Questions proposées

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 13 (1822-1823), p. 247-248
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1822-1823__13__247_1>

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème d'analise.

Assigner la somme finie de chacune des trois séries infinies que voici :

1.° $\frac{a\text{Cos}.x}{1}-\frac{a^3\text{Cos}.3x}{3}+\frac{a^5\text{Cos}.5x}{5}-\frac{a^7\text{Cos}.7x}{7}+\ldots$

2.° $\text{Cos}\,x+\frac{1}{2}\cdot\frac{\text{Cos}.3x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\text{Cos}.5x}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\text{Cos}.7x}{7}+\ldots$

3.° $\frac{\text{Cos}.x\text{Cos}.y}{1}-\frac{\text{Cos}.2x\text{Cos}.2y}{2}+\frac{\text{Cos}.3x\text{Cos}.3y}{3}-\frac{\text{Cos}.4x\text{Cos}4y}{4}+\ldots$

Théorème de géométrie elémentaire.

Le point O d'un plan indéfini dont la somme OA+OB+OC, des distances à trois points A, B, C, situés comme on le voudra hors de ce plan est un *minimum* est tel que si, par l'une quelconque des droites OA, OB, OC, on conduit un plan perpendiculaire au plan dont il s'agit, ce plan divisera en deux parties égales l'angle formé par les deux autres droites.

Théorème de Géometrie transcendante.

On sait que le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre d'une hyperbole sur toutes les tangentes à cette courbe est une sorte de *huit* renverse (∞) appelé *Lemniscate*, ayant mêmes axes, même centre et même sommet que l'hyperbole.

Supposons que l'hyperbole soit équilatère, et soit son axe égal à $2a$. Sur cet axe, comme grand axe, soit construite une ellipse dont le petit axe soit égal à la distance entre ses foyers (*); cette ellipse, circonscrite à la Lemniscate, aura comme elle même centre et mêmes sommets que l'hyperbole.

Soit désignée par E l'excès fini de l'asymptote infinie de l'hyperbole comptée du centre, sur le quart aussi infini de cette courbe. (**) Soient en outre q le quart du périmètre de la Lemniscate et Q le quart du périmètre de l'ellipse; on aura

$$1^{\circ} \quad E+q=Q\sqrt{2}\,,$$

$$2.^{\circ} \quad Eq=\frac{\pi}{4}.a^2\,.$$

(*) C'est l'ellipse projection d'un cercle sur un plan qui fait avec le sien un angle demi-droit. Elle jouit de diverses propriétés remarquables.

(**) C'est la distance du centre au point de l'asymptote où viendrait aboutir le point de la courbe qui se trouve au sommet, si cette courbe supposée flexible était appliquée sur son asymptote, sans déplacement du point de contact à l'infini.