J. B. DURRANDE

Questions résolues. Démonstration du théorème de géométrie énoncé à la page 260 du XII.e volume de ce recueil

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 13 (1822-1823), p. 305-313
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1822-1823__13__305_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration du théorème de géométrie énoncé à la page 260 du XII.e volume de ce recueil;

Par M. J. B. Durrande, professeur de physique au collége royal de Cahors.

Lemme. *Si un cercle coupe arbitrairement les deux côtés d'un angle, 1.° en considérant les cordes interceptées comme les cordes de contact de deux angles circonscrits, les côtés de l'un de ses angles couperont les côtés de l'autre en quatre points tels que, de quelque manière qu'on en prenne deux qui n'appartiennent point à un même côté, ils se trouveront en ligne droite avec le point de concours des deux cordes de contact, c'est-à-dire, avec le sommet de l'angle donné; 2.° Si l'on joint deux à deux les quatre extrémités des deux cordes de contact par deux systèmes de deux droites, les droites se couperont, dans chaque système, sur l'une des deux droites dont il vient d'être précédemment question, et sur la droite qui joint les sommets des deux angles circonscrits; 3.° enfin chacun des deux points d'intersection sera le pôle de celle de ces deux mêmes droites sur laquelle il ne se trouvera pas situé, et le sommet de l'angle sécant sera le pôle de la droite qui joindra les sommets des deux angles circonscrits.*

Démonstration. Soient O (fig. 1) le centre du cercle dont il s'agit, A le sommet de l'angle sécant, BC et DE les deux cordes interceptées par le cercle sur ses côtés, F et G les sommets des angles circonscrits dont ces cordes sont les cordes de contact; H le point de concours de FB et GD, I le point de concours de FC et GE, K le point de concours de FB et GE, et enfin L le point de concours de FC et GD. Soient finalement menées BE et CD se coupant en M, BD et CE se coupant en N.

Cela posé, il s'agit de démontrer, 1.° que le sommet A est, à la fois, en ligne droite avec les points H et I, et en ligne droite avec les points K et L; 2.° que le point M est en ligne droite avec les points H et I, et le point N en ligne droite avec K et L, et qu'en outre ces deux points M et N sont en ligne droite avec les points F et G; 3.° enfin que ces mêmes points M et N sont les pôles respectifs de KL et HI, et que le point A est le pôle de FG.

Pour y parvenir, concevons les points F, G, H, I, K, L comme les centres d'autant de cercles, ayant pour rayons, savoir

Pour F,	$FB=FC$,
Pour G,	$GD=GE$,
Pour H,	$HB=HD$,
Pour I,	$IC=IE$,
Pour K,	$KB=KE$,
Pour L,	$LC=LD$.

Concevons pour plus de briéveté, de désigner simplement chacun de ces cercles, que nous nous dispenserons de tracer, pour ne pas compliquer la figure, par la lettre placée à son centre.

Les cercles H et I sont à la fois touchés extérieurement par le cercle F en B et C et par le cercle G en D et E, d'où il suit que les droites BC et DE, concourant en A, contiennent l'une et l'autre le centre de similitude externe des cercles H et I, lequel conséquemment ne saurait être autre que le point A qui, par suite, doit se trouver en ligne droite avec les centres H et I de ces deux cercles.

Pareillement, les cercles K et L sont touchés à la fois extérieurement en B et C par le cercle F et intérieurement en E et D par le cercle G; d'où il suit que les droites BC et DE, concourant en A, contiennent l'une et l'autre le centre de similitude externe des cercles K et L, lequel conséquemment ne saurait être autre que le point A qui, par suite, doit se trouver en ligne droite avec les centres K et L de ces deux cercles. Voilà donc la première partie de la proposition complètement démontrée.

En second lieu, le cercle K touche à la fois les deux cercles H et I, le premier en B en l'enveloppant et le second en E extérieurement. Le cercle L touche aussi à la fois les deux mêmes cercles, le premier en D extérieurement et le second en C en l'enveloppant. Donc les droites BE et CD, concourant en M, contiennent l'une et l'autre le centre de similitude interne des deux cercles H et I, lequel conséquemment ne saurait être autre que le point M qui, par suite, doit se trouver en ligne droite avec les centres H et I de ces deux cercles.

Pareillement, le cercle H touche à la fois les deux cercles K et L, le premier intérieurement en B et le second extérieurement en D. Le cercle I touche aussi à la fois les deux mêmes cercles, le premier extérieurement en E et le second intérieurement en C. Donc les droites BD et CE, concourant en N, contiennent l'une et l'autre le centre de similitude interne des deux cercles K et L, lequel conséquemment ne saurait être autre que le point N qui, par suite, doit se trouver en ligne droite avec les centres K et L de ces deux cercles.

De plus; le cercle K touche à la fois les deux cercles F et G, le premier en B extérieurement et le second en E en l'enveloppant. Le cercle L touche aussi à la fois les deux mêmes cercles, le premier en C extérieurement et le second en D en l'enveloppant. Donc les droites BE et CD, concourant en M, contiennent l'une et l'antre le centre de similitude interne des deux cercles F et G, lequel conséquemment ne saurait être autre que le point M qui, par suite, doit se trouver en ligne droite avec les centres F et G de ces deux cercles.

Pareillement, les deux cercles F et G sont touchés à la fois extérieurement par le cercle H en B et D et par le cercle I en C et E. Donc les droites BD et CE, concourant en N, contiennent l'une et l'autre le centre de similitude externe des deux cercles F et G, lequel conséquemment ne saurait être autre que le point N qui, par suite, doit se trouver en ligne droite avec les centres F et G de ces deux cercles. La seconde partie de la proposition se trouve donc aussi complètement démontrée.

En troisième lieu, parce que les points K et L sont les pôles respectifs des droites BE et DC, il s'ensuit que le point M de concours de ces deux droites est le pôle de la droite KL qui joint ces deux points. Pareillement, puisque les points H et I sont les pôles respectifs des droites BD et CE, il s'ensuit que le point N de concours de ces deux droites est le pôle de la droite HI qui joint ces deux points. Enfin, puisque les points F et G sont les pôles respectifs des droites BC et DE, il s'ensuit que le point A de concours de ces deux droites est le pôle de la droite FG qui joint ces deux points.

Remarque I. La corde de contact BC demeurant invariable de grandeur et de situation, si l'on fait varier la grandeur et la situation de l'autre corde de contact DE, cequi entraînera aussi un mouvement dans le point A sur le prolongement de BC, les points M et N varieront aussi de situation, mais de manière toutefois que la droite MN ira constamment passer par le point fixe F, appartenant évidemment à la perpendiculaire sur le milieu de BC ; on a donc le théorème suivant.

THÉORÈME. *Si tant de quadrilatères qu'on voudra, inscrits* *à un même cercle, ont un côté commun, les droites qui, dans ces quadrilatères, joindront l'intersection des diagonales et le point de concours des côtés adjacens au côté commun iront toutes concourir en un même point de la perpendiculaire sur le milieu de ce côté commun.*

C'est précisément là le théorème de M. Hachette, énoncé dans le *Bulletin des sciences* (août 1822, pag. 114), et démontré par M. Valsh, de Cork en Irlande. Quelque confiance que doivent inspirer d'ailleurs les savans rédacteurs de ce recueil, nous ne saurions nous refuser à regarder la démonstration de M. Valsh comme tout au moins incomplète. Elle suppose, en effet, ce qu'il aurait d'abord fallu prouver, savoir, que les trois points M, N, F sont en ligne droite. Elle établit ensuite que le point F est constant, et cela en vertu d'un certain rapport dont cependant tous les élémens sont variables. Ce rapport d'ailleurs, fût-il aussi constant qu'on le suppose, ne paraîtrait pas entraîner inévitablement l'immobilité de ce point F. Ce qui précède pourra donc devenir, au défaut de toute autre démonstration, une rectification de celle de M. Valsh.

Remarque II. Au lieu de se donner l'angle sécant A, il revient au même de se donner arbitrairement le quadrilatère inscrit BCED; alors la figure FHGI sera un quadrilatère circonscrit ayant ses points de contact aux sommets de l'inscrit. Si l'on considère en outre que l'on peut toujours concevoir un cercle qui soit la perspective d'une section conique donnée; qu'alors si deux quadrilatères sont l'un inscrit et l'autre circonscrit à la section conique, de telle sorte que les sommets de l'inscrit soient les points de contact du circonscrit, il en sera de même de leurs perspectives par rapport au cercle; qu'enfin les perspectives des points en lignes droites et des droites qui concourent en un même point sont elles-mêmes des points en lignes droites et des droites qui concourent en un même point, et qu'en outre la perspective du pôle d'une droite est le pôle de la perspective de cette droite, notre lemme donnera le théorème suivant:

THÉORÈME. Si deux quadrilatères sont l'un inscrit et l'autre circonscrit à une même section conique, de telle sorte que les sommets de l'inscrit soient les points de contact du circonscrit, 1.° Les diagonales des deux quadrilatères se couperont toutes quatre au même point; 2.° Les points de concours des directions des côtés opposés des deux quadrilatères appartiendront tous quatre à une même ligne droite; 3.° Le point de concours des quatre diagonales sera le pôle de la droite qui contiendra les quatre points de concours des directions des côtés opposés.

Remarques. I. Si l'on se rappelle que, dans tout quadrilatère, on peut prendre deux côtés opposés pour diagonales, et réciproquement, on s'assurera aisément que ce théorème est tout aussi complet que le lemme d'où nous l'avons déduit.

II. En vertu d'un théorème de Newton démontré par M. Poncelet (*Annales*, tom. XII, pag. 109), on peut ajouter à tout ceci que la droite qui joint les milieux des deux diagonales du quadrilatère circonscrit contient le centre de la section conique dont il s'agit

On reconnaît facilement, dans le théorème auquel nous venons de parvenir, le théorème de M. Brianchon, si fécond en belles conséquences, et dont ce qui précède offre ainsi une nouvelle démonstration. Passons présentement à celui qui fait le sujet principal de cet article.

THÉORÈME. Une surface du second ordre étant coupée arbitrairement par les deux faces d'un angle dièdre, 1.° en considérant les intersections des deux faces de l'angle dièdre avec la surface du second ordre comme les lignes de contact de deux surfaces coniques circonscrites, ces surfaces coniques se couperont suivant deux courbes planes dont les plans contiendront, l'un et l'autre, l'arête de l'angle dièdre qui en sera ainsi l'intersection; 2.° si l'on considère les deux lignes de contact comme les directrices du mouvement d'un plan, dans la génération d'une surface développable, enveloppe de l'espace parcouru par ce plan, ce qui pourra être fait de deux manières différentes, les surfaces développables résultantes seront deux surfaces coniques, telles que le sommet *de chacune sera situé sur l'un des deux plans dont il vient d'être question ; ces deux sommets seront en outre en ligne droite avec les sommets des deux surfaces coniques circonscrites* ; 3.° *enfin, chacun de ces sommets sera le pôle de celui des deux plans sur lequel il ne sera pas situé, et en outre l'arête de l'angle dièdre sécant et la droite qui contiendra les quatre sommets seront pôlaires réciproques l'une de l'autre.*

Démonstration. Soient F et G les sommets des deux surfaces coniques circonscrites, par lesquels et par l'un quelconque A des points de l'arête de l'angle dièdre soit fait passer un plan que nous supposerons être le plan même de la figure. Ce plan coupera la surface du second ordre suivant une section conique BCED, et l'angle dièdre suivant un angle plan sécant ayant son sommet en A et, pour les portions de ses côtés interceptées par la section conique, les cordes BC et DE. Les points B et C, ainsi que les points D et E seront donc des points des lignes de contact des deux surfaces coniques circonscrites, lesquelles conséquemment seront coupées par notre plan suivant les angles BFC et DGE, circonscrits à la section conique BCED. En conséquence, BME et CMD, ainsi que BDM et CEN seront des arêtes des deux surfaces développables enveloppes de l'espace parcouru par les plans qui toucheront à la fois les deux lignes de contact ; de plus H et I, ainsi que K et L appartiendront aux lignes d'intersection des deux surfaces coniques circonscrites ; et on se trouvera exactement dans le cas de notre précédent lemme.

Donc d'abord les points M et N ne sortiront pas de la droite fixe FG quelle que soit la position du point mobile A sur l'arête de l'angle dièdre. Or, soient P et Q les intersections respectives de BC et DE avec FG ; ces points seront fixes quel que soit le point arbitraire A, puisqu'ils seront sur FG qui est fixe, et sur les faces de l'angle dièdre qui le sont aussi. De plus, le quadrilatère complet dont les trois diagonales sont FG, HI, KL, et celui dont les trois diagonales sont MN, DE, BC, donnent, par un théorème connu,

$$\frac{GM}{FM}=\frac{GN}{FN}, \qquad \frac{QM}{PM}=-\frac{QN}{PN},$$

c'est-à-dire;

$$\frac{FG-FM}{FM}=\frac{FN-FG}{FN}; \qquad \frac{PQ-PM}{PM}=\frac{PN-PQ}{PN};$$

ou bien

$$\frac{FG}{FM}-1=1-\frac{FG}{FN}, \qquad \frac{PQ}{PM}-1=1=\frac{PQ}{PN};$$

ou encore

$$\frac{FG}{FM}+\frac{FG}{FN}=2, \quad \frac{PQ}{PM}+\frac{PQ}{PN}=2,$$

ce qui revient à

$$FG(FM+FN)=2FM.FN, \quad PQ(PM+PN)=2PM.PN;$$

mais

$$FM=PM+FP, \qquad FN=PN+FP,$$

$$FM+FN=PM+PN+2FP$$

donc

$$FM.FN=PM.PN+FP(PM+PN)+\overline{FP}^2;$$

valeurs qui, substituées dans la première des deux équations ci-dessus, la changent en celle-ci :

$$(PG-FP)(PM+PN)=2PM.PN-2FP.PG;$$

en la combinant avec la seconde, il vient

$$PM+PN=2\frac{PF.PG}{PF-QG}, \quad PM.PN=2.\frac{PQ.PF.PG}{PF-QG};$$

donc

donc la somme et le produit des deux distances PM et PN sont donnés, donc ces distances le sont elles-mêmes ; donc les points M et N sont fixes sur FG ; donc les surfaces développables dont les arêtes sont BL et CK, BN et CN sont des surfaces coniques; donc toutes les droites AM, AN passent par les mêmes points fixes M et N et par l'arête de l'angle dièdre ; donc toutes ces droites sont dans deux plans passant par cette arête et par les points fixes M et N ; donc les points variables H et L sont dans le premier de ces plans, et les points varirbles K et L dans le second ; donc en effet les deux surfaces coniques circonscrites se coupent suivant deux courbes planes dont les plans contiennent, l'un et l'autre l'arête de l'angle dièdre, qui en est ainsi l'intersection commune, donc, en outre, les sommets M et N des deux autres surfaces coniques sont respectivement sur les plans de ces deux courbes, et en ligne droite avec les sommets F et G des surfaces coniques circonscrites.

Présentement, les points M et N étant, pour toutes les situations du point A, les pôles respectifs des droites HI et KL, il s'ensuit que ces mêmes points M et N seront les pôles des plans qui sont les lieux de ces deux droites. De plus, les points fixes F et G étant les pôles respectifs des deux faces de l'angle dièdre, il s'ensuit que l'arête de cet angle et la droite FG sont polaires réciproques l'une de l'autre.

On peut aussi remarquer, d'après le thèoreme de Newton rappelé ci-dessus, que si l'on choisit le point A sur l'arête de l'angle dièdre de telle sorte que le plan coupant passe par le centre de la surface du second ordre, ce centre se trouvera aussi en ligne droite avec les milieux de FG, HI et KL.