ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

QUERRET

Questions résolues. Solution des trois problèmes d'analise transcendante énoncés à la page 247 du présent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 13 (1822-1823), p. 353-360
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1822-1823__13__353_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution des trois problèmes d'analise transcendante énoncés à la page 247 du présent volume;

Par M. QUERRET, chef d'institution, à St-Malo.

PROBLÈME. *Assigner la somme finie de chacune des trois suites infinies que voici :*

$$1^\circ.\ \frac{a\mathrm{Cos}.x}{1}-\frac{a^3\mathrm{Cos}.3x}{3}+\frac{a^5\mathrm{Cos}.5x}{5}-\frac{a^7\mathrm{Cos}.7x}{7}+\ldots$$

$$2^\circ.\ \mathrm{Cos}.x+\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{Cos}.3x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\mathrm{Cos}.5x}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\mathrm{Cos}.7x}{7}+\ldots$$

$$3^\circ.\ \frac{\mathrm{Cos}.x\mathrm{Cos}.y}{1}-\frac{\mathrm{Cos}.2x\mathrm{Cos}.2y}{2}+\frac{\mathrm{Cos}.3x\mathrm{Cos}.3y}{3}-\frac{\mathrm{Cos}.4x\mathrm{Cos}4y}{4}+\ldots$$

Solution. Nous allons déduire la sommation de chacune de ces trois suites du théorème que nous avons établi à la page 107 de ce volume, et que nous rappelons en ces termes:

Si l'on représente par $f(a)$ la somme de la suite infinie

$$A_0+A_1a+A_2a^2+A_3a^3+A_4a^4+\ldots;$$

dans laquelle A_0, A_1, A_2, ... sont supposés représenter des coefficiens numériques; les sommes des deux séries

$$A_0+A_1a\text{Cos}.x+A_2a^2\text{Cos}.2x+A_3a^3\text{Cos}.3x+A_4a^4\text{Cos}.4x+\ldots$$

$$A_0+A_1a\text{Sin}.x+A_2a^2\text{Sin}.2x+A_3a^3\text{Sin}.3x+A_4a^4\text{Sin}.4x+\ldots$$

seront respectivement

$$\frac{\text{f}[a(\text{Cos}.x+\sqrt{-1}\,\text{Sin}.x)]+\text{f}[a(\text{Cos}\,x-\sqrt{-1}\,\text{Sin}.x)]}{2},$$

et

$$\frac{\text{f}[a(\text{Cos}.x+\sqrt{-1}\,\text{Sin}.x)]-\text{f}[a(\text{Cos}\,x-\sqrt{-1}\,\text{Sin}.x)]}{2\sqrt{-1}}.$$

Cela posé, on a

$$\frac{a}{1}-\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}-\frac{a^7}{7}+\frac{a^9}{9}-\ldots\ldots=\text{Arc}\,(\text{Tang}.=a),$$

donc 1.° la somme de la série

$$\frac{a\text{Cos}.x}{1}-\frac{a^3\text{Cos}.3x}{3}+\frac{a^5\text{Cos}.5x}{5}-\frac{a^7\text{Cos}.7x}{7}+\ldots$$

sera

$$\frac{\text{Arc}[\text{Tang}.=a(\text{Cos}.x+\sqrt{-1}\,\text{Sin}.x)]+\text{Arc}[\text{Tang}=a(\text{Cos}.x-\sqrt{-1}\,\text{Sin})]}{2}$$

Soient M le premier de ces arcs et N le second, on aura, pour la somme de la série $\frac{M+N}{2}$, et de plus

$$\text{Tang}.M=a(\text{Cos}.x+\sqrt{-1}\,\text{Sin}.x),$$

$$\text{Tang}.N=a(\text{Cos}.x-\sqrt{-1}\,\text{Sin}.x);$$

d'où

$$\text{Tang.}M+\text{Tang.}N=2a\text{Cos.}x\,,$$

$$\text{Tang.}M\text{Tang.}N=a^2\,;$$

d'où encore

$$1-\text{Tang.}M\text{Tang.}N=1-a^2\,;$$

donc

$$\text{Tang.}(M+N)=\frac{\text{Tang.}M+\text{Tang.}N}{1-\text{Tang.}M\text{Tang.}N}=\frac{2a\text{Cos.}x}{1-a^2}\,;$$

donc

$$M+N=\text{Arc}\left(\text{Tang.}=\frac{2a\text{Cos.}x}{1-a^2}\right)\,;$$

donc enfin

$$\frac{M+N}{2}=\frac{1}{2}\,\text{Arc}\left(\text{Tang.}=\frac{2a\text{Cos.}x}{1-a^2}\right)$$

qui sera conséquemment la somme finie demandée de la première des trois séries infinies proposées.

Si l'on suppose $a=1$, on a

$$\frac{M+N}{2}=\frac{1}{2}\,\text{Arc}(\text{Tang.}=\infty)=\frac{1}{4}\pi\,;$$

donc, comme on le savait déjà,

$$\frac{\pi}{4}=\text{Cos.}x-\frac{\text{Cos.}3x}{3}+\frac{\text{Cos.}5x}{5}-\frac{\text{Cos.}7x}{7}+\ldots$$

quel que soit x.

En second lieu

$$a+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{a^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{a^7}{7}+\ldots.=\text{Arc}(\text{Sin.}=a);$$

ainsi qu'il est aisé de s'en assurer, en intégrant par les séries la fonction différentielle

$$\frac{\mathrm{d}a}{\sqrt{1-a^2}}=\mathrm{d}.\text{Arc}(\text{Sin.}=a);$$

donc, la somme de la série

$$\text{Cos}.x+\frac{1}{2}\cdot\frac{\text{Cos}.3x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\text{Cos}.5x}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\text{Cos}.7x}{7}+\ldots.$$

sera

$$\frac{\text{Arc}(\text{Sin.}=\text{Cos}.x+\sqrt{-1}\,\text{Sin}.x)+\text{Arc}(\text{Sin.}=\text{Cos}.x-\sqrt{-1}\,\text{Sin}.x)}{2}.$$

Soient P le premier de ces arcs et Q le second; la somme cherchée sera donc

$$\frac{P+Q}{2},$$

et l'on aura

$$\text{Sin}.P=\text{Cos}.x+\sqrt{-1}\,\text{Sin}.x,$$

$$\text{Sin}.Q=\text{Cos}.x-\sqrt{-1}\,\text{Sin}.x,$$

d'où

$$\text{Cos}.P=\sqrt{-2\sqrt{-1}\,\text{Sin}.x\text{Cos}.x},$$

$$\text{Cos}.Q=\sqrt{+2\sqrt{-1}\,\text{Sin}.x\text{Cos}.x},$$

donc

Cos.P

$$\text{Cos}.P\text{Cos}.Q=2\text{Sin}.x\text{Cos}.x\,;$$

on a dailleurs

$$\text{Sin}.P\text{Sin}.Q=1\,;$$

donc

$$\text{Cos}.(P+Q)=\text{Cos}.P\text{Cos}.Q-\text{Sin}.P\text{Sin}.Q=2\text{Sin}.x\text{Cos}.x-1\,;$$

donc aussi

$$P+Q=\text{Arc}(\text{Cos}.=2\text{Sin}.x\text{Cos}.x-1),$$

et par suite

$$\frac{P+Q}{2}=\frac{1}{2}\text{Arc}(\text{Cos}.=2\text{Sin}.x\text{Cos}.x-1)\,;$$

qui est conséquemment la somme finie demandée de la seconde des trois séries infinies proposées.

Si l'on suppose $x=0$, on a

$$\frac{P+Q}{2}=\frac{1}{2}\text{Arc}.(\text{Cos}.=-1)=\tfrac{1}{2}\varpi\,;$$

donc, comme on le savait déjà,

$$\frac{1}{2}\varpi=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{9}+\ldots$$

Quant à la troisième série, on peut la mettre sous cette forme

$$\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\text{Cos}.(x+y)}{1}-\dfrac{\text{Cos}.2(x+y)}{2}+\dfrac{\text{Cos}.3(x+y)}{3}-\dfrac{\text{Cos}.4(x+y)}{4}+\ldots\\[2ex]+\dfrac{\text{Cos}.(x-y)}{1}-\dfrac{\text{Cos}.2(x-y)}{2}+\dfrac{\text{Cos}.3(x-y)}{3}-\dfrac{\text{Cos}.4(x-y)}{4}+\ldots\end{array}\right\}\,;$$

Or on a, (pag, 114 du présent volume)

$$\frac{\text{Cos}.x}{1}-\frac{\text{Cos}.2x}{2}+\frac{\text{Cos}.3x}{3}-\frac{\text{Cos}.4x}{4}+\ldots\ldots=\text{Log}.2+\text{Log}.\text{Cos}.\tfrac{1}{2}x;$$

c'est-à-dire

$$\frac{\text{Cos}.x}{1}-\frac{\text{Cos}.2x}{2}+\frac{\text{Cos}.3x}{3}-\frac{\text{Cos}.4x}{4}+\ldots\ldots=\text{Log}.2\text{Cos}.\tfrac{1}{2}x;$$

en changeant donc, tour à tour x en $x+y$ et $x-y$, il viendra

$$\frac{\text{Cos}.(x+y)}{1}-\frac{\text{Cos}.2(x+y)}{2}+\frac{\text{Cos}.3(x+y)}{3}-\frac{\text{Cos}.4(x+y)}{4}+\ldots=\text{Log}.2\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(x+y)$$

$$\frac{\text{Cos}.(x-y)}{1}-\frac{\text{Cos}.2(x-y)}{2}+\frac{\text{Cos}.3(x-y)}{3}-\frac{\text{Cos}.4(x-y)}{4}+\ldots=\text{Log}.2\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(x-y)$$

donc, en prenant la demi-somme,

$$\frac{\text{Cos}.x\text{Cos}.y}{1}-\frac{\text{Cos}.2x\text{Cos}.2y}{2}+\frac{\text{Cos}.3x\text{Cos}.3y}{3}$$

$$-\ldots\ldots=\tfrac{1}{2}\{\text{Log}.2\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(x-y)+\text{Log}.2\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(x+y)\}$$

ou encore

$$\frac{\text{Cos}.x\text{Cos}.y}{1}-\frac{\text{Cos}.2x\text{Cos}.2y}{2}+\frac{\text{Cos}.3x\text{Cos}.3y}{3}-\ldots\ldots=\tfrac{1}{2}\text{Log}.4\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(x-y)\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(x+y)$$

mais

$$2\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(x-y)\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(x+y)=\text{Cos}.x+\text{Cos}.y$$

d'où

$$4\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(x-y)\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(x+y)=2(\text{Cos}.x+\text{Cos}.y)$$

donc enfin, la somme finie de la troisième des suites infinies proposées est

$$\tfrac{1}{2}\text{Log.}(2\text{Cos.}x+2\text{Cos.}y).$$

Si, au lieu de prendre la demi-somme des deux séries ci-dessus, on prend leur demi-différence, on aura

$$\frac{\text{Sin.}x\text{Sin.}y}{1}-\frac{\text{Sin.}2x\text{Sin.}2y}{2}+\frac{\text{Sin.}3x\text{Sin.}3y}{3}-\ldots$$

$$=\tfrac{1}{2}\{\text{Log.}2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(x-y)-\text{Log.}2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(x+y)\};$$

ou encore

$$\frac{\text{Sin.}x\text{Sin.}y}{1}-\frac{\text{Sin.}2x\text{Sin.}2y}{2}+\frac{\text{Sin.}3x\text{Sin}\;3y}{3}-\ldots=\tfrac{1}{2}\text{Log.}\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}(x-y)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}(x+y)}.$$

Or,

$$\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}(x-y)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}(x+y)}=\frac{2\text{Cos.}\frac{1}{2}(x-y)\text{Cos.}\frac{1}{2}(x+y)}{2\text{Cos.}^2\frac{1}{2}(x+y)}=\frac{\text{Cos.}x+\text{Cos.}y}{1+\text{Cos.}(x+y)};$$

donc enfin

$$\frac{\text{Sin.}x\text{Sin.}y}{1}-\frac{2\text{Sin.}2x\text{Sin.}2y}{2}+\frac{\text{Sin.}3x\text{Sin.}3y}{3}-\ldots=\tfrac{1}{2}\text{Log.}\frac{\text{Cos.}x+\text{Cos.}y}{1+\text{Cos.}(x+y)}.$$

Si, dans ce résultat et dans le précédent, on fait $y=x$, ils deviendront

$$\frac{\text{Cos.}^2x}{1}-\frac{\text{Cos.}^2 2x}{2}+\frac{\text{Cos.}^2 3x}{3}-\frac{\text{Cos.}^2 4x}{4}+\ldots=\frac{1}{2}\text{Log.}4\text{Cos.}x,$$

$$\frac{\text{Sin.}^2x}{1}-\frac{\text{Sin.}^2 2x}{2}+\frac{\text{Cos.}^2 3x}{3}-\frac{\text{Cos.}^2 4x}{4}+\ldots=\frac{1}{2}\text{Log.}\frac{2\text{Cos.}x}{1+\text{Cos.}2x}.$$

En résumé, si nous faisons abstraction des divers résultats particuliers auxquels nous sommes parvenus, et qui n'avaient pas été demandés, nous aurons

$$1^{\circ}.\quad \tfrac{1}{2}\text{Arc}\left(\text{Tang.}=\frac{2a\text{Cos.}y}{1-a^2}\right)=\frac{a\text{Cos.}x}{1}-\frac{a^3\text{Cos}\,3x}{3}+\frac{a^5\text{Cos}\,5x}{5}-\ldots\ldots;$$

$$2^{\circ}.\quad \tfrac{1}{2}\text{Arc.}(\text{Sin.}=2\text{Sin.}x\text{Cos.}x-1)=\text{Cos}\,x+\frac{1}{2}\cdot\frac{\text{Cos.}3x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{\text{Cos}\,5x}{5}+\ldots;$$

$$3.^{\circ}\quad \tfrac{1}{2}\text{Log.}2(\text{Cos.}x+\text{Cos.}y)=\frac{\text{Cos.}x\text{Cos.}y}{1}-\frac{\text{Cos.}2x\text{Cos.}2y}{2}+\frac{\text{Cos.}3x\text{Cos.}3y}{3}-\ldots$$

résultats qu'au surplus on peut présentement vérifier d'un grand nombre de manières diverses.