ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

CRELLE

Analise transcendante. Solution d'une difficulté connue que présente la théorie des fonctions angulaires, relativement au développement des puissances fractionnaires des cosinus

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 13 (1822-1823), p. 213-241
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1822-1823__13__213_0>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Solution d'une difficulté connue que présente la théorie des fonctions angulaires, relativement au développement des puissances fractionnaires des cosinus;

Par M. Crelle, docteur en philosophie, membre du conseil supérieur des bâtimens civils de Prusse.

1.

On a

$$2\mathrm{Cos}.x=(\mathrm{Cos}.x+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.x)+(\mathrm{Cos}.x-\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.x)\ ;$$

mais

$$(\mathrm{Cos}.x+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.x)(\mathrm{Cos}.x-\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.x)=1\ ;$$

d'où

$$\mathrm{Cos}.x-\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.x=\frac{1}{\mathrm{Cos}.x+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.x}\ ;$$

donc

$$2\mathrm{Cos}.x=\mathrm{Cos}.x+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.x+\frac{1}{\mathrm{Cos}.x+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.x}\ ;$$

Si donc, pour abréger, on pose

$$\mathrm{Cos}.x+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.x=u\ ,$$

on aura

$$2\,\text{Cos.}x = u + \frac{1}{u}\ ;$$

cela donne

$$(2\,\text{Cos.}x)^m = \left(u + \frac{1}{u}\right)^m = u^m + \frac{m}{1}\,u^{m-2} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\,u^{m-4}$$

$$+ \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\,u^{m-6} + \ldots\ldots$$

ou bien

$$(2\,\text{Cos.}x)^m = \left(\frac{1}{u} + u\right)^m = u^{-m} + \frac{m}{1}\,u^{-m+2} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\,u^{-m+4}$$

$$+ \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\,u^{-m+6} + \ldots\ldots$$

Ces deux développemens ont évidemment lieu pour une valeur quelconque de m.

Mais on a, comme l'on sait, aussi pour une valeur quelconque de m,

$$(\text{Cos.}x + \sqrt{-1}\,\text{Sin.}x)^m = \text{Cos.}mx + \sqrt{-1}\,\text{Sin.}mx\ ;$$

ce qui donne successivement

$$u^m = \text{Cos.}mx + \sqrt{-1}\,\text{Sin.}mx\ ;$$

$$u^{-m} = \text{Cos.}mx - \sqrt{-1}\,\text{Sin.}mx\ ,$$

$$u^{m-2} = \text{Cos.}(m-2)x + \sqrt{-1}\,\text{Sin.}(m-2)x\ ,$$

$$u^{-m+2} = \text{Cos.}(m-2)x - \sqrt{-1}\,\text{Sin.}(m-2)x\ ,$$

$$u^{m-4} = \text{Cos.}(m-4)x + \sqrt{-1}\,\text{Sin.}(m-4)x\ ,$$

$$u^{-m+4} = \text{Cos.}(m-4)x - \sqrt{-1}\,\text{Sin.}(m-4)x\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ;$$

ce qui donne, en substituant,

$$(2\text{Cos}.x)^m = \text{Cos}.mx + \frac{m}{1}\,\text{Cos}.(m-2)x + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\,\text{Cos}.(m-4)x + \ldots\ldots$$

$$\pm\sqrt{-1}\left[\text{Sin}.mx + \frac{m}{1}\,\text{Sin}.(m-2)x + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\,\text{Sin}.(m-4)x + \ldots\ldots\right].$$

2.

Telle est l'expression générale de la $m.^{me}$ puissance de $2\text{Cos}.x$, en cosinus et sinus des multiples de x, pour une valeur quelconque de x,

Si l'on fait, pour abréger,

$$\text{Cos}.mx + \frac{m}{1}\text{Cos}.(m-2)x + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\,\text{Cos}.(m-4)x + \ldots\ldots = P\ ;$$

$$\text{Sin}.mx + \frac{m}{1}\,\text{Sin}.(m-2)x + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\,\text{Sin}.(m-4)x + \ldots\ldots = Q\ ,$$

on aura

$$(2\text{Cos}.x)^m = P \pm \sqrt{-1}\,Q\ .$$

3.

Euler, en observant qu'on a $u + \frac{1}{u} = \frac{1}{u} + u$, suppose aussi $\left(u + \frac{1}{u}\right)^m = \left(\frac{1}{u} + u\right)^m$, et par conséquent $P + \sqrt{-1}\,Q = P - \sqrt{-1}\,Q$, d'où $Q = 0$; et, par suite

$$(2\text{Cos}.x)^m = P\ ,$$

pour une valeur quelconque de m.

Lagrange, dans ses *Leçons sur le calcul des fonctions*, (Leçon XI), trouve aussi, par la voie des équations différentielles

$$(2\text{Cos}.x)^m = P;$$

mais cette expression est en défaut pour toutes les valeurs de x qui donnent des valeurs négatives pour Cos.x, lorsque les valeurs de m sont fractionnaires et de numérateurs pairs, car alors $(2\text{Cos}.x)^m$ est une quantité imaginaire ; il est donc visible qu'on ne peut pas généralement supposer $Q=0$. La formule

$$P \pm \sqrt{-1}\,Q,$$

et non la formule P, semble donc être précisément l'expression générale de $(2\text{Cos}.x)^m$.

Mais, lorsque $(2\text{Cos}.x)^m$ est une quantité réelle, la formule $P \pm \sqrt{-1}\,Q$ n'est pas moins embarrassante que l'est la formule P pour le cas où $(2\text{Cos}.x)^m$ est imaginaire ; parce qu'on ne voit pas que Q doive être nécessairement nul pour les diverses valeurs de x et m qui peuvent répondre à ce cas.

Il y a donc là une sorte de paradoxe dont l'explication était à désirer.

4.

M. Poisson paraît être le premier qui ait fait voir que la formule $P \pm \sqrt{-1}\,Q$ est réellement la véritable expression générale de $(2\text{Cos}.x)^m$; que cette expression ne rentre dans la formule d'Euler $(2\text{Cos}.x)^m = P$ que dans le cas où m est un nombre entier, et qu'elle peut donner toutes les différentes valeurs de $(\text{Cos}.x)^m$ qui existent pour une valeur fractionnaire de m, si l'on met successivement pour x, $x+2\varpi$, $x+4\varpi$, $x+6\varpi$, et généralement $x+2n\varpi$, ϖ désignant deux angles droits, et n un nombre entier quelconque. Il a montré en nombres l'exactitude de l'expression $(2\text{Cos}.x)^m = P \pm \sqrt{-1}\,Q$, pour le cas particulier de $x=\varpi$ et $m=\frac{1}{3}$ (voyez la *Correspondance sur l'école polytechnique*, tome II, page 212).

C'était là sans doute un grand pas vers l'explication du paradoxe ; car une grande partie de la difficulté consistait en ce qu'on ne voyait pas comment la formule

$$(\text{Cos.}x)^m = P \pm \sqrt{-1}\,Q\ ;$$

pourrait donner plusieurs valeurs différentes pour $P \pm \sqrt{-1}\,Q$, et seulement une valeur unique pour $(\text{Cos.}x)^m$. L'heureuse idée de M. Poisson de mettre $x+2n\varpi$ au lieu de x, ce qui est toujours permis, puisque les expressions $\text{Cos.}x$ et $\text{Cos.}(x+2n\varpi)$ sont identiques, lève eutièrement cette partie de la difficulté.

5.

Mais il faut avouer que la question n'était pas encore complètement éclaircie, puisqu'on ne voyait pas encore comment, pour une valeur quelconque de x, la formule générale $P \pm \sqrt{-1}\,Q$ pourrait donner tantôt une quantité réelle et tantôt une quantité imaginaire. Les travaux de M. Deflers, dont on trouve une notice dans le troisième volume de la nouvelle édition du *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* de M. Lacroix (page 606) et ceux de M. Plana, dans le XI.e volume des *Annales de mathématiques* (page 84) ne semblent pas lever toutes les difficultés; et il reste encore à faire voir comment la formule générale $(2\text{Cos.}x)^m = P \pm \sqrt{-1}\,Q$ s'applique à tous les cas, et sur-tout à trouver les valeurs du nombre n dans $x+2n\varpi$ auxquelles correspondent les valeurs purement imaginaires et les valeurs purement réelles de $(2\text{Cos}\,x)^m$ (*).

Tel est, principalement le but que je me propose dans cet écrit.

(*) On peut encore consulter, sur le même sujet, un mémoire de M. Pagani Michel, inséré à la page 94 du présent volume.

J. D. G.

6.

Soit m égal à la fraction $\frac{1}{k}$, où k peut être un nombre entier quelconque. Pour plus de simplicité, nous supposerons ce nombre positif. L'application à d'autres cas n'aura aucune difficulté.

On sait, par la théorie des équations, que, dans le cas de m fractionnaire et égal à $\frac{1}{k}$, la quantité $(2\text{Cos}.x)^m$ a toujours k valeurs différentes, savoir, les valeurs des k racines de la quantité $2\text{Cos}.x$. Si $2\text{Cos}\,x$ est positif et k impair, une de ces racines est entièrement réelle, ou de la forme p; d'autres peuvent être entièrement imaginaires, ou de la forme $\pm\sqrt{-1}q$; le reste des racines est de la forme $p\pm\sqrt{-1}q$. Si $2\text{Cos}.x$ est positif et k pair, deux de ces racines sont de la forme p; le reste est de la forme $p\pm\sqrt{-1}q$. Si $2\text{Cos}.x$ est négatif et k impair, une seule racine est réelle, ou de la forme p; les autres sont de la forme $p\pm\sqrt{-1}q$. Si enfin $2\text{Cos}.x$ est négatif et k pair, aucune racine n'est réelle; mais deux racines sont entièrement imaginaires, ou de la forme $\pm\sqrt{-1}q$, et le reste est de la forme $p\pm\sqrt{-1}q$.

La forme *générale* des racines de $2\text{Cos}.x$ est donc

$$p\pm\sqrt{-1}q\;;$$

et c'est précisément la forme de l'expression générale $P\pm\sqrt{-1}Q$, trouvée ci-dessus pour $(2\text{Cos}.x)^m$. Mais, dans les cas particuliers, il faut que tantôt p ou P et tantôt q ou Q s'évanouissent, pour donner, suivant ces différens cas, des racines entièrement réelles, ou des racines entièrement imaginaires.

Il s'agit donc de trouver les valeurs de n, dans $x+2n\varpi$, pour lesquelles P ou Q devient égal à zéro.

7.

On a généralement

$$\text{Cos}.x = \text{Cos}.\pm(2n\varpi \pm x) ;$$

$$\text{Sin}.x = \text{Sin}.\pm(2n\varpi + x) = \text{Sin}.[\pm(2n+1)\varpi - x] ;$$

mais on ne peut mettre que $x \pm 2n\varpi$ pour x, dans l'expression de $2\text{Cos}.x$, parce qu'il n'y a que cet arc seul qui ait *en même temps* le même sinus et le même cosinus que l'arc x.

On a donc généralement

$$(2\text{Cos}.x)^m = \text{Cos}.m(x \pm 2n\varpi) \pm \sqrt{-1}\,\text{Sin}.m(x \pm 2n\varpi)$$

$$+ \frac{m}{1} [\text{Cos}.(m-2)(x \pm 2n\varpi) \pm \sqrt{-1}\,\text{Sin}.(m-2)(x \pm 2n\varpi)]$$

$$+ \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} [\text{Cos}.(m-4)(x \pm 2n\varpi) \pm \sqrt{-1}\,\text{Sin}.(m-4)(x \pm 2n\varpi)]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

de sorte qu'en posant, pour abréger ;

$$\text{Cos}.m(x \pm 2n\varpi) + \frac{m}{1}\,\text{Cos}.(m-2)(x \pm 2n\varpi) + \ldots = P_n$$

$$\text{Sin}.m(x \pm 2n\varpi) + \frac{m}{1}\,\text{Sin}.(m-2)(x \pm 2n\varpi) + \ldots = Q_n$$

nous aurons

$$(2\text{Cos}.x)^m = P_n \pm \sqrt{-1}\,Q_n$$

8.

Maintenant j'observe qu'on peut toujours exprimer une quantité de la forme $(2\mathrm{Cos}.x)^m$ par $[2\mathrm{Cos}.x]^m.(\pm 1)^m$, pourvu que l'on convienne de représenter par $[2\mathrm{Cos}.x]^m$ la valeur *arithmétique*, c'est-à-dire, la valeur *numérique absolue* de la quantité $2\mathrm{Cos}.x$, prise sans signe.

En effet, la formule $[2\mathrm{Cos}.x]^m.(\pm 1)^m$ exprimera toutes les k valeurs de $(2\mathrm{Cos}.x)^m$ ou $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$ d'une manière aussi complète que l'expression $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$ elle-même.

Mais $[2\mathrm{Cos}.x]^m.(\pm 1)^m$ n'est autre chose que la valeur de $(2\mathrm{Cos}.x)^m$, prise pour $x=0$ et $x=\varpi$, et multipliée par $[2\mathrm{Cos}.x]^m$ puisque $\mathrm{Cos}.0=+1$ et $\mathrm{Cos}.\varpi=-1$. Donc on aura aussi la valeur de $(\mathrm{Cos}.x)^m$, si l'on met dans l'expression générale de $(2\mathrm{Cos}.x)^m$, donnée ci-dessus, $x=0$ et $x=\varpi$, et qu'on multiplie le résultat par $[2\mathrm{Cos}.x]^m$. On trouve, pour $x=0$,

$$P_n=\mathrm{Cos}.m(\pm 2n\varpi)+\frac{m}{1}\mathrm{Cos}.(m-2)(\pm 2n\varpi)+\ldots\ldots$$

$$=\mathrm{Cos}.2mn\varpi\left(1+\frac{m}{1}+\frac{m}{2}\cdot\frac{m-1}{2}+\ldots\right)$$

$$=2^m.\mathrm{Cos}.2mn\varpi;$$

$$Q_n=\mathrm{Sin}.m(\pm 2n\varpi)+\frac{m}{1}\mathrm{Sin}.(m-2)(\pm 2n\varpi)+\ldots\ldots$$

$$=\pm\mathrm{Sin}.2mn\varpi\left(1+\frac{m}{1}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}+\ldots\right)$$

$$=\pm 2^m.\mathrm{Sin}.2mn\varpi;$$

et pour $x=\varpi$

$P_n=$

$$P_n = 2^m.\mathrm{Cos}.2m(n+1)\pi\ , \qquad Q_n = \pm 2^m.\mathrm{Sin}.m(2n+1)\pi\ ;$$

donc

$$(2\mathrm{Cos}.x)^m = [2\mathrm{Cos}.x]^m.\{\mathrm{Cos}.2mn\pi \pm \sqrt{-1}\mathrm{Sin}.2mn\pi\}\ ,$$

ou

$$(2\mathrm{Cos}.x)^m = [2\mathrm{Cos}.x]^m.\{\mathrm{Cos}.(1\pm 2n)\pi \pm \sqrt{-1}\mathrm{Sin}.m(1\pm 2n)\pi\}\ .$$

9.

Ces expressions se vérifient sur-le-champ ; car la formule générale connue

$$(\mathrm{Cos}.x \pm \sqrt{-1}\mathrm{Sin}.x)^m = \mathrm{Cos}.mx \pm \sqrt{-1}\mathrm{Sin}.mx$$

donne, si on y fait $x = 2n\pi$,

$$(+1)^m = \mathrm{Cos}.2mn\pi \pm \sqrt{-1}\mathrm{Sin}.2mn\pi\ ,$$

et si l'on y fait $x = (1\pm 2n)\pi$

$$(-1)^m = \mathrm{Cos}.m(1\pm 2n)\pi \pm \sqrt{-1}\mathrm{Sin}.m(1\pm 2n)\pi\ .$$

Substituant donc ces valeurs de $\mathrm{Cos}.2mn\pi \pm \sqrt{-1}\mathrm{Sin}.2mn\pi$ et de $\mathrm{Cos}.m(1\pm 2n)\pi \pm \sqrt{-1}\mathrm{Sin}.m(1\pm 2n)\pi$ dans l'expression de $(2\mathrm{Cos}.x)^m$, trouvée en dernier lieu, on aura

$$(2\mathrm{Cos}.x)^m = [2\mathrm{Cos}.x]^m.(\pm 1)^m\ ;$$

comme cela doit être.

Voilà donc une preuve certaine de l'exactitude de l'expression générale de $(2\mathrm{Cos}.x)^m$ à laquelle nous sommes parvenus en dernier lieu.

Pour distinguer la nouvelle expression ci-dessus de l'expression générale $P_n \pm \sqrt{-1}Q_n$, désignons-la par

$$[2\mathrm{Cos}.x]^m(A_m \pm \sqrt{-1}B_m) = (2\mathrm{Cos}.x)^m \;;$$

de manière que

$$A_n \pm \sqrt{-1}B_n = (\pm 1)^m \;.$$

10.

Maintenant nous observerons que, pour toutes les valeurs de x qui donnent le même signe à $\mathrm{Cos}.x$, la réalité, ou généralement la forme des racines différentes de $2\mathrm{Cos}.x$, est absolument indépendante de la valeur de x même, de manière qu'on peut mettre une valeur quelconque pour x, par exemple, $x=0$ pour un cosinus positif et $x=\pi$ pour un cosinus négatif, sans passer d'une racine réelle à une racine imaginaire, ou généralement de la forme d'une racine quelconque, correspondant à une certaine valeur de n, à une autre forme. C'est, au surplus, ce que l'expression

$$(2\mathrm{Cos}.x)^m = [2\mathrm{Cos}.x]^m.(\pm 1)^m$$

fait voir clairement; car les k valeurs qu'expriment les deux formules $(2\mathrm{Cos}.x)^m$ et $[2\mathrm{Cos}.x]^m.(\pm 1)^m$ étant identiquement les mêmes, et $[2\mathrm{Cos}.x]^m$ n'ayant qu'une seule et unique valeur, il est clair que les valeurs de $(2\mathrm{Cos}.x)^m$ sont purement réelles, purement imaginaires ou de la forme $p \pm \sqrt{-1}q$ dans les mêmes cas que les valeurs de $(\pm 1)^m$, c'est-à-dire, les valeurs de $(\mathrm{Cos}.x)^m$ pour $x=0$ et $x=\pi$ le sont elles-mêmes.

11.

On trouvera donc les valeurs de n qui donnent les racines de $2\mathrm{Cos}.x$ toutes réelles, toutes imaginaires ou de la forme $p \pm \sqrt{-1}q$, si l'on cherche les valeurs de n qui donnent pour $(\pm 1)^m$ des racines de même forme ou, ce qui est la même chose, si l'on met $x=0$ et $x=\pi$ dans l'expression générale de $(\text{Cos}.x)^m$, et qu'ensuite on cherche les valeurs de n pour lesquelles cette expression prend les formes A_n, $\pm\sqrt{-1}B_n$ ou $A_n\pm\sqrt{-1}B_n$.

12.

Puisque, lorsque Cos.x est positif,

$$A_n=\text{Cos}.2mn\pi=\text{Cos}.\frac{2n}{k}\pi,\ B_n=\text{Sin}.2mn\pi=\text{Sin}.\frac{2n}{k}\pi;$$

tandis que, lorsque Cos.x est négatif

$$A_n=\text{Cos}.m(1\pm2n)\pi=\text{Cos}.\frac{1\pm2n}{k}\pi,\ B_n=\text{Sin}.m(1\pm2n)\pi=\text{Sin}.\frac{1\pm2n}{k}\pi,$$

il s'ensuit que, dans le cas où Cos.x est positif, on aura

$$A_n=0\ ,\ \text{si l'on fait}\ \frac{2n}{k}=\tfrac{1}{2}\,,\ \tfrac{3}{2}\,,\ \tfrac{5}{2}\,,\ldots\ldots;$$

$$B_n=0\ ,\ \text{si l'on fait}\ \frac{2n}{k}=0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ldots\ldots;$$

et que, dans le cas où Cos.x est au contraire négatif, on aura

$$A_n=0\ ,\ \text{si l'on fait}\ \frac{1\pm2n}{k}=\tfrac{1}{2}\,,\ \tfrac{3}{2}\,,\ \tfrac{5}{2}\,,\ldots\ldots;$$

$$B_n=0\ ,\ \text{si l'on fait}\ \frac{1\pm2n}{k}=0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ldots\ldots;$$

on pourra aisément trouver par là, pour chaque valeur de k, les valeurs correspondantes de n.

13.

Nous remarquerons d'abord que le nombre des valeurs différentes de $\frac{2n}{k}$ et de $\frac{1\pm 2n}{k}$, et conséquemment de n, ne pourra jamais être plus grand que le nombre k; car le nombre des valeurs différentes de la quantité $(2\text{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$ ou de $\text{Cos}.m(x\pm 2n\pi)$, $\text{Cos}.(m-2)(x\pm 2n\pi)$, ..., $\text{Sin}.m(x\pm 2n\pi)$, $\text{Sin}.(m-2)(x\pm 2n\pi)$, ..., correspondant à ces valeurs, étant toujours égal au nombre k, le nombre des valeurs de n sera aussi égal à ce nombre, en commençant par zéro, et en parcourant tous les nombres entiers. Donc n ne sera pas plus grand que k.

Il suit de là qu'on aura

I. *Pour* Cos.x *positif.*

1. $A_n=0$ seulement pour $\frac{2n}{k}=\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$, ou pour $2n=\frac{1}{2}k$ et $\frac{3}{2}k$;

2. $B_n=0$ seulement pour $\frac{2n}{k}=0$ et 1, ou pour $2n=0$ et k;

puisque $2n$ ne doit pas surpasser $2k$.

II. *Pour* Cos.x *négatif.*

1. $A_n=0$ seulement pour $\frac{1\pm 2n}{k}=\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$, ou pour $2n=\frac{1}{2}k$ et $\frac{3}{2}k$;

2. $B_n=0$ seulement pour $\frac{1\pm 2n}{k}=1$ et 2, ou pour $2n=k-1$ et $2k-1$;

car, n ne pouvant être fractionnaire, les valeurs $2n=\pm(0k-1)$ n'existent pas. De plus $2n$ ne pouvant surpasser le nombre $2k$, il faut que la valeur de $2x$ se trouve entre $(\frac{1}{2}k-1)$ et $(\frac{5}{2}k-1)$, pour $A_n=0$, et entre $k-1$ et $3k-1$ pour $B_n=0$. Mais la plus petite valeur de k étant 2, les valeurs $\frac{5}{2}k-1$ et $3k-1$ de $2n$ donnent déjà les nombres 4 et 5, c'est-à-dire, $2k$ et $2k+1$, dont la première est la limite des valeurs de $2n$, tandis que l'autre la surpasse. Mais, puisque la valeur de $2n$, correspondant à une des limites elle-même, égale toujours la valeur pour l'autre, la valeur $\frac{5}{2}k-1$ ni toutes les suivantes n'existent pas pour $A_n=0$, ni la valeur $3k-1$ et toutes les suivantes, pour $B_n=0$. Donc il ne reste que les deux valeurs $\frac{1}{2}k-1$ et $\frac{3}{2}k-1$ de $2n$ pour $A_n=0$ et les deux valeurs $k-1$ et $2k-1$ pour $B_n=0$.

14.

Puisque A_n et B_n, P_n et Q_n s'évanouissent en même temps, ou pour la même valeur de n, ainsi que nous l'avons vu (9, 10, 11), et que l'on obtient (7), pour l'expression générale de $(2\text{Cos.}x)^m$,

$$(2\text{Cos.}x)^m=\text{Cos.}m(x\pm 2n\pi)\pm\sqrt{-1}\,\text{Sin.}m(x\pm 2n\pi)=P_n\pm\sqrt{-1}\,Q_n\ ;$$

$$+\frac{m}{1}\,\text{Cos.}(m-2)(x\pm 2n\pi)\pm\frac{m}{1}\sqrt{-1}\,\text{Sin.}(m-2)(x\pm 2n\pi)$$

$$+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\,\text{Cos.}(m-4)(x\pm 2n\pi)\pm\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\sqrt{-1}\,\text{Sin.}(m-4)(x\pm 2n\pi)$$

$$+\ \ldots\ldots\ldots\ \pm\ \ldots\ldots\ldots$$

en ajoutant, dans l'expression,

$$P_0\pm\sqrt{-1}\,Q_0=\text{Cos.}mx\pm\sqrt{-1}\,\text{Sin.}mx$$

$$+\frac{m}{1}\,\text{Cos.}m-2)x\pm\frac{m}{1}\sqrt{-1}\,\text{Sin.}(m-2)x$$

$$+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\,\text{Cos.}(m-4)x \pm \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\sqrt{-1}\,\text{Sin.}(m-4)x$$

$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\pm\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

la quantité $\pm 2n\pi$ à x, il suit de ce qui a été dit ci-dessus qu'on a

Pour Cos.x *positif*

$P_n=0$, en ajoutant à x l'une des quantités $\pm\frac{1}{2}k\pi$ et $\pm\frac{3}{2}k\pi$,
ou en ajoutant à mx la quantité $\pm m(\frac{1}{2}k\pi)=\pm\frac{1}{2}\pi$ ou $\pm m(\frac{3}{2}k\pi)=\pm\frac{3}{2}\pi$.

$Q=0$, en ajoutant à x l'une des quantités ± 0 et $\pm k\pi$,
ou en ajoutant à mx la quantité ± 0 ou $\pm mk\pi=\pm\pi$.

On devra avoir de même

Pour Cos.x *négatif*

$P_n=0$, en ajoutant à x l'une des deux quantités $\pm(\frac{1}{2}k-1)\pi$ et $\pm(\frac{3}{2}k-1)\pi$,
ou à mx la quantité $\pm m(\frac{1}{2}k-1)\pi=\pm(\frac{1}{2}-m)\pi$ ou $\pm m(\frac{3}{2}k-1)\pi=\pm(\frac{3}{2}-m)\pi$.

$Q_n=0$, en ajoutant à x l'une des deux quantités $\pm(k-1)\pi$ et $\pm(2k-1)\pi$,
ou à mx la quantité $\pm m(k-1)\pi=\pm(1-m)\pi$ ou $\pm m(2k-1)\pi=\pm(2-m)\pi$.

15.

Les différences de toutes ces doubles valeurs surajoutées à mx sont partout égales à π. On trouverait aisément aussi que les différences des doubles valeurs surajoutées aux quantités $(m-2)x$, $(m-4)x$, ... sont toutes des multiples de π. Mais les sinus et cosinus changent tout au plus de signes, et jamais de valeur absolue, si l'on ajoute aux arcs un nombre quelconque de demicirconférences ; donc toutes les doubles quantités trouvées ci-dessus, pour $P_n=0$, $Q_n=0$, se réduisent toujours à une seule, et par conséquent on aura

I. *Pour* Cos.x *positif.*

$P_n=0$, en ajoutant seulement à x, $\pm\frac{1}{2}k\pi$, qui répond à $n=\frac{k}{4}$;

de sorte que $P_{\frac{1}{4}k}=0$:

$Q_n=0$, en n'ajoutant rien à x; ce qui correspond à $n=0$;

de sorte que $Q_0=0$.

II. *Pour* Cos.x *négatif*

$P_n=0$, en ajoutant seulement à x, $\pm(\frac{1}{2}k-1)\pi$, qui répond à $n=\frac{k-2}{4}$

de sorte que $P_{\frac{1}{4}(k-2)}=0$.

$Q_n=0$, en ajoutant seulement à x, $\pm(k-1)\pi$, qui répond à $n=\frac{k-1}{2}$;

de sorte que $Q_{\frac{1}{2}(k-1)}=0$.

16.

Il suit de là que

I. *Pour* Cos.x *positif*;

1.° La quantité P_n ne peut s'évanouir ou, ce qui revient au même, $(2\text{Cos.}x)^{\frac{1}{k}}$ ne saurait avoir des valeurs purement imaginaires, à moins que k ne soit multiple de 4, puisqu'on a trouvé la condition $n=\frac{k}{4}$, et que n doit toujours être un nombre entier.

2.° La quantité Q_n s'évanouit toujours, c'est-à-dire, qu'une valeur de $(2\text{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$ toute réelle existe dans tous les cas, et pour toutes les valeurs possibles de k, puisque, pour cette valeur réelle, la quantité n est toujours égale à zéro, et par suite indépendante de k.

II. *Pour* Cos.x *négatif.*

1.° La quantité P_n ne peut s'évanouir ou, ce qui revient au même, $(2\text{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$ ne saurait avoir des valeurs purement imaginaires, à moins que $k-2$ ne soit un multiple de 4; car on a trouvé, dans ce cas, $n=\frac{k-2}{4}$, sous la condition que n soit un nombre entier.

2.° La quantité Q_n ne peut s'évanouir, c'est-à-dire, qu'il ne peut exister des valeurs entièrement réelles de $(2\text{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$, à moins que k ne soit impair, puisqu'on a trouvé pour ce cas $n=\frac{k-1}{2}$, sous la condition que n soit un nombre entier.

17.

L'expression générale de $(2\text{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$, si l'on y substitue la valeur $\frac{1}{k}$ de m, donne

$$(2\text{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}=P_n\pm\sqrt{-1}\,Q_n$$

$$=\left.\begin{array}{l}\text{Cos}.\frac{1}{k}(x\pm 2n\pi)\\ +\frac{1}{k}\,\text{Cos}.\left(\frac{1}{k}-2\right)(x\pm 2n\pi)\\ +\frac{1}{k}.\frac{\frac{1}{k}-1}{2}.\text{Cos}.\left(\frac{1}{k}-4\right)(x\pm 2n\pi)\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.\pm\sqrt{-1}\left\{\begin{array}{l}\text{Sin}.\frac{1}{k}(x\pm 2n\pi)\\ +\frac{1}{k}\,\text{Sin}.\left(\frac{1}{k}-2\right)(x\pm 2n\pi)\\ +\frac{1}{k}.\frac{\frac{1}{k}-1}{2}\,\text{Sin}.\left(\frac{1}{k}-4\right)(x\pm 2n\pi)\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$$

si

si donc on introduit dans cette expression générale les valeurs particulières de n qui répondent aux divers cas de $P_n=0$ et $Q_n=0$, trouvées ci-dessus (15), pour déterminer les valeurs de $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$ toutes réelles ou tout imaginaires qui répondent à ces mêmes cas, on parviendra aux résultats que voici:

I. *Pour* Cos.x *positif*,

1.° Si l'on veut avoir, dans ce cas, les valeurs purement imaginaires de $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$, il faut supposer $P_n=0$. Mais (15) la valeur $\frac{k}{4}$ de n répond à $P_n=0$, donc il faut mettre $n=\frac{k}{4}$ ou $2n=\frac{k}{2}$ dans tous les termes dont la quantité Q_n est composée, en supprimant d'ailleurs P_n; on trouve ainsi

$$\mathrm{Sin}.\frac{1}{k}(x\pm2n\varpi)=\mathrm{Sin}.\frac{1}{k}(x\pm\tfrac{1}{2}k\varpi)$$

$$=\mathrm{Sin}.\left(\frac{x}{k}\pm\tfrac{1}{2}\varpi\right)=\pm\mathrm{Cos}.\frac{x}{k}=\pm\mathrm{Cos}.mx\ ;$$

$$\mathrm{Sin}.\left(\frac{1}{k}-2\right)(x\pm2n\varpi)=\mathrm{Sin}.\left(\frac{1}{k}-2\right)(x\pm\tfrac{1}{2}k\varpi)$$

$$=\mathrm{Sin}.\left[\left(\frac{1}{k}-2\right)x\pm(\tfrac{1}{2}-k)\varpi\right]=\pm\mathrm{Cos}\left(\frac{1}{k}-2\right)x=\pm\mathrm{Cos}.(m-2)x\ ;$$

. . . .

En conséquence, la valeur de Q_n, qui est alors $Q_{\frac{1}{4}k}$, deviendra

$$Q_{\frac{1}{4}k}=\pm\left\{\mathrm{Cos}.mx+\frac{m}{1}\mathrm{Cos}.(m-2)x+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\mathrm{Cos}.(m-4)x+\ldots\right\}=\pm P_0$$

de sorte qu'on aura, pour ce cas,

$$(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}=\pm\sqrt{-1}P_0\ ;$$

d'où l'on voit que, pour Cos.x positif et k multiple de 4, il existe toujours deux valeurs purement imaginaires de $(2\mathrm{Cos}.k)^{\frac{1}{k}}$, ne différant que par le signe, et dont la valeur commune absolue est $\sqrt{-1}P_0$.

Si l'on voulait savoir à quoi se réduit alors la quantité $P_{\frac{1}{4}k}$, que nous avons dit devoir s'évanouir dans ce cas, il faudrait faire également $n=\frac{k}{4}$ ou $2n=\frac{k}{2}$, dans tous les termes dont P_n est composé; on trouverait ainsi successivement

$$\mathrm{Cos}.\frac{1}{k}(x\pm 2n\varpi)=\mathrm{Cos}.\frac{1}{k}(x\pm\tfrac{1}{2}k\varpi)$$

$$=\mathrm{Cos}.\left(\frac{x}{k}\pm\tfrac{1}{2}\varpi\right)=\pm\mathrm{Sin}.\frac{x}{k}=\pm\mathrm{Sin}.mx\ ;$$

$$\mathrm{Cos}.\left(\frac{1}{k}-2\right)(x\pm 2n\varpi)=\mathrm{Cos}.\left(\frac{1}{k}-2\right)(x\pm\tfrac{1}{2}k\varpi)$$

$$=\mathrm{Cos}\left[\left(\frac{1}{k}-2\right)x\pm(\tfrac{1}{2}-k)\varpi\right]=\pm\mathrm{Sin}.\left(\frac{1}{k}-2\right)x=\pm\mathrm{Sin}.(m-2)x,$$

En conséquence la valeur de P_n, qui est alors $P_{\frac{1}{4}k}$, deviendra

$$P_{\frac{1}{k}k}=\pm\left\{\mathrm{Sin}.mx+\frac{m}{1}\mathrm{Sin}.(m-2)x+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\mathrm{Sin}.(m-4)x+\ldots\right\}=\pm Q_0\ ;$$

d'où l'on voit que, pour le cas de Cos.x positif et de k multiple de 4, on doit avoir $Q_0=0$.

2°. Les valeurs toutes réelles de $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$ qui répondent à toutes les valeurs possibles de k (16) se trouvent sur-le-champ ; car, pour ces valeurs, n étant égal à zéro, elles ne seront autre chose que $\pm P_0$, de sorte qu'on aura

$$(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}} = \pm P_0 \ .$$

L'ambiguïté du signe tient à ce que la valeur est nécessairement double si k est un nombre pair. Si k au contraire est impair, le signe $+$ a seul lieu. Car l'expression de $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$ étant toujours soumise aux mêmes conditions que l'expression $(\pm 1)^{\frac{1}{k}}$, ce qui revient, pour le cas actuel (9), à

$$(+1)^{\frac{1}{k}} = \mathrm{Cos}.\frac{2n\pi}{k} \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.\frac{2n\pi}{k} \ ,$$

il est aisé de voir que cette dernière expression donne toujours une couple de valeurs toute réelles, ne différant que par le signe, pour $2n=0$ et $2n=k$; car ce sont les valeurs de n pour lesquelles $\mathrm{Sin}.\frac{2n\pi}{k}$ est égal à zéro. En effet, ce sont les mêmes valeurs déjà trouvées (13), pour le cas de $Q_n=0$; et, puisqu'il y a deux valeurs entièrement réelles pour $(+1)^{\frac{1}{k}}$, en supposant $2n=0$ et $2n=k$, il y a aussi nécessairement deux valeurs réelles de $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$ pour les mêmes cas. Mais $2n=k$ suppose k pair. Si k est impair, on n'a pas $2n=k$, puisque n doit toujours être un nombre entier. Dans ce dernier cas, on peut donc seulement mettre $2n=0$, et il n'existe que la valeur positive. Donc il n'y a que deux valeurs entièrement réelles de $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$, ne différant que par le signe, si k est pair. Elles sont, comme on vient de le voir, égales à $\pm P_0$. Si k est impair, il n'existe que la valeur $+P_0$ seule.

Au reste, puisqu'il existe *toujours* une ou deux valeurs entièrement réelles de $(2\text{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$, dans le cas de Cos.$x$ positif, et qu'en même temps il existe aussi deux valeurs purement imaginaires. dans le cas particulier où k est un multiple de 4, il s'ensuit que ces deux dernières valeurs doivent être essentiellement distinctes des premières, de maniere qu'on a, dans ce cas, quatre valeurs de $(2\text{Cos}.k)^{\frac{1}{k}}$.

La quantité qui s'évanouit dans le cas des valeurs entièrement réelles de $(2\text{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$, *toujours* pour Cos.$x$ positif, se trouve aussi sur-le-champ. Elle n'est en effet autre chose que Q_0, puisque, dans le cas actuel n doit être égal à zéro. On a donc l'équation $Q=0$, pour le cas des valeurs entièrement réelles de $(2\text{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$; ce qui s'accorde parfaitement avec ce qu'on vient de trouver plus haut. Car les valeurs entièrement réelles de $(2\text{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$ ayant *toujours* lieu pour Cos.x positif, il faut que le cas de k égal à un multiple de 4, dans lequel il existe en outre deux valeurs purement imaginaires de $(2\text{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$, donne aussi $Q=0$; puisque, dans ce cas, les deux valeurs entièrement réelles et les deux valeurs purement imaginaires de $(2\text{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$ existent en même temps; et c'est précisément ce qu'on vient de trouver.

II. *Pour* Cos.x *négatif*,

1.° Pour avoir les valeurs purement imaginaires de $(2\text{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$ qui existent, si $k-2$ est un multiple de 4, il faut (16) substituer la valeur $\frac{k-2}{4}$ de n qui (15) correspond à ce cas dans la quantité Q_n qui alors devient $Q_{\frac{1}{4}(k-2)}$, et constitue à elle seule les valeurs cherchées. Cela donne successivement

$$\text{Sin.}\frac{1}{k}(x\pm 2n\varpi)=\text{Sin.}\frac{1}{k}\left(x\pm\frac{k-2}{2}\varpi\right)$$

$$=\pm\text{Cos.}\frac{1}{k}(x\pm\varpi)=\pm\text{Cos.}m(x\pm\varpi),$$

$$\text{Sin.}\left(\frac{1}{k}-2\right)(x\pm 2n\varpi)=\text{Sin.}\left(\frac{1}{k}-2\right)\left(x\pm\frac{k-2}{2}\varpi\right)$$

$$=\pm\text{Cos.}\left(\frac{1}{k}-2\right)(x\pm\varpi)=\pm\text{Cos.}(m-2)(x\pm\varpi),$$

. . . .

donc la quantité Q_n se réduit, dans le cas actuel, à

$$Q_{\frac{1}{4}(k-2)}=\pm\left\{\text{Cos.}m(x\pm\varpi)+\frac{m}{1}\text{Cos.}(m-2)(x\pm\varpi)+\ldots\right\}=\pm P_{\frac{1}{2}};$$

d'où résulte

$$(2\text{Cos.}x)^{\frac{1}{k}}=\pm\sqrt{-1}\,P_{\frac{1}{2}};$$

ce qui donne les deux valeurs purement imaginaires de $(2\text{Cos.}x)^{\frac{1}{k}}$ qui existent, dans le cas où $k-2$ est un multiple de 4, Cos.x étant négatif.

La quantité P_n ou $P_{\frac{1}{4}(k-2)}$, qui doit s'évanouir dans ce cas, s'obtiendra, en substituant la valeur $\frac{k-2}{4}$ de n dans tous les termes qui la composent. Sans faire ici le calcul, qui ne serait qu'une répétition de celui que nous avons fait plus haut, il nous suffira de dire qu'on trouve définitivement

$$P_{\frac{1}{4}(k-2)}=\pm\left\{\text{Sin.}m(x\pm\varpi)+\frac{m}{1}\text{Sin.}(m-2)(x\pm\varpi)+\ldots\right\}=\pm Q_{\frac{1}{2}};$$

il vient alors, en développant,

$$P_{\frac{1}{4}(k-2)} = \pm \{ \text{Sin}.mx\text{Cos}.m\varpi \pm \text{Cos}.mx\text{Sin}.m\varpi$$

$$+ \frac{m}{1} [\text{Sin}.(m-2)x\text{Cos}.(m-2)\varpi \pm \text{Cos}.(m-2)x\text{Sin}.(m-2)\varpi]$$

$$+ \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} [\text{Sin}.(m-4)x\text{Cos}.(m-4)\varpi \pm \text{Cos}.(m-4)x\text{Sin}.(m-4)\varpi]$$

$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \};$$

or,

$$\text{Cos}.m\varpi = \text{Cos}.(m-2)\varpi = \text{Cos}.(m-4)\varpi = \ldots \ldots \ldots$$

$$\text{Sin}.m\varpi = \text{Sin}.(m-2)\varpi = \text{Sin}.(m-4)\varpi = \ldots \ldots \ldots$$

donc, en ayant égard à ces relations

$$P_{\frac{1}{4}(k-2)} = \pm \text{Cos}.m\varpi \left\{ \text{Sin}.mx + \frac{m}{1} \text{Sin}.(m-2)x + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \text{Sin}.(m-4)x + \ldots \right\}$$

$$\mp \text{Sin}.m\varpi \left\{ \text{Cos}.mx + \frac{m}{1} \text{Cos}.(m-2)x + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \text{Cos}.(m-4)x + \ldots \right\};$$

c'est-à-dire,

$$P_{\frac{1}{4}(k-2)} = \pm (P_0 \text{Sin}.m\varpi \pm Q_0 \text{Cos}.m\varpi):$$

Donc, si $k = \frac{1}{m}$ est un multiple de 4, et que Cos.x soit négatif, on aura toujours la relation

$$P_0 \text{Sin}.m\varpi \pm Q_0 \text{Cos}.m\varpi = Q_{\frac{1}{2}} = 0.$$

2.° Les valeurs entièrement réelles de $(2\text{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$ qui existent (16) dans le cas où k est impair, Cos.x étant toujours négatif, se trouvent en substituant la valeur $\frac{k-1}{2}$ de n, qui correspond à ce cas, dans tous les termes de P_n, qui devient ainsi $P_{\frac{1}{2}(k-1)}$, et qui constitue à elle seule la quantité cherchée. Cela donne

$$\text{Cos.}\frac{1}{k}(x\pm 2n\pi)=\text{Cos.}\frac{1}{k}[x\pm(k-1)\pi]$$

$$=-\text{Cos.}\frac{1}{k}(x\pm\pi)=-\text{Cos.}m(x\pm\pi),$$

$$\text{Cos.}\left(\frac{1}{k}-2\right)(x\pm 2n\pi)=\text{Cos.}\left(\frac{1}{k}-2\right)[x\pm(k-1)\pi]$$

$$=-\text{Cos.}\left(\frac{1}{k}-2\right)(x\pm\pi)=-\text{Cos.}(m-2)(x\pm\pi);$$

. . . .

et par suite

$$P_{\frac{1}{2}(k-1)}=-\left\{\text{Cos.}m(x\pm\pi)+\frac{m}{1}\text{Cos.}(m-2)(x\pm\pi)+\ldots\ldots\right\}=-P_{\frac{1}{2}}$$

donc

$$(2\text{Cos.}x)^{\frac{1}{k}}=P_{\frac{1}{2}(k-1)}=-P_{\frac{1}{2}};$$

ce qui donne l'unique valeur entièrement réelle de $(2\text{Cos.}x)^{\frac{1}{k}}$, pour le cas où k est impair et $\text{Cos.}x$ négatif.

Quant à la quantité $Q_{\frac{1}{2}(k-1)}$ qui doit s'évanouir dans ce cas, on trouvera, par un calcul semblable à celui qui a été employé pour $P_{\frac{1}{2}(k-1)}$,

$$Q_{\frac{1}{2}(k-1)}=\text{Sin.}m(x\pm\pi)+\frac{m}{1}\ \text{Sin.}(m-2)(x\pm\pi)+\ldots\ldots=Q_{\frac{1}{2}}$$

d'où

$$Q_{\frac{1}{2}}=0\,.$$

18.

Résumons présentement les divers résultats auxquels nous venons de parvenir.

Posons, pour abréger, comme ci-dessus,

$$\text{Cos.}m(x\pm 2n\pi)+\frac{m}{1}\ \text{Cos.}(m-2)(x\pm 2n\pi)$$

$$+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\ \text{Cos.}(m-4)(x\pm 2n\pi)+\ldots\ldots=P_n\ ;$$

$$\text{Sin.}m(x\pm 2n\pi)+\frac{m}{1}\ \text{Sin.}(m-2)(x\pm 2n\pi)$$

$$+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\ \text{Cos.}(m-4)(x\pm 2n\pi)+\ldots\ldots=Q_n\,,$$

et, par suite, pour $n=0$;

$$\text{Cos.}mx+\frac{m}{1}\text{Cos.}(m-2)x+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\ \text{Cos.}(m-4)x+\ldots\ldots=P_0\ ;$$

$$\text{Sin.}mx+\frac{m}{1}\ \text{Sin.}(m-2)x+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\ \text{Sin.}(m-4)x+\ldots\ldots=Q_0\ ,$$

et pour $2n=1$ ou $n=\frac{1}{2}$

Cos.m

$$\text{Cos.}m(x\pm n)+\frac{m}{1}\,\text{Cos.}(m-2)(x\pm n)$$

$$+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\,\text{Cos.}(m-4)(x\pm n)+\ldots\ldots=P_{\frac{1}{2}}\;,$$

$$\text{Sin.}m(x\pm n)+\frac{m}{1}\,\text{Sin.}(m-2)(x\pm n)$$

$$+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\,\text{Sin.}(m-4)(x\pm n)+\ldots\ldots=Q_{\frac{1}{2}}\;;$$

de manière que

$$P_{\frac{1}{2}}=P_0\text{Cos.}mn\pm Q_0\text{Sin.}mn\;,$$

$$Q_{\frac{1}{2}}=P_0\text{Sin.}mn\pm Q_0\text{Cos.}mn\;;$$

supposons de plus

$$m=\frac{1}{k}\;,$$

nous aurons les résultats suivants.

La quantité $(2\text{Cos.}x)^{\frac{1}{k}}$ a toujours k valeurs différentes, qui s'expriment généralement par

$$(2\text{Cos.}x)^{\frac{1}{k}}=P_n\pm\sqrt{-1}\,Q_n\;.$$

Mais

I. *Dans le cas de* Cos.x *positif*,

il existe toujours, parmi ces k valeurs, pour toutes les valeurs possibles de x, une valeur entièrement réelle de $(2\text{Cos.}x)^{\frac{1}{k}}$, si k est impair, et deux valeurs ne différant que par le signe, si k est pair. Les valeurs entièrement réelles, en donnant pour indice à $(2\text{Cos.}x)^{\frac{1}{k}}$ les valeurs correspondantes de n, sont exprimées par

$$(2\text{Cos.}x)^{\frac{1}{k}}{}_{(0\text{ et }\frac{1}{2}k)}=\pm P_0\;.$$

Outre ces valeurs, il en existe deux autres, purement imaginaires, qui s'expriment par

$$(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}_{(\frac{1}{4}k)}=\pm\sqrt{-1}P_{0}$$

dans le seul cas où k est un multiple de 4.

Le surplus des k valeurs $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$ s'expriment toujours par

$$(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}_{n}=P_{n}\pm\sqrt{-1}Q_{n}\ ,$$

où l'on peut donner à n toutes les valeurs entières et positives autres que celles qui répondent aux cas particuliers que nous venons d'examiner, savoir, o pour tous les cas, o et $\frac{1}{2}k$ pour k pair, et enfin o, $\frac{1}{4}k$ et $\frac{3}{4}k$ pour k multiple de 4.

A quoi il faut ajouter que, pour tous les cas possibles d'un cosinus positif, on a toujours

$$Q_{0}=0\ .$$

II. *Dans le cas de* Cos.x *négatif*,

1.° Si k est pair, il n'existe, parmi les k valeurs de $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$ que deux valeurs purement imaginaires, exprimées par

$$(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}_{\frac{k-2}{4}}\ \text{et}\ _{\frac{3k-2}{4}}=\pm\sqrt{-1}P_{\frac{1}{2}}\ ;$$

si $k-2$ est un multiple de 4, le reste des k valeurs est de la forme

$$(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}_{n}=P\pm\sqrt{-1}Q_{n}\ ,$$

où l'on peut mettre pour n tous les nombres entiers, depuis o jusqu'à k, excepté les deux nombres $\dfrac{k-2}{4}$ et $\dfrac{3k-2}{4}$.

Pour toutes les autres valeurs paires de k, pour lesquelles $k-2$ n'est pas un multiple de 4, il n'existe ni valeurs entièrement réelles ni valeurs purement imaginaires de $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$. Toutes les k valeurs sont alors de la forme

$$(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}_{n}=P_n\pm\sqrt{-1}\,Q_n\ ,$$

où n peut être quelconque.

2.° Si k est impair, il existe toujours une valeur entièrement réelle, exprimée par

$$(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}_{\frac{k-1}{2}}=-P_{\frac{1}{2}}\ .$$

le reste des k valeurs est de la forme

$$(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}_{n}=P_n\pm\sqrt{-1}\,Q_n\ ,$$

où n peut être quelconque.

En outre, pour tous les cas possibles d'un cosinus négatif, on a toujours la relation

$$P_0\mathrm{Sin}.m\pi\pm Q_0\mathrm{Cos}.m\pi=Q_{\frac{1}{2}}=0\ .$$

19.

Les équations

$$Q_0=\mathrm{Sin}.mx+\frac{m}{1}\mathrm{Sin}.(m-2)x+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\mathrm{Sin}.\ (m-4)x+\ldots\ldots=0\ ;$$

pour Cos.x positif, et

$$Q_{\frac{1}{2}}=\mathrm{Sin}.m(x\pm\pi)+\frac{m}{1}\ \mathrm{Sin}.(m-2)(x\pm\pi)+\ldots\ldots=0;$$

pour Cos.x négatif, lesquelles subsistent pour toutes les valeurs possibles de x, expriment des théorèmes trigonométriques remarquables par leur généralité et par leur simplicité. Si l'on développe la première, elle donne

$$\mathrm{Tang}.mx=\frac{\frac{m}{1}\,\mathrm{Sin}.2x+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\,\mathrm{Sin}.4x+\ldots\ldots}{1+\frac{m}{1}\,\mathrm{Cos}.2x+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\,\mathrm{Cos}.4x+\ldots.}\ ;$$

de sorte que, pour $x=\frac{1}{4}\pi$, on aurait

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{4}mn = \frac{m - \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\cdot\frac{m-4}{5} - \ldots\ldots}{1 - \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4} - \ldots\ldots}$$

20.

L'expression ordinaire de $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{4}}$ qu'on a admise jusqu'ici, pour tous les cas possibles, est généralement

$$(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}} = P_0\ ;$$

de plus on a tacitement supposé

$$Q_0 = 0\ ,$$

pour tous les cas.

En comparant ces expressions aux résultats qu'on vient de trouver, on voit aisément les exceptions auxquelles elles sont soumises.

En effet l'expression $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}} = P_0$, admise généralement, n'est exacte et complète que dans le seul cas où $\mathrm{Cos}.x$ est positif et k un nombre impair. Si k est un nombre pair, l'expression $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}} = P_0$, ne donne qu'une seule des deux valeurs $\pm P_0$ qui existent dans ce cas. Et de plus elle ne donne pas les deux valeurs purement imaginaires de $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$ qu'on doit obtenir, si k est un multiple de 4, et qui sont $\pm\sqrt{-1}P_0$. Si $\mathrm{Cos}.x$ est négatif et k pair, l'expression $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{\ }} = P_0$ est en défaut ; car, dans ce cas, il n'existe pas de valeurs entièrement réelles de $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$, mais seulement deux valeurs purement imaginaires, ne différant l'une de l'autre que par le signe, et dont l'expression est $\pm\sqrt{-1}P^{\frac{1}{2}}$, si $k-2$ est un multiple de 4. Si, $\mathrm{cos}.x$ étant toujours négatif, k est impair, l'expression de

$(\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}} = P_0$ est encore en défaut; car la valeur entièrement réelle qui répond à ce cas n'est pas P_0, mais $-P_{\frac{1}{2}}$; de sorte que généralement $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}} = P_0$ est en défaut pour tout cosinus négatif.

Du reste cette formule ne donne jamais qu'une seule valeur de $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$, au lieu de k valeurs différentes qui doivent exister dans tous les cas.

L'équation $Q_0 = 0$, admise généralement, est exacte pour tout cosinus positif. Mais elle est en défaut pour tout cosinus négatif. Dans ce dernier cas, c'est $Q_{\frac{1}{2}} = 0$ qui doit lui être substituée.

21.

Je n'ai rapporté ici qu'un précis de l'explication du paradoxe. Ceux qui désireront un plus grand détail, et en particulier l'analise du calcul d'où on a tiré jusqu'ici la valeur incomplète et souvent fautive de $(2\mathrm{Cos}.x)^{\frac{1}{k}}$, pourront consulter la traduction allemande des *Leçons sur le calcul des fonctions de* LAGRANGE, qui est prête à paraître, et qui doit former le deuxième volume du recueil complet des ouvrages analitiques et géométriques de ce grand géomètre et que je publierai dans la même langue, en y joignant des notes et des additions, soit pour éclaircir les passages difficiles, en faveur des personnes qui ne sont pas suffisamment versées dans l'analise, soit pour généraliser et simplifier les théorèmes qui en sont susceptibles. Ce qui précède offre un exemple des notes de la dernière sorte. Je publierai les autres en français, à mesure que l'occasion s'en offrira.

Berlin, le 21 septembre 1822.