comme généralement démontrée, une proposition qui n'est vraie que dans des cas particuliers.

7. Ces notations et remarques ainsi établies, soit p la pression qu'éprouve la molécule M, au bout du temps t; soit Δ la densité correspondante de la même molécule; soient, en outre, X, Y, Z les trois forces parallèles aux axes des coordonnées auxquelles peuvent être réduites toutes celles qui la sollicitent, forces que nous réputerons positives ou négatives, suivant qu'elles tendront à augmenter ou à diminuer les coordonnées x, y, z du point M. Si le fluide était en équilibre, nous aurions, pour les équations de cet équilibre

$$X - \frac{1}{\Delta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0, \quad Y - \frac{1}{\Delta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = 0, \quad Z - \frac{1}{\Delta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = 0.$$

Si, au contraire, le fluide est en mouvement, les forces accélératrices qui forment les premiers membres de ces trois équations ne seront pas nulles ; et comme ces mêmes forces accélératrices peuvent aussi être exprimées respectivement par d'^2x, d'^2y, d'^2z; il s'ensuit que les équations du mouvement sont

$$X - \frac{1}{\Delta}\frac{dp}{dx} = d'^2x\ ,$$

$$Y - \frac{1}{\Delta}\frac{dp}{dy} = d'^2y\ ,$$

$$Z - \frac{1}{\Delta}\frac{dp}{dz} = d'^2z\ .$$

8. Dans la nature, les variations

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z\ , \qquad \frac{\delta p}{\Delta}\ ,$$

sont exactes : et nous les supposerons telles dans tout ce qui va suivre. Posant donc

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = \delta\varphi\ ;$$

d'où

$$X = \frac{d\varphi}{dx}\ , \quad Y = \frac{d\varphi}{dy}\ , \quad Z = \frac{d\varphi}{dz}\ ,$$

les équations du mouvement deviendront

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} - \frac{1}{\Delta}\frac{dp}{dx} &= d'^2x\ , \\ \frac{d\varphi}{dy} - \frac{1}{\Delta}\frac{dp}{dy} &= d'^2y\ , \\ \frac{d\varphi}{dz} - \frac{1}{\Delta}\frac{dp}{dz} &= d'^2z\ . \end{aligned}\right\}\quad (1)$$

Soit prise successivement la somme de leurs produits d'abord par

$$\frac{dx}{da}, \quad \frac{dy}{da}, \quad \frac{dz}{da},$$

puis par

$$\frac{dx}{db}, \quad \frac{dy}{db}, \quad \frac{dz}{db},$$

puis enfin par

$$\frac{dx}{dc}, \quad \frac{dy}{dc}, \quad \frac{dz}{dc};$$

et réduisant à l'aide des relations du n°. 4, on trouvera

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{dv}{da} - \dfrac{1}{\Delta}\dfrac{dp}{da} = d'^2x.\dfrac{dx}{da} + d'^2y.\dfrac{dy}{da} + d'^2z.\dfrac{dz}{da}, \\[2ex]
\dfrac{dv}{db} - \dfrac{1}{\Delta}\dfrac{dp}{db} = d'^2x.\dfrac{dx}{db} + d'^2y.\dfrac{dy}{db} + d'^2z.\dfrac{dz}{db}, \\[2ex]
\dfrac{dv}{dc} - \dfrac{1}{\Delta}\dfrac{dp}{dc} = d'^2x.\dfrac{dx}{dc} + d'^2y.\dfrac{dy}{dc} + d'^2z.\dfrac{dz}{dc};
\end{array}\right\} (2)$$

forme sous laquelle on devra employer les équations, lorsqu'on voudra déterminer x, y, z, p, en fonction de a, b, c, t; mais, si on veut déterminer p, $d'x$, $d'y$, $d'z$, en fonction de t, x, y, z, il faudra mettre les équations (1) sous la forme

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{dv}{dx} - \dfrac{1}{\Delta}\dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dd'x}{dt} + \dfrac{dd'x}{dx}d'x + \dfrac{dd'x}{dy}d'y + \dfrac{dd'x}{dz}d'z, \\[2ex]
\dfrac{dv}{dy} - \dfrac{1}{\Delta}\dfrac{dp}{dy} = \dfrac{dd'y}{dt} + \dfrac{dd'y}{dx}d'x + \dfrac{dd'y}{dy}d'y + \dfrac{dd'y}{dz}d'z, \\[2ex]
\dfrac{dv}{dz} - \dfrac{1}{\Delta}\dfrac{dp}{dz} = \dfrac{dd'z}{dt} + \dfrac{dd'z}{dx}d'x + \dfrac{dd'z}{dy}d'y + \dfrac{dd'z}{dz}d'z,
\end{array}\right\} (3)$$

qu'il

qu'il sera facile de leur faire acquérir au moyen des relations du n.° 4.

Les équations (2) ne sont pas en nombre suffisant pour déterminer les quatre inconnues x, y, z, p, en fonction de a, b, c, t; et il en est de même des équations (3); lorqu'on veut déterminer p, $\mathrm{d}'x$, $\mathrm{d}'y$, $\mathrm{d}'z$, en fonction de t, x, y, z. Pour y suppléer, on y joint ordinairement celles qui peuvent résulter de la continuité du fluide.

9. La condition de continuité du fluide consiste en ce qu'un système qui, pour un instant donné, forme une masse finie et continue, a dû former jusqu'alors et devra former ensuite une pareille masse finie et continue.

On peut conclure de là que la masse d'un pareil système est invariable, et que sa surface est toujours formée des mêmes molécules, quelle que puisse être d'ailleurs sa forme primitive. Si donc le fluide est contenu dans un vase de figure quelconque, les molécules qui, pour un instant donné, sont contiguës aux parois du vase, n'ont pu auparavant et ne pourront ensuite que glisser contre ces parois.

Pour traduire ces conditions en langage analitique, considérons une partie quelconque (A) finie et continue du fluide en mouvement. Sa masse sera exprimée par l'intégrale

$$\iiint \Delta \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

prise entre les limites données par sa surface.

Cela posé, il résulte des principes connus sur la tranformation des intégrales que, si l'on fait, pour abréger,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}b}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}c}+\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}b}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}c}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}a}+\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}c}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}b} \\ -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}c}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}b}-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}b}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}c}-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}c}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}b}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}a} \end{array}\right\} = \theta,$$

l'intégrale précédente reviendra à

$$\int\int\int \Delta\theta \mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c\,,$$

prise entre les limites données par la surface du fluide primitif (A), et comme, en désignant par Δ_0 la valeur primitive de la densité Δ, la masse primitive du même fluide est exprimée par

$$\int\int\int \Delta_0 \mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c\,,$$

on doit en conclure

$$\int\int\int \theta\Delta \mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c = \int\int\int \Delta_0 \mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c\,,$$

et par suite

$$\theta\Delta = \Delta_0\,; \qquad (4)$$

en observant que les limites des intégrales qui composent l'équation précédente sont données par la surface primitive du fluide (A), laquelle surface est entièrement arbitraire.

Cette équation (4) sert à compléter le système d'équations (2); mais, pour pouvoir l'employer conjointement avec les équations (3), il faut la mettre sous une forme plus commode.

Comme l'origine des temps est entièrement arbitraire, si nous représentons par Δ_1, x_1, y_1, z_1 les valeurs de Δ, x, y, z qui correspondent à la valeur $t+h$ de t, nous devrons avoir encore

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}z} + \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}y} \\ - \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}y} - \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}z} - \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}x} \end{array}\right\}\Delta_1 = \Delta\,;$$

mais, en développant suivant les puissances ascendantes de h, nous avons

$$\Delta_1 = \Delta + \frac{h}{1} d'\Delta + \frac{h^2}{1.2} d'^2\Delta + \ldots\ldots ,$$

$$x_1 = x + \frac{h}{1} d'x + \frac{h^2}{1.2} d'^2 x + \ldots\ldots ,$$

$$y_1 = y + \frac{h}{1} d'y + \frac{h^2}{1.2} d'^2 y + \ldots\ldots ,$$

$$z_1 = z + \frac{h}{1} d'z + \frac{h^2}{1.2} d'^2 z + \ldots\ldots ;$$

substituant ces valeurs dans l'équation précédente, et ordonnant le résultat suivant les puissances de h, nous trouverons

$$\Delta + \frac{h}{1}\left\{ d'\Delta + \Delta\left(\frac{dd'x}{dx} + \frac{dd'y}{dy} + \frac{dd'z}{dz} \right) \right\} + \frac{h^2}{1\,2}\{\ldots\} + \ldots = \Delta .$$

Cette équation devant avoir identiquement lieu quelle que soit la valeur de h, nous en conclurons

$$o = d'\Delta + \Delta\left(\frac{dd'x}{dx} + \frac{dd'y}{dy} + \frac{dd'z}{dz} \right) . \qquad (5)$$

Les coëfficiens des puissances supérieures de h nous donneraient bien une infinité d'autres équations; mais elles ne seraient que les différentielles successives de l'équation (5), par rapport à la caractéristique d', et conséquemment ne signifieraient rien de plus que cette équation, qu'on peut encore mettre sous la forme

$$o = \frac{d\Delta}{dt} + \frac{d.\Delta d'x}{dx} + \frac{d.\Delta d'y}{dy} + \frac{d.\Delta d'z}{dz} , \qquad (6)$$

en observant que

$$d'\Delta = \frac{d\Delta}{dt} + \frac{d\Delta}{dx}d'x + \frac{d\Delta}{dy}d'y + \frac{d\Delta}{dz}d'z\ .$$

Lorsque le fluide est incompressible, la densité Δ de la molécule M est invariable ; on a donc alors $\Delta = \Delta_0$ et $d'\Delta = 0$. En conséquence, les équations (4) et (5) se réduisent à

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}\frac{dz}{dc} + \frac{dx}{db}\frac{dy}{dc}\frac{dz}{da} + \frac{dx}{dc}\frac{dy}{da}\frac{dz}{db} \\ &- \frac{dx}{da}\frac{dy}{dc}\frac{dz}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\frac{dz}{dc} - \frac{dx}{dc}\frac{dy}{db}\frac{dz}{da} \end{aligned}\right\} = 1\ , \qquad (7)$$

$$0 = \frac{dd'x}{dx} + \frac{dd'y}{dy} + \frac{dd'z}{dz}\ ; \qquad (8)$$

en mettant au lieu de θ sa valeur.

De plus, dans le cas où le fluide ne sera point homogène, il faudra avoir égard à la condition que Δ doit se réduire à une fonction de a, b, c sans t, ou, ce qui revient au même, à l'équation

$$0 = \frac{d\Delta}{dt} + \frac{d\Delta}{dx}d'x + \frac{d\Delta}{dy}d'y + \frac{d\Delta}{dz}d'z\ .$$

Soit enfin $u=0$ l'équation en t, x, y, z de la surface limite du même fluide (A) après le temps t. Les valeurs primitives des coordonnées x, y, z qui satisfont à cette équation devront être les coordonnées de la surface primitive de ce fluide (A), et par conséquent entièrement indépendantes de t. Si donc on met dans cette équation $u=0$ au lieu de x, y, z leurs valeurs en a, b, c et t, le temps t devra disparaître du résultat ; condition qui servirait à déterminer la forme des fonctions arbitraires, dans les cas où l'on ferait usage des équations (2) et (4). Mais, si l'on faisait usage des équations (3) et (5), on observerait que, puisque u doit se réduire à une fonction de a, b, c sans t, l'on doit avoir

$$\mathrm{d}u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x' + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y' + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}'z = 0 \; .$$

Telles sont les équations générales du mouvement des fluides, et les principes qui doivent servir à la détermination des fonctions arbitraires introduites par les intégrations. Nous aurions pu sans doute prendre ces équations soit dans les mécaniques céleste ou analitique, soit dans la mécanique de M. Poisson ; mais nous avons pensé qu'on trouverait plus commode de rencontrer au commencement de cet essai les considérations et les procédés nécessaires pour les obtenir.

10. Reprenons les équations (1), savoir

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{\Delta}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \mathrm{d}'^2x \; ,$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y} - \frac{1}{\Delta}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = \mathrm{d}'^2y \; ,$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z} - \frac{1}{\Delta}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \mathrm{d}'^2z \; ;$$

prenant la somme de leurs produits respectifs par δx, δy, δz, ajoutant les produits et réduisant, au moyen des relations données dans le n.° 6, nous trouverons

$$\delta\varphi - \frac{\delta p}{\Delta} = \mathrm{d}'^2x\,\delta x + \mathrm{d}'^2y\,\delta y + \mathrm{d}'^2z\,\delta z \; ; \qquad (9)$$

faisant donc, pour abréger,

$$\mathrm{d}'x\,\delta x + \mathrm{d}'y\,\delta y + \mathrm{d}'z\,\delta z = \psi \; , \qquad (10)$$

nous aurons, en différentiant par rapport à la caractéristique d',

$$d'^2x\delta x+d'^2y\delta y+d'^2z\delta z+d'xd'\delta x+d'yd'\delta y+d'zd'\delta z=d'\psi\ ,$$

ou encore

$$d'^2x\delta x+d'^2y\delta y+d'^2z\delta z=d'\psi-\tfrac{1}{2}\delta(d'x^2+d'y^2+d'z^2)\ ;$$

en observant que

$$d'xd'\delta x=d'x\delta d'x=\tfrac{1}{2}\delta.d'x^2\ ,$$

$$d'yd'\delta y=d'y\delta d'y=\tfrac{1}{2}\delta.d'y^2\ ,$$

$$d'zd'\delta z=d'z\delta d'z=\tfrac{1}{2}\delta.d'z^2\ .$$

Au moyen de cette dernière valeur de la quantité

$$d'^2x\delta x+d'^2y\delta y+d'^2z\delta z\ ,$$

l'équation (9) deviendra

$$\delta\nu-\frac{\delta p}{\Delta}=d'\psi-\tfrac{1}{2}\delta(d'x^2+d'y^2+d'z^2)\ ; \qquad (11)$$

de sorte que, si l'on détermine φ au moyen de l'équation

$$\nu-\int\frac{\delta p}{\Delta}=d'\varphi-\tfrac{1}{2}(d'x^2+d'y^2+d'z^2)\ , \qquad (12)$$

ce qui est toujours possible, au moins par les quadratures, et ce qui donne

$$\delta\nu-\frac{\delta p}{\Delta}=\delta d'\varphi-\tfrac{1}{2}\delta(d'x^2+d'y^2+d'z^2)\ ;$$

on trouvera, en comparant cette dernière avec l'équation (11),

$$d'\psi=\delta d'\varphi=d'\delta\varphi\ ,\qquad \text{d'où}\qquad \psi=\delta\varphi+H\ ;\qquad (13)$$

en désignant par H une fonction de a, b, c sans t, de la forme $A\delta a+B\delta b+C\delta c$, qui d'ailleurs peut être quelconque, puisqu'elle est introduite par l'intégration, et qu'il faudra conséquemment déterminer au moyen de l'état primitif du fluide.

Cette équation (13) va nous conduire à quelques résultats importans.

11. Si l'on nomme ψ_1 et φ_1 les valeurs de ψ et φ qui correspondent à une valeur particulière quelconque t_1 du temps, nous devrons avoir de même

$$\psi_1=\delta\varphi_1+H\ ;$$

éliminant H entre cette équation et l'équation (13), nous aurons

$$\psi-\psi_1=\delta\varphi-\delta\varphi_1=\delta(\varphi-\varphi_1)\ ;$$

qui, traduite en langage ordinaire, donne ce théorème :

Si, pour deux valeurs quelconques du temps, on calcule celles de ψ qui leur correspondent, la différence des résultats sera toujours une variation exacte.

Ce résultat, entièrement nouveau, nous paraît curieux. Malheureusement il n'est utile qu'autant qu'on peut en déduire, comme cas particulier, que ψ *sera une variation exacte dans tous les temps si, pour un instant quelconque, cette fonction est une variation exacte, ou bien si elle est nulle;* théorème important, déja connu depuis long-temps, mais qui n'avait pas été démontré jusqu'ici d'une manière aussi simple.

12. L'utilité de l'équation (13) ne se borne pas à la démonstration du précédent théorème. Si, en effet, on y met pour ψ et H les quantités qu'elles représentent, elle devient

$$d'x\delta x+d'y\delta y+d'z\delta z=\delta\varphi+A\delta a+B\delta b+C\delta c\ ,\qquad (14)$$

ou encore

$$\left.\begin{array}{l}\left(d'x\,\frac{dx}{da}+d'y\,\frac{dy}{da}+d'z\,\frac{dz}{da}\right)\delta a\\ +\left(d'x\,\frac{dx}{db}+d'y\,\frac{dy}{db}+d'z\,\frac{dz}{db}\right)\delta b\\ +\left(d'x\,\frac{dx}{dc}+d'y\,\frac{dy}{dc}+d'z\,\frac{dz}{dc}\right)\delta c\end{array}\right\}=\delta\varphi+A\delta a+B\delta b+C\delta c;$$

d'où en observant que les variations δa, δb, δc sont entièrement arbitraires, on tirera

$$\left.\begin{array}{l}d'x\,\frac{dx}{da}+d'y\,\frac{dy}{da}+d'z\,\frac{dz}{da}=\frac{d\varphi}{da}+A,\\ d'x\,\frac{dx}{db}+d'y\,\frac{dy}{db}+d'z\,\frac{dz}{da}=\frac{d\varphi}{db}+B,\\ d'x\,\frac{dx}{dc}+d'y\,\frac{dy}{dc}+d'z\,\frac{dz}{dc}=\frac{d\varphi}{dc}+C,\end{array}\right\}(15)$$

qui sont les intégrales premières des équations (2). Il resterait encore à déterminer x, y, z et φ, au moyen de ces équations combinées avec l'équation (4); après quoi l'équation (12) ferait connaître p; mais cette détermination surpasse les forces de l'analise. Toutefois ces équations pourront être utiles, lorsqu'on connaîtra le mouvement que prendrait le fluide, sans l'action de très-petites forces perturbatrices, comme il arrive dans la théorie des marées, où, sans l'action du soleil et de la lune, la mer prendrait un mouvement uniforme de rotation autour de l'axe de la terre; mouvement qui n'est qu'extrêmement peu troublé par l'effet de cette action.

13. Nous avons identiquement

$$d\varphi=\frac{d\varphi}{dt}+\frac{d\varphi}{dx}\,d'x+\frac{d\varphi}{dy}\,d'y+\frac{d\varphi}{dz}\,d'z,$$

par suite de quoi l'équation (12) devient

$$V - \int \frac{\delta p}{\Delta} = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\varphi}{dx}\,d'x + \frac{d\varphi}{dy}\,d'y + \frac{d\varphi}{dz}\,d'z - \tfrac{1}{2}(d'x^2 + d'y^2 + d'z^2) \quad (16)$$

si donc l'on fait

$$d'x = \frac{d\varphi}{dx} + P\ , \qquad d'y = \frac{d\varphi}{dy} + Q\ , \qquad d'z = \frac{d\varphi}{dz} + R\ , \qquad (17)$$

et qu'on substitue ces valeurs dans l'équation (16), elle deviendra, réductions faites,

$$V - \int \frac{\delta p}{\Delta} = \frac{d\varphi}{dt} + \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right\} - \tfrac{1}{2}(P^2 + Q^2 + R^2). \quad (18)$$

au moyen des mêmes substitutions, l'équation (5) devient

$$\begin{aligned} o = {} & \frac{d\Delta}{dt} + \frac{d\Delta}{dx}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\Delta}{dy}\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\Delta}{dz}\frac{d\varphi}{dz} + \Delta\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) \\ & + P\frac{d\Delta}{dx} + Q\frac{d\Delta}{dy} + R\frac{d\Delta}{dz} + \Delta\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz}\right); \end{aligned} \quad (19)$$

et l'équation (7), qui a lieu quand le fluide est incompressible, deviendra

$$o = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz}\ ; \qquad (20)$$

d'où l'on voit que les équations du mouvement du fluide se simplifieraient d'une manière notable, si l'on pouvait déterminer les fonctions P, Q, R. On a pour cela l'équation

$$P\delta x + Q\delta y + R\delta z = A\delta a + B\delta b + C\delta c\ ,$$

que l'on obtient en mettant dans l'équation (14) les valeurs de

$d'x$, $d'y$, $d'z$, données par les équations (17). Il ne sera guère possible d'en tirer les valeurs de P, Q, R, du moins en général. Si cependant ces fonctions ne dépendaient que de x, y, z, et qu'on eût

$$A=\mathrm{F}(a,b,c)\ ,\qquad B=\mathrm{F}'(a,b,c)\ ,\qquad C=\mathrm{F}''(a,b,c)\ ,$$

en désignant par F, F′, F″ des fonctions quelconques de a, b, c, déterminées au moyen de l'état initial du fluide, on en tirerait

$$P=\mathrm{F}(x,y,z)\ ,\qquad Q=\mathrm{F}'(x,y,z)\ ,\qquad R=\mathrm{F}''(x,y,z)\ .$$

14. Lorsque ψ, ou, ce qui revient au même, $d'x\delta x+d'y\delta y+d'z\delta z$, est une variation exacte, l'équation (13) fait voir qu'il doit en être de même de H. On peut donc alors représenter cette fonction par δK, K étant une fonction de a, b, c, sans t, convenablement déterminée. Dès-lors, en observant que $d'K=0$, les équations (12) et (13) pourront se mettre sous la forme

$$v-\int\frac{\delta p}{\Delta}=d'(\varphi+K)-\tfrac{1}{2}(d'x^2+d'y^2+d'z^2)\ ,$$

$$d'x\delta x+d'y\delta y+d'z\delta z=\psi=\delta(\varphi+k)\ ,$$

et par conséquent, en mettant φ, au lieu de $\varphi+k$,

$$v-\int\frac{\delta p}{\Delta}=d'\varphi-\tfrac{1}{2}(d'x^2+d'y^2+d'z^2)\ ,$$

$$d'x\delta x+d'y\delta y+d'z\delta z=\delta\varphi\ ,$$

qui sont absolument les mêmes que si l'on avait fait $H=0$. Nous aurons donc alors

$$P=0\ ,\qquad Q=0\ ,\qquad R=0\ ;$$

et par suite, les équations (17), (18), (19), (20) du n.° précédent, deviendront

$$\mathrm{d}'x = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}, \qquad \mathrm{d}'y = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y}, \qquad \mathrm{d}'z = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}; \tag{21}$$

$$v - \int \frac{\mathrm{d}p}{\Delta} + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}\right)^2\right\}, \tag{22}$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}y}\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}z}\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z} + \Delta\left(\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}y^2} + \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}z^2}\right) \tag{23}$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}y^2} + \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}z^2}, \tag{24}$$

on peut observer de plus que le quarré de la vitesse absolue du fluide est

$$\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}\right)^2.$$

15. Lorsque les mouvemens du fluide sont très-petits, on peut négliger les termes affectés des puissances, et produits de puissances des vitesses $\mathrm{d}'x$, $\mathrm{d}'y$, $\mathrm{d}'z$. Dans ce cas les équations (3) deviennent

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{\Delta}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}'x}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} - \frac{1}{\Delta}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}'y}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} - \frac{1}{\Delta}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}'z}{\mathrm{d}t};$$

desquelles nous tirerons

$$\delta\nu - \frac{\delta p}{\Delta} = \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}'x}{\mathrm{d}t}\,\delta x + \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}'y}{\mathrm{d}t}\,\delta y + \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}'z}{\mathrm{d}t}\,\delta z = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\ .$$

C'est de cette dernière que les divers auteurs qui ont écrit sur l'hydrodynamique ont cru pouvoir conclure immédiatement que ψ ou $\mathrm{d}'x\delta x + \mathrm{d}'y\delta y + \mathrm{d}'z\delta z$ devait être une variation exacte; conclusion dont nous avons déjà relevé l'inexactitude dans le n.° 6. Nous allons encore le faire ici d'une autre manière.

Si l'on détermine φ au moyen de l'équation

$$\nu - \int \frac{\delta p}{\Delta} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\ , \qquad (25)$$

ce qui est toujours possible, tout au moins par les quadratures, et ce qui donne

$$\delta\nu - \frac{\delta p}{\Delta} = \delta\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\ ,$$

de laquelle on tirera

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}'x}{\mathrm{d}t}\,\delta x + \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}'y}{\mathrm{d}t}\,\delta y + \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}'z}{\mathrm{d}t}\,\delta z = \delta\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\ ,$$

et par suite

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}'x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t\mathrm{d}x}\ , \qquad \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}'y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t\mathrm{d}y}\ , \qquad \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}'z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t\mathrm{d}z}\ ;$$

et delà, en intégrant par rapport à t,

$$\mathrm{d}'x = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} + P\ , \quad \mathrm{d}'y = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y} + Q\ , \quad \mathrm{d}'z = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z} + R\ . \qquad (26)$$

chacune des quantités P, Q, R, étant une fonction arbitraire de x, y, z, sans t. Ce cas rentre donc dans celui que nous avons déjà considéré dans le n.° 13.

Au moyen des valeurs de $d'x$, $d'y$, $d'z$ que nous venons de donner, on trouvera

$$d'x\delta x+d'y\delta y+d'z\delta z=\delta\varphi+P\delta x+Q\delta y+R\delta z\ , \qquad (27)$$

d'où l'on voit que, pour que le premier membre de cette équation fût une variation exacte, il faudrait qu'il en fût de même de $P\delta x+Q\delta y+R\delta z$; ce qui peut fort bien ne pas être, puisque P, Q, R sont des fonctions entièrement arbitraires de x, y, z.

Si, par exemple, on fait

$$d'x=\frac{d\varphi}{dx}+ny\ ,\quad d'y=\frac{d\varphi}{dy}-nx\ ,\quad d'z=\frac{d\varphi}{dz}\ ,$$

n étant un nombre constant quelconque, on aura

$$d'x\delta x+d'y\delta y+d'z\delta z=\delta\varphi+n(y\delta x-x\delta y)\ ;$$

dont le premier membre ne saurait être une variation exacte, tant que n n'est point nul, quoique les mêmes valeurs donnent

$$\frac{dd'x}{dt}\delta x+\frac{dd'y}{dt}\delta y+\frac{dd'z}{dt}\delta z=\delta\frac{d\varphi}{dt}\ .$$

16. Il semblerait résulter de ce que nous venons de dire, dans le dernier n.°, que les résultats des recherches des grands géomètres de nos jours, sur les petites occillations des fluides, ont beaucoup moins de généralité qu'ils ne l'ont cru et annoncé. Heureusement il n'en est pas ainsi; $d'x\delta x+d'y\delta y+d'z\delta z$ peut être réputée une variation exacte, toutes les fois que les molécules du fluide ne font que de très-petites occillations autour de leur position d'équilibre. Pour le prouver, faisons, en général,

$$x=a+x_1\,,\qquad y=b+y_1\,,\qquad z=c+z_1\,,$$

en désignant par x_1, y_1, z_1, des fonctions de t, x, y, z, nulles en même temps que t et convenablement déterminées, dès-lors nous aurons

$$\mathrm{d}'x=\mathrm{d}'x_1=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}'x+\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}'y+\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}'z\,,$$

$$\mathrm{d}'y=\mathrm{d}'y_1=\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}'x+\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}'y+\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}'z\,,$$

$$\mathrm{d}'z=\mathrm{d}'z_1=\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}'x+\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}'y+\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}'z\,,$$

dans le cas actuel x_1, y_1, z_1 étant très-petits, nous pouvons négliger les termes de plus d'une dimension par rapport à ces quantités; nous aurons donc

$$\mathrm{d}'x=\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\qquad \mathrm{d}'y=\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}\,,\qquad \mathrm{d}'z=\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t}\,,$$

et par suite, au moyen des équations (26)

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}+P\,,\qquad \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}y}+Q\,,\qquad \frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}z}+R\,.$$

d'où l'on tire, par l'élimination successive de R, Q, et P,

$$\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t\mathrm{d}y}-\frac{\mathrm{d}^2y_1}{\mathrm{d}t\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y_1}{\mathrm{d}t\mathrm{d}z}-\frac{\mathrm{d}^2z_1}{\mathrm{d}t\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}z}-\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}y}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2z_1}{\mathrm{d}t\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\,;$$

et de là en intégrant par rapport à t,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dy}-\frac{dy_1}{dx}&=t\left(\frac{dP}{dy}-\frac{dQ}{dx}\right),\\
\frac{dy_1}{dz}-\frac{dz_1}{dy}&=t\left(\frac{dQ}{dz}-\frac{dR}{dy}\right),\\
\frac{dz_1}{dx}-\frac{dx_1}{dz}&=t\left(\frac{dR}{dx}-\frac{dP}{dz}\right).
\end{aligned}\right\}(28)$$

Nous n'ajoutons point de fonctions arbitraires de x, y, z, parce que x_1, y_1, z_1, et par suite les premiers membres de ces équations, doivent être nuls en même temps que t.

Présentement, puisque x_1, y_1, z_1, doivent rester renfermés dans des limites très-resserrées, les premiers membres des équations (28) doivent jouir de la même propriété, ce qui ne pourra être qu'autant qu'on aura identiquement

$$\frac{dP}{dy}-\frac{dQ}{dx}=0\,,\qquad \frac{dQ}{dz}-\frac{dR}{dy}=0\,,\qquad \frac{dR}{dx}-\frac{dP}{dz}=0\,;$$

qui sont précisément les équations nécessaires et suffisantes pour que

$$P\delta x+Q\delta y+R\delta z\,,$$

et par suite, en vertu de l'équation (27),

$$d'x\delta x+d'y\delta y+d'z\delta z\,,$$

soit une variation exacte, ce qui prouve ce que nous avons avancé au commencement du présent n.°.

On voit même par là que, bien que les mouvemens soient très-petits, si la quantité

$$d'x\delta x+d'y dy+d'z\delta z\,,$$

n'est pas une variation exacte, le fluide éprouvera nécessairement un mouvement de translation; mais il ne faudrait pas en conclure que la réciproque est également vraie.

17. Dans les applications usuelles de la théorie du mouvement des fluides, ce mouvement peut être regardé comme uniforme; c'est-à-dire que les vitesses $d'x$, $d'y$, $d'z$, sont fonctions de x, y, z seulement; de sorte que l'on a

$$\frac{dd'x}{dt}=0, \qquad \frac{dd'y}{dt}=0, \qquad \frac{dd'z}{dt}=0.$$

Si donc nous supposons que ce soit le cas traité dans le n.° 14, nous aurons

$$\frac{dd'x}{dt}=\frac{d^2\phi}{dtdx}=\frac{d^2\phi}{dxdt}=0.$$

$$\frac{dd'y}{dt}=\frac{d^2\phi}{dtdy}=\frac{d^2\phi}{dydt}=0,$$

$$\frac{dd'z}{dt}=\frac{d^2\phi}{dtdz}=\frac{d^2\phi}{dzdt}=0;$$

et par suite

$$\delta\,\frac{d\phi}{dt}=\frac{d^2\phi}{dxdt}\delta x+\frac{d^2\phi}{dydt}\delta y+\frac{d^2\phi}{dzdt}\delta z=0;$$

d'où on conclura

$$\frac{d\phi}{dt}=T,$$

en désignant par T une fonction arbitraire de t, qui doit être la même pour toutes les molécules du fluide. Faisant de plus, pour abréger,

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\phi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\phi}{dz}\right)^2=u^2,$$

$$\int \frac{\delta p}{\Delta} = \gamma,$$

l'équation (22) deviendra

$$p - \gamma = T + \frac{u^2}{2}$$

En marquant de l'indice 1 les diverses quantités qui, pour la même valeur t du temps, sont relatives à une autre molécule quelconque, nous aurons de même

$$p_1 - \gamma_1 = T + \frac{u_1^2}{2},$$

et, par suite

$$(p - p_1) - (\gamma - \gamma_1) = \tfrac{1}{2}(u^2 - u_1^2)\ ; \qquad (29)$$

équation qui établit une relation importante entre les vitesses absolues et simultanées u et u_1 et les pressions correspondantes p, p_1 de deux molécules quelconques du fluide en mouvement.

Avant d'aller plus loin, nous ferons observer que, si le fluide se divise et éprouve un changement brusque aux points de division, dès-lors on n'a plus, pour ces points, les équations

$$\frac{d^2\phi}{dtdx} = \frac{d^2\phi}{dxdt}, \qquad \frac{d^2\phi}{dtdy} = \frac{d^2\phi}{dydt}, \qquad \frac{d^2\phi}{dtdz} = \frac{d^2\phi}{dzdt};$$

sur lesquelles nous nous sommes fondés pour parvenir à l'équation (29). Si donc on veut que cette équation soit vraie dans tous les cas, il faut que les molécules auxquelles elle est relative soient prises toutes les deux dans la partie du fluide qui n'a point éprouvé de division.

18. Le plus souvent les forces accélératrices qui sollicitent le fluide en mouvement se réduisent à la pesanteur que l'on regarde comme une force constante et de direction parallèle à une droite fixe, dans toute l'étendue de la masse fluide. Représentant cette force par g et prenant la coordonnée z verticale, et dirigée de haut en bas, nous aurons

$$v = gz\ ,$$

dont la substitution dans la formule (29) donnera

$$g(z-z_1)-(\gamma-\gamma_1)=\tfrac{1}{2}(u^2-u_1^2)\ .$$

Dans le cas où le fluide est homogène et incompressible, la densité Δ est absolument constante, et l'on a, par conséquent,

$$\gamma=\int\frac{\delta p}{\Delta}=\frac{p}{\Delta}\ ,$$

en vertu de quoi la précédente équation devient

$$y(z-z_1)-\left(\frac{p-p_1}{\Delta}\right)=\tfrac{1}{2}(u^2-u_1^2)\ . \qquad (30)$$

Si, pour tous les points de la surface libre du fluide, la pression doit être constante, on aura pour les divers points de cette surface

$$g(z-z_1)=\tfrac{1}{2}(u^2-u_1^2)\ ,$$

et si les vitesses u, u_1 sont assez petites pour qu'on puisse en négliger les quarrés,

$$g(z-z_1)=0\ ;$$

c'est-à-dire qu'alors cette surface est plane et horizontale. Il en serait encore de même, si tous les points de cette surface étaient doués de la même vitesse.

Il ne faut point perdre de vue, au surplus, que ces conclusions supposent que le mouvement du fluide est uniforme.

19. Lorsqu'un fluide pesant, homogène et incompressible, de l'eau, par exemple, est en équilibre dans un vase invariable de forme et de position. Si l'on pratique, dans la paroi de ce vase, une ouverture par laquelle le fluide puisse s'écouler, le mouvement, d'abord nul, augmentera avec rapidité; et, si l'orifice d'écoulement est très-petit, après un intervalle de temps très-court, ce mouvement sera à très-peu près uniforme, et l'écoulement pourra conséquemment se calculer par la formule (30), savoir:

$$g(z-z_1)-\left(\frac{p-p_1}{\Delta}\right)=\frac{1}{2}(u^2-u_1^2)\ .$$

A la surface supérieure du fluide, la vitesse u est extrêmement petite, et l'on pourra en négliger le quarré. Si donc on suppose que z_1, p_1, u_1 soient relatifs à cette surface, l'équation précédente deviendra

$$g(z-z_1)-\left(\frac{p-p_1}{\Delta}\right)=\frac{u^2}{2}\ . \qquad (31)$$

Ordinairement, la pression est la même à l'orifice d'écoulement qu'à la surface du fluide. Si donc on veut que z, p, u, appartiennent à un point quelconque de cet orifice, on aura $p=p_1$, et par suite

$$g(z-z_1)=\frac{u^2}{2}\ ; \qquad (32)$$

formule connue depuis très-long-temps; mais à laquelle on n'était parvenu jusqu'ici qu'à l'aide d'hypothèses plus ou moins précaires.

Si le fluide éprouvait une plus grande pression à son niveau supérieur qu'à l'orifice d'écoulement, en désignant par c cet excès de pression, on aurait, pour calculer la vitesse du fluide à l'orifice, la formule

$$g(z-z_1)+\frac{c}{\Delta}=\frac{u^2}{2} .$$

20. La formule (31), mise sous la forme

$$p=p_1+g\Delta(z-z_1)-\frac{\Delta u^2}{2} ,$$

peut servir à calculer la pression que le fluide exerce contre un élément quelconque des parois du vase qui le renferme, ou de tout autre corps auquel le fluide serait contigu.

Supposons, par exemple, que l'on oppose perpendiculairement au choc de la veine fluide une figure plane quelconque, la vitesse u du fluide contigu sera nulle, ou au moins très-petite : on aura donc

$$p=p_1+g\Delta(z-z_1) ,$$

pour la pression qu'éprouve chaque élément de la face de cette figure qui se trouve directement exposée au choc du fluide. De plus, si l'écoulement a lieu sous la pression ordinaire de l'air, l'autre face éprouvera une pression p_1, dont l'effet sera contraire à celui de la pression p ; il restera donc

$$p-p_1=g\Delta(z-z_1) ,$$

pour l'impulsion que reçoit, de la part du fluide, chaque élément de la figure en question.

21. Jusqu'ici nous n'avons pour ainsi dire considéré que les équations (1) et celles qui en dérivent. Nous allons présentement nous occuper de quelques résultats que l'on peut déduire des équations qui naissent de la condition de continuité du fluide, considérées isolément.

Reprenons l'équation (5). En multipliant tous ses termes par $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ et intégrant, nous aurons

$$0=\iiint\left(\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}.\Delta\mathrm{d}'x}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}.\Delta\mathrm{d}'y}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}.\Delta\mathrm{d}'z}{\mathrm{d}z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

quelles que puissent être d'ailleurs les limites entre lesquelles il faille prendre les intégrales.

Présentement le terme

$$\iiint\frac{\mathrm{d}\Delta\mathrm{d}'x}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

que renferme cette équation, intégré par rapport à x, donne pour résultat

$$\iint\Delta\mathrm{d}'x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

mais il reste à déterminer quelles sont les parties de ce résultat qui doivent êtres prises et celles qui doivent être laissées. Supposons pour cela que l'intégrale

$$\iiint\frac{\mathrm{d}\Delta\mathrm{d}'x}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

soit prise dans toute l'étendue d'une partie finie quelconque du fluide en mouvement, limitée par une surface rentrante que, pour la commodité du langage, nous désignerons par (O). L'équation de cette surface donnera pour x, en fonction de y et z, différentes valeurs, les unes imaginaires, dont nous ferons abstraction, et les autres réelles, que nous représenterons par x_1, x_2, x_3, x_4,....; et que nous supposerons rangées dans un ordre tel que l'on ait

$$x_2-x_1>0\ ,\quad x_3-x_2>0\ ,\quad x_4-x_3>0\ ,\ldots\ldots;$$

ce qui est toujours possible. Alors, toutes les molécules qui auront les mêmes coordonnées y, z, mais pour lesquelles x sera compris entre

$$-\frac{1}{0}\ \text{et}\ x_1\ ,\quad x_2\ \text{et}\ x_3\ ,\quad x_4\ \text{et}\ x_5\ ,\ldots\ldots$$

seront nécessairement situées hors de la surface (O), tandis que celles pour lesquelles x sera compris entre

$$x_1\ \text{et}\ x_2\ ,\quad x_3\ \text{et}\ x_4\ ,\ldots.,$$

seront situées dans l'intérieur de cette même surface; d'où l'on conclura qu'il ne faut prendre de l'intégrale

$$\int\Delta d'x dy dz\ ,$$

que les parties qui sont comprises entre x_1 et x_2, x_3 et x_4, ...; et que, par suite, on a

$$\iiint\frac{d.\Delta d'x}{dx}dx dy dz=\iint\{(\Delta d'x)_2-(\Delta d'x)_1\}dy dz+\iint\{(\Delta d'x)_4-(\Delta d'x)_3\}dy dz+\ldots;$$

en représentant par $(\Delta d'x)_1$, $(\Delta d'x)_2$, $(\Delta d'x)_3$, ... les valeurs de $\Delta d'x$ qui correspondent à celles x_1, x_2, x_3, ... de x.

Le second membre de cette dernière équation peut être mis sous une forme beaucoup plus simple et plus facile à interpréter. Pour cela, par un point quelconque (x, y, z) de la surface (O), menons-lui une normale. Prenons sur cette normale, dans l'intérieur de la surface (O), et à la distance r de son pied, un second point (α, β, γ), et nous aurons

$$\pm\left(\frac{x-\alpha}{r}\right),$$

pour la valeur du cosinus de l'angle que fait la normale avec l'axe des x, angle qui est le même que celui que fait le plan tangent avec le plan des yz. Si donc nous représentons par $\mathrm{d}s^2$ l'élément de la surface (O) dont les coordonnées sont x, y, z, et dont la projection sur le plan des yz est $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, nous aurons

$$\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pm\left(\frac{x-\alpha}{r}\right)\mathrm{d}s^2,$$

en observant de prendre le signe supérieur ou le signe inférieur, suivant que $x-\alpha$ sera positif ou négatif. Alors, en affectant des indices 1, 2, 3,..... les valeurs de

$$\left(\Delta \mathrm{d}'x\,\frac{x-\alpha}{r}.\,\mathrm{d}s^2\right)$$

qui correspondent aux valeurs $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$ de x, nous aurons

$$(\Delta \mathrm{d}'x)_1 \mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\left(\Delta \mathrm{d}'x\,\frac{x-\alpha}{r}\,\mathrm{d}s^2\right)_1,$$

$$(\Delta \mathrm{d}'x)_2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z=+\left(\Delta \mathrm{d}'x\,\frac{x-\alpha}{r}\,\mathrm{d}s^2\right)_2,$$

$$(\Delta d'x)_3 dy dz = -\left(\Delta d'x \frac{x-\alpha}{r} ds^2\right)_3 ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et par suite

$$\iiint \frac{d\Delta d'x}{dx} dx dy dz = \iint\left(\Delta d'x \frac{x-\alpha}{r} ds^2\right)_1 + \iint\left(\Delta d'x \frac{x-\alpha}{r} ds^2\right)_2 + \ldots\ldots$$

ou, plus simplement,

$$\iiint \frac{d\Delta d'x}{dx} dx dy dz = \iint \Delta d'x \frac{x-\alpha}{r} ds^2 ;$$

pourvu que l'intégrale du second membre soit prise dans toute l'étendue de la surface (O).

Par des procédés entièrement analogues, on trouverait qu'entre les mêmes limites on a

$$\iiint \frac{d\Delta d'y}{dy} dx dy dz = \iint \Delta d'y \frac{y-\beta}{r} ds^2 ;$$

$$\iiint \frac{d\Delta d'z}{dz} dx dy dz = \iint \Delta dz \frac{z-\gamma}{r} ds^2 ;$$

substituant ces valeurs dans l'équation identique

$$o = \iiint\left(\Delta + \frac{d.\Delta d'x}{dx} + \frac{d.\Delta d'y}{dy} + \frac{d\,\Delta d'z}{dz}\right) dx dy dz ,$$

nous trouverons définitivement

o=

$$\mathrm{o}=\int\!\!\int\!\!\int\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\int\!\!\int\left(\frac{x-\alpha}{r}\,\mathrm{d}'x+\frac{y-\beta}{r}\,\mathrm{d}'y+\frac{z-\gamma}{r}\,\mathrm{d}'z\right)\Delta\mathrm{d}s^2, \qquad (33)$$

ou plus simplement

$$\mathrm{o}=\int\!\!\int\!\!\int\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\int\!\!\int\Delta\mathrm{d}'r\mathrm{d}s^2, \qquad (34)$$

en faisant, pour abréger,

$$\mathrm{d}'r=\frac{x-\alpha}{r}\,\mathrm{d}'x+\frac{y-\beta}{r}\,\mathrm{d}'y+\frac{z-\gamma}{r}\,\mathrm{d}'z\,;$$

équation qui n'est que la différentielle de cette autre équation identique

$$r^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2,$$

prise en regardant α, β, γ comme constantes ; ce qui fait voir que $\mathrm{d}'r$ exprime la vitesse du fluide décomposée suivant la normale r ; vitesse qui doit être regardée comme positive, lorsqu'elle tend à pousser contre la surface (O) le fluide situé dans l'intérieur de cette surface, tandis qu'elle sera réputée négative dans le cas contraire.

Si le fluide est homogène et incompressible, la densité Δ sera constante, et l'équation (34) deviendra

$$\mathrm{o}=\int\!\!\int\mathrm{d}'r\mathrm{d}s^2, \qquad (35)$$

qui serait encore vraie quand même le fluide serait simplement incompressible sans être homogène, comme on peut le déduire directement de l'équation (8), traitée de la même manière que nous venons de traiter l'équation (6).

Les équations (34) et (35) peuvent être utiles dans beaucoup de cas, notamment s'il s'agit de calculer les oscillations d'un fluide renfermé dans un vase.

22. Considérons, dans l'intérieur du fluide en mouvement, une ligne courbe rentrante quelconque (P) et une surface (R), assujettie aux seules conditions d'être limitée par cette ligne courbe, et de ne pas présenter de déchirures dans l'intervalle. Représentons toujours par $d'r$ la vitesse d'une molécule quelconque contiguë à cette surface, suivant la normale r; regardant cette vitesse comme positive, lorsqu'elle tend à pousser le fluide contre la surface, et comme négative dans le cas contraire.

Cela posé, chaque élément de la surface (R) est contigu à deux molécules différentes, pour lesquelles la valeur absolue de $d'r$ sera identiquement la même. Quant au signe, il doit être différent, attendu que, quand une des deux molécules est poussée contre la surface, l'autre tend à s'en détacher. Si donc on prend l'intégrale

$$\iint d'r\,ds^2$$

relativement aux molécules qui se trouvent situées d'un seul et même côté de la surface dans toute son étendue, la valeur absolue du résultat sera le même quel que soit le côté de cette surface qu'on aura choisi; de sorte qu'en représentant cette valeur absolue par

$$\iint (R)\,d'r\,ds^2,$$

nous aurons

$$\iint d'r\,ds^2 = \pm \iint (R)\,d'r\,ds^2,$$

le signe + ou − devant être déterminé d'une manière convenable.

Présentement, soit (R′) une autre surface, assujettie aux mêmes conditions que (R) ; alors les surfaces (R), (R′) formeront, par leur réunion, une troisième surface rentrante, pour laquelle nous aurons

$$\int\!\!\int \mathrm{d}'r\,\mathrm{d}s^2=0\ .$$

Si, comme nons le supposerons dans tout ce qui suit, le fluide est incompressible, l'intégrale qui compose le premier membre de cette dernière équation se décompose en deux parties, dont l'une relative à la surface (R) et l'autre relative à la surface (R′). Mais, si les deux surfaces n'ont d'autres points communs que ceux de la courbe (P), tout le fluide intérieur sera situé d'un même côté de chacune de ces surfaces, et les parties de l'intégrale

$$\int\!\!\int \mathrm{d}'r\,\mathrm{d}s^2\ ,$$

qui leur sont relatives seront exprimées, la première par

$$\pm\int\!\!\int(\mathrm{R})\,\mathrm{d}'r\,\mathrm{d}s^2\ ,$$

et la seconde par

$$\pm\int\!\!\int(\mathrm{R}')\,\mathrm{d}'r\,\mathrm{d}s^2\ ,$$

d'où nous conclurons que l'on doit avoir

$$\int\!\!\int(\mathrm{R})\,\mathrm{d}'r\,\mathrm{d}s^2=\int\!\!\int(\mathrm{R}')\,\mathrm{d}r'\,\mathrm{d}s^2\ . \qquad (36)$$

Si les surfaces (R), (R′) se coupent en des points autres que ceux de la courbe (P), le fluide intérieur peut n'être pas situé en totalité, d'un même côté de chacune de ces surfaces ; alors le raisonnement qui nous a conduit à l'équation (36) cesse d'être applicable, et cette équation semble ne plus devoir être vraie. Cependant il est toujours possible de trouver une troisième surface (R″), assujettie aux mêmes conditions que (R) et (R′), et qui de plus ne les rencontre que suivant la courbe (P). Alors, on aura, par ce qui précède,

$$\int\!\!\int (R)\,\mathrm{d}'r\,\mathrm{d}s^2 = \int\!\!\int (R'')\,\mathrm{d}'r\,\mathrm{d}s^2\ ,$$

$$\int\!\!\int (R')\,\mathrm{d}'r\,\mathrm{d}s^2 = \int\!\!\int (R'')\,\mathrm{d}'r\,\mathrm{d}s^2\ ,$$

et par suite

$$\int\!\!\int (R)\,\mathrm{d}'r\,\mathrm{d}s^2 = \int\!\!\int (R')\,\mathrm{d}'r\,\mathrm{d}s^2\ ;$$

comme si les surfaces (R), (R′) ne se rencontraient que suivant la courbe (P).

On pourrait conclure de là que l'expression

$$\int\!\!\int (R)\,\mathrm{d}'r\,\mathrm{d}s^2$$

est entièrement indépendante de la nature de la surface (R), et qu'elle dépend seulement de la nature de la courbe (P), qui lui sert de limite et du temps t.

23. Pour donner une application de ce qui précède, supposons que le fluide soit contenu dans un vase invariable de forme et de position. Supposons encore que la courbe (P), tracée sur les parois du vase en fasse le tour, et qu'enfin la surface (R) se compose, 1.° d'une partie plus ou moins étendue de ces parois; 2.° d'une section de surface quelconque, limitée par ces mêmes parois; ce qui laisse la forme et la position de cette surface entièrement indépendante de la courbe (P) et de la forme du vase. En désignant par (A) la surface dont il s'agit, nous aurons

$$\int\!\!\int (R)\,\mathrm{d}'r\,\mathrm{d}s^2 = \int\!\!\int (A)\,\mathrm{d}'r\,\mathrm{d}s^2\ ; \qquad (37)$$

en observant que, pour toutes les molécules qui sont contiguës aux parois du vase, l'on a $d'r = o$, et que, par suite, la partie de l'intégrale

$$\iint (R) d'r ds^2 \,,$$

qui est relative à ces parois est identiquement nulle.

Présentement, d'après la conclusion qui termine le n.° 22, le premier membre de l'équation (37) ne dépend que du temps t et tout au plus de la courbe (P); et, comme la section (A) est entièrement indépendante de cette courbe, nous en conclurons que l'expression

$$\iint (A) d'r ds^2$$

ne dépend absolument que du temps t et de la forme du vase, et nullement de la forme ou de la position de la surface à laquelle appartient la section (A).

Si, pour fixer les idées, on suppose que cette section soit plane, et parallèle au plan des xy, on aura

$$d'r = d'z \qquad \text{et} \qquad ds^2 = dx dy \,,$$

et par suite

$$\iint d'z dx dy = \theta \,;$$

en désignant par θ une fonction de t convenablement déterminée, mais qui doit être indépendante et de la position du plan coupant et de la direction des axes des coordonnées.

Supposons que le vase qui renferme le fluide soit très-étroit; représentons par x_0, y_0 les valeurs de x, y pour un point quelconque de la section, et soit fait

$$x = x_0 + ih, \qquad y = y_0 + ik,$$

et par suite

$$dx = i dh, \qquad dy = i dk,$$

$$d'z = (d'z)_0 + \frac{i}{1}\left\{ h\left(\frac{dd'z}{dx}\right)_0 + k\left(\frac{dd'z}{dy}\right)_0 \right\}$$

$$+ \frac{i^2}{1.2}\left\{ h^2\left(\frac{d^2d'z}{dx^2}\right)_0 + 2hk\left(\frac{d^2d'z}{dxdy}\right)_0 + k^2\left(\frac{d^2d'z}{dy^2}\right)_0 \right\}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

en dénotant respectivement par

$$(d'z)_0, \quad \left(\frac{dd'z}{dx}\right)_0, \quad \left(\frac{dd'z}{dy}\right)_0, \ldots\ldots$$

ce que deviennent

$$d'z, \quad \frac{dd'z}{dx}, \quad \frac{dd'z}{dy}, \ldots\ldots$$

qui répondent au point (x_0, y_0, z_0).

Substituant ces valeurs dans l'équation (38), et négligeant les termes de plus de deux dimensions en i, nous aurons

$$(d'z) i^2 \iint dh dk = \theta,$$

ou encore

$$\varpi d'z = \theta, \qquad (39)$$

en observant que $i^2 \iint dh dk$ exprime l'aire de la section que l'on considère et représentant cette aire par ϖ.

On voit par là que l'hypothèse du parallélisme des tranches peut être employée comme moyen approximatif ; et telle en est je crois la première démonstration générale. L'auteur de la mécanique analitique était déjà parvenu au même résultat ; mais seulement pour le cas où le vase, à très-peu près vertical, n'aurait que deux dimensions, et les procédés qu'il a mis en usage, pour parvenir à son but, seraient, à raison de leur complication, à peu près impraticables pour toute autre forme ou position du vase.

Nous devrions peut-être terminer cet essai par quelques applications particulières des formules qu'il a pour objet d'obtenir ; mais comme les seules applications qui ne soient point au-dessus de notre portée ont été déjà données par divers géomètres, beaucoup mieux que nous ne pourrions le faire nous-mêmes, nous croyons devoir nous borner à renvoyer à leurs ouvrages.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorèmes sur l'hyperbole.

I. Les droites menées de deux points fixes pris sur une hyperbole à un autre point quelconque de la courbe interceptent toujours une même longueur sur l'une ou l'autre asymptote. Cette longueur est égale à celle qui est comprise, sur la même asymptote, entre la droite qui joint les deux points fixes et la tangente à l'un d'eux.

II. Toute corde d'une hyperbole passe par le milieu de la longueur interceptée sur l'une quelconque des deux asymptotes par les tangentes menées à ses deux extrémités.

III. Si, sur une corde d'une hyperbole, considérée comme diagonale, on construit un parallélogramme dont les côtés soient parallèles à ses deux asymptotes, l'autre diagonale de ce parallélogramme, prolongée, s'il est nécessaire, passera par le centre de la courbe.

IV. Si, sur les trois côtés d'un triangle, pris tour à tour pour diagonales, on construit des parallélogrammes dont les côtés soient parallèles à deux droites données, les trois autres diagonales de ces parallélogrammes concourront au même point, lequel sera le centre de l'hyperbole circonscrite au triangle qui aurait ses asymptotes parallèles aux deux droites fixes.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

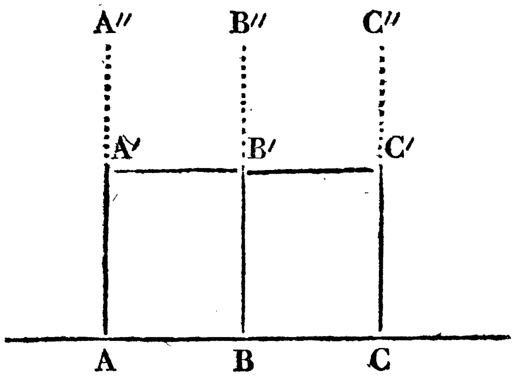
Essai de démonstration du principe qui sert de fondement à la théorie des parallèles;

Par un ABONNÉ.

Au Rédacteur des *Annales*;

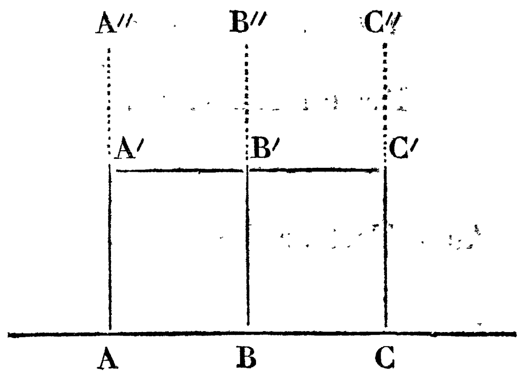
MONSIEUR,

IL y a long-temps que l'on cherche une démonstration rigoureuse de la théorie des parallèles. Je me suis aussi occupé à en chercher une: voici celle que je crois avoir trouvée



Soit une droite sur laquelle soient prises arbitrairement deux parties égales consécutives AB et BC. Sur les trois points A, B, C soient élevées à cette droite, d'un même côté, les perpendiculaires

AA′, BB′, CC′, d'une même longueur quelconque. En joignant A′B′ et B′C′, nous obtiendrons les deux quadrilatères évidemment égaux AA′B′B et BB′C′C, dans lesquels les quatre angles AA′B′, BB′A′, BB′C′, CC′B′, seront aussi évidemment égaux entre eux, et devront être tous quatre droits, aigus ou obtus.



Admettons d'abord que ces quatre angles soient *obtus*. Alors en prolongeant indéfiniment les droites AA′, BB′, CC′, au-delà de A′, B′, C′, vers A″, B″, C″, les angles A′B′B″ et C′B′B″, comme supplémens de deux angles obtus et égaux entre eux, seront aigus et aussi égaux entre eux, d'où il suit que l'angle total A′B′C′, moindre que deux angles droits, sera divisé en deux parties égales par la droite B′B″, laquelle conséquemment devra contenir le centre O du cercle circonscrit au triangle isocèle dont les deux côtés égaux seraient B′A′ et B′C′. Mais si, de ce centre, désigné par O, on mène des rayons aux points A′ et C′, les triangles B′OA′ et B′OC′ devront être isocèles ; d'où il suit que les angles OA′B′ et OC′B′ devront être respectivement égaux aux angles OB′A′ et OB′C′, c'est-à-dire aux angles B″B′A′ et B″B′C′ ; mais les angles A″A′B′ et C″C′B′ doivent aussi être égaux aux angles B″B′A′, B″B′C′ ; donc les droites OA′ et OC′ doivent se confondre avec les droites A″A′ et C″C′, ce qui revient à dire que les droites AA″, BB″, CC″ doivent toutes trois concourir au point O, conclusion absurde, puisqu'elles sont toutes trois perpendiculaires à une même droite.

Si d'ailleurs les trois points A′, B′, C′ étaient à la circonférence d'un même cercle, ayant le point O pour centre, à cause de AA′=BB′=CC′, les trois points A, B, C devraient se trouver sur une autre circonférence, concentrique à la première, tandis que, par l'hypothèse, ces trois points appartiennent à une même ligne droite. Les quatre angles égaux AA′B′, BB′A′, BB′C′, CC′B′ ne sauraient donc être obtus.

Voyons présentement s'ils pourraient être aigus. Dans ce cas l'angle A′B′C′, considéré du côté de AC serait moindre que deux angles droits; et on prouverait, par des raisonnemens tous semblables à ceux qu'on a fait tout à l'heure, que le cercle circonscrit au triangle isocèle dont les deux côtés égaux sont B′A′ et B′C′, doit avoir à la fois son centre sur les prolongemens de A′A, B′B, C′C au-dessous de AC, et que, par suite, ces trois droites concourent en un même point, ce qui est absurde, puisqu'elles sont perpendiculaires à une même droite. On en conclurait encore que les trois points A, B, C sont sur une circonférence concentrique à celle qui passe par les trois points A′, B′, C′, ce qui est également absurde, puisque les trois points A, B, C appartiennent à une même ligne droite. Les quatre angles égaux AA′B′, BB′A′, BB′C′, CC′B′ ne peuvent donc être aigus.

Ces quatre angles, ne pouvant être ainsi ni obtus ni aigus, doivent être tous droits, d'où il suit que A′B′C′ n'est point une ligne brisée, mais une ligne droite, perpendiculaire à la fois aux trois droites AA′, BB′, CC′.

Il est aisé de voir que la même démonstration s'appliquerait au cas où, au lieu de prendre sur la première droite trois points équidistans A, B, C, on en aurait pris un plus grand nombre, quelle que pût être d'ailleurs leur commune distance.

De là, il est facile de conclure que *si, d'un même côté d'une droite, on lui élève tant de perpendiculaires d'une même longueur quelconque qu'on voudra, les extrémités supérieures de ces per-*

pendiculaires appartiendront à une même droite évidemment parallèle à la première, et à laquelle ces droites égales seront aussi perpendiculaires. Or, une fois cette proposition admise, la théorie des parallèles n'offre plus de difficulté.

Je ne prévois pas, Monsieur, quelles objections on pourrait faire contre cette démonstration. Cependant, comme il pourrait en exister, et que je désirerais alors les connaître, je vous prie de vouloir bien l'insérer dans un de vos prochains numéros (*).

Agréez, etc.

Marseille, le 24 décembre 1823.

ASTRONOMIE.

Sur une loi prétendue nouvelle des mouvemens célestes;

Par M. Gergonne.

Persuadés, comme nous le sommes, que les *Lois de Képler*, ou, ce qui revient au même, le principe de la gravitation, qui en est à la fois la conséquence rigoureuse et l'expression abrégée, renferment tout le secret de la mécanique céleste, de telle sorte qu'il ne reste plus aujourd'hui aux astronomes d'autre tâche à remplir que d'en développer les conséquences et d'en faire l'application aux données fournies par l'observation; nous n'avons pas été peu sur-

---

(*) On trouve une autre démonstration de la théorie des parallèles à la page 353 du III.e volume du présent recueil.

J. D. G.

pris d'apprendre, il y a quelque temps, que M. Utting, calculateur anglais, venait de découvrir une loi nouvelle et très-remarquable des mouvemens célestes (*). Aussi pleins de foi pour la gravitation qu'Omar pour l'Alcoran, avant même de savoir de quoi il s'agissait, nous avions cru pouvoir nous permettre, et avec plus de fondement que lui, de raisonner comme ce fameux Calife, et nous nous étions dit que la loi nouvelle devait, dans tous les cas, être rejetée, savoir, comme fausse, si elle était en opposition avec celles de Képler, et comme superflue, si elle s'y trouvait implicitement comprise.

Une traduction française du mémoire de M. Utting ayant paru dans la *Bibliothèque universelle* (novembre 1823, page 169), nous nous sommes bientôt convaincus que nous n'avions rien avancé de trop, et que la loi prétendue nouvelle n'était que celle de proportionnalité entre les quarrés des temps périodiques et les cubes de demi-grands axes, légèrement modifiée, ainsi qu'on va le voir.

Concevons que l'on substitue à l'orbite elliptique d'une planète une orbite circulaire, d'un rayon égal au demi-grand axe de l'ellipse; la circonférence de cette nouvelle orbite divisée par la durée de la révolution sydérale de l'astre est ce que M. Utting appelle son *mouvement moyen*, et qu'il serait peut-être mieux d'appeler *vitesse moyenne*. Or, la loi dont il s'agit consiste en ce que *le mouvement moyen multiplié par la racine quarrée de la distance moyenne donne un produit constant pour tout le système solaire.* La seule preuve que l'auteur en apporte est l'exécution même des multiplications sur les données que l'on trouve dans l'*Exposition du système du monde*; et il présente, dans un tableau, les élémens de ses calculs et les résultats qu'il en obtient. C'est de cette manière empirique que Képler vérifiait ses grandes lois; mais Képler

(*) Voyez le *Philosophical Magazine* (août et septembre 1823).

ne pouvait s'y prendre d'une manière différente, tandis qu'aujourd'hui nous ne devons plus en être réduits là.

Soit a le demi-grand axe de l'orbite d'une planète, ou, ce qui revient au même, sa distance moyenne au soleil, et soit t son temps périodique, c'est-à-dire, la durée de sa révolution sydérale; par la troisième loi de Képler, $\frac{a^3}{t^2}$ sera une quantité constante, quelle que soit la planète qu'on aura choisie; il en sera donc de même de $\frac{4\varpi^2a^3}{t^2}$, ϖ représentant à l'ordinaire le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre; donc aussi

$$\sqrt{\frac{4\varpi^2a^3}{t^2}}=\frac{2\varpi a\sqrt{a}}{t}=\frac{2\varpi a}{t}.\sqrt{a}$$

sera une quantité constante, pour tout le système solaire; or, $\frac{2\varpi a}{t}$ est précisément ce que M. Utting appelle le mouvement moyen; voilà donc son principe rigoureusement et rationnellement déduit de la troisième loi de Képler; et l'on voit que, pour y parvenir il n'était point du tout nécessaire de s'engager dans de longs calculs numériques.

M. Utting ne manque pas d'observer que la même loi subsiste dans les mouvemens des satellites autour de leurs planètes principales, ce qui n'a pas lieu de surprendre, puisque la troisième loi de Képler s'applique à ces mouvemens. Il arrive seulement que le nombre constant varie d'un système à un autre, à raison de la masse de la planète principale; mais, en faisant entrer cette masse en considération, l'auteur parvient à un certain nombre qui demeure constant, soit qu'on l'applique au mouvement des planètes autour du soleil, soit qu'on l'applique au mouvement des satellites autour d'une planète quelconque, et même au mouvement de l'anneau de Saturne. Mais on sait aussi qu'il résulte immédiatement des lois de Képler que l'aire décrite par le rayon vecteur d'une planète où d'un satellite quelconque, divisée par le temps employé à la décrire et par la racine quarrée du paramètre de l'orbite, est une quantité constante. (*)

M. Utting ne nous a donc absolument rien appris de nouveau, et, si nous mentionnons ici ses recherches, c'est uniquement pour avertir les calculateurs peu versés dans l'astronomie que tout autre théorème du même genre qu'ils croiraient découvrir serait faux, ou se trouverait renfermé dans les théorèmes déjà connus.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Dissertation sur la théorie des logarithmes;

Par M. L. C. Bouvier, ex-officier de génie, ancien élève de l'école polytechnique.

Euler a démontré que, dans chaque système logarithmique, un même nombre a une infinité de logarithmes différens, dont un seul est réel et tous les autres imaginaires. La réciproque de cette proposition, qui ne paraît avoir encore été jusqu'ici démontrée par personne, est également vraie, c'est-à-dire que, pour une base donnée quelconque, un même logarithme appartient à une infinité de nombres différens.

Démontrons d'abord la proposition directe. On sait que

(*) Voyez *Annales*, tom. VII, pag. 3.

$$\text{Log}.x = n(\sqrt[n]{x} - 1) \qquad (1)$$

pourvu que, dans cette expression, on fasse $n = \infty$ (*). Ainsi $\sqrt[n]{x}$ ayant une infinité de valeurs, on peut déjà, au premier coup-d'œil, conclure de suite que Log.x a également une infinité de valeurs. Mais il est aisé, en outre, d'en donner l'expression. Soit d'abord x positif; on peut écrire

$$\text{Log}.x = n(\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{1} - 1),$$

où $\sqrt[n]{x}$ représentera alors uniquement la racine n.^{me} réelle de x; or, on sait que

$$\sqrt[n]{1} = \text{Cos.}\left(\frac{p\pi}{n}\right) + \sqrt{-1}\,\text{Sin.}\left(\frac{p\pi}{n}\right),$$

(*) On sait en effet que, d'une part,

$$\text{Log.}(1+y) = \frac{y}{1} - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \ldots\ldots,$$

on sait d'ailleurs que

$$n(\sqrt[n]{1+y} - 1) = y - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{y^2}{2} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\frac{y^3}{3}$$

$$-\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\left(1 - \frac{1}{3n}\right)\frac{y^4}{4} + \ldots\ldots.$$

Or, dans le cas où n est infini, les seconds membres de ces deux équations deviennent égaux; donc on a, sous la même condition

$$\text{Log.}(1+y) = n(\sqrt[n]{1+y} - 1);$$

équation qui devient celle du texte, en y changeant $1+y$ en x.

J. D. G.

où

où p est un nombre entier pair quelconque; et à cause de $n=\infty$ on peut écrire simplement

$$\sqrt{1}=1+\sqrt{-1}\,.\,\frac{p\varpi}{n}\ ;$$

donc

$$\mathrm{Log}.x=n\left\{\left(1+\sqrt{-1}.\,\frac{p\varpi}{n}\right)\sqrt[n]{x}-1\right\}=n(\sqrt[n]{x}-1)+p\varpi\sqrt[n]{x}.\sqrt{-1}\ ;$$

si donc on représente simplement par $\mathrm{l}x$ le logarithme réel de x, on aura

$$\mathrm{Log}.x=\mathrm{l}x+p\varpi\sqrt[n]{x}\,.\,\sqrt{-1}\ ;$$

et comme, à cause de $n=\infty$, on a $\sqrt[n]{x}=1$, on pourra écrire simplement

$$\mathrm{Log}.x=\mathrm{l}x+p\varpi\sqrt{-1}\ .$$

Par un raisonnement analogue, on prouvera que

$$\mathrm{Log}.(-x)=\mathrm{l}x+i\varpi\sqrt{-1}\ ,$$

où i désigne un nombre entier impair quelconque.

La réciproque se tire de la même équation (1) qui, étant résolue par rapport à x, donne

$$x=\left\{1+\frac{\mathrm{Log}\,x}{n}\right\}^n\ ;$$

d'où, à cause de n infini, on peut conclure

$$x=\left\{1+\frac{\mathrm{Log}.x}{n}\right\}^{n+\frac{1}{k}}=\left\{1+\frac{\mathrm{Log}.x}{n}\right\}^n.\sqrt[k]{1+\frac{\mathrm{Log}.x}{n}}\ ;$$

et, comme cette formule a lieu quel que soit k, il est permis de le supposer entier et positif. Si donc nous représentons par N le nombre réel correspondant au logarithme réel donné, à cause de n infini, d'où résulte $\frac{\text{Log}.x}{n}=0$, nous aurons

$$x=N\sqrt[k]{1}\,, \qquad (2)$$

formule qui, comme la formule (1), est susceptible d'une infinité de valeurs différentes. On peut d'ailleurs vérifier immédiatement cette dernière formule, en prenant les logarithmes des deux membres ; on a ainsi

$$\text{Log}.x=\text{Log}.N+\frac{\text{Log}.1}{k}=\text{Log}.N=\text{Log}.x\,,$$

et cela quel que soit k.

Ces considérations nous semblent de nature à terminer, une fois pour toutes, le différend qui s'est élevé autrefois entre Euler et d'Alembert, sur la nature des logarithmes des quantités négatives, en montrant que la vérité était du côté du dernier de ces deux illustres géomètres. En effet, puisque, dans l'expression générale $N\sqrt[n]{1}$, se trouvent compris, comme cas particuliers, les nombres $+N$ et $-N$, nous devons en conclure avec lui que les logarithmes des quantités négatives sont les mêmes que ceux de ces mêmes quantités prises positivement. Au surplus, voici une autre démonstration de cette dernière proposition qui est tout aussi concluante.

Soit

$$z=\frac{x^2}{1+x^2}\,, \qquad \text{d'où} \qquad x^2=\frac{z}{1-z}\;;$$

et par suite

$$\text{Log}.x=\tfrac{1}{2}[\text{Log}.z-\text{Log}.(1-z)]\;;$$

or,

$$\text{Log}.z=-\left\{\frac{1-z}{1}+\frac{(1-z)^2}{2}+\frac{(1-z)^3}{3}+\ldots\ldots\right\}$$

d'où

$$\text{Log.}(1-z)=-\left\{\frac{1}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\dots\dots\right\};$$

donc, en retranchant et remettant ensuite pour z sa valeur en x,

$$\text{Log.}x=\frac{1}{2}\left\{\frac{x^2-1}{x^2+1}+\frac{1}{2}.\frac{x^4-1}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{3}.\frac{x^6-1}{(x^2+1)^3}+\frac{1}{4}.\frac{x^8-1}{(x^2+1)^4}+\dots\right\}$$

Cette série nouvelle est remarquable en ce qu'elle converge toujours, quelque valeur entière ou fractionnaire, positive ou négative, grande ou petite qu'on y mette pour x, et en ce qu'elle reste aussi la même en y mettant $\frac{1}{x}$ à la place de x, de sorte que sa convergence, peu rapide à la vérité, demeure la même dans les deux cas, bien que la somme de ses termes puisse différer singulièrement de l'un à l'autre. Mais ce qui la rend principalement digne de remarque, et ce qui nous détermine à la faire connaître, c'est que, ne contenant que des puissances paires, elle est tout-à-fait indifférente au signe de x, et prouve ainsi sans réplique que $\text{Log.}(-x)=\text{Log}\,x$.

Au surplus, malgré le peu de convergence de cette formule, on pourrait en tirer parti pour le calcul des tables, en y faisant $x=\frac{p}{q}$, comme dans la formule ordinaire, et en prenant ensuite pour p et q deux nombres très-grands et très-peu différens.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration du théorème de géométrie élémentaire énoncé à la page 28 du présent volume ;

Par M. Querret, chef d'institution à St-Malo.

Pour rendre d'un abord plus facile la démonstration du théorème dont il s'agit, nous le convertirons en problème, en nous proposant la question suivante :

PROBLÈME. Quel est le lieu des points du plan d'un triangle desquels abaissant des perpendiculaires sur les directions de ses trois côtés, l'aire du triangle formé par les droites qui joindront deux à deux les pieds de ces trois perpendiculaires soit constante et égale à celle d'un quarré donné ?

Solution. Soient S, S$'$, S$''$ les trois sommets du triangle donné ; α, α', α'' les angles qui leur répondent respectivement, et C, C$'$, C$''$ les côtés respectivement opposés. Soit pris le sommet S$''$ pour origine des coordonnées rectangulaires, auxquelles nous supposerons d'ailleurs une direction quelconque ; et soient alors a, b, les coordonnées du sommet S, et a', b', celles du sommet S$'$; en prenant X, Y pour symboles des coordonnées courantes, les équations des trois côtés du triangle seront, savoir :

Pour C $\qquad b'X-a'Y=0$,

Pour C′ $\qquad bX-aY=0\,,$

Pour C″ $\quad (b-b')(X-a)-(a-a')(Y-b)=0\,.$

Désignant ensuite respectivement par p, p', p'' les perpendiculaires abaissées sur les directions de ces côtés d'un point quelconque P du plan du triangle que pourtant, pour fixer les idées, nous supposerons d'abord dans son intérieur, et donc nous supposerons les coordonnées x et y, nous aurons

$$p=\frac{b'x-a'y}{\sqrt{a'^2+b'^2}}=\frac{b'x-a'y}{c}\,,$$

$$p'=\frac{ay-bx}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{ay-bx}{c'}\,,$$

$$p''=\frac{(b-b')(x-a)-(a-a')(y-b)}{\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2}}=\frac{(b-b')x-(a-a')y+(ab'-ba')}{c''}\,.$$

En désignant donc par Q, Q′, Q″ les pieds de ces perpendiculaires, se rappelant que l'aire d'un triangle est la moitié du produit de deux de ses côtés et du sinus de l'angle compris, et remarquant en outre

$$\text{Sin.}(p',p'')=\text{Sin.}\alpha=\frac{ab'-ba'}{c'c''}\,,$$

$$\text{Sin.}(p,p'')=\text{Sin.}\alpha''=\frac{ab'-ba'}{cc''}\,,$$

$$\text{Sin.}(p,p')=\text{Sin.}\alpha''=\frac{ab'-ba'}{c''c}\,;$$

on trouvera

$$Triang.Q'PQ''=\frac{ab'-ba'}{2c^2c'^2c''^2}(a'^2+b'^2)(ay-bx)\{(b-b')x-(a-a')y+(ab'-ba')\},$$

$$Triang.Q''PQ=\frac{ab'-ba'}{2c^2c'^2c''^2}(a^2+b^2)(b'x-a'y)\{(b-b')x-(a-a')y+(ab'-ba')\},$$

$$Triang.QPQ'=\frac{ab'-ba'}{2c^2c'^2c''^2}\{(a-a')^2+(b-b')^2\}(ay-bx)(b'x-a'y)\ .$$

En prenant la somme de ces résultats, on obtiendra l'aire du triangle QQ′Q″ dont il s'agit, qu'on trouvera être, en développant, réduisant et ordonnant,

$$Triang.QQ'Q''=-\frac{(ab'-ba')^2}{2c^2c'^2c''^2}\{(ab'-ba')x^2+(ab'-ba')y^2-(b'c'^2-bc^2)x-(ac^2-a'c'^2)y\}.$$

Cette aire peut être positive ou négative, suivant la situation du point P; mais son signe n'étant ici d'aucune considération, il suffira, pour que ce point P résolve le problème, que, prise en *plus* ou en *moins*, elle soit équivalente à un quarré donné k^2; où, ce qui revient au même, il suffira que, prise telle qu'elle est, elle soit égale à $\pm k^2$, ce qui établira entre x et y la double équation

$$(ab'-ba')^2\{(ab'-ba')x^2+(ab'-ba')y^2-(b'c'^2-bc^2)x-(ac^2-a'c'^2)y\}\pm 2c^2c'^2c''^2k^2=0;$$

équation commune à deux cercles concentriques.

En posant

$$b'c'^2-bc^2=2(ab'-ba')\alpha\ , \quad ac^2-a'c'^2=2(ab'-ba')\beta\ ,$$

d'où

$$\alpha=\frac{b'c'^2-bc^2}{2(ab'-ba')}\ , \quad \beta=\frac{ac^2-a'c'^2}{2(ab'-ba')}\ ,$$

cette équation deviendra

$$(ab'-ba')^3(x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y)\pm 2c^2c'^2c''^2k^2=0\,,$$

et pourra ensuite être mise sous cette forme

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2\mp\frac{2c^2c'^2c''^2k^2}{(ab'-ba')^3}\;;$$

équation commune à deux cercles concentriques dont le centre commun a pour coordonnées α et β. Mais il est connu, et il est d'ailleurs facile de s'assurer que α et β sont aussi les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle proposé SS′S″; d'où il suit qu'en représentant par R le rayon de ce dernier cercle, on doit avoir $\alpha^2+\beta^2=R^2$. D'un autre côté, en représentant par T l'aire de ce même triangle, on a

$$ab'-ba'=2T\,,\qquad R=\frac{cc'c''}{4T}=\frac{cc'c''}{2(ab'-ba')}\,,$$

d'où

$$\frac{2c^2c'^2c''^2}{(ab'-ba')^2}=8R^2\,,$$

et

$$\frac{2c^2c'^2c''^2}{(ab'-ba')^3}=\frac{4R^2}{T}\;;$$

ce qui donnera, en substituant

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2\mp\frac{4R^2k^2}{T}=R^2.\frac{T\mp 4k^2}{T}\,.$$

En désignant donc par r et r' les rayons des deux cercles dont les circonférences résolvent le problème proposé, on aura

$$r^2=R^2.\frac{T-4k^2}{T}\,,\qquad r'^2=R^2.\frac{T+4k^2}{T}\;;$$

d'où

$$r^2+r'^2=2R^2,$$

et

$$k^2=\frac{T}{4R^2}(R^2-r^2)=\frac{T}{4R^2}(r'^2-R^2).$$

Remarquons présentement que

$$T=\tfrac{1}{2}c'c''\text{Sin.}\alpha=\tfrac{1}{2}c''c\text{Sin.}\alpha'=\tfrac{1}{2}cc'\text{Sin.}\alpha'';$$

d'où

$$T^3=\tfrac{1}{8}c^2c'^2c''^2\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\alpha'\text{Sin.}\alpha'',$$

on a d'ailleurs

$$4T^2R^2=\tfrac{1}{4}c^2c'^2c''^2;$$

donc en divisant

$$\frac{T}{4R^2}=\tfrac{1}{2}\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\alpha'\text{Sin.}\alpha'';$$

et par suite

$$k^2=\tfrac{1}{2}(R^2-r^2)\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\alpha'\text{Sin.}\alpha''=\tfrac{1}{2}(r'^2-R^2)\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\alpha'\text{Sin.}\alpha''.$$

De plus, si l'on représente par t la corde du cercle dont le rayon est R, tangente à celui dont le rayon est r, et par t' la corde du cercle dont le rayon est r', tangente à celui dont le rayon est R, on aura

$$R^2-r^2=\tfrac{1}{4}t^2, \qquad r'^2-R^2=\tfrac{1}{4}t'^2;$$

donc finalement

$$k^2=t^2.\frac{\text{Sin.}\alpha}{2}.\frac{\text{Sin.}\alpha'}{2}.\frac{\text{Sin.}\alpha''}{2}=t'^2.\frac{\text{Sin.}\alpha}{2}.\frac{\text{Sin.}\alpha'}{2}.\frac{\text{Sin.}\alpha''}{2}.$$

De tout cela résulte le théorème suivant :

THÉORÈME.

THÉORÈME. Si deux cercles concentriques au cercle circonscrit à un triangle, l'un intérieur et l'autre extérieur à celui-là, sont tels que la tangente à l'intérieur terminée de part et d'autre au circonscrit soit égale à la tangente au circonscrit terminée de part et d'autre à l'extérieur; de quelque point de la circonférence de l'un ou de l'autre de ces deux cercles qu'on abaisse des perpendiculaires sur les directions des trois côtés du triangle, le triangle qui aura ses sommets aux pieds de ces trois perpendiculaires aura toujours la même surface, laquelle sera égale au quarré de la tangente dont il vient d'être question multiplié par les moitiés des sinus des angles du triangle proposé.

Quelque grand que soit d'ailleurs le rayon d'un cercle concentrique au cercle circonscrit à un triangle donné; de quelque point de la circonférence du premier de ces deux cercles qu'on abaisse des perpendiculaires sur les directions des trois côtés de ce triangle, le triangle qui aura ses sommets aux pieds de ces perpendiculaires aura toujours une aire constante, et d'autant plus grande que le rayon de ce cercle aura été pris plus grand; mais si ce rayon est plus grand que la diagonale du quarré construit sur le rayon du cercle circonscrit, il n'y aura plus de cercle intérieur qui puisse donner naissance à un triangle de pareille surface.

En particulier, de quelque point de la circonférence du cercle circonscrit à un triangle qu'on abaisse des perpendiculaires sur les directions de ses trois côtés, le triangle dont les sommets seront les pieds de ces perpendiculaires aura une aire nulle, c'est-à-dire que ces trois points seront en ligne droite (*).

(*) Cette dernière partie du théorème avait déjà été démontrée, tom IV, pag. 251.

Autre démonstration du même théorème ;

Par M. Ch. Sturm.

Soient α, β, γ les trois angles du triangle donné, et r le rayon du cercle circonscrit ; il est aisé de voir que les côtés respectivement opposés à ces angles seront

$$2r\text{Sin}.\alpha\,,\qquad 2r\text{Sin}.\beta\,,\qquad 2r\text{Sin}.\gamma\,.$$

Si d'un point P, situé comme on voudra dans l'intérieur du triangle on abaisse des perpendiculaires a, b, c sur les directions de ses trois côtés, ces perpendiculaires seront les hauteurs de trois triangles ayant pour bases les trois côtés du premier et leur sommet commun au point P ; les aires de ces triangles seront respectivement

$$ra\text{Sin}.\alpha\,,\qquad rb\text{Sin}.\beta\,,\qquad rc\text{Sin}.\gamma\,,$$

et la somme de ces aires sera l'aire du triangle donné. Mais on sait qu'on obtient aussi cette dernière en divisant le produit des trois côtés du triangle par le quadruple du rayon du cercle circonscrit ; ce qui donne

$$\frac{2r\text{Sin}\,\alpha.2r\text{Sin}\,\beta.2r\text{Sin}.\gamma}{4r}\qquad\text{ou}\qquad 2r^2\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.\beta\text{Sin}.\gamma\ ;$$

on aura donc, en divisant par r,

$$a\,\text{Sin}.\alpha+b\,\text{Sin}.\beta+c\,\text{Sin}.\gamma=2r\,\text{Sin}.\alpha\,\text{Sin}.\beta\,\text{Sin}.\gamma. \qquad (1)$$

Le triangle qui a ses sommets aux pieds des trois perpendiculaires a, b, c est lui même décomposé, par ces perpendiculaires en trois autres; et, en remarquant que les angles que forment ces perpendiculaires deux à deux sont les supplémens respectifs des trois angles du triangle donné, nous aurons, pour les aires de ces triangles partiels,

$$\tfrac{1}{2}bc\,\text{Sin}.\alpha\,, \qquad \tfrac{1}{2}ca\,\text{Sin}.\beta\,, \qquad \tfrac{1}{2}ab\,\text{Sin}.\gamma\,;$$

de sorte qu'en désignant par k^2 l'aire du triangle total, on aura

$$bc\,\text{Sin}.\alpha+ca\,\text{Sin}.\beta+ab\,\text{Sin}.\gamma=2k^2\,. \qquad (2)$$

Pour rendre cette dernière équation appliquable à toutes les situations du point P, que nous avons d'abord supposé intérieur au triangle donné, il faudra avoir égard aux signes des perpendiculaires a, b, c qu'il faudra prendre positives ou négatives, suivant qu'en partant de leurs pieds elles se dirigeront vers l'intérieur ou vers l'extérieur de ce triangle. Cette circonstance pourra quelquefois rendre k^2 négatif, ce qui, géométriquement parlant ne sera d'aucune conséquence, attendu que, dans la géométrie proprement dite, toutes les grandeurs sont supposées absolues; mais lorsqu'au contraire on voudra envisager les choses sous le point de vue analitique, il faudra avoir égard au signe de k^2.

Cela posé, cherchons quel doit être le lieu des divers points P qui rendent constante l'aire k^2 du triangle qui a ses sommets aux pieds des trois perpendiculaires. Eliminons d'abord c entre les équations (1) et (2), nous trouverons ainsi

$$2r(b\,\text{Sin}.\alpha+a\,\text{Sin}.\beta)\text{Sin}.\alpha\,\text{Sin}.\beta\,\text{Sin}.\gamma-(a^2+b^2)\text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}.\beta-ab(\text{Sin}.^2\alpha+\text{Sin}.^2\beta-\text{Sin}\,^2\gamma)$$
$$=2k^2\,\text{Sin}.\gamma\,. \qquad (3)$$

Mais, si l'on désigne par a', b', c' les trois côtés du triangle donné, on aura

$$a'^2+b'^2-c'^2=2a'b'\mathrm{Cos}.\gamma\ ,$$

ou en mettant pour les trois côtés leurs valeurs $2r\mathrm{Sin}.\alpha$, $2r\mathrm{Sin}.\beta$, $2r\mathrm{Sin}.\gamma$ et divisant par $4r^2$

$$\mathrm{Sin}.^2\alpha+\mathrm{Sin}.^2\beta-\mathrm{Sin}.^2\gamma=2\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Sin}.\beta\mathrm{Cos}.\gamma\ .$$

En introduisant donc cette valeur dans l'équation (3) elle deviendra

$$2r(b\mathrm{Sin}.\alpha+a\mathrm{Sin}.\beta)\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Sin}.\beta\mathrm{Sin}.\gamma-(a^2+b^2)\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Sin}.\beta-2ab\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Sin}.\beta\mathrm{Cos}.\gamma$$
$$=2k^2\mathrm{Sin}.\gamma\ : \qquad (4)$$

Rapportons présentement le point P aux deux côtés de l'angle γ, pris pour axes des coordonnées, c'est-à-dire, aux deux côtés du triangle donné sur les directions desquels tombent les perpendiculaires a et b, le premier étant pris pour axe des x et l'autre pour axe des y. En représentant par x et y les deux coordonnées du point P parrallèles à ces axes, nous aurons

$$a=y\mathrm{Sin}.\gamma\ , \qquad b=x\mathrm{Sin}.\gamma\ ,$$

valeurs qui, substituées dans l'équation (4) donneront, en réduisant,

$$x^2+y^2+2xy\mathrm{Cos}.\gamma-2rx\mathrm{Sin}.\alpha-2ry\mathrm{Sin}\beta+\frac{2k^2}{\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Sin}.\beta\mathrm{Sin}.\gamma}=0\ ;$$

équation qui appartient évidemment à un cercle et qui peut facilement être mise sous cette forme

$$\left(x-\frac{r\text{Cos.}\beta}{\text{Sin.}\gamma}\right)^2+\left(y-\frac{r\text{Cos.}\alpha}{\text{Sin.}\gamma}\right)^2+2\left(x-\frac{r\text{Cos.}\beta}{\text{Sin.}\gamma}\right)\left(y-\frac{r\text{Cos.}\alpha}{\text{Sin.}\gamma}\right)\text{Cos.}\gamma$$

$$=r^2-\frac{2k^2}{\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\gamma}\,;$$

les coordonnées du centre de ce cercle sont donc

$$\frac{r\text{Cos.}\beta}{\text{Sin.}\gamma}\,,\qquad \frac{r\text{Cos.}\alpha}{\text{Sin.}\gamma}\,,$$

longueurs indépendantes de k ; ce qui nous montre que, pour les diverses valeurs de k, la circonférence, lieu des points P, ne varie que de rayon et conserve toujours le même centre.

Mais, lorsqu'on suppose $k=0$, l'équation, sous sa première forme, perd son terme tout connu ; elle exprime donc alors un cercle passant par l'origine, c'est-à-dire, par un quelconque des sommets du triangle donné, et par conséquent par ses trois sommets. Ainsi le lieu de tous les points P est alors le cercle circonscrit au triangle donné lui-même ; puis donc que les lieux du point P répondant aux diverses valeurs de k sont des cercles concentriques, ils ont tous pour centre commun le centre du cercle circonscrit au triangle donné. On voit de plus que le lieu des points P est ce cercle lui-même, lorsque $k=0$.

Si présentement nous nous rappelons que k^2 peut être pris indistinctement en plus ou en moins, nous en conclurons qu'en représentant par R le rayon du cercle qui, pour une certaine valeur de k, résout le problème, on doit avoir

$$R=\sqrt{r^2\pm\frac{2k^2}{\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\gamma}}\,;$$

d'où l'on voit qu'en général, pour une même valeur donnée de k^2, les points P qui résolvent le problème sont sur deux circonférences concentriques avec celle du cercle circonscrit au triangle donné. Nous disons en général ; car, si k^2 excédait une certaine limite, l'une des deux valeurs de R deviendrait imaginaire, de sorte que le problème ne pourrait plus être résolu que par les points d'une circonférence unique.

Si l'on désigne par R et R' les rayons des deux cercles, on aura

$$R^2=r^2+\frac{2k^2}{\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.\beta\text{Sin}.\gamma}, \qquad R'^2=r^2-\frac{2k^2}{\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.\beta\text{Sin}.\gamma},$$

ce qui donne

$$R^2+R'^2=2r^2\ ;$$

ou encore

$$R^2-r^2=r^2-R'^2\ ;$$

d'où l'on voit d'abord que l'un des deux cercles est toujours extérieur au cercle circonscrit au triangle donné, tandis que l'autre lui est intérieur, tellement que la corde du cercle circonscrit tangente à l'intérieur est égale à la corde de l'extérieur tangente au circonscrit.

Pour que le plus petit des deux cercles se réduise à un point, il faut qu'on ait

$$r^2-\frac{2k^2}{\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.\beta\text{Sin}.\gamma}=0, \qquad \text{d'où} \qquad k^2=\frac{r^2\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.\beta\text{Sin}.\gamma}{2},$$

ou bien

$$k^2=\frac{2r\text{Sin}.\alpha.2r\text{Sin}.\beta.2r\text{Sin}.\gamma}{16r}\ ;$$

or, le numérateur de cette expression est le produit des trois côtés du triangle donné, d'où il est aisé de conclure que cette valeur de

k^2 est le quart de l'aire de ce triangle. Il faut bien en effet qu'il en soit ainsi ; car, lorsque du centre du cercle circonscrit à un triangle on abaisse des perpendiculaires sur les directions de ses trois côtés, les pieds de ces perpendiculaires sont les milieux de ces mêmes côtés, et par conséquent le triangle qui a ses sommets à ces pieds est le quart du premier.

On voit aussi, par ce qui précède, 1.° que, tant que le diamètre du cercle extérieur est moindre que la diagonale du quarré circonscrit au cercle circonscrit au triangle donné, il y a un cercle extérieur et un cercle intérieur qui résolvent le problème ; 2.° que, lorsque le diamètre du cercle extérieur est précisément égal à cette diagonale, le cercle intérieur se réduit à un point ; 3.° qu'enfin lorsque le diamètre du cercle extérieur est plus grand que cette diagonale, il n'y a plus de cercle intérieur.

Il résulte aussi de ce qui précède que, lorsque le cercle extérieur se confond avec le cercle circonscrit au triangle donné, le cercle intérieur se confond aussi avec lui. L'aire du triangle qui a ses sommets aux pieds des trois perpendiculaires étant alors nulle, ces trois points doivent ainsi être en ligne droite. C'est le cas particulier déjà démontré (*Annales*, tom. IV, pag. 251.)

Après avoir ainsi démontré de tous points le théorème énoncé, nous allons généraliser un peu la propriété qu'il exprime.

Par le point P soient menées aux trois côtés du triangle donné des obliques a', b', c' faisant dans le même sens des angles égaux ε avec les trois perpendiculaires a, b, c. Soient fait des pieds de ces obliques les sommets d'un triangle inscrit dont nous représenterons l'aire par k'^2. En raisonnant, comme nous l'avons fait ci-dessus, pour parvenir à l'équation (2), nous aurons

$$b'c'\text{Cos.}\alpha+c'a'\text{Cos.}\beta+a'b'\text{Cos.}\gamma=k'^2 \ . \qquad (5)$$

Mais on a

$$a'=\frac{a}{\mathrm{Cos.}\varepsilon}\,,\quad b'=\frac{b}{\mathrm{Cos.}\varepsilon}\,,\quad c'=\frac{c}{\mathrm{Cos.}\varepsilon}\,. \qquad (6)$$

substituant donc, nous aurons

$$bc\mathrm{Cos.}\alpha+ca\mathrm{Cos.}\beta+ab\mathrm{Cos.}\gamma=2k'^2\mathrm{Cos.}^2\varepsilon\,,$$

ou, en vertu de l'équation (2),

$$k^2=k'^2\mathrm{Cos.}^2\varepsilon\,.$$

Ainsi, l'aire du nouveau triangle sera égale à celle du triangle dont les sommets sont les pieds mêmes des perpendiculaires, divisée par le quarré du cosinus de l'angle que forment les obliques avec elles. Donc, pour que l'aire de ce premier triangle soit constante, il est nécessaire et il suffit que l'aire de l'autre le soit, et conséquemment le lieu des points P qui rempliront cette condition sera encore ici, comme dans le premier cas, une circonférence concentrique à celle du cercle circonscrit.

On voit, en particulier, que, si de l'un quelconque des points de la circonférence du cercle circonscrit à un triangle, on abaisse, sur les directions de ses côtés, des obliques également inclinées dans le même sens sur ces mêmes côtés, les pieds de ces obliques appartiendront tous trois à une même ligne droite.

Nous terminerons par observer qu'en général le lieu des points du plan d'un polygone quelconque desquels abaissant des perpendiculaires sur les directions de ses côtés, le polygone inscrit au premier, dont les sommets consécutifs sont les pieds de ces perpendiculaires, à une aire constante, est une ligne du second ordre.

En

En effet, en désignant toujours par P l'un des points dont il s'agit et par x et y ses coordonnées, sur le plan du polygone dont il s'agit, l'aire du second polygone sera la *somme algébrique* des aires d'une suite de triangles ayant leur sommet commun en P et dont les côtés adjacens à ce sommet sont les perpendiculaires dont il s'agit. Or, l'aire de chacun de ces triangles sera la moitié du produit des deux côtés qui partent de ce sommet commun, multiplié par le sinus de l'angle que comprennent entre eux ces mêmes côtés. Or, cet angle est indépendant de la situation du point P, par la nature même de la question ; et les côtés qui le comprennent sont des fonctions linéaires des coordonnées x et y du point P; l'expression de l'aire de chacun de ces triangles sera donc une fonction entière du second degré de x et de y ; il en sera donc de même de l'expression de l'aire du polygone somme des aires de ces triangles. Si donc on égale l'aire de ce polygone à une surface constante, l'équation résultante sera celle d'une ligne du second ordre, lieu de tous les points P.

Il est aisé de voir que les mêmes choses auraient lieu encore si, au lieu de perpendiculaires, on abaissait du point P des obliques également inclinées dans le même sens sur les côtés du polygone donné.

Solution du problème d'analise transcendante énoncé à la page 128 du présent volume, suivie de la démonstration d'un théorème nouveau;

Par M. Roche, capitaine d'artillerie de la marine, ancien élève de l'école polytechnique.

PROBLÈME. *Quelle est la forme la plus générale des équations différentielles qui admettent une intégrale de la forme*

$$\mathrm{f}(x-\alpha,\,y-\beta)=0\ ,$$

dans laquelle α *et* β *représentent des fonctions déterminées quelconques de la constante arbitraire* c?

Solution. En supposant tour à tour l'équation intégrale résolue par rapport à $y-\beta$ et $x-\alpha$, on obtiendra des valeurs de cette forme

$$y-\beta=\Phi'(x-\alpha)\ , \qquad x-\alpha=\psi(y-\beta)\ ,$$

où Φ et ψ seront des fonctions déterminées de $x-\alpha$ et $y-\beta$, respectivement. En différentiant ces deux équations, et représentant, à l'ordinaire, par p le coefficient différentiel de y et par Φ' et ψ' les dérivées respectives de Φ et ψ, on trouvera

$$p=\Phi'(x-\alpha)\ , \qquad 1=p\psi'(y-\beta)\ ,$$

équations qui, résolues, la première par rapport à $x-\alpha$ et l'autre par rapport à $y-\beta$, donneront

$$x-\alpha=\varphi(p)\ , \qquad y-\beta=\psi(p)\ ,$$

où φ et ψ seront également des fonctions déterminées de p; et par suite

$$\alpha=x-\varphi(p)\ , \qquad \beta=y-\psi(p)\ .$$

Mais α et β étant des fonctions déterminées de c sont aussi fonctions l'une de l'autre, c'est-à-dire, qu'il doit exister entre elles une relation déterminée. En supposant donc cette relation exprimée par l'équation

$$\mathrm{F}(\alpha,\beta)=0\ ,$$

et substituant, on obtiendra, pour l'équation différentielle demandée

$$\mathrm{F}\{x-\varphi(p),y-\psi(p)\}=0\ . \qquad \text{(I)}$$

Mais il est essentiel de remarquer que les fonctions φ et ψ ne sauraient être indépendantes; et rien n'est plus facile que d'assigner la relation qui doit exister entre elles. Si, en effet, on différentie les valeurs de $x-\alpha$ et $y-\beta$ trouvées ci-dessus, on aura

$$\mathrm{d}x=\varphi'(p).\mathrm{d}p\ , \qquad \mathrm{d}y=\psi'(p).\mathrm{d}p\ ,$$

φ' et ψ' étant les dérivées respectives de φ et ψ; or, ces deux équations, divisées l'une par l'autre, donnent

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \text{ou} \quad p=\frac{\psi'(p)}{\varphi'(p)}\ , \quad \text{c'est-à-dire,} \quad \psi'(p)=p\varphi'(p)\ ; \qquad \text{(II)}$$

relation qu'on peut encore mettre sous cette forme

$$\psi(p)=\int\varphi'(p).p\mathrm{d}p\ ,$$

ou, en intégrant par parties,

$$\psi(p)=p\varphi(p)-\int\varphi(p).\mathrm{d}p\ .\ (*)$$

Soit, par exemple, l'équation

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2\ ,$$

dans laquelle on suppose

$$\alpha=\rho\mathrm{Cos}.c\ ,\qquad\qquad \beta=\rho\mathrm{Sin}.c\ ,$$

c étant la constante arbitraire. En différentiant cette équation, il viendra

$$(x-\alpha)+p(y-\beta)=0\ .$$

En mettant dans la proposée et sa différentielle pour α et β leurs valeurs en c et éliminant ensuite c entre les deux équations résultantes, on aura, toutes réductions faites,

$$(1+p^2)(x^2+y^2+r^2-\rho^2)^2=4r^2(y+px)^2\ ,$$

équation qui peut être mise sous cette forme

(*) Ce résultat avait déjà été obtenu par M. Woisard, dans un mémoire qu'à raison de l'abondance des matières nous avons été contraint d'abréger en le publiant.

J. D. G.

$$\left\{x-\frac{rp}{\sqrt{1+p^2}}\right\}^2+\left\{y-\frac{r}{\sqrt{1+p^2}}\right\}^2=\rho^2\ ,$$

et qui rentre ainsi dans la formule (I). De plus, on a ici

$$\varphi(p)=\frac{rp}{\sqrt{1+p^2}}\ ,\qquad \psi(p)=\frac{r}{\sqrt{1+p^2}}\ ,$$

d'où

$$\varphi'(p)=\frac{r}{\sqrt{1+p^2}}\ ,\qquad \psi'(p)=\frac{rp}{\sqrt{1+p^2}}\ ,$$

ce qui vérifie la relation (II).

Au moyen de ce qui précède, on peut aisément démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. Toute équation différentielle de la forme

$$F\{x-\varphi(p)\,,y-\psi(p)\}=0\ ,$$

qui admet une solution particulière, a, par là même, une intégrale de la forme

$$f(x-\alpha,y-\beta)=0\ ,$$

dans laquelle α et β sont des fonctions d'une même constante arbitraire.

Et réciproquement toute équation différentielle de la première forme, dont l'intégrale est de la seconde, admet par là même une solution particulière.

Démonstration. En effet, 1.° on sait que, pour obtenir la solution particulière d'une équation telle que

$$\mathrm{F}\{x-\varphi(p)\,,\;y-\psi(p)\}=0\;,$$

il faut, après l'avoir différentiée, égaler séparément à zéro et le multiplicateur de $\mathrm{d}p$ et la partie qui en est indépendante. Or, si l'on désigne respectivement par P et Q les dérivées du premier membre de cette équation, prises par rapport aux deux binomes $x-\varphi(p)$, $y-\psi(p)$, considérés comme deux variables, sa différentielle sera

$$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\{P\varphi'(p)+Q\psi'(p)\}\mathrm{d}p=0\;;$$

afin donc que cette équation admette une solution particulière, il faudra qu'on ait séparément

$$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0\;,\qquad P\varphi'(p)+Q\varphi'(p)=0\;,$$

équations entre lesquelles éliminant le rapport de P à Q, on obtiendra

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\quad\text{ou}\quad p=\frac{\psi'(p)}{\varphi'(p)}\,,\quad\text{c'est-à-dire}\,,\quad\varphi'(p)=p\varphi'(p)\;,$$

qui est précisément la relation (II), nécessaire pour que l'équation admette une intégrale de la forme

$$\mathrm{f}(x-\alpha,y-\beta)=0\;;$$

ce qui démontre déjà la première partie de la proposition.

2.° Réciproquement, soit

$$\mathrm{f}(x-\alpha\,,y-\beta)=0\;,$$

l'intégrale d'une équation différentielle, dans laquelle on suppose que α et β sont des fonctions d'une même constante c ; pour avoir la solution particulière de son équation différentielle, il faudra, comme l'on sait, éliminer la constante c entre cette équation et sa dérivée par rapport à cette lettre ; mais, en représentant par P_1 et Q_1 les dérivées de son premier membre, prises par rapport à $x-\alpha$, $y-\beta$, considérés comme deux variables la dérivée dont il s'agit sera

$$P_1 d\alpha + Q_1 d\beta = 0.$$

Si, au contraire, on différentie la proposée par rapport à x et y on aura

$$P_1 dx + Q_1 dy = 0 ;$$

d'où il suit que la différentielle de sa solution particulière sera le résultat de l'élimination de c entre ces deux dernières. Or, on a vu par le problème précédent que cette différentielle était

$$\mathrm{F}\{x-\varphi(p), y-\psi(p)\} = 0 .$$

avec la condition

$$\psi'(p') = p\varphi'(p) ;$$

or, en différentiant de nouveau l'équation différentielle obtenue, on parvient, comme nous l'avons déja vu, à un résultat de la forme

$$P dx + Q dy - \{P\varphi'(p) + Q\psi'(p)\} dp = 0 ;$$

or, si l'on substitue, dans cette dernière équation, pour $\psi'(p)$ sa valeur $p\varphi'(p)$, et pour dy sa valeur $p dx$, on obtiendra

$$(P+pQ)\{dx-dp\varphi'(p)\}=0\ ,$$

équation qui peut être satisfaite en posant

$$P+pQ=0 \qquad \text{ou} \qquad Pdx+Qdy=0$$

ce qui revient à dire que la différentielle

$$Pdx+Qdy-\{P\varphi'(p)+Q\psi'(p)\}dp=0\ ,$$

en y considérant p comme une constante, est égale à zéro, ce qui est précisément le caractère des solutions particulières; mais l'équation est aussi satisfaite en posant

$$dx-dp\varphi'(p)=0 \qquad \text{d'où} \qquad dy=dp.\psi'(p)=0\ ,$$

ce qui donne, en intégrant,

$$x-\alpha=\varphi(p)\ , \qquad y-\beta=\psi(p)\ ,$$

équations dans lesquelles α, β sont les constantes arbitraires, et qui donnent, par l'élimination de p,

$$f(x-\alpha\,,\,y-\beta)=0\ .$$

Corollaire. Il résulte de là un moyen facile de ramener l'intégration d'une équation différentielle dans laquelle x ou y est donnée en fonction de p, lorsqu'elle ne peut être résolue par rapport à

cette

cette lettre, à l'intégration d'une fonction d'une seule variable, jointe à l'élimination.

Soit, en effet, l'équation proposée

$$x-\alpha=\varphi(p)\ ;$$

$\frac{dy}{dx}$ sera une fonction de $x-\alpha$ et conséquemment de p ; de sorte que l'intégration de cette équation donnera un résultat de la forme

$$y-\beta=\psi(p)\ ,$$

dans lequel β sera la constante arbitraire. En différentiant ces deux équations et éliminant entre leurs différentielles $\frac{dp}{dx}$, on obtiendra comme ci-dessus, l'équation de condition

$$\psi'(p)=p\varphi'(p)\ ,$$

et la fonction ψ sera donnée par l'intégration de la fonction $p\varphi'(p)$.

Si, au contraire, l'équation proposée est

$$y-\beta=\psi(p)\ ,$$

en posant

$$x-\alpha=\varphi(p)\ ,$$

la fonction φ serait donnée, à l'inverse, par l'intégration de la fonction $\frac{\psi'(p)}{p}$.

Dans l'un et dans l'autre cas, les fonctions φ et ψ étant connues, l'élimination de p entre les deux équations

$$x-\alpha=\varphi(p)\,, \qquad y-\beta=\psi(p)$$

conduira à l'intégrale cherchée. (*)

Solution du dernier des quatre problèmes de géométrie proposés a la page 304 du précédent volume ;

Par M. Ch. Sturm.

Problème. *Quelle est la surface courbe de chacun des points de laquelle menant à trois points fixes des droites, considérées comme les trois arêtes d'un angle trièdre, cet angle trièdre intercepte toujours des portions équivalentes d'un plan donné, fixe et indéfini ?*

Solution. Rapportons les points de l'espace à un système d'axes obliques, de manière que le plan donné soit celui des xy, mais sans rien statuer d'ailleurs sur l'origine ni sur la direction des axes.

Soient (a,b,c), (a',b',c'), (a'',b'',c'') les trois points donnés, et (x,y,z) le sommet de l'angle trièdre. Soient de plus (p,q), (p',q'), (p'',q'') respectivement les points où le plan des xy est percé par les trois arêtes de cet angle trièdre, nous aurons

---

(*) M. Woisard, professeur aux écoles d'artillerie à Metz, a aussi donné une solution du problème qui, pour le fond, ne diffère pas de celle qu'on vient de lire.

J. D. G.

$$\frac{x-a}{z-c}=\frac{a-p}{c}\,, \qquad \frac{y-b}{z-c}=\frac{b-q}{c}\,,$$

$$\frac{x-a'}{z-c'}=\frac{a'-p'}{c'}\,, \qquad \frac{y-b'}{z-c'}=\frac{b'-q'}{c'}\,,$$

$$\frac{x-a''}{z-c''}=\frac{a''-p''}{c''}\,, \qquad \frac{y-b''}{z-c''}=\frac{b''-q''}{c''}\,;$$

équations d'où on tire

$$p=\frac{az-cx}{z-c}\,, \qquad q=\frac{bz-cy}{z-c}\,,$$

$$p'=\frac{a'z-c'x}{z-c'}\,, \qquad q'=\frac{b'z-c'y}{z-c'}\,,$$

$$p''=\frac{a''z-c''x}{z-c''}\,, \qquad q''=\frac{b''z-c''y}{z-c''}\,.$$

Or, si l'on désigne par k^2 l'aire constante du triangle intercepté sur le plan des xy, en désignant par γ l'angle que comprennent les axes des x et des y, on aura, comme l'on sait

$$(pq'-p'q+p'q''-p''q'+p''q-pq'')\text{Sin.}\gamma=2k^2\;;$$

sur quoi il faudra remarquer que k^2 peut être indifféremment positif ou négatif.

En mettant dans le premier membre de cette équation pour p, p', p'', q, q', q'' les valeurs déterminées ci-dessus, elle devient

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{(bc'-cb')x+(ca'-ac')y+(ab'-ba')z}{(z-c)(z-c')} \\ +\dfrac{(b'c''-c'b'')x+(c'a''-a'c'')y+(a'b''-b'a'')z}{(z-c')(z-c'')} \\ +\dfrac{(b''c-c''b)x+(c''a-a''c)y+(a''b-b''a)z}{(z-c'')(z-c)}\end{array}\right\}=\frac{2k^2}{\text{Sin.}\gamma}\ .$$

Telle est donc l'équation de la surface demandée.

En y chassant les dénominateurs, développant et posant, pour abréger,

$$bc'-cb'+b'c''-c'b''+b''c-c''b=A\ ,$$

$$ca'-ac'+c'a''-a'c''+c''a-a''c=B\ ,$$

$$ab'-ba'+a'b''-b'a''+a''b-b''a=C\ ,$$

$$ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''=D\ ,$$

cette équation deviendra

$$(Ax+By+Cz-D)z^2\text{Sin.}\gamma=2k^2(z-c)(z-c')(z-c'')\ . \qquad (1)$$

Il faudra d'ailleurs se rappeler que k^2 peut être pris indistinctement en plus ou en moins ; de sorte qu'il y a proprement deux surfaces courbes qui résolvent le problème. Nous nous bornerons à discuter celle qui répond à k^2 positif.

Remarquons d'abord que l'équation du plan qui contient les trois points fixes est

$$Ax+By+Cz=D\ , \qquad (2)$$

qui, combinée avec (1), la réduit à

$$(z-c)(z-c')(z-c'')=0\ ; \qquad (3)$$

ce qui montre que si, par chacun des trois points fixes, on mène un plan parallèle au plan fixe, les trois plans, ainsi menés, couperont le plan des trôis points fixes suivant trois droites parallèles appartenant à la surface dont il s'agit. Ces trois droites, au surplus, ne sont autre chose que des parallèles menées par les trois points fixes à l'intersection du plan de ces trois points avec le plan fixe.

Les équations d'une parallèle quelconque à cette intersection sont

$$Ax+By+Cz=D' \quad \text{et} \quad z=C'\ . \qquad (4)$$

Pour savoir si cette parallèle coupe la surface dont il s'agit et en quels points, il faudra combiner ces deux dernières équations avec l'équation (1), ce qui donnera

$$(D'-D)C'^2\text{Sin.}\gamma=2k^2(C'-c)(C'-c')(C'-c'')\ ;$$

équation qui ne pourra être qu'absurde ou identique, d'où il suit que, suivant les valeurs de C' et D', la droite (4) ne percera pas la surface dont il s'agit ou bien s'y trouvera entièrement située ; ce qui nous montre que cette surface est une surface cylindrique du troisième degré, ayant ses élémens parallèles à l'intersection du plan fixe avec celui des trois points fixes.

Prenons cette intersection pour axe des y, ses équations sont

$$Ax+By+Cz=D \qquad \text{et} \qquad z=0\ ;$$

mais les équations de l'axe des y doivent être

$$x=0\ , \qquad z=0\ ;$$

il faudra donc que ces quatre équations aient lieu à la fois, ce qui donnera

$$By-D=0\ ,$$

équation qui, devant avoir lieu quelle que soit y, donnera

$$B=0\ , \qquad D=0\ ;$$

l'équation (1) deviendra donc

$$(Ax+Cz)z^2\text{Sin.}\gamma=2k^2(z-c)(z-c')(z-c'')\ ; \qquad (5)$$

équation que l'on reconnaît en effet pour celle d'une surface cylindrique, ayant ses arêtes parallèles à l'axe des y, et qui appartient en même temps à l'intersection de cette surface avec le plan des xz. On voit qu'en y faisant $z=0$, la valeur de x devient infinie, d'où l'on peut conclure que le plan fixe est un plan asymptotique de la surface cherchée.

Si l'un des trois points fixes, le point (a'', b'', c''), par exemple, était situé sur le plan fixe, on aurait $c''=0$, et l'équation (5) deviendrait, en divisant par z,

$$(Ax+Cz)z\text{Sin.}\gamma=2k^2(z-c)(z-c')\ ;$$

c'est-à-dire qu'alors la surface cherchée se réduirait à une surface cylindrique du second ordre à base hyperbolique. Si le point

(a', b', c') se trouvait aussi sur ce plan, on aurait en outre $c'=0$; ce qui réduirait l'équation à

$$(Ax+Cz)\text{Sin}.\gamma=2k^2(z-c)$$

équation d'un plan que l'on trouvera passer par le troisième point fixe et être parallèle à la droite qui joint les deux premiers, ainsi que cela doit être.

Si le plan que déterminent les trois points fixes, et dont l'équation est, en général,

$$Ax+By+Cz=D\ ,$$

était parallèle au plan fixe; c'est-à-dire, si l'on avait $c=c'=c''$, cette équation devrait se réduire simplement à $z=c$; on devrait donc avoir, à la fois,

$$A=0\ ,\qquad B=0\ ,\qquad D=cC\ ;$$

au moyen de quoi l'équation (1) deviendrait, en substituant et en divisant par $z-c$,

$$Cz^2\text{Sin}.\gamma=2k^2(z-c)^2$$

équation commune à deux plans parallèles au plan fixe, ou plutôt à quatre, à raison du double signe dont k^2 est susceptible.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. Quel est le lieu des points du plan d'un triangle desquels menant des droites à ses sommets, puis, par ces mêmes sommets respectivement, des perpendiculaires indéfinies à ces droites, ces perpendiculaires forment, par leur rencontre, un triangle circonscrit équivalent à un quarré donné ?

II. Quel est le lieu des points de l'espace desquels abaissant des perpendiculaires sur les plans des quatre faces d'un tétraèdre, le volume du tétraèdre inscrit ayant pour sommets les pieds de ces perpendiculaires soit équivalent à un cube donné ?

III. Quel est le lieu des points de l'espace desquels menant des droites aux quatre sommets d'un tétraèdre, et ensuite par ces mêmes sommets respectivement, des plans perpendiculaires à ces droites, ces quatre plans forment, par leur rencontre, un tétraèdre circonscrit équivalent à un tétraèdre donné ?

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstration d'un théorème de géométrie ;

Par M. J. B. Durrande, professeur de physique au collége royal de Cahors.

THÉORÈME. *Dans tout quadrilatère circonscrit au cercle, la droite qui joint les milieux des diagonales passe par le centre du cercle inscrit.*

Démonstration. Soit ABCD (fig. 1) un quadrilatère circonscrit au cercle O ; soient V, X, Y, Z les points de contact respectifs des côtés AB, BC, CD, DA de ce quadrilatère avec le cercle. De chacun des sommets A, B, C, D comme centre, et avec des rayons respectivement égaux aux distances de ces sommets aux points de contact des deux côtés qui y concourent, soient décrits quatre cercles que nous désignerons simplement, comme le premier, par les lettres placées à leur centre. Soient menés l'axe radical des deux cercles opposés A et C, et l'axe radical des deux autres cercles opposés B et D ; soient H, H′, I, I′ les points d'intersection de ce dernier avec les deux cercles A et C, et soient K, K′, L, L′ les points d'intersection du premier avec les cercles B et D. Ces deux axes radicaux se couperont évidemment au point O, puisque les tangentes menées de ce point aux quatre cercles A, B, C, D ont pour longueur commune le rayon du cercle O.

Menons présentement les droites AH et CI, concourant en M, AH′ et CI′ concourant en M′. Soient menées pareillement BK et DL concourant en N, BK′ et DL′ concourant en N′, les deux quadrilatères AMCM′ et BNDN′ seront des parallélogrammes, et auront conséquemment leurs côtés opposés égaux. En effet, de ce que le cercle A est tangent aux deux cercles B et D dont l'axe radical est HI, il s'ensuit (tom. XIII, pag. 198) que la tangente à A au point H est parallèle à celle des deux tangentes communes extérieures aux deux cercles B et D qui ne coupe pas le cercle A; et, pour la même raison, la tangente à C au point I est parallèle à celle des deux tangentes communes extérieures aux deux cercles B et D qui ne coupe pas le cercle C; donc les deux tangentes en H au cercle A et en I au cercle C doivent, comme les tangentes communes extérieures aux deux cercles B et D faire des angles égaux avec la droite BD qui joint leurs centres; donc, puisque HI est perpendiculaire à cette droite et que HM et IM sont respectivement perpendiculaires aux deux tangentes, il s'ensuit que le triangle HMI a ses deux angles en H et I égaux entre eux et à ceux que font avec BD les tangentes extérieures communes aux deux cercles B et D. Par un raisonnement tout-à-fait analogue, on démontrera exactement la même chose du triangle H′M′I′, par rapport à ses angles H′ et I′; d'où on conclura que les droites MA et MC sont respectivement parallèles aux droites M′A et M′C et qu'ainsi AM′=CM et CM′=AM. On démontrera aussi de la même manière, en faisant changer de rôle aux deux couples de cercles opposés, que DN′=BN et BN′=DN.

Cela posé, les points H et I pourront être considérés comme les points de contact des deux cercles A et C avec un cercle décrit du point M comme centre et avec MH=MI pour rayon, et que, pour abréger, nous appellerons le cercle M; de même H′ et I′ seront les points de contact de ces deux mêmes cercles avec le cercle M′. Pareillement K et L seront les points de contact des cercles B et D avec le cercle N; et K′ et L′ seront les points de contact des deux mêmes cercles avec le cercle N′.

D'après cela, les deux droites VZ et KL devant concourir au centre de similitude des deux cercles B et D, les quatre points K, V, Z, L appartiendront à une même circonférence, d'où il suit que les droites KV et LZ iront concourir en un même point P de l'axe radical HI des deux cercles B et D; et, pour des raisons semblables, les deux droites KX et LY iront aussi concourir en un même point Q de cet axe radical. Pareillement, les deux droites HV et IX iront concourir en un point R de l'axe radical KL des deux cercles A et C; et les deux droites HZ et IY iront concourir en un même point S du même axe radical.

De même les droites VK′ et ZL′ iront concourir en un point P′, et les droites XK′ et YL′ en un point Q′ de l'axe radical HI; les droites VH′ et XI′ iront concourir en un point R′, et les droites ZH′ et YI′ en un point S′ de l'axe radical KL.

On peut remarquer maintenant que la droite MM′, que nous nous dispensons de mener, pour ne point trop compliquer la figure, passe par le point O. En effet, considérons d'abord les trois cercles A, M, M′; le point H est le centre de similitude externe des deux premiers et le point H′ est le centre de similitude interne du premier et du troisième; d'où il suit que le centre de similitude interne de M et M′ doit être sur la droite HH′ ou HI. Considérant ensuite les trois cercles A, B, M, remarquant que V est le centre de similitude interne des deux premiers et H le centre de similitude externe du premier et du troisième, on en conclura que le centre de similitude interne de B et M est sur la droite HV. En considérant de même les trois cercles C, B, M, on prouvera que le centre de similitude interne de B et M est aussi sur IX, d'où on conclura qu'il est à l'intersection R de cette droite avec HV. Des raisonnemens semblables serviront à prouver que le centre de similitude externe des deux cercles B et M′ est le point R′, intersection des deux droites VH′ et XI′; d'où il suit que le centre de similitude interne des deux cercles M et M′ est sur la droite RR′ ou KL; et comme on pourrait prouver également qu'il doit être sur HI, il s'ensuit qu'il est à l'intersection O de ces deux droites, laquelle, conséquemment, doit être en ligne droite avec les points M et M'. On prouverait de la même manière qu'elle est aussi en ligne droite avec les points N et N'.

On peut aussi prouver que la droite MN passe également par le point O. En effet, en considérant d'abord les trois cercles A, M, N; le centre de similitude externe des deux premiers étant le point H, et le centre de similitude interne du premier et du troisième étant le point P, comme il est aisé de le prouver, en raisonnant comme ci-dessus; il s'ensuit que le centre de similitude interne de M et N est sur la droite HP ou HI; et on prouverait de la même manière qu'il est aussi sur la droite KL; ce centre est donc à l'intersection O de ces deux droites qui conséquemment doit se trouver en ligne droite avec les points M et N; et on prouverait la même chose des points M' et N'.

Voilà donc conséquemment les quatre points M, N, M', N' en ligne droite avec le point O, c'est-à-dire que, dans les deux parallélogrammes AMCM' et BNCN' les diagonales qui ne sont point tracées doivent se confondre en une seule ligne droite qui passe par le point O; cette droite doit donc passer par les milieux des deux autres diagonales AC et BD des mêmes parallélogrammes, lesquelles sont aussi les deux diagonales du quadrilatère ABCD circonscrit au cercle O; donc la droite qui joint les milieux des deux diagonales de ce quadrilatère contient le centre O du cercle inscrit (*).

Tout triangle circonscrit à un cercle pouvant être considéré comme un quadrilatère circonscrit, dans lequel un des angles, égal à deux angles droits a son sommet sur la circonférence, au point de con-

---

(*) Le théorème général, pour une section conique quelconque, se trouve démontré dans le présent recueil, savoir : analitiquement (tom. XII, pag. 382), et géométriquement (tom. XII, pag. 109).

J. D. G.

tact de l'un des côtés du triangle ; on peut conclure du théorème qui vient d'être démontré le théorème suivant que l'on pourrait aussi parvenir à démontrer directement par des moyens analogues.

THÉORÈME. Dans tout triangle, la droite qui joint le milieu de l'un quelconque des côtés avec le milieu de la droite qui joint le point de contact de ce côté avec le cercle inscrit au sommet opposé, contient le centre de ce cercle.

STATIQUE.

Sur la Balance de Roberval ;

Par un ABONNÉ.

M. Poinsot, dans sa Statique (*), observe, au sujet de la Balance de Roberval, qu'aucun de ceux qui ont écrit avant lui sur cet appareil n'a donné une solution satisfaisante de l'espèce de paradoxe qu'il présente, ce qui est très-vrai. Il ajoute que la théorie des couples en donne une explication fort exacte et fort lumineuse, ce qui est vrai encore.

Mais M. Poinsot paraît insinuer que le paradoxe dont il s'agit ne peut être complètement éclairci que par l'application de la théorie des couples. Or, s'il en était ainsi, ce serait une chose assez fâcheuse. Il arrive souvent en effet que, parmi les auditeurs des cours publics de physique ou les lecteurs des traités élémentaires

(*) Deuxième édition, page 288.

de cette science, il s'en trouve bien peu qui se soient préalablement familiarisés avec les principes de la statique, et à plus forte raison avec la théorie des couples. Le professeur ou l'écrivain peut à peine hasarder une démonstration bien élémentaire, nous dirions volontiers bien terre à terre, du principe du parallélogramme des forces; et il est ensuite contraint de tout ramener là. Or c'est ce qu'on peut très-bien faire, en particulier, pour l'explication du paradoxe dont il s'agit, ainsi qu'on va le voir.

Soit ABB′A′ (fig. 2) le parallélogramme, constant de côtés et variable d'angles, formé par les quatre règles assemblées à charnières qui composent la principale partie de l'appareil, et dont les deux opposées AB et A′B′ ne peuvent que pivoter autour de leurs milieux fixes C et C′, situés dans une même verticale CC′, et soit un point D lié invariablement à la règle AA′, mais situé d'ailleurs d'une manière quelconque par rapport à cette règle. Tout se réduit à prouver que, si l'on applique au point D une force verticale, on pourra la remplacer par une force de même intensité, dirigée suivant AA′, plus des forces qui seront détruites par la résistance des points fixes C et C′; or, c'est là une chose très-facile à établir.

Supposons que DE représente en intensité et en direction la force verticale appliquée en D; sur DE comme diagonale soit construit le parallélogamme FF′, dont les côtés DF et DF′, prolongés, s'il est nécessaire, passent respectivement par les points A et A′; la force représentée en intensité et en direction par DE pourra être remplacée par deux autres représentées en intensité et en direction par DF et DF′.

Soit menée par D une parallèle GG′ à AB et A′B′. Si sur DF et DF′, comme diagonales, on construit deux parallélogrammes GH et G′H′ ayant un de leurs côtés dirigé suivant GG′ et l'autre suivant DE; DG et DH représenteront en intensité et en direction les composantes de DF, et DG′ et DH′ représenteront en intensité et en direction les composantes de DF′. On aura de plus DG′= F′H′=FH=DG, et DH+DH′=DH+HE=DE.

Présentement, la force représentée en intensité et en direction par DF, peut être considérée comme appliquée en A, où on pourra la décomposer en deux autres, représentées en intensité et en direction par AL et AM, respectivement égales et parallèles à DG et DH. Pareillement la force représentée en intensité et en direction par DF′ peut être considerée comme appliquée en A′, où on pourra la décomposer en deux autres, representées en intensité et en direction par A′L′ et A′M′, respectivement égales et parallèles à DG′ et DH′.

On aura donc ainsi, au lieu de la force unique représentée par DE, les quatre forces représentées par AL, AM, A′L′ et A′M′, les deux premières agissant en A et les deux dernières en A′; et on aura de plus, par ce qui précède, AL′=AL et AM+A′M′=DE.

Ainsi tout le système se trouvera réduit à une force agissant suivant AA′ égale à celle qui agissait sur le point D, plus deux autres forces AL et A′L′, dont l'action sera anéantie par la résistance des points fixes C et C′, situés sur leurs directions.

Si, pareillement, à un point lié invariablement avec BB′, et situé d'ailleurs d'une manière quelconque par rapport à cette droite, on applique une force verticale égale à celle qu'on a appliquée en D, cette force se réduira à une force pareille appliquée suivant BB′, plus deux autres forces dont l'action se trouvera aussi anéantie par la résistance des points fixes C et C′.

Il ne restera donc finalement que deux forces verticales, de même intensité, appliquées aux deux extrémités A et B du levier AB, ayant son point d'appui C à son milieu, et conséquemment il y aura équilibre.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Sur la propriété de minimum *dont jouissent la circonférence du cercle, entre les périmètres des figures planes de même surface, et la surface de la sphère, entre toutes celles qui enferment un même volume ;*

Par un ABONNÉ.

Au Rédacteur des *Annales* ;

MONSIEUR,

EN examinant avec attention l'article de la page 132 du précédent volume des *Annales*, relatif à la propriété de *minimum* dont jouissent la circonférence du cercle, entre les périmètres des figures planes de même surface, et la surface de la sphère, entre les surfaces des corps de même volume, il m'a paru que, pour compléter la démonstration de ces propriétés, et la rendre tout-à-fait Euclidienne, il pouvait être nécessaire de la faire précéder des deux lemmes que voici :

LEMME I. Toute courbe plane dans laquelle la droite qui joint les milieux de deux cordes parallèles quelconques est perpendiculaire à leur direction commune est un cercle.

Démonstration. Soient A, B, C (fig. 3) trois points pris arbitrairement

trairement sur le périmètre de la courbe dont il s'agit, et par ces trois points soit fait passer un cercle. Soit menée la corde BC et, par le point A, soit menée la corde AD parallèle à celle-là, se terminant à la courbe en D. Par hypothèse, les milieux de ces deux cordes seront sur une perpendiculaire à leur direction commune; d'où il suit que les quatre points A, B, C, D de la courbe dont il s'agit appartiennent à une même circonférence, laquelle ne saurait être autre que celle que nous avons fait passer par les trois premiers A, B, C; de sorte que nous avons trouvé un quatrième point D de la courbe qui appartient à cette circonférence.

Si présentement nous menons la corde BD et sa parallèle AE, se terminant à la courbe en E; pour de semblables raisons, on verra que ce point E est aussi un cinquième point de notre circonférence, à l'aide duquel on en déterminera un sixième qui sera également sur cette circonférence, puis un septième et ainsi de suite.

En remarquant, d'un autre côté, que les deux points A, B de la courbe peuvent être pris si voisins l'un de l'autre qu'on le veut, et qu'on peut prendre le troisième C de manière que la corde BC ait quelle direction on voudra, il sera aisé d'en conclure qu'il n'est aucun point de la courbe qui n'appartienne en même temps à la circonférence qui passe par trois de ses points, et qu'ainsi cette courbe n'est autre qu'une circonférence.

LEMME II. Toute surface courbe dans laquelle le plan qui contient les milieux de trois cordes parallèles quelconques, non comprises dans un même plan, est perpendiculaire à leur direction commune, est une sphère.

Démonstration. Soient A, B, C, D (fig. 4) quatre points de la surface courbe dont s'agit, non compris dans un même plan, par lesquels soit fait passer une sphère. Soit menée la corde CD; et, par les points A et B, soient menées les deux autres cordes AF et BE, parallèles à celle-là, se terminant en F et E à la surface dont il s'agit. Par hypothèse, les milieux de ces trois cordes seront dans un plan perpendiculaire à leur direction commune ; d'où il suit que leurs six extrémités appartiendront à une même sphère, laquelle ne saurait être autre que celle que nous avons fait passer par les quatre premiers points A, B, C, D; de sorte que nous avons trouvé deux nouveaux points E, F, de la surface dont il s'agit qui sont en même temps sur cette sphère.

Si présentement nous menons la corde CF, et ses deux parallèles AG et BH, se terminant en G et H à la surface proposée; pour de semblables raisons, on verra que ces deux points G et H sont aussi un septième et un huitième points de la surface de la sphère, à l'aide desquels on en déterminera un neuvième et un dixième qui seront également sur cette sphère, et ainsi de suite.

En remarquant, d'un autre côté, que les trois points A, B, C de la surface dont il s'agit peuvent être pris aussi voisins les uns des autres qu'on le voudra, et qu'on peut prendre le quatrième D, sur cette surface, de telle sorte que la corde CD ait une direction donnée, il sera aisé d'en conclure qu'il n'est aucun point de la surface proposée qui n'appartienne en même temps à la sphère qui passe par quatre d'entre eux et qu'ainsi cette surface n'est autre que la sphère elle-même.

Agréez, etc.

Marseille, le 19 juillet 1823.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Note sur les conditions d'intégrabilité;

Par M. B. D. C.

SOIENT x et y des fonctions quelconques d'une troisième variable t; et soient représentés, en général, pour abréger,

$$\frac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d}t^k} \quad \text{par} \quad x_k,$$

$$\frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}t^k} \quad \text{par} \quad y_k,$$

quel que puisse être d'ailleurs le nombre entier positif k. Soit V une fonction quelconque de

$$x, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \ldots\ldots\ldots x_m,$$

$$y, \quad y_1, \quad y_2, \quad y_3, \ldots\ldots\ldots y_n,$$

où on suppose que m soit tout au plus égal à n, et posons

$$X=\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)-\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x_1}\right)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x_2}\right)}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}^3\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x_3}\right)}{\mathrm{d}t^3}+\ldots\pm\frac{\mathrm{d}^m\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x_m}\right)}{\mathrm{d}t^m}$$

$$Y=\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)-\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y_1}\right)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y_2}\right)}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}^3\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y_3}\right)}{\mathrm{d}t^3}+\ldots\pm\frac{\mathrm{d}^n\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y_n}\right)}{\mathrm{d}t^n}$$

Si $V\mathrm{d}t$ est une différentielle exacte, on aura, comme l'on sait (*),

(*) Voyez la page 197 du présent volume.

$X=0$, $Y=0$; et réciproquement, si ces deux équations ont lieu, $V\mathrm{d}t$ sera une différentielle exacte ; et telles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour l'intégrabilité de la fonction différentielle $V\mathrm{d}t$, lorsque x et y sont deux variables indépendantes l'une de l'autre.

Mais si, au contraire, y était une fonction de x, c'est-à-dire, si l'on avait $y=\varphi(x)$, il est clair qu'alors une seule condition serait nécessaire et suffisante pour rendre intégrable la fonction différentielle $V\mathrm{d}t$. Mais quelle devrait être cette condition unique ? C'est ce que nous nous proposons ici de rechercher.

Désignons en général par $\varphi_k(x)$ la dérivée de l'ordre k de la fonction $\varphi(x)$, prise par rapport à x, quel que soit le nombre entier positif k ; à cause de $y=\varphi(x)$, on aura, en différentiant,

$$y=\varphi(x)$$

$$y_1=\varphi_1(x).x_1$$

$$y_2=\varphi_2(x).x_1^2+\varphi_1(x).x_2$$

$$y_3=\varphi_3(x).x_1^3+3\varphi_2(x).x_1x_2+\varphi_1(x).x_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Désignons par V' ce que devient V lorsqu'on y substitue ces valeurs en x, x_1, x_2, ... x_n pour y, y_1, y_2, ... y_n ; en posant

$$X'=\left(\frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}x}\right)-\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}x_1}\right)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}x_2}\right)}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}^3\left(\frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}x_3}\right)}{\mathrm{d}t^3}+\ldots\pm\frac{\mathrm{d}^n\left(\frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}x_n}\right)}{\mathrm{d}t^n},$$

$X'=0$ sera évidemment l'équation de condition qu'il s'agit de déterminer.

Or, on a

$$\frac{dV'}{dx} = \frac{dV}{dx} + \frac{dy}{dx}\,\frac{dV}{dy} + \frac{dy_1}{dx}\,\frac{dV}{dy_1} + \frac{dy_2}{dx}\,\frac{dV}{dy_2} + \ldots + \frac{dy_n}{dx}\,\frac{dV}{dy_n},$$

$$\frac{dV'}{dx_1} = \frac{dV}{dx_1} + \frac{dy_1}{dx_1}\,\frac{dV}{dy_1} + \frac{dy_2}{dx_1}\,\frac{dV}{dy_2} + \ldots + \frac{dy_n}{dx_1}\,\frac{dV}{dy_n},$$

$$\frac{dV'}{dx_2} = \frac{dV}{dx_2} + \frac{dy_2}{dx_2}\,\frac{dV}{dy_2} + \frac{dy_3}{dx_2}\,\frac{dV}{dy_3} + \ldots + \frac{dy_n}{dx_2}\,\frac{dV}{dy_n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dV'}{dx_n} = \frac{dV}{dx_n} + \frac{dy_n}{dx_n}\,\frac{dV}{dy_n};$$

ce qui donnera, en substituant,

$$X' = \frac{dV}{dx} + \frac{dy}{dx}\,\frac{dV}{dy} + \frac{dy_1}{dx}\,\frac{dV}{dy_1} + \frac{dy_2}{dx}\,\frac{dV}{dy_2} + \ldots + \frac{dy_i}{dx}\,\frac{dV}{dy_i} + \ldots$$

$$- \frac{d\left(\frac{dV}{dx_1}\right)}{dt} - \frac{d\left(\frac{dy_1}{dx_1}\,\frac{dV}{dy_1}\right)}{dt} - \frac{d\left(\frac{dy_2}{dx_1}\,\frac{dV}{dy_2}\right)}{dt} - \ldots - \frac{d\left(\frac{dy_i}{dx_1}\,\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt} - \ldots$$

$$+ \frac{d^2\left(\frac{dV}{dx_2}\right)}{dt^2} \qquad + \frac{d^2\left(\frac{dy_2}{dx_2}\,\frac{dV}{dy_2}\right)}{dt^2} + \ldots + \frac{d^2\left(\frac{dy_i}{dx_2}\,\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt^2} + \ldots$$

$$- \frac{d^3\left(\frac{dV}{dx_3}\right)}{dt^3} \qquad - \ldots - \frac{d^3\left(\frac{dy_i}{dx_3}\,\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt^3} - \ldots$$

$$+ \ldots\ldots \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\pm \frac{d^{i+1}\left(\frac{dV}{dx_{i+1}}\right)}{dt^{i+1}}$$

Considérons, dans ce développement, la colonne dont le rang est $i+2$, laquelle est, comme on le voit,

$$\frac{dy_i}{dx}\,\frac{dV}{dy_i}-\frac{d\left(\frac{dy_i}{dx_1}\,\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt}+\frac{d^2\left(\frac{dy_i}{dx_2}\,\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt^2}-\ldots\pm\frac{d^{i+1}\left(\frac{dV}{dx_{i+1}}\right)}{dt^{i+1}}\,;$$

en la développant et ordonnant suivant les différentielles successives de $\frac{dV}{dy_i}$, on pourra lui donner la forme suivante :

$$\begin{array}{r|l|l|l}
\frac{dy_i}{dx} & \frac{dV}{dy_i}-\frac{dy_i}{dx_1} & \frac{d\left(\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt}+\frac{dy_i}{dx_2} & \frac{d^2\left(\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt^2}-\ldots\pm\frac{dy_i}{dx_i}\,\frac{d^i\left(\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt^i} \\
-\frac{d\left(\frac{dy_i}{dx_1}\right)}{dt} & +2\,\frac{d\left(\frac{dy_i}{dx_2}\right)}{dt} & -3\,\frac{d\left(\frac{dy_i}{dx_3}\right)}{dt} & +\ldots \\
+\frac{d^2\left(\frac{dy_i}{dx_2}\right)}{dt^2} & -3\,\frac{d^2\left(\frac{dy_i}{dx_3}\right)}{dt^2} & +\ldots\ldots & \\
-\frac{d^3\left(\frac{dy_i}{dx_3}\right)}{dt^3} & +\ldots\ldots & \pm\frac{i}{1}\cdot\frac{i-1}{2}\,\frac{d^{i-2}\left(\frac{dy_i}{dx_i}\right)}{dt^{i-2}} & \\
+\ldots\ldots & \pm i\,\frac{d^{i-1}\left(\frac{dy_i}{dx_i}\right)}{dt^{i-1}} & & \\
\pm\frac{d^i\left(\frac{dy_i}{dx_i}\right)}{dt^i} & & &
\end{array}$$

Or, les coefficiens des termes,

$$\frac{dV}{dx_i}\,,\quad\frac{d\left(\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt}\,,\quad\frac{d^2\left(\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt^2},\ldots\ldots\frac{d^{i-1}\left(\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt^{i-1}}\,,$$

de ce développement, égalés séparément à zéro, ne sont autre chose que les équations de condition qui exprimeraient que $y_i \mathrm{d}t^i$ est une différentielle exacte de l'ordre i; ces coefficiens doivent donc être nuls d'eux-mêmes, puisque $y_1 \mathrm{d}t^i$ est en effet une telle différentielle; ce développement se réduit donc simplement à son dernier terme $\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x_i} \frac{\mathrm{d}^i\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y_i}\right)}{\mathrm{d}t^i}$; c'est donc aussi à ce dernier terme que se réduit la $(i+2)^{\text{me}}$ colonne du développement de X'; d'où il suit que ce développement lui-même se réduit à

$$X'=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x_1}\right)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x_2}\right)}{\mathrm{d}t^2}-\ldots\ldots\pm\frac{\mathrm{d}^n\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x_n}\right)}{\mathrm{d}t^n}$$

$$+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}-\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x_1}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y_1}\right)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x_2}\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y_2}\right)}{\mathrm{d}t^2}-\ldots\pm\frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x_n}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y_n}\right)}{\mathrm{d}t^n};$$

mais il est visible que

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x_1}=\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x_2}=\ldots\ldots\ldots=\frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x_n};$$

donc, on aura

$$X'=X+Y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x};$$

puis donc que la condition d'intégrabilité est, dans le cas présent, $X'=0$, cette condition sera

$$X\mathrm{d}x+X\mathrm{d}y=0 \qquad \text{ou} \qquad Xx_1+Yy_1=0\,.$$

Cette conclusion est exactement celle de Lagrange dans sa 21.e leçon sur le *Calcul des fonctions* (*).

(*) Voyez la page 412 de l'édition in-8.° ou la page 12 du supplément in-4°.

ANALISE ÉLÉMENTAIRE.

Sur le développement en fraction continue des racines des équations numériques du second degré ;

Par M. ***.

On sait que toute racine d'une équation numérique du second degré est développable en une fraction continue périodique, soit immédiatement soit après un certain nombre de fractions intégrantes, et qu'à l'inverse la valeur complète d'une telle fraction est toujours racine d'une équation du second degré, qui peut toujours en être déduite.

Mais l'habitude où l'on est de n'admettre que des fractions intégrantes dont le numérateur est l'unité, fait que souvent, dans le développement des racines d'une équation du second degré en fraction continue, la périodicité ne se manisfeste que très-tard, soit parce que les périodes sont précédées d'un grand nombre de fractions intégrantes qui leur sont étrangères, soit parce que ces périodes elles mêmes sont composées d'un grand nombre de telles fractions, soit enfin parce que ces deux circonstances ont lieu à la fois.

Soit, par exemple, l'équation du second degré

$$x^2+7x-2=0\ ;$$

en la traitant par la méthode de Lagrange, il faut calculer huit transformées

transformées avant de pouvoir reconnaître la périodicité du développement de x en fraction continue, et l'on obtient finalement

$$x=\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\ldots\ldots$$

et encore ici le développement est-il immédiatement périodique.

Supposons que, la périodicité ne se manifestant ainsi que d'une manière tardive, on veuille déterminer, avec une approximation convenue à l'avance, la valeur de x dont on a le développement ; il pourra arriver de deux choses l'une ; ou bien le développement convergera assez rapidement pour qu'on ait atteint l'approximation désirée avant d'avoir épuisé la première période, auquel cas la périodicité ne sera d'aucun secours ; ou bien la convergence sera peu rapide, et alors on sera obligé de calculer un grand nombre de réduites, avant d'en rencontrer une qui remplisse l'objet qu'on a en vue; et c'est en particulier ce qui arrive dans l'exemple que nous avons choisi.

Les réduites consécutives sont en effet,

$$\frac{1}{3}\,,\quad \frac{1}{4}\,,\quad \frac{2}{7}\,,\quad \frac{3}{11}\,,\quad \frac{11}{40}\,,\quad \frac{80}{291}\,,\ldots\ldots\,;$$

ce qui donne, comme l'on sait, pour la limite de l'erreur qui peut affecter la dernière

$$\frac{1}{(291)^2}=\frac{1}{84681}\,,$$

d'où l'on voit qu'en s'arrêtant à la sixième on n'est pas sûr de ne faire qu'une erreur moindre qu'un millionième d'unité.

En mettant, au contraire la proposée sous cette forme

$$x=\frac{2}{7+x},$$

on en tire sur-le-champ

$$x=\cfrac{2}{7+\cfrac{2}{7+\cfrac{2}{7+\cfrac{2}{7+\dots\dots\dots}}}}$$

développement immédiatement périodique, où toutes les fractions intégrantes sont égales, ce qui facilite beaucoup le calcul des réduites. Car soient $\frac{P}{Q}$ et $\frac{P'}{Q'}$ deux réduites consécutives quelconques, on aura

$$\frac{P'}{Q'}=\frac{2}{7+\frac{P}{Q}}=\frac{2Q}{7Q+P}.$$

Mais, en outre, ces réduites convergeront beaucoup plus rapidement que celles que nous avons obtenues ci-dessus. Si on les forme, en effet, d'après la formule que nous venons d'écrire, et qu'on place en regard leurs différences consécutives, on obtiendra le tableau suivant

$$\text{Réduites......}\ \frac{2}{7},\quad \frac{14}{51},\quad \frac{102}{371},\quad \frac{742}{2699},\quad \dots\dots\dots$$

$$\text{Différences....}+\frac{4}{7.51},\ -\frac{8}{51.371},\ +\frac{16}{371.2699},\ -\frac{32}{2699.19635},\ \dots\dots$$

d'où il est aisé de voir qu'ici la quatrième réduite est déjà beaucoup plus approchée que ne l'était la sixième dans le développement précédent.

On voit, par ce qui précède, que, si

$$\frac{P}{Q}\,,\quad \frac{P'}{Q'}\,,\quad \frac{P''}{Q''}\,,$$

sont trois réduites consécutives, on aura

$$P'=2Q\,,\qquad Q'=7Q+P\,,$$

$$P''=2Q'\,,\qquad Q''=7Q'+P'\,;$$

d'où on conclura

$$P''=7P'+2P\,,\qquad Q''=7Q'+2Q\,;$$

c'est-à-dire que les numérateurs ainsi que les dénominateurs des réduites successives forment une suite récurrente, dont l'échelle de relation est composée des deux termes 7 et 2 ; en conséquence de quoi on trouve, par les théories connues, pour la réduite générale du rang n.

$$\frac{2.7^{n-1}+\frac{n-2}{1}.2^2.7^{n-3}+\frac{n-3}{1}.\frac{n-4}{2}.2^3.7^{n-5}+\frac{n-4}{1}.\frac{n-5}{2}.\frac{n-6}{3}2^4.7^{n-7}+\ldots.}{7^n+\frac{n-1}{1}.2.7^{n-2}+\frac{n-2}{1}.\frac{n-3}{2}2^2.7^{n-4}+\frac{n-3}{1}.\frac{n-4}{2}.\frac{n-5}{3}2^3.7^{n-6}+\ldots..}$$

et pour sa différence avec la suivante, ou la limite de l'erreur qui l'affecte

$$\frac{2}{7}.\frac{2^n}{\left(7^n+\frac{n-1}{1}2.7^{n-2}+\frac{n-2}{1}.\frac{n-3}{2}2^2.7^{n-4}+\ldots\right)\left(7^n+\frac{n}{1}2.7^{n-2}+\frac{n-1}{1}.\frac{n-2}{2}2^2.7^{n-4}+\ldots\right)}.$$

A l'aide de ces formules, on trouvera immédiatement, et sans passer par le calcul des réduites intermédiaires que, par exemple, la dixième réduite est

$$\frac{2.7^9+8.2^2.7^7+21.2^3.7^5+20\;2^4.7^3+5.2^5.7}{7^{10}+9.2.7^8+28.2^2.7^6+35.2^3.7^4+15.2^4.7^2+2^5},$$

c'est-à-dire,

$$\frac{109995046}{400092427};$$

et qu'elle n'est pas fautive de la fraction

$$\frac{2}{7}.\frac{1024}{400092427.415816005}=\frac{2048}{116455384.2381258945},$$

de sorte que, dans son développement en décimales, on peut compter, en toute sûreté, sur les 13 premiers chiffres après la virgule.

Généralement, si l'on a l'équation du second degré

$$x^2+qx-p=0,$$

où nous supposons p et q entiers positifs, on en tirera d'abord

$$x=\frac{p}{q+x};$$

et, par suite,

$$x=\cfrac{p}{q+\cfrac{p}{q+\cfrac{p}{q+\dotsb}}}$$

développement qui finira toujours par devenir convergent, quand bien même p serait plus grand que q; mais dont la convergence sera d'ailleurs d'autant plus rapide que p et q seront de plus grands nombres et qu'en même temps la fraction $\frac{p}{q}$ sera plus petite. C'est ce qu'on aperçoit clairement en observant qu'ici la n.me réduite est

$$\frac{pq^{n-1}+\frac{n-2}{1}p^2q^{n-3}+\frac{n-3}{1}\cdot\frac{n-4}{2}p^3q^{n-5}+\frac{n-4}{1}\cdot\frac{n-5}{2}\cdot\frac{n-6}{3}p^4q^{n-7}+\ldots\ldots\ldots}{q^n+\frac{n-1}{2}pq^{n-2}+\frac{n-2}{1}\cdot\frac{n-3}{2}p^2q^{n-4}+\frac{n-3}{1}\cdot\frac{n-4}{2}\cdot\frac{n-5}{3}p^3q^{n-6}+\ldots\ldots\ldots}$$

et que sa différence avec la suivante ou la limite de l'erreur qui l'affecte est

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{p^n}{\left(q^n+\frac{n-1}{1}pq^{n-2}+\frac{n-2}{1}\cdot\frac{n-3}{2}p^2q^{n-4}+\ldots\right)\left(q^n+\frac{n}{1}pq^{n-2}+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}p^2q^{n-4}+\ldots\right)}.$$

Mais, toute équation du second degré dont les deux racines sont réelles ne saurait être mise immédiatement sous la forme

$$x^2+qx-p=0\ ,$$

de manière du moins que les deux nombres p et q soient entiers positifs très-grands, et le dernier beaucoup plus grand que l'autre; et conséquemment une de ses racines ne saurait être mise immédiatement sous la forme

$$x=\cfrac{p}{q+\cfrac{p}{q+\cfrac{p}{q+\ldots\ldots}}}$$

avec les mêmes conditions. Voyons donc ce qu'il y aura à faire, lorsque l'équation sera quelconque.

Pour plus de généralité, admettons un coefficient au premier terme, et soit la proposée

$$Ax^2+Bx+C=0\ ,$$

A, B, C étant des nombres entiers, et les deux derniers pouvant être indistinctement supposés positifs ou négatifs. En multipliant cette équation par n^2A, où n est un nombre entier arbitraire, positif ou négatif, l'équation résultante pourra être mise sous cette forme

$$(nAx)^2+nB(nAx)+n^2AC=0 ,$$

puis, sous celle-ci,

$$(nAx-k+k)^2+nB(nAx-k+k)+n^2AC=0 ,$$

où k est un autre nombre entier arbitraire. En développant et ordonnant par rapport à $nAx-k$, cette équation deviendra

$$(nAx-k)^2+(2k+nB)(nAx-k)+(k^2+nBk+n^2AC)=0 ;$$

en posant donc

$$2k+nB=q , \qquad -(k^2+nBk+n^2AC)=p ,$$

nous aurons

$$(nAx-k)^2+q(nAx-k)=p ,$$

d'où

$$nAx-k=\cfrac{p}{q+\cfrac{p}{q+\cfrac{p}{q+\dotsb}}}$$

et par suite

$$x=\frac{1}{nA}\left(k+\cfrac{p}{q+\cfrac{p}{q+\cfrac{p}{q+\dotsb}}}\right)$$

tout se réduit donc à profiter de l'indétermination des deux nombres n et k, pour faire en sorte que p et q soient deux nombres positifs les plus grands possibles, de manière que q soit le plus grand des deux.

D'abord, quelque valeur positive ou négative qu'on donne à k, pourvu que l'on prenne n de même signe que B et d'une grandeur suffisante, on pourra toujours rendre q positif, et si grand qu'on le voudra. En second lieu, si l'on remarque que l'équation

$$x^2+nBx+n^2AC=0$$

n'est autre chose que la proposée dont on aurait multiplié les racines par nA, on en conclura qu'à moins que cette dernière n'ait ses deux racines imaginaires, il doit y avoir, pourvu toutefois qu'on ait pris n assez grand, un certain nombre de valeurs entières k, k', k'';..... de x qui donnent des résultats négatifs, et par conséquent p positif; il ne s'agira donc que de prendre pour k celle des deux plus voisines des résultats positifs qui donnera une plus grande valeur à q.

Soit, par exemple, l'équation

$$3x^2-12x+11=0 .$$

Nous aurons ici $A=3$, $B=-12$, $C=11$, ce qui nous donnera

$$q=2k-12n , \qquad p=-k^2+12nk-33n^2 .$$

A cause de B négatif, il conviendra de prendre n négatif aussi; faisons-le donc égal à -10; nous aurons ainsi

$$q=2k+120 , p=-k^2-120k-3300.$$

Il est clair que, pour rendre p positif, il faudra prendre k négatif; mais, afin que q soit positif aussi, il faudra que k n'excède pas 59. En ne plaçant ici que les substitutions de -40 à -45, les seules qui puissent offrir des résultats utiles, nous obtiendrons le tableau suivant :

$$\begin{array}{lll}
k=-40\,, & q=40\,, & p=-100\,,\\
-41\,, & 38\,, & -\ 61\,,\\
-42\,, & 36\,, & -\ 24\,,\\
-43\,, & 34\,, & +\ 11\,,\\
-44\,, & 32\,, & +\ 44\,,\\
-45\,, & 30\,, & +\ 75\,.
\end{array}$$

On voit que la valeur $k=-43$ est celle qu'il faut adopter, puisqu'en même temps qu'elle rend p et q positifs, elle donne $p<q$; en faisant donc, dans la formule générale,

$$n=-10\,,\quad A=3\,,\quad k=-43\,,\quad p=11\,,\quad q=34\,,$$

nous aurons, pour le développement de l'une des racines de la proposée,

$$x=\frac{1}{30}\left(43-\cfrac{11}{34+\cfrac{11}{34+\cfrac{11}{34+\ldots\ldots}}}\right.$$

Si nous eussions fait $n=7$, nous aurions eu

$$q=2k-84\,,\qquad p=-k^2+84k-1617\,;$$

faisant alors pour k les substitutions de 50 à 55, nous aurions eu

$$\begin{array}{lll}
k=50\,, & q=16\,, & p=+83\,,\\
51\,, & 18\,, & +66\,,\\
52\,, & 20\,, & +47\,,\\
53\,, & 22\,, & +26\,,\\
54\,, & 24\,, & +\ 3\,,\\
55\,, & 26\,, & -22\,;
\end{array}$$

d'où l'on voit qu'ici la valeur de k qu'il faut adopter comme rendant

dant p le plus petit possible par rapport à q est $k=54$; faisant donc

$$n=7\ ,\qquad k=54\ ,\qquad p=3\ ,\qquad q=24\ ,$$

et substituant dans la formule générale, nous aurons

$$x=\frac{1}{21}\left(54+\frac{3}{24}+\frac{3}{24}+\frac{3}{24}+\dots\right.$$

développement plus simple et plus convergent que le précédent, et dans lequel l'emploi des trois premières fractions intégrantes suffit pour ne pas rendre la valeur de x fautive d'un dix millionième d'unité.

Le rapprochement des deux résultats auxquels nous venons de parvenir prouve donc que si, en général, il est avantageux de prendre un grand nombre pour n, la nature individuelle de ce nombre influe beaucoup aussi sur la convergence du développement, tellement qu'un plus petit nombre peut quelquefois le rendre plus convergent que ne le pourrait faire un plus grand.

La même équation, traitée par la méthode de Lagrange, donne

$$x=2+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\dots$$

développement dans lequel il faut admettre dix fractions intégrantes au moins, pour que la valeur de x ne soit pas fautive d'un millionième d'unité.

Dès qu'on a le développement de l'une des racines de la proposée, rien n'est plus facile que d'obtenir celui de l'autre ; leur somme étant en effet $-\frac{B}{A}$ ou $-\frac{nB}{nA}$, cette dernière doit avoir pour expression

$$x=-\frac{1}{nA}\left(nB+k+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\ldots\ldots\right.$$

On doit remarquer, au surplus, que, bien que le développement de l'une des racines d'une équation du second degré soit rationnel, ce n'en est pas moins une fonction biforme, comme celles qui renferment un radical du second degré; puisqu'au moyen de ce développement on peut remonter à l'équation dont il est racine, et assigner ensuite l'autre racine de cette équation. Un tel développement *exprime* donc implicitement les deux racines de la proposée, bien qu'il puisse n'être propre qu'à l'*évaluation* de l'une d'elles.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstration d'un théorème énoncé dans le Philosophical Magazine, *pour septembre* 1823;

Par M. GERGONNE.

EUCLIDE et la plupart des géomètres de nos jours, pour démontrer la propriété des carrés construits sur les trois côtés d'un triangle rectangle, tirent des droites des sommets des deux angles aigus du triangle dont il s'agit aux sommets opposés des carrés construits sur les deux côtés de l'angle droit, et abaissent en outre du sommet de ce dernier angle une perpendiculaire sur l'hypothénuse.

Dans le numéro de septembre 1823 du *Philosophical Magazine* (pag. 236), M. *J. HAMETT* propose de démontrer que ces trois droites se coupent en un même point: c'est là une chose très-facile, comme on va le voir.

Soient C le sommet de l'angle droit, A celui du plus grand des deux angles aigus et B le sommet du plus petit.

Soient P le sommet opposé à A du carré construit sur CB et Q le sommet opposé à B du carré construit sur CA.

Menons AP et BQ, coupant respectivement CB et CA en A′ et B′, et abaissons du sommet C, sur l'hypothénuse AB, la perpendiculaire CC′.

Les triangles rectangles semblables PBA′ et ACA′ donneront

$$\frac{BA'}{CA'}=\frac{BP}{CA}=\frac{CB}{CA} .$$

Les triangles rectangles semblables QAB′ et BCB′ donneront pareillement

$$\frac{CB'}{AB'}=\frac{CB}{AQ}=\frac{CB}{CA} .$$

On a enfin, par la propriété connue du triangle rectangle,

$$\frac{AC'}{BC'}=\frac{\overline{CA}^2}{\overline{CB}^2} .$$

En multipliant ces trois équations membre à membre, il vient, en réduisant,

$$\frac{AC'.CB'.BA'}{CA'.AB'.BC'}=1 ,$$

c'est-à-dire

$$AC'.CB'.BA'=CA'.BC'.AB' ;$$

or, il est connu de tous ceux qui n'ont pas cru devoir borner leurs études géométriques aux élémens d'Euclide, que, lorsque trois points A′, B′, C′ sont situés sur les côtés respectifs BC, CA, AB d'un triangle ABC, de manière à satisfaire à cette condition, les droites AA′, BB′, CC′ se coupent toutes trois au même point. Le théorème se trouve donc complètement démontré.

Cette démonstration, quelque simple et rigoureuse qu'elle soit, pourra fort bien ne pas complètement remplir l'attente de M. Hamett, qui désire qu'on ne s'y appuie sur aucune proposition postérieure à la XLVII.e d'Euclide; mais il y en a dans Euclide, avant celle-là, beaucoup plus qu'il n'en faut pour démontrer les propriétés des triangles semblables, desquelles on déduit ensuite immédiatement le théorème sur lequel nous nous sommes appuyés. Il n'y a donc point de cercle vicieux dans tout ceci, et il ne s'agira que de disposer les propositions d'Euclide dans un ordre un peu différent; ce qu'on peut sans doute se permettre sans se rendre coupable de sacrilége.

QUESTIONS PROPOSÉES.

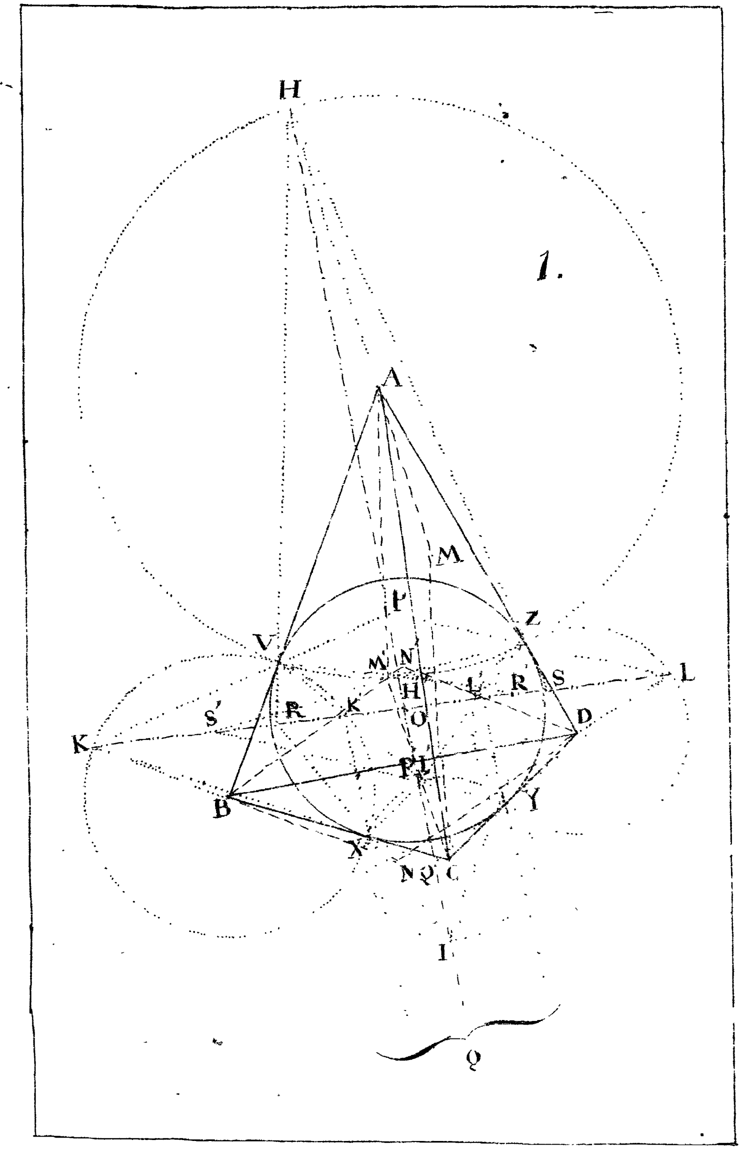
Problèmes de Géométrie.

I. A un même tétraèdre régulier donné on peut en inscrire une infinité d'autres, réguliers comme lui. On demande 1.° quel sera sur les faces du tétraèdre donné le lieu des sommets des tétraèdres ainsi inscrits; 2.° sur quelle surface gauche se trouveront leurs arêtes; 3.° enfin à quelle surface courbe leurs faces seront tangentes?

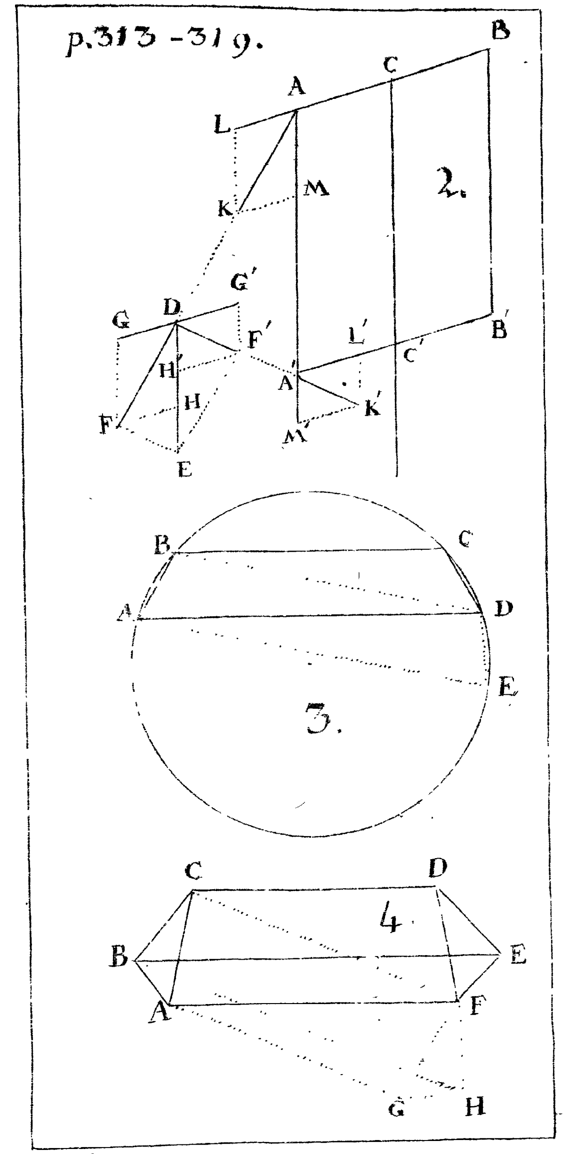
II. A un même tétraèdre régulier donné on peut en circonscrire une infinité d'autres, réguliers comme lui. On demande 1.° à quelle courbe à double courbure appartiendront les sommets des tétraèdres ainsi circonscrits; 2.° sur quelle surface gauche se trouveront leurs arêtes; 3.° enfin à quelle surface courbe leurs faces seront tangentes? (*)

(*) Nous prenons ici les mots *inscrit* et *circonscrit* dans le sens le plus large; c'est-à-dire que nous entendons qu'un polyèdre est inscrit à un autre, lorsque les sommets du premier sont sur les plans des faces du second, *prolongés s'il est nécessaire*; et que nous entendons qu'un polyèdre est circonscrit à un autre, lorsque les plans des faces du premier, *prolongés s'il est nécessaire*, contiennent les sommets du second.

Tom. XIV, plan. IV, pag. 309 - 337.



p. 313 - 319.



I.D.G. fecit.

ANALISE ALGÉBRIQUE.

Sur le calcul des fractions continues périodiques.

Par M. ***

DANS un précédent article nous avons fait voir que les racines des équations du second degré pouvaient toujours être exprimées par des fractions continues de la forme très-simple

$$\frac{p}{q+\frac{p}{q+\frac{p}{q+\dots}}}$$

où les périodes, d'un seul terme, se présentent immédiatement. Cette remarque donnant aux fractions continues de cette forme un nouveau degré d'intérêt, on peut se proposer de les combiner avec des quantités rationnelles de toutes les manières qui naissent de la diversité des opérations du calcul, et d'obtenir le résultat en fraction continue de même forme qu'elles; et tel est le sujet qui va nous occuper.

Soit

$$x=\frac{p}{q+\frac{p}{q+\frac{p}{q+\dots\dots\dots}}}$$

une fraction continue donnée, équivalente conséquemment à une des racines de l'équation

$$x^2+qx=p\ ;$$

et soit k un nombre rationnel donné. Si d'abord on veut avoir leur somme, en représentant cette somme par y, on aura

$$y=x+k\ , \qquad \text{d'où} \qquad x=y-k\ ;$$

au moyen de quoi l'équation du second degré deviendra

$$(y-k)^2+q(y-k)=p\ ,$$

ou, en développant et ordonnant

$$y^2+(q-2k)y=p+qk-k^2\ ,$$

ce qui donne

$$y=\frac{p+qk-k^2}{q-2k+y}\ ;$$

de sorte qu'on aura

$$\text{(I)}\quad \left\{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\ldots\right\}+k=\frac{p+qk-k^2}{q-2k}+\frac{p+qk-k^2}{q-2k}+\frac{p+qk-k^2}{q-2k}+\ldots$$

En changeant le signe de k, dans cette formule, elle devient

$$\text{(II)}\quad \left\{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\ldots\right\}-k=\frac{p-qk-k^2}{q+2k}+\frac{p-qk-k^2}{q+2k}+\frac{p-qk-k^2}{q+2k}+\ldots$$

tel est donc le reste qu'on obtient en retranchant de notre fraction continue un nombre rationnel donné.

On peut encore écrire

$$\left\{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\ldots\right\}-k=-\frac{k^2+qk-p}{2k+q}-\frac{k^2+qk-p}{2k+q}-\frac{k^2+qk-p}{2k+q}-\ldots$$

équation qui devient, en changeant les signes

$$\text{(III)}\ k-\left\{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\ldots\right\}=\frac{k^2+qk-p}{2k+q}-\frac{k^2+qk-p}{2k+q}-\frac{k^2+qk-p}{2k+q}-\ldots$$

tel est donc le résultat qu'on obtient, en retranchant notre fraction continue d'un nombre rationnel donné.

Si, dans cette dernière formule, on fait $k=-q$, elle deviendra

$$-q-\left\{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\ldots\right\}=\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\ldots$$

ce qui nous montre qu'on ne change rien à une fraction continue de la nature de celles que nous considérons ici en la retranchant du dénominateur commun de ses fractions intégrantes, pris en signe contraire.

On sait que, dans l'équation

$$x^2+qx=p\ ,$$

la somme des racines est $-q$; d'où il suit qu'en retranchant l'une d'elles de $-q$, on doit avoir l'autre pour reste; puis donc qu'en retranchant de $-q$ une des racines, mise sous forme de fraction continue, on trouve cette même fraction continue pour reste; il s'ensuit que, comme nous l'avons déjà fait observer dans le précédent article, une fraction continue périodique exprime implicitement les deux racines d'une équation du second degré; de sorte que, bien que rationnelle, ce n'en est pas moins une fonction biforme, susceptible, comme l'expression finie des racines de ces sortes d'équations, de passer du réel à l'imaginaire. C'est ce qui arrive, en effet, lorsque le numérateur commun des fractions intégrantes est négatif et plus grand que le quart du quarré de leur dénominateur commun. Aussi arrive-t-il alors que les réduites consécutives cessent d'être convergentes.

Cette remarque donne l'explication d'une sorte de paradoxe que semble offrir l'équation

$$-q-\left\{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\ldots\right\}=\left\{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\ldots\right\};$$

elle donne, en transposant,

$$\left\{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\ldots\right\}+\left\{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\ldots\right\}=-q;$$

mais il faudrait bien se garder d'en conclure, comme on semblerait fondé à le faire,

$$\left\{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\ldots\right\}=-\frac{q}{2},$$

attendu que, dans le premier membre de l'équation qui précède immédiatement cette dernière, les deux fractions continues, bien que de même forme, doivent être réputées exprimer des racines différentes. On voit par là, pour le dire en passant, avec quelle circonspection on doit raisonner sur ces sortes de développemens.

Soit toujours

$$x=\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\ldots$$

une fraction continue donnée, et désignons par y le produit de sa multiplication par un nombre rationnel k ; nous aurons ainsi

$$y=kx\ , \quad \text{d'où} \quad x=\frac{y}{k}\ ;$$

mettant cette valeur dans l'équation

$$x^2+qx=p\ ,$$

elle deviendra

$$y^2+kqy=k^2p\ ;$$

d'où

$$y=\frac{k^2p}{kq+y}\ ;$$

de sorte qu'on aura

$$\text{(IV)}\ \left\{\cfrac{p}{q+\cfrac{p}{q+\cfrac{q}{q+\ldots}}}\right\}.\ k=\cfrac{k^2p}{kq+\cfrac{k^2p}{kq+\cfrac{k^2p}{kq+\ldots}}}$$

c'est-à-dire qu'on multiplie une fraction continue périodique de la nature de celles que nous considérons ici par un multiplicateur rationnel quelconque, en multipliant simplement les numérateurs de ses fractions intégrantes par le quarré et leurs dénominateurs par la première puissance de ce multiplicateur.

On conclut de là ou bien du changement de k en $\frac{1}{k}$

$$\text{(V)}\ \frac{\cfrac{p}{q+\cfrac{p}{q+\cfrac{p}{q+\ldots}}}}{k}=\cfrac{\frac{p}{k^2}}{\frac{p}{k}+\cfrac{\frac{p}{k^2}}{\frac{q}{k}+\cfrac{\frac{p}{k^2}}{\frac{q}{k}+\ldots}}}$$

Si l'on divise l'unité par les deux membres de cette dernière équation, il vient, toutes réductions faites

$$\text{(VI)}\qquad \cfrac{k}{\cfrac{p}{q+\cfrac{p}{q+\cfrac{p}{q+\dotsb}}}} = -\cfrac{\frac{k^2}{p}}{\frac{qk}{p}+\cfrac{\frac{k^2}{p}}{\frac{qk}{p}+\cfrac{\frac{k^2}{p}}{\frac{qk}{p}+\dotsb}}}$$

Si, dans cette dernière formule, on fait $k=-p$, il viendra

$$\cfrac{-p}{\cfrac{p}{q+\cfrac{p}{q+\cfrac{p}{q+\dotsb}}}} = \cfrac{p}{q+\cfrac{p}{q+\cfrac{p}{q+\dotsb}}}$$

c'est-à-dire qu'en divisant par une fraction continue de la nature de celles que nous considérons ici le numérateur commun de ses fractions intégrantes pris en moins, on obtient pour quotient cette même fraction continue.

On sait que dans l'équation

$$x^2+qx=p\,,$$

le produit des racines est $-p$; d'où il suit qu'en divisant $-p$ par l'une d'elles, on doit obtenir l'autre pour quotient ; puis donc qu'en divisant $-p$ par l'une d'elles, mise sous forme de fraction continue périodique, on obtient pour quotient cette fraction continue périodique, il s'ensuit de nouveau, comme nous l'avons déjà remarqué ci-dessus, que, sous sa forme unique, cette fraction exprime pourtant les deux racines de l'équation du second degré de laquelle elle est dérivée.

Ainsi s'explique l'espèce de paradoxe auquel semblerait donner lieu le dernier résultat que nous avons obtenu ci-dessus, lequel donne, en chassant le dénominateur,

$$\left\{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\dots\right\}\left\{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\dots\right\}=-p\,;$$

sans que toutefois on en puisse conclure, comme on semblerait autorisé à le faire,

$$\left\{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\dots\right\}=\sqrt{-p}\,.$$

La première de ces deux équations ne saurait subsister, en effet, qu'autant que les deux fractions continues, dont le produit compose son premier membre, expriment des racines différentes. Voilà donc encore une nouvelle preuve de la réserve qu'on doit apporter dans l'emploi des expressions de cette forme.

Cherchons présentement les puissances successives de la fraction continue

$$x=\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\dots$$

En représentant son quarré par y, et éliminant x entre les deux équations

$$x^2+qx=p\,,\qquad x^2=y\,,$$

il viendra

$$y^2-(q^2+2p)y+p^2=0\,;$$

ce qui donne

$$y=\frac{p^2}{(q^2+2p)-y}\,;$$

d'où

$$\left\{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\ldots\right\}^2=\frac{p^2}{q^2+2p}-\frac{p^2}{q^2+2p}-\frac{p^2}{q^2+2p}-\ldots$$

S'il s'agit du cube de la même fraction continue, en le représentant par y, on aura à éliminer x entre les deux équations

$$x^2+qx=p\ , \qquad x^3=y\ ;$$

cela donnera

$$y^2+(q^3+3pq)y=p^3\ ;$$

d'où

$$y=\frac{p3}{(q^3+3pq)+y}$$

de sorte qu'on aura

$$\left\{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\ldots\right\}^3=\frac{p^3}{q^3+3pq}+\frac{p^3}{q^3+3pq}+\frac{p^3}{q^3+3pq}+\ldots$$

En procédant d'une manière analogue pour les puissances supérieures, on trouvera successivement

$$\left\{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\ldots\right\}^4=\frac{p^4}{q^4+4pq^2+2p^2}-\frac{p^4}{q^4+4pq^2+2p^2}-\ldots\ldots$$

$$\left\{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\ldots\right\}^5=\frac{p^5}{q^5+5pq^3+5p^2q}+\frac{p^5}{q^5+5pq^3+5p^2q}+\ldots$$

$$\left\{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\ldots\right\}^6=\frac{p^6}{q^6+6pq^4+9p^2q^2+2p^3}-\frac{p^6}{q^6+6pq^4+9p^2q^2+2p^3}-\ldots$$

et, en général,

$$\left\{\cfrac{p}{q+\cfrac{p}{q+\cfrac{p}{q+..}}}\right\}^m=\cfrac{p^m}{q^m+\frac{m}{1}pq^{m-2}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-3}{2}p^2q^{m-4}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-4}{2}\cdot\frac{m-5}{3}p^3q^{m-6}+....\pm\cfrac{p^m}{q^m+....}}$$

Le signe *supérieur* ou le signe *inférieur* devant être pris, suivant que m est *pair* ou *impair*.

Quant aux racines des fractions continues périodiques, on sent qu'elles ne sauraient être développables en fractions continues périodiques rationnelles que dans des cas très-particuliers ; et en conséquence, nous ne nous en occuperons pas.

Pour les mêmes raisons, nous ne nous occuperons pas non plus de la recherche de la somme, de la différence, du produit ou du quotient de la division de deux fractions continues périodiques ; car ces résultats, étant évidemment susceptibles de quatre valeurs différentes, ne sauraient, généralement parlant, être développés en fractions continues périodiques rationnelles.

Dans les recherches qui viennent de nous occuper, nous avons souvent rencontré des fractions continues périodiques de la forme

$$x=\cfrac{p}{q-\cfrac{p}{q-\cfrac{p}{q-....}}}$$

et on peut désirer de leur substituer d'autres fractions continues dans lesquelles toutes les fractions intégrantes soient positives. C'est là une chose très-facile, au moyen d'une extension donnée à une remarque de Lagrange, sur les fractions continues dans lesquelles les numérateurs sont égaux à l'unité. Nous pouvons d'abord écrire

$$x=\cfrac{p}{q-\cfrac{p}{q-x}},$$

or, on a l'équation identique

$$q-\frac{p}{q-x}=(q-p)+\frac{p}{1}+\frac{1}{q-1-x},$$

en substituant donc, il viendra

$$x=\frac{p}{q-p}+\frac{p}{1}+\frac{1}{q-1-x},$$

et par conséquent

$$x=\frac{p}{q-p}+\frac{p}{1}+\frac{1}{q-1}-\frac{p}{q-p}+y$$

en posant, pour abréger,

$$y=\frac{p}{1}+\frac{1}{q-1-x}.$$

Mais, par une transformation analogue, on trouve

$$q-1-\frac{p}{q-p+y}=(q-p-1)+\frac{p}{1}+\frac{1}{q-p-1+y};$$

donc, en substituant et mettant pour y sa valeur,

$$x=\frac{p}{q-p}+\frac{p}{1}+\frac{1}{q-p-1}+\frac{p}{1}+\frac{1}{q-p-1}+\frac{p}{1}+\frac{1}{q-p-1}+\dots$$

Mais, pour que cette transformation conduise au but, encore faut-il que q soit plus grand que $p+1$; et l'on n'obtient finalement qu'une fraction continue peu convergente, qui n'est plus immédiatement périodique et dont les périodes ont deux termes.

Au surplus, il résulte, de ce qui a été dit dans l'article auquel celui-ci fait suite, que, quelle que soit une fraction continue périodique, on peut toujours, à moins qu'elle n'exprime des imaginaires, la ramener, et même d'une infinité de manières différentes, à la forme

$$\frac{1}{n}\left(k+\frac{p}{q+\frac{p}{q+\frac{p}{q+\ldots}}}\right.$$

où n, k, p, q sont des nombres entiers positifs.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Loi du développement de la tangente en fonction de l'arc ;

Par M. L. C. Bouvier, ex-officier du génie, ancien élève de l'école polytechnique.

Soit qu'on divise l'une par l'autre les deux séries qui donnent le sinus et le cosinus en fonction de l'arc, ou qu'on emploie tout autre procédé, on obtient également

$$\text{Tang.}x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+\frac{1382}{155925}x^{11}+\frac{21844}{6081075}x^{13}+\ldots;$$

série connue depuis long-temps, mais qu'on n'a pas enseigné à prolonger à la seule inspection de ses premiers termes, faute de connaître la loi qui la régit.

Toute la difficulté se réduit à découvrir à quelle loi sont assujettis les coefficiens numériques consécutifs

$$1\,,\ \frac{1}{3}\,,\ \frac{2}{15}\,,\ \frac{17}{315}\,,\ \frac{62}{2835}\,,\ \frac{1382}{155925}\,,\ \frac{21844}{6081075}\,,\ldots$$

or, cette loi, la voici :

Un certain nombre de termes étant déjà calculé, prenez, dans la série de ces termes, le double de la somme des produits tant des extrêmes que des termes également distans des extrêmes, ajoutez-y le quarré du terme du milieu, si le nombre des termes est impair ; en divisant le résultat par l'exposant que doit avoir le terme que vous voulez calculer, vous obtiendrez le coefficient de ce terme. On trouve en effet successivement

$$\frac{1}{3}=\frac{1^2}{3}\,,$$

$$\frac{2}{15}=\frac{2.1.\frac{1}{3}}{5}\,,$$

$$\frac{17}{315}=\frac{2.1.\frac{2}{15}+\left(\frac{1}{3}\right)^2}{7}\,,$$

$$\frac{62}{2835}=\frac{2\left(1.\frac{17}{315}+\frac{1}{3}.\frac{2}{15}\right)}{9}$$

$$\frac{1382}{155925}=\frac{2\left(1.\frac{62}{2835}+\frac{1}{3}.\frac{17}{315}\right)+\left(\frac{2}{15}\right)^2}{11}\,,$$

$$\frac{21844}{6081075}=\frac{2\left(1.\frac{1382}{155925}+\frac{1}{3}.\frac{62}{2835}+\frac{2}{15}.\frac{17}{315}\right)}{13},$$

et ainsi de suite (*).

(*) Ceci n'est encore qu'une induction, et c'est sans doute déjà beaucoup ; mais on peut prouver aisément que telle est en effet la loi de la série. Posons en effet

$$\text{Tang.}x=Ax+Bx^3+Cx^5+Dx^7+Ex^9+Fx^{11}+\ldots\ldots, \qquad (1)$$

où l'on voit déjà que A doit être égal à l'unité ; en différentiant deux fois consécutivement, il viendra

$$\frac{1}{\text{Cos}^2x}=A+3Bx^2+5Cx^4+7Dx^6+9Ex^8+11Fx^{10}+\ldots\ldots, \qquad (2)$$

$$\frac{\text{Tang.}x}{\text{Cos.}^2x}=1.3Bx+2\,5Cx^3+3.7Dx^5+4.9Ex^7+5.11Fx^9+\ldots\ldots \qquad (3)$$

Comparant ensuite le produit des équations (1) et (2) à l'équation (3), on aura

$$(A+3Bx^2+5Cx^4+7Dx^6+9Ex^8+\ldots)(Ax+Bx^3+Cx^5+Dx^7+Ex^9+\ldots)$$
$$=1.3Bx+2\,5Cx^3+3.7Dx^5+4.9Ex^7+5.11Fx^9+\ldots,$$

ou, en développant le premier membre et ordonnant,

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|l}
A^2x+AB & x^3+AC & x^5+AD & x^7+AE & x^9+AF & x^{11}+\ldots\ldots \\
+3AB & +3B^2 & +3BC & +3BD & +3BE & +\ldots\ldots \\
 & +5AC & +5BC & +5C^2 & +5CD & +\ldots\ldots \\
 & & +7AD & +7BD & +7CD & +\ldots\ldots \\
 & & & +9AE & +9BE & +\ldots\ldots \\
 & & & & 11AF & +\ldots\ldots \\
 & & & & & +\ldots\ldots
\end{array}$$

$$=1.3Bx+2.5Cx^3+3.7Dx^5+4.9Ex^7+5.11Fx^9+\ldots\ldots$$

ANALISE ALGÉBRIQUE.

Recherches d'analise sur les fonctions, avec application à la démonstration du parallélogramme des forces;

Par un ABONNÉ.

DANS des recherches physico-mathématiques, on rencontre quelquefois des équations de quelqu'une des formes suivantes :

La loi de ces résultats est manifeste : on peut les prolonger en toute sécurité aussi loin qu'on le voudra, et on voit qu'ils donneront, en réduisant,

$$A^2x+\left.\begin{array}{r}4ABx^3+6AC\\+3B^2\end{array}\right|\left.\begin{array}{r}x^5+8AD\\+8BC\end{array}\right|\left.\begin{array}{r}x^7+10AE\\+10BD\\+5C^2\end{array}\right|\left.\begin{array}{r}x^9+12AF\\+12BE\\+12CD\end{array}\right|x^{11}+\dots$$

$$=1.3Bx+2.5Cx^3+3.7Dx^5+4.9Ex^7+5.11Fx^9+\dots$$

En exprimant donc que cette dernière équation a lieu quel que soit x et réduisant, il viendra

$$3B=A^2\,,$$

$$5C=2AB\,,$$

$$7D=2AC+B^2\,,$$

$$9E=2(AD+BC)\,,$$

$$\varphi(t)+\varphi(u)=\varphi(t+u) \; ,$$

$$\varphi(t)+\varphi(u)=\varphi(tu) \; ,$$

$$\varphi(t).\varphi(u)=\varphi(t+u) \; ,$$

$$\varphi(t).\varphi(u)=\varphi(tu) \; ;$$

dans lesquelles la forme de la fonction φ est l'inconnue du problème. Nous allons, dans ce qui va suivre, montrer comment on peut déterminer, pour chaque cas, la nature de la fonction φ ; nous appliquerons ensuite à un exemple les résultats que nous aurons obtenus.

I. Si, dans l'équation

$$\varphi(t)+\varphi(u)=\varphi(t+u) \; , \qquad (1)$$

on change u en $u+v$, elle devient

$$\varphi(t)+\varphi(u+v)=\varphi(t+u+v) \; ;$$

mais, en vertu de la proposée

$$11F=2(AE+BD)+C^2 \; ,$$

$$13G=2(AF+BE+CD) \; ,$$

$$15H=2(AG+BF+CE)+D^2 \; ,$$

et ainsi de suite, ce qui démontre la loi annoncée.

Ces résultats, auxquels il serait aisé de parvenir, sans rien emprunter du calcul différentiel, peuvent servir de supplément à ce qui a déjà été publié dans ce recueil (tom. III, pag. 344).

J. D. G.

$$\varphi(u+v)=\varphi(u)+\varphi(v) \;;$$

donc, en substituant

$$\varphi(t)+\varphi(u)+(v)=(t+u+v) \;;$$

en supposant ensuite que v se change en $v+x$, on trouvera, par de semblables considérations que

$$\varphi(t)+\varphi(u)+\varphi(v)+\varphi(x)=\varphi(t+u+v+x) \;;$$

et en général

$$\varphi(t)+\varphi(u)+\varphi(v)+\ldots\ldots=\varphi(t+u+v+\ldots\ldots). \qquad (2)$$

Si l'on suppose ensuite toutes les lettres t, u, v, ... égales à t et au nombre de q, cette équation deviendra

$$q.\varphi(t)=\varphi(qt) \qquad (3)$$

où q est un nombre essentiellement entier et positif. On aurait semblablement

$$q.\varphi(u)=\varphi(qu).$$

Dans cette dernière équation, posons $qu=t$; d'où $u=\frac{1}{q}t$; ce qui donnera, en substituant,

$$q.\varphi\left(\frac{1}{q}t\right)=\varphi(t) \;,$$

d'où

$$\varphi\left(\frac{1}{q}t\right)=\frac{1}{q}\varphi(t) \;;$$

puis, en multipliant les deux membres par p,

$$p.\varphi\left(\frac{1}{q}t\right)=\frac{p}{q}\varphi(t). \qquad (4)$$

Mais

Mais si dans l'équation (3) on change q en p, elle devient

$$p.\varphi(t)=\varphi(pt) ,$$

puis, en changeant t en $\frac{1}{q}t$,

$$p.\varphi\left(\frac{1}{q}t\right)=\varphi\left(\frac{p}{q}t\right) ; \qquad (5)$$

donc, en comparant (4) et (5),

$$\frac{p}{q}\varphi(t)=\varphi\left(\frac{p}{q}t\right) ; \qquad (6)$$

et, comme les nombres entiers positifs p, q peuvent être pris aussi grands qu'on voudra, il en résulte que l'équation (3) doit avoir lieu, lors même que q est incommensurable. Il ne serait pas difficile de prouver qu'elle doit avoir lieu également lorsque q est négatif.

Si présentement on pose $\frac{p}{q}t=u$, d'où $\frac{p}{q}=\frac{u}{t}$, l'équation (6) deviendra

$$\frac{u}{t}\varphi(t)=\varphi(u)$$

ou bien

$$\frac{\varphi(t)}{t}=\frac{\varphi(u)}{u}$$

et comme t et u sont supposés deux variables indépendantes, qui ne sauraient généralement être égales entre elles, on doit en conclure

$$\frac{\varphi(t)}{t}=A , \qquad \text{d'où} \qquad \varphi(t)=At .$$

A étant une constante.

Ce résultat se vérifie d'ailleurs facilement ; il donne en effet

$$\varphi(t)=At\,, \qquad \varphi(u)=Au$$

d'où, en ajoutant,

$$\varphi(t)+\varphi(u)=At+Au=A(t+u)=\varphi(t+u)\ ;$$

comme le veut l'équation proposée.

II. Si, dans l'équation

$$\varphi(t)+\varphi(u)=\varphi(tu)\ , \qquad (1)$$

on change u en uv, puis v en vx, et ainsi de suite ; en développant successivement $\varphi(uv)$, $\varphi(vx)$, ... au moyen de cette même équation, on trouvera généralement

$$\varphi(t)+\varphi(u)+\varphi(v)+.....=\varphi(tuv.....)\ . \qquad (2)$$

Supposant ensuite que les variables t, u, v, ... toutes égales entre elles, sont au nombre de q, on aura

$$q.\varphi(t)=\varphi(t^q)\ ; \qquad (3)$$

et l'on aurait pareillement

$$q.\varphi(u)=\varphi(u^q)\ .$$

Faisant, dans cette dernière équation, $u^q=t$, d'où $u=t^{\frac{1}{q}}$, elle deviendra

$$q.\varphi(t^{\frac{1}{q}})=\varphi(t),$$

et par suite

$$\varphi(t^{\frac{1}{q}})=\frac{1}{q}\,\varphi(t)\ ;$$

puis, en multipliant les deux membres par p,

$$p.\varphi(t^{\frac{1}{q}}) = \frac{p}{q}\varphi(t) . \qquad (4)$$

Mais si, dans l'équation (3), on change q en p, elle devient

$$p.\varphi(t) = \varphi(t^p) ;$$

puis, en changeant t en $t^{\frac{1}{q}}$,

$$p.\varphi(t^{\frac{1}{q}}) = \varphi(t^{\frac{p}{q}}) ; \qquad (5)$$

donc, en comparant (4) et (5),

$$\frac{p}{q}\varphi(t) = \varphi(t^{\frac{p}{q}}) . \qquad (6)$$

et, comme les nombres entiers positifs p, q peuvent être pris aussi grands qu'on le voudra, il en résulte que l'équation (3) doit avoir lieu lors même que q est incommensurable. Il ne serait pas difficile de prouver qu'elle doit avoir lieu également, lorsque q est négatif.

Si présentement on pose $t^{\frac{p}{q}} = u$, on en tirera $\frac{p}{q} = \frac{\text{Log}.u}{\text{Log}.t}$, et l'équation (6) deviendra

$$\frac{\text{Log}.u}{\text{Log}.t}\varphi(t) = \varphi(u) ,$$

ou bien

$$\frac{\varphi(t)}{\text{Log}.t} = \frac{\varphi(u)}{\text{Log}.u} ;$$

d'où on conclura, comme ci-dessus,

$$\frac{\varphi(t)}{\text{Log}.t} = A , \qquad \text{ou} \qquad \varphi(t) = A\text{Log}.t ;$$

Ce résultat se vérifie d'ailleurs facilement ; il donne en effet

$$\varphi(t)=A\mathrm{Log}.t\,, \qquad \varphi(u)=A\mathrm{Log}.u\;;$$

d'où, en ajoutant

$$\varphi(t)+\varphi(u)=A\mathrm{Log}.t+A\mathrm{Log}.u=A(\mathrm{Log}.t+\mathrm{Log}.u)=A\mathrm{Log}.(tu)=\varphi(tu)\;,$$

comme le veut l'équation proposée.

III. Si, dans l'équation

$$\varphi(t).\varphi(u)=\varphi(t+u)\;, \qquad (1)$$

on change, tour-à-tour, u en $u+v$, v en $v+x$, et ainsi de suite, en développant successivement $\varphi(u+v)$, $\varphi(v+x)$, ..., au moyen de cette même équation, on trouvera généralement

$$\varphi(t).\varphi(u).\varphi(v)\ldots\ldots=(t+u+v+\ldots\ldots) \qquad (2)$$

supposant ensuite que les variables t, u, v, ..., toutes égales entre elles, sont au nombre de q, on aura

$$\{\varphi(t)\}\;=\varphi(qt)\;, \qquad (3)$$

et l'on aurait pareillement

$$\{\varphi(u)\}^q=\varphi(qu)\;.$$

Faisant, dans cette dernière, $qu=t$, d'où $u=\frac{1}{q}\,t$, elle deviendra

$$\left\{\varphi\left(\frac{1}{q}\,t\right)\right\}^q=\varphi(t)\;;$$

et par suite

$$\varphi\left(\frac{1}{q}\,t\right)=\{\varphi(t)\}^{\frac{1}{q}}\;;$$

puis, en élevant les deux membres à la puissance p,

$$\left\{\varphi\left(\frac{1}{q}t\right)\right\}^p=\{\varphi(t)\}^{\frac{p}{q}}. \qquad (4)$$

Mais si, dans l'équation (3), on change q en p, elle devient

$$\{\varphi(t)\}^p=\varphi(pt),$$

d'où, en changeant t en $\frac{1}{q}t$,

$$\left\{\varphi\left(\frac{1}{q}t\right)\right\}^p=\varphi\left(\frac{p}{q}t\right), \qquad (5)$$

donc, en comparant (4) à (5),

$$\{\varphi(t)\}^{\frac{p}{q}}=\varphi\left(\frac{p}{q}t\right); \qquad (6)$$

et, comme les nombres entiers positifs p et q peuvent être supposés si grands qu'on le voudra, il s'ensuit que l'équation (3) doit avoir lieu, lors même que q est incommensurable. Il ne serait pas difficile de prouver qu'elle doit avoir lieu également, lorsque q est négatif.

Si présentement on pose $\frac{p}{q}t=u$ d'où $\frac{p}{q}=\frac{u}{t}$, l'équation (6) deviendra

$$\{\varphi(t)\}^{\frac{u}{t}}=\varphi(u);$$

ou bien

$$\{\varphi(t)\}^{\frac{1}{t}}=\{\varphi(u)\}^{\frac{1}{n}};$$

d'où on conclura, comme ci-dessus,

$$\{\varphi(t)\}^{\frac{1}{t}}=A, \quad \text{ou} \quad \varphi(t)=A^t.$$

Ce résultat se vérifie d'ailleurs facilement ; il donne en effet

$$\varphi(t)=A^t\ , \qquad \varphi(u)=A^u\ ,$$

d'où, en multipliant,

$$\varphi(t).\varphi(u)=A^t.A^u=A^{t+u}=\varphi(t+u)\ ;$$

comme le veut l'équation proposée.

IV. Si, dans l'équation

$$\varphi(t).\varphi(u)=\varphi(tu)\ , \qquad (1)$$

on change tour-à-tour u en uv, v et vx, et ainsi de suite, en développant successivement $\varphi(uv)$, $\varphi(vx)$, ..., au moyen de cette même équation, on trouvera généralement

$$\varphi(t).\varphi(u).\varphi(v)\ldots\ldots=\varphi(tuv\ldots\ldots). \qquad (2)$$

Supposant ensuite que les variables t, u, v, ..., toutes égales entre elles, sont au nombre de q, on aura

$$\{\varphi(t)\}^q=\varphi(t^q)\ ; \qquad (3)$$

et l'on aurait pareillement

$$\{\varphi(u)\}^q=\varphi(u^q)\ .$$

Faisant, dans cette dernière, $u^q=t$, d'où $u=t^{\frac{1}{q}}$, elle deviendra

$$\{\varphi(t^{\frac{1}{q}})\}^q=\varphi(t)\ ;$$

et par suite

$$\varphi(t^{\frac{1}{q}})=\{\varphi(t)\}^{\frac{1}{q}}\ ;$$

puis, en élevant les deux nombres à la puissance p,

$$\{\varphi(t^{\frac{1}{q}})\}^p=\{\varphi(t)\}^{\frac{p}{q}}. \qquad (4)$$

Mais si, dans l'équation (3), on change q en p, elle devient

$$\{\varphi(t)\}^p=\varphi(t^p);$$

d'où, en changeant t en $t^{\frac{1}{q}}$,

$$\{\varphi(t^{\frac{1}{q}})\}^p=\varphi(t^{\frac{p}{q}}); \qquad (5)$$

donc, en comparant (4) et (5),

$$\{\varphi(t)\}^{\frac{p}{q}}=\varphi(t^{\frac{p}{q}}); \qquad (6)$$

et, comme les nombres entiers positifs p et q peuvent être supposés si grands qu'on le voudra, il s'ensuit que l'équation (3) doit avoir lieu lors même que q est incommensurable. Il ne serait pas difficile de prouver qu'elle doit avoir lieu également lorsque q est négatif.

Si présentement on pose $t^{\frac{p}{q}}=u$, d'où $\frac{p}{q}=\frac{\text{Log.}u}{\text{Log.}t}$, l'équation (6) deviendra

$$\{\varphi(t)\}^{\frac{\text{Log.}u}{\text{Log.}t}}=\varphi(u),$$

ou bien

$$\{\varphi(t)\}^{\frac{1}{\text{Log.}t}}=\{\varphi(u)\}^{\frac{1}{\text{Log.}u}};$$

d'où on conclura, comme ci-dessus

$$\{\varphi(t)\}^{\frac{1}{\text{Log.}t}}=A, \quad \text{ou} \quad \varphi(t)=A^{\text{Log}\,t};$$

mais on a

$$A^{\text{Log}.t}=t^{\text{Log}.A}=t^B ,$$

B étant une nouvelle constante, donc finalement

$$\varphi(t)=t^B .$$

Ce résultat se vérifie d'ailleurs facilement; il donne en effet

$$\varphi(t)=t^B , \varphi(u)=u^B ;$$

d'où, en multipliant,

$$\varphi(t).\varphi(u)=t^B.u^B=(tu)^B=\varphi(tu) ,$$

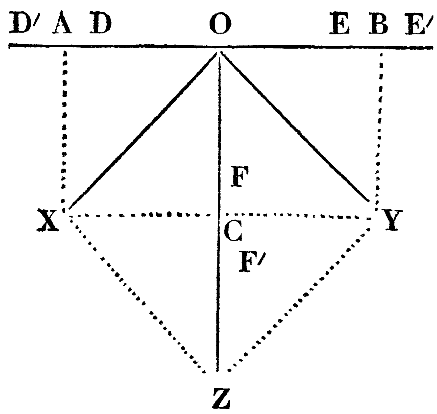
comme le veut l'équation proposée.

Entre autres usages que l'on pourrait faire de ces résultats, nous indiquerons ici l'application ingénieuse que M. Ampère a faite du dernier à la démonstration du parallélogramme des forces. On sait que lorsque deux forces agissent sur un même point, suivant des directions quelconques, elles ont une résultante unique, dirigée vers ce point, comprise dans le plan des composantes et passant dans l'angle que forment leurs directions. Il est de plus manifeste que, si les composantes sont égales, la résultante divisera cet angle en deux parties égales; c'est-à-dire qu'elle sera alors dirigée suivant la diagonale du rhombe construit sur les droites qui représente les composantes en intensité et en direction.

On peut prouver de plus que, lorsque ces composantes égales sont en outre rectangulaires, la diagonale dont il vient d'être question représente la résultante non seulement en direction mais encore en intensité. Cette proposition se déduit d'un raisonnement fort simple que, parce qu'il est peu connu, on sera sans doute bien aise de rencontrer ici.

Si

Si l'on suppose que la résultante de deux forces représentées en intensité et en direction par deux côtés consécutifs d'un carré est représentée en intensité par une longueur plus grande que sa diagonale, il faudra, à l'inverse, qu'une force représentée en intensité et en direction par cette diagonale; décomposée suivant les deux côtés qui la comprennent, ait des composantes représentées en intensité par des droites moins longues que les côtés de ce carré; et au contraire, si la résultante est représentée en intensité par une droite moins longue que la diagonale, une force représentée par cette diagonale aura des composantes représentées en intensité par des droites plus longues que les côtés de ce carré.



Cela posé, soit un carré OXZY, avec ses deux diagonales OZ, XY se coupant en C; et sur ses deux côtés OX, OY, comme diagonales, soient construits les deux autres carrés CA, CB. Supposons que OX, OY représentent les intensités et directions de deux composantes, auquel cas OZ sera la direction de leur résultante. Si l'on suppose que l'intensité de cette résultante soit plus grande que OZ, il faudra d'après cela que les composantes OD, OF de OX, et OE, OF de OY, soient moindres que OA=OC=OB; mais OD et OE se détruisent; donc la résultante unique de OX et

OY se trouverait ainsi représentée par $2OF < OZ$, ce qui est contre l'hypothèse.

Si l'on supposait, au contraire, que la résultante de OX et OY fût moindre que OX, il faudrait que les composantes OD′, OF′ de OX, et OE′, OF′ de OY, fussent plus grandes que $OA=OC=OB$; et comme encore ici OD′ et OE′ se détruisent, la résultante de OX et OY se trouverait être $2OF' > OZ$, ce qui serait également contraire à l'hypothèse.

La résultante de OX et OY, ne pouvant être ainsi ni plus grande ni moindre que OZ, lui sera nécessairement égale, et on aura conséquemment

$$X=Y=\frac{Z}{\sqrt{2}}\,,\quad \mathrm{Cos.}(X\,,Z)=\mathrm{Cos.}(Y\,,Z)=\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Soient présentement P', P'' deux forces rectangulaires inégales quelconques, dont la résultante soit P; et soit $\mathrm{Ang.}(P\,,P')=\theta$; on devra avoir

$$P=\mathrm{F}(P'\,,P'')\,,\quad \theta=\Phi(P'\,,P'')$$

d'où, par l'élimination de P'',

$$\Phi(P\,,P'\,,\theta)=0\;;$$

équation qui doit être de la forme

$$\frac{P'}{P}=\mathrm{f}(\theta)\,,$$

afin que θ ne varie pas, tant que le rapport de P' à P demeurera le même.

Mais, parce que θ est une fonction de $\mathrm{Cos.}\theta$, on pourra à cette équation substituer la suivante

$$\frac{P'}{P}=\varphi(\mathrm{Cos.}\theta)\,,$$

φ étant la caractéristique d'une fonction inconnue qu'il s'agit présentement de déterminer.

Pour y parvenir, considérons trois forces rectangulaires X, Y, Z

agissant sur un même point O. Soient P la résultante partielle de X et Z, Q celle Y et Z, et R la résultante de tout le système ; cette dernière pourra être indifféremment considérée comme la résultante des forces rectangulaires P et Y ou comme la résultante des forces rectangulaires Q et X.

Soient posés

$$\text{Ang.}(P, X) = t, \quad \text{Ang.}(P, R) = u, \quad \text{Ang.}(X, R) = v\ ;$$

nous aurons, par ce qui précède

$$\frac{X}{P} = \varphi(\text{Cos}.t), \frac{P}{R} = \varphi(\text{Cos}.u), \frac{X}{R} = \varphi(\text{Cos}.v),$$

d'où en comparant le produit des deux premières équations à la troisième

$$\varphi(\text{Cos}.v) = \varphi(\text{Cos}.t) . \varphi(\text{Cos}.u).$$

Mais l'angle trièdre, rectangle suivant la direction de P, dont les deux autres arêtes sont suivant X et R, donne

$$\text{Cos}.v = \text{Cos}.t.\text{Cos}.u$$

d'où

$$\varphi(\text{Cos}.v) = \varphi(\text{Cos}.t.\text{Cos}.u)$$

donc

$$\varphi(\text{Cos}.t) . \varphi(\text{Cos}.u) = \varphi(\text{Cos}.t\text{Cos}.u)\ ;$$

d'où on tire, par ce que nous avons vu (IV)

$$\varphi(\text{Cos}.t) = \text{Cos}.^{B}t.$$

Donc Z étant la résultante de deux forces rectangulaires X et Y, faisant avec leurs directions des angles α, β, on doit avoir

$$X = Z\text{Cos}.^{B}\alpha, \qquad Y = Z\text{Cos}.^{B}\beta\ ;$$

d'où

$$X^2 + Y^2 = Z^2 \{\text{Cos}.^{2B}\alpha + \text{Cos}.^{2B}\beta\}\ ;$$

mais si l'on suppose $Y = X$, d'où $\text{Cos}.\beta = \text{Cos}.\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on doit avoir, comme nous l'avons vu, $2X^2 = Z^2$; donc $B = 1$; donc enfin

$$X = Z\text{Cos}.\alpha, \quad Y = Z\text{Cos}.\beta, \quad \text{d'où } X^2 + Y^2 = Z^2.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. A un même cube donné on peut inscrire une infinité d'octaèdres réguliers. On demande 1.° quel sera, sur les faces du cube le lieu des sommets de tous ces octaèdres ; 2.° quelle sera la surface gauche à laquelle appartiendront leurs arêtes ; 3.° enfin à quelle surface courbe leurs faces seront toutes tangentes ?

II. A un même octaèdre on peut inscrire une infinité de cubes. On demande 1.° quel sera, sur les faces de l'octaèdre le lieu des sommets de ces cubes ; 2.° quelle sera la surface gauche à laquelle appartiendront leurs arêtes ; 3.° enfin, à quelle surface courbe leurs faces seront toutes tangentes ? (*)

III. A un même cube donné on peut circonscrire une infinité d'octaèdres réguliers. On demande 1.° à quelle courbe à double courbure appartiendront les sommets de ces octaèdres ; 2.° à quelle surface gauche appartiendront leurs arêtes ; 3.° enfin, à quelle surface conique leurs faces seront toutes tangentes ?

IV. A une même octaèdre régulier donné on peut circonscrire une infinité de cubes. On demande 1.° à quelle courbe à double courbure appartiendront les sommets de ces cubes ; 2.° à quelle surface gauche appartiendront leurs arêtes ; 3.° enfin, à quelle surface conique leurs faces seront toutes tangentes ?

(*) Ce problème a déjà été résolu, en partie, d'abord par de Mairan, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, pour 1725 ; et récemment par M. Texier de Mortainville, dans un mémoire adressé à cette même Académie (Séance du 16 juin 1823).

ANALISE TRANSCENDANTE.

Essai sur une méthode propre à se délivrer des équations étrangères que l'on peut rencontrer dans la recherche des solutions particulières des équations différentielles du premier ordre à deux variables;

Par M. J. L. Woisard, répétiteur de mathématiques à l'école d'artillerie de Metz.

En cherchant, par les méthodes connues, les solutions particulières d'une équation différentielle à deux variables, on obtient souvent pour résultat des équations qui ne satisfont point aux conditions qu'on a en vue de remplir. Nous nous proposons ici d'examiner à quoi peut tenir l'introduction de ces résultats étrangers à la question qu'on se propose de résoudre, et de donner un procédé que nous croyons propre à les faire disparaître dans tous les cas.

Soit $\varphi'=0$ une équation différentielle entre deux variables, x, y et $\frac{dy}{dx}$, que nous désignerons par p; et soit $\varphi=0$ son intégrale complète, renfermant x et y et une constante arbitraire c; les solutions particulières de l'équation $\varphi'=0$ représenteront, comme l'on sait, les diverses enveloppes des lignes, en nombre infini, représentées par l'équation générale $\varphi=0$, et que nous supposons rapportées à deux axes rectangulaires.

Un élément quelconque d'une enveloppée est commun à deux enveloppées consécutives ; et si, dans l'équation $\varphi'=0$, on remplace x et y par les coordonnées d'un point quelconque du plan des axes, les valeurs qu'on en pourra tirer pour p feront connaître la direction des divers élémens d'enveloppées qui passent par ce point ; d'où il suit que, si le point dont il s'agit se trouve sur une enveloppe, deux de ces valeurs seront égales ; donc l'équation des enveloppes exprime la relation qui doit exister entre x et y, pour que l'équation $\varphi'=0$ donne pour p deux valeurs égales ; donc enfin, quand l'équation $\varphi'=0$ ne sera pas susceptible de plusieurs formes, par suite des exposans fractionnaires qui pourraient affecter quelques-uns de ses termes, on en obtiendra toutes les solutions particulières en éliminant p entre $\varphi'=0$ et $\dfrac{\mathrm{d}\varphi'}{\mathrm{d}p}=0$ (*).

Remarquons présentement qu'en exprimant que deux enveloppées se touchent en un point, nous n'avons pas exprimé encore toutes les conditions nécessaires pour que ce point appartienne à une enveloppe ; il faut de plus, pour cela, que ces deux enveloppées soient consécutives, c'est-à-dire qu'il faut qu'elles répondent à deux valeurs de la constante c infiniment peu différentes. Donc notre procédé ne doit pas seulement nous donner les enveloppes cherchées, mais encore toutes les lignes qui passent par les divers points de

---

(*) Cette manière de déterminer les enveloppes nous semble plus simple que celle à laquelle nous nous étions précédemment arrêtés (*Annales*, tom. XIII, pag. 333—343) ; elle conduira d'ailleurs aux mêmes conséquences pour tout ce qui tient à la recherche des solutions particulières dans lesquelles x et y ne passent pas le premier degré, Pour y parvenir, il suffira d'observer que les transversales que nous avons employées à l'endroit cité ne peuvent en même temps être enveloppes qu'autant qu'elles sont toutes droites.

Les solutions particulières fonctions de x seul sont comprises dans la même théorie ; elles répondent à deux valeurs de p infinies et égales entre elles, c'est-à-dire, dont le quotient a l'unité pour limite.

contact que peuvent avoir entre elles les courbes non consécutives comprises dans l'équation générale $\varphi=0$.

Soit, par exemple, l'équation

$$(y-x)^2=\frac{(p+1)^2}{1+p^2};$$

en cherchant ses solutions particulières, par le procédé qui vient d'être indiqué, on parvient aux trois résultats distincts

$$y=x+\sqrt{2}, \quad y=x-\sqrt{2}, \quad y=x.$$

Mais si, d'un autre côté, on intègre l'équation différentielle proposée, on reconnaîtra aisément que son intégrale appartient à une suite de cercles égaux, dont les centres sont situés sur la droite qui divise en deux parties égales l'angle des coordonnées positives; et on reconnaîtra ainsi que ces cercles doivent simplement avoir de x enveloppes rectilignes, données par les équations

$$y=x+\sqrt{2}, \qquad y=x-\sqrt{2};$$

mais si l'on considère deux de ces cercles tellement situés que la distance de leurs centres soit égale à leur diamètre commun, ces cercles, bien que non consécutifs, auront un point de contact sur la droite donnée par l'équation

$$y=x,$$

laquelle contient ainsi les points de contact des cercles non consécutifs; il n'est donc pas surprenant d'après cela que notre procédé, qui était de nature à nous donner le lieu des points de contact de toutes les sortes, nous ait conduit non seulement aux deux enveloppes, mais encore à la droite qui contient les centres de tous les cercles.

Afin donc de pouvoir discerner, parmi les divers résultats auxquels on parvient, quels sont ceux qui expriment proprement des enveloppes, il ne s'agit que de découvrir quelque propriété de ces enveloppes qui leur appartiennent exclusivement, et voici celle dont l'emploi nous a paru le plus propre à remplir notre but. Menons à chacune des lignes représentées par l'intégrale $\varphi=0$ une tangente parallèle à une droite fixe quelconque, et joignons tous les points de contact par une ligne ; l'équation de cette ligne ne sera autre chose (*Annales*, tom. XIII, pag. 333–343) que l'équation $\varphi'=0$, dans laquelle p serait remplacé par la tangente tabulaire de l'angle que fait la droite fixe avec l'axe des x. Cela posé, les diverses transversales qu'on peut obtenir, en faisant varier la position de la droite directrice, sont tangentes aux enveloppes des lignes représentées par l'intégrale $\varphi=0$ (*Annales*, ibid.), et par conséquent elles sont aussi tangentes aux enveloppées. Donc on peut obtenir tous les points de l'enveloppe, en cherchant, sur chaque transversale, l'élément qui se confond avec celui de la ligne qu'elle traverse. Mais si, dans l'équation $\varphi'=0$, on donne à p une valeur particulière $\text{Tang.}\alpha$, on aura l'équation de la ligne qui traverse les élémens qui font avec l'axe des x un angle égal à α; donc les coordonnées de celui de ces élémens qui appartient à l'enveloppe sont déterminées par le système des équations

$$\varphi'=0\ , \qquad \frac{d\varphi'}{dx}+\frac{d\varphi'}{dy}\text{Tang.}\alpha=0\ ,$$

dans lesquelles p serait remplacé par $\text{Tang.}\alpha$; on obtiendra donc tous les points des diverses enveloppes, en éliminant $\text{Tang.}\alpha$ entre ces deux équations, ou ce qui revient au même, en éliminant p entre

$$\varphi'=0\ , \qquad \frac{d\varphi'}{dx}+\frac{d\varphi'}{dy}p=0\ .$$

Par exemple, pour avoir les solutions particulières de l'équation

$$(y-x)^2=\frac{(1+p)^2}{1+p^2},$$

on la différentiera par rapport à x et y, ce qui donnera

$$(y-x)(\mathrm{d}y-\mathrm{d}x)=0,$$

puis, en remplaçant $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ par p,

$$(y-x)(p-1)=0;$$

d'où $p=1$. Substituant ensuite cette valeur dans l'équation proposée, on trouvera

$$y=x\pm\sqrt{2},$$

comme nous avons vu ci-dessus qu'on devait le trouver.

La méthode que nous venons d'exposer est propre à faire trouver toutes les solutions particulières ; mais elle peut aussi conduire à des équations étrangères ; car, en exprimant qu'une transversale est tangente à l'une des courbes représentées par l'équation intégrale $\varphi=0$, on n'a pas exprimé que le point de contact était commun à deux courbes consécutives ; on peut donc obtenir des lignes qui ne soient point enveloppes, et entre autres on obtiendra toutes les intégrales dans lesquelles x et y ne passent pas le premier degré, puisque ces équations représentent des droites, et qu'une droite se confond avec sa transversale dans toute son étendue.

Mais généralement les équations étrangères introduites dans le résultat final par la seconde méthode seront différentes de celles qu'introduit la première ; de sorte qu'il deviendra extrêmement probable qu'une équation donnée par l'une et par l'autre répondra à une véritable solution particulière de l'équation différentielle proposée. Voici donc très-probablement le procédé qu'il faut suivre pour n'obtenir que de telles solutions :

« L'équation différentielle proposée étant $\varphi'=0$; éliminez p entre
» $\varphi'=0$ et $\frac{d\varphi'}{dp}=0$; éliminez pareillement p entre $\varphi'=0$ et
» $\frac{d\varphi'}{dx}+\frac{d\varphi'}{dy}p=0$; et, si $M=0$ et $N=0$ sont les résultats de
» ces éliminations, le plus grand commun diviseur entre M et N,
» égalé à zéro, donnera, sans complication de facteurs étrangers,
» les solutions particulières de l'équation proposée ».

DYNAMIQUE.

Démonstration de la proportionnalité des forces aux vitesses ;

Par M. FAUQUIER, capitaine de génie, ancien élève de l'école polytechnique.

UNE observation de tous les instans prouve que les phénomènes du mouvement sont les mêmes, soit à bord d'un navire, soit à la surface de la terre, quels que soient la vitesse du navire ou celle de la terre ; de sorte que l'on peut admettre, comme principe d'expérience, que *le mouvement relatif des corps n'est aucunement influencé par l'action d'une vitesse qui leur est commune.*

Ce principe admis, soient M un mobile quelconque, V sa vitesse due au mouvement de la terre, et F la force dont il est animé, en vertu de cette vitesse ; on aura généralement $F=f(V)$ d'où $V=\psi(F)$; mais, comme F et V doivent s'évanouir en même temps, nous pourrons écrire

$$V=F\varphi(F) .$$

Soit décomposée la force F en trois autres a, b, c, parallèles à trois axes rectangulaires, et soient x, y, z les vitesses du mobile suivant ces trois axes, nous aurons

$$x=a\varphi(a) , \quad y=b\varphi(b) , \quad z=c\varphi(c) . \qquad (1)$$

Si nous supposons en outre ce même mobile M soumis à l'action d'une autre force F', étrangère au mouvement de la terre, et dont a', b', c' soient les composantes, suivant les trois mêmes axes; ce mobile sera sollicité, suivant ces axes, par les forces

$$a+a' , \quad b+b' , \quad c+c' ;$$

sa vitesse, suivant le premier de ces axes, résultant de l'action simultanée des deux forces F, F' sera donc

$$(a+a')\varphi(a+a') ,$$

de sorte qu'en désignant par x' l'accroissement de vitesse dû à la force F', on aura

$$x+x'=(a+a')\varphi(a+a') ; \qquad (2)$$

mais, en développant par rapport à a', on a

$$\varphi(a+a')=\varphi(a)+\varphi'(a) \cdot \frac{a'}{1}+\varphi''(a) \cdot \frac{a'^2}{1.2}+\ldots\ldots ;$$

en substituant donc dans (2) et développant, on obtiendra un résultat de cette forme

$$x+x'=a\varphi(a)+Aa'^{\alpha}+Ba'^{\beta}+Ca'^{\gamma}+\ldots\ldots.$$

où A, B, C,...... seront des fonctions de a sans a'. Retranchant enfin de cette dernière la première des équations (1), on aura

$$x'=Aa'^{\alpha}+Ba'^{\beta}+Ca'^{\gamma}+\ldots\ldots. \qquad (3)$$

et il s'agira de déterminer les quantités A, B, C,........ α. β, γ,........

Or, puisque le premier membre de cette équation exprime la vitesse relative du mobile, et que cette vitesse doit être indépendante de la vitesse de la terre, le second membre devra aussi en être indépendant, et conséquemment ne pas contenir a; les coefficiens A, B, C,....... doivent donc être des quantités constantes.

Mais, d'un autre côté, au lieu de substituer, dans l'expression $a\varphi(a)$, $a+a'$ à la place de a, ce qui donne, comme nous l'avons vu,

$$a\varphi(a)+Aa'^{\alpha}+Ba'^{\beta}+Ca'^{\gamma}+\ldots\ldots.;$$

il revient évidemment au même d'y changer d'abord a en $a+\frac{1}{2}a'$, ce qui donne

$$a\varphi(a)+A(\tfrac{1}{2}a')^{\alpha}+B(\tfrac{1}{2}a')^{\beta}+C(\tfrac{1}{2}a')^{\gamma}+\ldots\ldots..$$

et de changer ensuite de nouveau, dans le résultat, a en $a+\frac{1}{2}a'$; ce qui donnera, à cause de A, B, C,...... indépendans de a,

$$x'=a\varphi(a)+2A(\tfrac{1}{2}a')^{\alpha}+2B(\tfrac{1}{2}a')^{\beta}+2C(\tfrac{1}{2}a')^{\gamma}+\ldots\ldots; \qquad (4)$$

comparant donc (4) à (3), on devra avoir

$$2\left(\tfrac{1}{2}a'\right)^{\alpha}=a'^{\alpha}\,,\quad 2\left(\tfrac{1}{2}a'\right)^{\beta}=a'^{\beta}\,,\quad 2\left(\tfrac{1}{2}a'\right)^{\gamma}=a'^{\gamma}\,,\ldots\ldots$$

ce qui ne saurait avoir lieu qu'autant que les exposans $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$ seront tous égaux à l'unité.

En posant donc, pour abréger,

$$A+B+C+\ldots\ldots\ldots=K\,,$$

nous aurons, pour la vitesse relative, suivant le premier de nos trois axes, $x'=Ka'$; les vitesses relatives suivant les trois axes seront donc respectivement

$$x'=Ka'\,,\qquad y'=Kb'\,,\qquad z'=Kc'\,,$$

K étant une constante.

Si donc un corps quelconque est sollicité par une force quelconque f, qui lui imprime une vitesse v, on aura généralement

$$v=Kf\,,$$

où K sera une constante; *les forces sont donc, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelles aux vitesses qu'elles impriment.*

Nîmes, le 18 août 1823.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstration du théorème de M. Hamett, *mentionné à la page* 334 *du présent volume ;*

Par M. B. D. C.

Soit ABC un triangle rectangle en C. Soient élevées à CA et CB aux points A et B et du côté opposé à AB des perpendiculaires AP et BQ respectivement égales à AC et BC. Soient menées AQ et BP et soit de plus abaissée du point C sur AB la perpendiculaire CC′. Il s'agit de démontrer que ces trois dernières droites se coupent en un même point.

Pour cela, soient élevées à AB, par ses deux extrémités A et B, et du côté opposé à C des perpendiculaires AD et BE, de même longueur qu'elle ; et soient menées CD et CE. Soient menées respectivement à ces deux droites, par les points A et B, des parallèles concourant en F et soient joints DE et CF. Les deux triangles DCE et AFB ayant, par construction, un côté égal adjacent à deux angles égaux, chacun à chacun, auront aussi leurs deux autres côtés égaux, chacun à chacun. Les figures DF et EF seront donc des parallélogrammes dont AC et BC seront des diagonales respectives. Nous aurons de plus, à cause des parallèles,

$$Ang.C'CD = Ang.CDA\ ,$$

$$Ang.\mathrm{ACF}=Ang.\mathrm{CAD}\ ,$$

d'où nous conclurons

$$Ang.\mathrm{C'CD}+Ang.\mathrm{ACF}=Ang.\mathrm{CDA}+Ang.\mathrm{CAD}\ .$$

Ajoutant donc, de part et d'autre l'angle DCA, nous aurons, d'une part, la somme des trois angles du triangle ACD, et de l'autre la somme des trois angles C'CD, DCA et ACF, laquelle conséquemment vaudra, comme elle, deux angles droits ; d'où nous pouvons conclure que CF n'est autre chose que le prolongement de CC'.

Cela posé, il est connu que les triangles CAD et CBE sont respectivement égaux aux triangles PAB et QBA ; et comme deux côtés de chacun des premiers sont respectivement perpendiculaires à leurs homologues dans les derniers, il s'ensuit que les côtés CD et CE des premiers doivent aussi être perpendiculaires aux côtés PB et QA des derniers ; donc leurs parallèles AF et BF seront aussi respectivement perpendiculaires à PB et QA.

Les trois droites AQ, FC', BP ne sont donc ainsi que les perpendiculaires abaissées des trois sommets du triangle AFB sur les directions des côtés respectivement opposés, et doivent conséquemment, par les théories connues, se couper au même point.

Démonstration d'un théorème de géométrie énoncé dans le New-Castle Magazine (*Decembre* 1823 , *pag.* 665) ;

Par M. Gergonne.

Théorème. De quelque point de la circonférence du cercle inscrit à un triangle équilatéral, qu'on abaisse des perpendiculaires sur ses trois côtés ; la somme des rectangles construits sur ces perpendiculaires prises deux à deux sera constante et équivalente au carré construit sur la moitié de la hauteur du triangle.

Démonstration. Soient ABC le triangle dont il s'agit, O son centre de figure, P un quelconque des points de la circonférence du cercle inscrit, enfin, PA′, PB′, PC′, les perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés BC, CA, AB du triangle ; en désignant par H sa hauteur, il s'agira de démontrer que

$$PA'.PB'+PB'.PC'+PC'.PA'=\tfrac{1}{4}H^2 ,$$

Soient menées A′B′, B′C′, C′A′, nous aurons

$$\textit{Triang}.A'PB'=\tfrac{1}{2}PA'.PB'\text{Sin}.A'PB'=\tfrac{1}{2}PA'.PB'\text{Sin}.120^\circ ;$$

$$\textit{Triang}.B'PC'=\tfrac{1}{2}PB'.PC'\text{Sin}.B'PC'=\tfrac{1}{2}PB'.PC'\text{Sin}.120^\circ ;$$

$$\textit{Triang}.C'PA'=\tfrac{1}{2}PC'.PA'\text{Sin}.C'PA'=\tfrac{1}{2}PC'.PA'\text{Sin}.120^\circ ;$$

d'où, en ajoutant

$$Triang.A'B'C'=\tfrac{1}{2}(PA'.PB'+PB'.PC'+PC'.PA')\mathrm{Sin}.120^{\circ}\ ;$$

et par suite

$$PA'.PB'+PB'.PC'+PC'.PA'=\frac{2\mathrm{Triang}.A'B'C'}{\mathrm{Sin}.120^{\circ}}\ .$$

Or, dans le triangle équilatéral, le cercle inscrit est concentrique au cercle circonscrit, d'où il suit (pag. 280—291 du présent volume) que, quelle que soit la situation du point P, sur la circonférence du premier de ces deux cercles, l'aire du triangle A'B'C' est constante; donc on a aussi

$$PA'.PB'+PB'.PC'+PC'.PA'=Const.$$

Si présentement on prend pour le point P l'un des points de contact du cercle inscrit avec les côtés du triangle, deux des trois rectangles seront nuls, et le troisième se réduira évidemment à $\frac{1}{4}H^2$; donc finalement

$$PA'.PB'+PB'.PC'+PC'.PA'=\tfrac{1}{4}H^2\ .$$

Corollaire. Il est connu que, quelle que soit la situation du point P, dans l'intérieur du triangle équilatéral, on a toujours

$$PA'+PB'+PC'=H\ ,$$

d'où, en quarrant

$$\overline{PA'}^2+\overline{PB'}^2+\overline{PC'}^2+2(PA'.PB'+PB'.PC'+PC'.PA')=H^2\ ;$$

mettant donc ici pour la somme des produits deux à deux sa valeur $\frac{1}{4}H^2$, transposant et réduisant, on aura

$$\overline{PA'}^2+\overline{PB'}^2+\overline{PC'}^2=\tfrac{1}{2}H^2 ;$$

c'est-à-dire, *si, de l'un quelconque des points de la circonférence du cercle inscrit au triangle équilatéral, on abaisse des perpendiculaires sur ses trois côtés, la somme des carrés construits sur ces perpendiculaires sera constante et équivalente à la moitié du carré construit sur la hauteur du triangle.*

Note sur les centres des moyennes distances ;

Par M. QUERRET, ancien chef d'institution.

A la page 17 des *Solutions peu connues, etc.*, de M. SERVOIS, on lit ce qui suit : « Ainsi, au moins pour le cas du triangle, » on arrive, par des considérations purement géométriques, à la » solution d'un problème qu'Ozanam n'avait pas cru que l'on pût » résoudre sans le secours de la mécanique. *Ayant joint par des » droites les milieux consécutifs des côtés d'un polygone, pour » former un polygone inscrit du même nombre de côtés, puis » les milieux de celui-ci, pour en avoir un troisième, et ainsi » de suite, trouver le point où s'arrêtera l'opération* (Récréations » mathématiques, *Problèmes de géométrie*) ».

On peut, à ce qu'il nous paraît, démontrer aisément, par le seul secours de la géométrie, que ce point est le centre des moyennes distances de tous les sommets du polygone. En effet, la perpendiculaire abaissée du milieu d'un côté sur un plan quelconque est la demi-somme des perpendiculaires abaissées sur le même plan des extrémités de ce même côté ; d'où il résulte que la somme des perpendiculaires abaissées des milieux des côtés est égale à la somme des perpendiculaires abaissées des sommets. On conclut aisément de là que le centre des moyennes distances des sommets d'un polygone, plan ou gauche, est le même que le centre des moyennes distances des milieux de ses côtés; que, par suite, les centres des moyennes distances des sommets des polygones inscrits consécutivement les uns aux autres dont il est question dans l'énoncé du problème seront tous situés au même point; puis donc que le dernier de ces polygones se réduit à un point, ce point devra être le centre des moyennes distances des sommets du polygone proposé.

On verra de même qu'un premier tétraèdre étant donné, si l'on en construit un second dont les sommets soient les centres des moyennes distances des sommets de chaque face du premier, puis un troisième dont les sommets soient les centres des moyennes distances des sommets des faces du second, et ainsi de suite; ces tétraèdres consécutifs et continuellement décroissans tendront sans cesse à se réduire à un point, lequel ne sera autre chose que le centre des moyennes distances des sommets du tétraèdre proposé.

En effet, la distance du centre des moyennes distances des sommets de chaque face du tétraèdre primitif à un plan quelconque est le tiers de la somme des distances des mêmes sommets à ce plan; d'où il est facile de conclure que la somme des distances des sommets du second tétraèdre, et par conséquent de tous les suivans à ce même plan, sera la même que la somme des distances au plan dont il s'agit des sommets du tétraèdre primitif; il en devra donc être de même pour le point limite, lequel sera ainsi le centre des moyennes distances des sommets du tétraèdre proposé.

On démontrerait d'une manière analogue, et sans rien emprunter de la mécanique, toutes les autres propriétés des centres des moyennes distances.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Addition à l'article de la page 207 du présent volume ;

Par M. W. H. TALBOT, membre de la société philosophique de Cambridge.

(*Extrait d'une lettre au Rédacteur des* Annales.)

VOUS me demandez, Monsieur, comment je suis parvenu à rectifier la courbe dont il a été question à la page 207. Ne pouvant en ce moment reprendre le fil de mes recherches sur ce sujet, je me bornerai à vous en donner le résultat.

Soient AA', BB' le grand et le petit axe de l'ellipse génératrice, C son centre, CP un rayon vecteur quelconque, PQ la perpendiculaire à son extrémité, et Q le point où cette perpendiculaire touche la courbe dont il s'agit. En posant

$$CA=1\,, \qquad CB=b\,, \qquad Ang.BCP=\theta\,,$$

et en désignant en outre l'excentricité par e, je trouve

$$Arc\,BQ=Tang.PQ+b\int\frac{d\theta}{\sqrt{1-e^2\mathrm{Sin.}^2\theta}}\;;$$

or, le terme *Tang*.PQ s'évanouit au point A ; donc le quart de la courbe a pour expression

$b\int$

$$b\int\frac{d\theta}{\sqrt{1-e^2\mathrm{Sin.}^2\theta}}\cdot\quad\left(\begin{array}{l}\theta=0\ ,\\ \theta=\frac{\varpi}{2}\ .\end{array}\right)$$

Cette intégrale est une fonction elliptique de la première espèce de M. Legendre, et vous voyez qu'elle exprime l'arc d'une courbe *algébrique;* chose soupçonnée par M. Legendre, mais dont il n'a pas rencontré la preuve, excepté dans le cas de $e=\sqrt{2}$, dans lequel cas il fait voir que cette intégrale exprime un arc de lemniscate. J'espère, Monsieur, que la simplicité de ce résultat vous fera plaisir. J'y ai été conduit par une méthode assez éloignée de la route ordinaire.

J'ai l'honneur, etc.

Solution du problème de statique énoncé à la page 28 *du présent volume ;*

Par M. Ch. Sturm.

Problème. *Un fil non pesant, parfaitement flexible et inextensible, d'une longueur déterminée, est attaché, par ses extrémités, à deux points fixes dont la distance donnée est moindre que sa longueur. Tous ses points sont attirés ou repoussés par un centre fixe, suivant une fonction déterminée de la distance. On demande l'équation la plus simple de la courbure du fil en équilibre ? On demande, en particulier, ce que devient cette équation, lorsque l'attraction ou la répulsion suit la raison inverse du quarré de la distance ?*

Solution. Soit rapportée la courbe du fil à trois axes rectangulaires passant par le centre d'attraction ou de répulsion, et soient x, y, z les coordonnées de l'un quelconque des points de sa longueur ; soient r la distance de ce point au même centre, s la portion de la longueur de ce fil comptée depuis le même point jusqu'à la première de ces deux extrémités fixes.

Les équations connues de l'équilibre d'un fil parfaitement flexible et inextensible sont

$$\left.\begin{aligned} -T\,\frac{dx}{ds} &= A+\int X\,ds\,, \\ -T\,\frac{dy}{ds} &= B+\int Y\,ds\,, \\ -T\,\frac{dz}{ds} &= C+\int Z\,ds\,; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

dans lesquelles T représente la tension au point (x, y, z) de la courbure du fil ; tension dirigée suivant la tangente à cette courbure en ce point ; et où X, Y, Z sont les forces parallèles aux axes qui sollicitent ce même point, tandis que A, B, C sont les composantes, parallèles aux mêmes axes, de la force par laquelle le premier des deux points extrêmes est retenu, et qui, lorsque ce point est fixe, exprime la pression qu'il supporte. Les intégrales qui entrent dans ces équations doivent toujours être prises depuis ce premier point jusqu'à celui que l'on considère, c'est-à-dire, le point (x, y, z).

En différentiant les équations (1), on trouve

$$\left.\begin{aligned}
-\mathrm{d}T\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}-T\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}&=X\mathrm{d}s\;,\\
-\mathrm{d}T\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-T\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}&=Y\mathrm{d}s\;,\\
-\mathrm{d}T\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}-T\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}&=Z\mathrm{d}s\;;
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

dont la somme des produits respectifs par $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}$ est

$$-\mathrm{d}T=X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z\,. \qquad (3)$$

Lorsqu'on suppose que les particules du fil sont sollicitées par une force R qui émane de l'origine, on a

$$X=\frac{Rx}{r}\,,\quad Y=\frac{Ry}{r}\,,\quad Z=\frac{Rz}{r}\,.$$

Avec ces valeurs et observant que

$$x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z=r\mathrm{d}r\,,$$

l'équation (3) deviendra

$$-\mathrm{d}T=R\mathrm{d}r\,,$$

d'où

$$T=c-\int R\mathrm{d}r\,; \qquad (4)$$

c étant la constante arbitraire. Or, la force R étant supposée une fonction de r, $\int R\mathrm{d}r$ en sera une aussi, de sorte que, dans l'état d'équilibre, *la tension du fil en chacun de ses points dépend uniquement de la distance de ce point au centre attirant.*

Si l'on substitue les valeurs de X, Y, Z dans les équations (2), on reconnaît qu'elles admettent une intégrale de la forme

$$z=ax+by\ .$$

En effet, en mettant cette valeur de z dans la dernière de ces trois équations, elle se trouvera, en vertu des deux premières, satisfaite indépendamment des constantes arbitraires a et b. On voit donc que *le fil en équilibre est tout entier dans le plan conduit par ses deux extrémités fixes et par le centre d'où émanent les forces*, ce qu'il était d'ailleurs facile de prévoir, puisque tout est égal de part et d'autre de ce plan. En exprimant que le plan dont il s'agit contient les deux extrémités fixes, on déterminera les deux constantes a et b.

Pour simplifier nos formules, faisons coïncider ce plan avec celui des xy, en posant $z=0$, d'où $x^2+y^2=r^2$ et $dx^2+dy^2=ds^2$. Laissant donc de côté la troisième des équations (2) et éliminant dT entre les deux autres, nous aurons

$$T\left(\frac{dx}{ds}\,d.\frac{dy}{ds}-\frac{dy}{ds}\,d.\frac{dx}{ds}\right)=Xdy-Ydx\ . \qquad (5)$$

Pour intégrer cette équation, nous passerons aux coordonnées polaires, en posant

$$x=r\mathrm{Cos}.u\ , \qquad y=r\mathrm{Sin}.u\ ;$$

d'où résultera

$$xdy-ydx=r^2du\ ,$$

et par suite

$$Xdy-Ydx=\frac{R(xdy-ydx)}{r}=Rrdu\ .$$

Posons encore

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\mathrm{Cos.}\varphi\ , \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=\mathrm{Sin.}\varphi\ ,$$

nous aurons

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\mathrm{d}\varphi\ ;$$

mais, on trouve

$$\mathrm{Tang.}(\varphi-u)=\frac{\mathrm{Tang.}\varphi-\mathrm{Tang.}u}{1+\mathrm{Tang.}\varphi\mathrm{Tang.}u}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{y}{x}}{1+\frac{y\mathrm{d}y}{x\mathrm{d}x}}=\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}=\frac{r\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\ ;$$

posant donc

$$\frac{r\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}=z\ , \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{d}u=\frac{z\mathrm{d}r}{r}\ , \qquad (6)$$

on aura

$$\varphi-u=\mathrm{Arc}(\mathrm{Tang.}=z)\ , \qquad \mathrm{d}\varphi=\mathrm{d}u+\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}\ .$$

Par la substitution de ces valeurs, l'équation (5) devient

$$(T-Rr)\mathrm{d}u+\frac{T\mathrm{d}z}{1+z^2}=0\ ;$$

puis, en mettant pour $\mathrm{d}u$ sa valeur (6) et décomposant,

$$\frac{\mathrm{d}r}{r}-\frac{R\mathrm{d}r}{T}+\frac{\mathrm{d}z}{r}-\frac{z\mathrm{d}z}{1+z^2}=0\ .$$

A cause de $\mathrm{d}T=-R\mathrm{d}r$, l'intégration par logarithmes donnera

$$\frac{Trz}{\sqrt{1+z^2}}=h\ ; \qquad (7)$$

h étant la constante arbitraire.

Comme, en vertu de l'équation (6), z est la tangente tabulaire de l'angle que fait la courbe, en chacun de ses points avec son rayon vecteur, il s'ensuit que $\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$ est le sinus de cet angle, indépendamment du signe de z; l'équation (7) signifie donc que *le moment de la tension, pris par rapport au centre fixe, est une quantité constante.*

Si l'on résout l'équation (7) par rapport à z, et qu'on remplace ensuite z par sa valeur (6), on trouvera

$$\mathrm{d}u = \pm\frac{h\mathrm{d}r}{r\sqrt{(Tr)^2-h^2}}. \qquad (8)$$

Dans cette expression de $\mathrm{d}u$, il faudra prendre le signe supérieur pour toute la portion de la courbe où le rayon vecteur croît en même temps que l'angle qu'il fait avec l'axe. Ce rayon sera un *maximum* ou un *minimum*, et aura sa direction normale à la courbe, quand on aura $(Tr)^2-h^2=0$, ou $Tr=\pm h$.

En intégrant l'équation (8), dans laquelle les deux variables sont séparées, on aura l'équation polaire de la courbe cherchée.

Quant à sa rectification, en substituant l'expression de $\mathrm{d}u$ dans la formule $\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}u^2}$, on trouvera à intégrer

$$\mathrm{d}s = \pm\frac{Tr\mathrm{d}r}{\sqrt{(Tr)^2-h^2}}. \qquad (9)$$

Examinons présentement le cas particulier où la force R agit en raison inverse du quarré de la distance. Faisons, en conséquence, $R=\frac{f}{r^2}$, f étant une constante, qui devra être supposée positive ou négative, suivant que la force R sera supposée répulsive ou attractive. Les formules (4) et (9) deviendront alors

$$T=c+\frac{f}{r}\ ,\qquad s=\frac{\sqrt{(cr+f)^2-h^2}}{c}+\text{Const.}$$

L'équation (8) deviendra, dans le même cas,

$$\mathrm{d}u=\pm\frac{h\mathrm{d}r}{r\sqrt{(cr+f)^2-h^2}}\ . \qquad (10)$$

Nous nous dispenserons d'en écrire l'intégrale, qu'on peut obtenir facilement, en posant $r=\frac{1}{r'}$, et qui prendra trois formes différentes suivant qu'on aura

$$f^2-h^2>0 \quad \text{ou} \quad =0 \quad \text{ou} \quad <0\ .$$

La détermination des constantes arbitraires introduites par les intégrations se fera en exprimant que la courbe passe par les deux points fixes extrêmes, et qu'elle a, entre ces deux points, une longueur donnée.

En vertu d'un théorème connu, la courbure du fil en équilibre ne changerait pas, si l'on supposait le centre unique d'attraction remplacé par celui d'une sphère homogène dont tous les points jouiraient de la même propriété que lui.

La courbe à laquelle appartient l'équation (8) jouit d'une propriété assez remarquable; elle est entre toutes les courbes de même longueur et passant par les mêmes points extrêmes, celle qui rend l'intégrale $\int \mathrm{d}s \int r\mathrm{d}r$ un *minimum* ou un *maximum.* Cette propriété, remarquée par Euler, dépend d'une propriété plus générale, qui se rattache elle-même au principe des vitesses virtuelles. En voici toutefois l'exposé direct :

« Toutes les notations employées dans l'équation (1) étant ad-» mises, si la formule $X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z$ est une différentielle

» exacte à trois variables ; et qu'on représente par U son inté-
» grale, la courbe formée par le fil en équilibre sera entre toutes
» les courbes de même longueur et se terminant aux mêmes
» points, celle qui rendra l'intégrale $\int U\mathrm{d}s$ prise entre ces points,
» un *minimum* ou un *maximum* ».

Cherchons en effet la courbe qui remplit cette dernière condition. En suivant la méthode générale des variations, il faudra égaler à zéro la variation de la formule

$$\int U\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}+a\int\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}\,,$$

dans laquelle a désigne un nombre qui doit être déterminé par la condition d'avoir, entre les limites données,

$$\int\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}=l\,.$$

Posons donc

$$\delta\int(U+a)\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}=0\ ;$$

nous en tirerons

$$\int\left\{\delta U\mathrm{d}s+(U+a)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}\delta x+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}\delta y+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}\delta z\right)\right\}=0\,.$$

Faisant disparaître $\mathrm{d}\delta x$, $\mathrm{d}\delta y$, $\mathrm{d}\delta z$, au moyen de l'intégration par parties, il viendra

$$(U+a)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\,\delta x+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\,\delta y+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\,\delta z\right)$$

$$+\int\left\{\delta U\mathrm{d}s-\delta x\mathrm{d}.(U+a)\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}-\delta y\mathrm{d}.(U+a)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-\delta z\mathrm{d}.(U+a)\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right\}=0\,.$$

Mais, par hypothèse, la formule $X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z$ est une différentielle exacte à trois variables, et l'on a

$\mathrm{d}U$

$$\mathrm{d}U = X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z\ , \quad \text{d'où} \quad \delta U = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z\ ;$$

au moyen de quoi l'équation ci-dessus devient

$$(U+a)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\delta x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\delta y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\delta z\right)$$

$$+\int\left\{\left[X\mathrm{d}s - \mathrm{d}.(U+a)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right]\delta x + \left[Y\mathrm{d}s - \mathrm{d}.(U+a)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right]\delta y + \left[Z\mathrm{d}s - \mathrm{d}.(U+a)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right]\delta z\right\} = 0$$

Les deux points extrêmes de la courbe étant fixes, la partie hors du signe intégral du premier membre de cette équation doit s'évanouir ; et, en égalant séparément à zéro les quantités multipliées par δx, δy, δz, sous ce même signe intégral, on obtient, pour les trois équations de la courbe cherchée,

$$\mathrm{d}.(U+a)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = X\mathrm{d}s\ ,$$

$$\mathrm{d}.(U+a)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = Y\mathrm{d}s\ ,$$

$$\mathrm{d}.(U+a)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = Z\mathrm{d}s\ .$$

Deux de ces équations doivent comporter la troisième ; et c'est en effet ce qui résulte de la relation $\mathrm{d}U = X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z$.

En posant $T = -(U+a)$, ces équations deviennent identiques avec les équations (1), et par conséquent la courbe qu'elles représentent est celle qu'affecte le fil flexible en équilibre, sous l'action des forces X, Y, Z, sollicitant chacun de ses points ; ce qu'il fallait démontrer.

Addition à l'article inséré à la page 286 du présent volume ;

Par M. Ch. Sturm.

En démontrant, à la page 286 du présent volume, le théorème de géométrie élémentaire énoncé à la page 28 (*), j'ai négligé de faire remarquer qu'on pouvait facilement passer de là à la démonstration d'un théorème connu (**), sur lequel M. Durrande est revenu de nouveau à la page 54 de ce volume, et qu'il a heureusement étendu au triangle sphérique et au tétraèdre. Voici de quoi il s'agit :

On a vu, à l'endroit cité, qu'en représentant par α, β, γ les trois angles d'un triangle, par r le rayon du cercle circonscrit, par D la distance d'un point quelconque P au centre de ce cercle, et enfin par k^2 l'aire du triangle qui a ses sommets aux pieds des perpendiculaires abaissées de ce point P sur les directions des côtés du triangle proposé, on avait (pag. 289)

$$D^2=r^2-\frac{2k^2}{\text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}.\beta\,\text{Sin}.\gamma},$$

(*) Ce théorème appartient à M. Sturm.

(**) Voyez *Annales*, tom. I, pag. 64 et 149, tom. III, pag. 346.

J. D. G.

Supposons que l'on prenne pour ce point P le centre du cercle inscrit à notre triangle ; alors les trois perpendiculaires a, b, c seront égales entre elles et au rayon de ce cercle ; en représentant donc ce rayon par r', les équations (1) et (2), pag. 287, deviendront

$$r'(\mathrm{Sin}.\alpha+\mathrm{Sin}.\beta+\mathrm{Sin}.\gamma)=2r\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Sin}.\beta\mathrm{Sin}.\gamma\ ,$$

$$r'^2(\mathrm{Sin}.\alpha+\mathrm{Sin}.\beta+\mathrm{Sin}.\gamma)=2k^2\ ;$$

d'où, en divisant membre à membre,

$$\frac{2k^2}{\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Sin}.\beta\mathrm{Sin}.\gamma}=2rr'\ ;$$

en substituant donc cette valeur dans celle de D^2, elle deviendra

$$D^2=r^2-2rr'=r(r-2r')\ ,$$

c'est-à-dire, *la distance entre les centres des cercles inscrit et circonscrit à un même triangle est moyenne proportionnelle entre le rayon du circonscrit et l'excès de ce rayon sur le diamètre de l'inscrit.* C'est le théorème auquel nous nous étions proposé de parvenir.

Paris, le 20 mars 1824.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de statique.

I. Si des poids égaux sont placés arbitrairement sur les directions des côtés d'un polygone rectiligne quelconque, plan ou gauche ; en leur faisant parcourir simultanément et dans le même sens, sur ces directions, des longueurs respectivement proportionnelles à celles des côtés sur lesquels ils se trouvent situés, leur centre commun de gravité demeurera immobile.

II. Si des poids placés arbitrairement sur les directions des côtés d'un polygone rectiligne quelconque, plan ou gauche, sont respectivement proportionnels aux longueurs de ces mêmes côtés; en leur faisant parcourir simultanément et dans le même sens, sur ces directions, des longueurs égales quelconques, leur centre commun de gravité demeurera immobile.

Théorème de Géométrie.

Soit un polygone plan quelconque, dont les sommets consécutifs soient A, B, C, ... L, M, N; et soient A′, B′, C′, ... L′, M′, N′ les milieux de ses côtés consécutifs AB, BC, CD, ... LM, MN, NA. Soient en outre d, e, f, ... l, m, n les milieux des diagonales BD, BE, BF, ... BL, BM, BN.

Par les points d, e, f, ... l, m, n, A′, soient menées des parallèles à une droite fixe, de direction arbitraire. Soient menées ensuite B′C′ coupant la première de ces parallèles en d', puis d'D′, coupant la seconde en e', ensuite e'E′, coupant la troisième en f', et ainsi du reste, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à mener u'N′ coupant en a' la parallèle conduite par A′. Si alors, entre les parallèles à la droite fixe, conduites par A et B, prises pour côtés opposés, on construit un parallélogramme, dont les deux autres côtés opposés, de direction d'ailleurs arbitraire, passent par A′ et a', ce parallélogramme sera équivalent au polygone proposé (*).

(*) De là résulte le moyen de transformer directement un polygone donné en un parallélogramme équivalent qui ait un angle et un côté donnés.

FIN DU QUATORZIÈME VOLUME.

TABLE

Des matières contenues dans le XIV.e volume des Annales ;

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

ANALISE ÉLÉMENTAIRE.

ANALISE TRANSCENDANTE.

ASTRONOMIE.

DYNAMIQUE.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

GÉOMÉTRIE DES COURBES.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

HYDRODYNAMIQUE.

OPTIQUE.

STATIQUE.

TRIGONOMÉTRIE.

CORRESPONDANCE

Entre les questions proposées *et les* questions résolues.

ERRATA

Pour le quatorzième volume des Annales ;

PAGE 12, ligne 8, au premier numérateur, — a^2 ; *lisez :* a^3.

Page 27, ligne 9, en remontant, — la : *lisez* : une.

Ligne 8, en remontant, — *effacez* : également distante de l'une et de l'autre.

Page 30, ligne 7, en remontant, — celles ; *lisez* : celle.

Page 35, ligne 16, en remontant, — ces ; *lisez :* ses.

Ligne 10, en remontant, — doit-il ; *lisez :* doit-on.

Page 39, ligne 10, — (fig. 2) ; *lisez :* (fig. 1).

Ligne 11, en remontant, — l'exagone ; *lisez :* l'hexagone.

Page 42, ligne 6, en remontant, — tous ; *lisez :* toute.

Page 53, ligne 3, — un cercle ; *lisez :* une section conique.

Ligne 6, — au premier cercle ; *lisez :* à la section conique.

Ligne 7, — dernier ; *lisez :* cercle.

Ligne 8, — *XIV* ; *lisez : XV*.

Ligne 9, — l'un de ces cercles ; *lisez* : l'une de ces courbes.

Page 54, ligne 11, — *IV* ; *lisez : XIV*.

Page 55, ligne 6, — $R(D+R+r)$; *lisez* : $2R(D+R+r)$.

Ligne 7, — $\overline{AG}^2-\overline{GH}^2$; *lisez :* $\overline{AC}^2-\overline{CH}^2$.

Page 91 (à la note), ligne 5, en remontant, — $\frac{\varpi}{1}$; *lisez :* $\frac{\varpi}{2}$;

Page 94, ligne 7, — $\text{Cos.}=1-2\text{Sin.}x$; *lisez :* $\text{Cos.}=2\text{Sin}\,x-1$.

Page 95, ligne 3 (au dénominateur), — $\text{Cos.}^2x\text{Cos.}^2y$; *lisez :* $\text{Cos.}^2x+\text{Cos.}^2y$.

Ligne 7 (au troisième terme de la série), — $\text{Cos.}x$; *lisez :* $\text{Cos}5x$.

Même ligne (à la fin), — $a-\sqrt{(1+a^2)^2-4a^2\text{Cos.}^2x}$; *lisez :* $\sqrt{(1+a^2)-4a^2\text{Cos.}^2x}-a^2$.

Ligne 4, en remontant, — *la série doit être écrite comme il suit :*

$$\frac{\text{Cos.}^2x}{1}-\frac{\text{Cos.}^22x}{2}+\frac{\text{Cos.}^23x}{3}-\dots\dots$$

Ligne 2, en remontant, $4a(1+a^2)^2$; *lisez :* $4a(1+a)^2$.

Page 129, ligne 6, — rétraction ; *lisez :* réfraction.
Page 131, lignes 12 et 13, les *s* doivent être italiques.
Page 142, ligne 4, — $(z-c)+y$; *lisez :* $(z'-c)+y'$.
Page 157, ligne 6, en remontant, $(\iota$; *lisez :* (ι).
Page 171, ligne première, — chimérique ; *lisez :* chimique.