GERGONNE

Questions résolues. Solution des deux derniers problèmes de géométrie proposés à la page 380 du XII.e volume du présent recueil

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 13 (1822-1823), p. 201-212
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1822-1823__13__201_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution des deux derniers problèmes de géométrie proposés à la page 380 du XII.e volume du présent recueil ;

Par M. Gergonne.

PROBLÈME I. *Assigner l'arc de courbe le moins long, entre tous ceux qui, se terminant aux deux extrémités de la base d'un triangle isocèle donné, et étant en ces points tangens aux deux autres côtés du triangle, partagent son aire en raison donnée ?*

Solution. Ce problème semble, au premier aspect, présenter une sorte de paradoxe. Il est d'abord d'une évidente possibilité ; et, si quelque doute pouvait s'élever ici, ce serait uniquement sur la question de savoir s'il peut admettre plusieurs solutions, ou si, au contraire, il n'en admet qu'une seule ; mais, d'un autre côté, si on lui applique la méthode des variations, on le trouve, en général, plus que déterminé, et de nature à présenter un ensemble de conditions tout-à-fait inconciliables.

On sait, en effet, que cette méthode, d'accord en cela avec les considérations les plus évidentes de la géométrie pure, indique positivement l'arc de cercle comme le moins long entre tous les arcs de courbes qui, avec d'autres lignes données quelconques, concourt à enfermer un même espace plan donné. Or, dans la question qui nous occupe, la condition d'avoir pour corde la base du triangle et celle de partager son aire en raison donnée, suffisent à elles seules pour déterminer l'arc de cercle cherché, qui ne pourra ainsi qu'accidentellement, et dans des cas particuliers seulement, satisfaire à la condition de tangence avec les deux autres côtés de ce triangle. Et si, au contraire, on combine seulement cette dernière condition avec celle qui exige que l'arc de cercle ait pour corde la base du triangle; cet arc se trouvera encore, par ces deux seules conditions, tout-à-fait déterminé; de sorte que ce ne pourra être qu'accidentellement, et dans des cas particuliers, qu'il divisera l'aire de ce triangle suivant la raison donnée.

On peut d'ailleurs s'assurer bien facilement, et indépendamment de la méthode des variations, que tout arc de courbe, autre qu'un arc de cercle, ne saurait résoudre le problème. Soient, en effet, AB la base et S le sommet du triangle dont il s'agit (fig. 8); et supposons qu'on veuille prétendre que le plus petit des arcs de courbes qui, ayant AB pour corde commune et SA, SB pour tangentes communes en A et B, partagent l'aire du triangle en raison donnée, est un certain arc ADEB, différent d'un arc de cercle; en détachant de l'espace ADEB un segment plus ou moins grand, par une corde arbitraire DE, et remplaçant ce segment par un segment de cercle équivalent, ayant la même corde; l'arc de cercle correspondant; augmenté des arcs restans DA et EB de l'autre courbe, formerait une ligne discontinue qui, remplissant d'ailleurs toutes les autres conditions du problème, serait moins longue que la première qui ne jouirait pas conséquemment de la propriété du *minimum* de longueur, ainsi qu'on l'avait d'abord supposé.

Il est donc absolument hors de doute que la partie de la ligne cherchée non adhérente aux côtés égaux du triangle ne saurait être qu'un arc de cercle; et dès-lors voici la seule manière dont le problème puisse être résolu. Soit toujours ASB le triangle donné (fig. 9). Soit menée à sa base une parallèle arbitraire XY, qui en retranche, du côté de cette base, une portion moindre que celle qu'en doit retrancher la ligne cherchée. Sur XY, comme corde, et du côté du sommet, soit construit un segment de cercle XVY qui complète la portion à retrancher; nous aurons alors une ligne discontinue AXVYB, qui aura pour corde la base AB du triangle, qui sera tangente en A et B à ses deux autres côtés, puisque ses parties AX et BY se confondront avec eux, et qui partagera en outre l'aire du triangle suivant la raison donnée; cette ligne AXVYB remplira donc toutes les conditions du problème, sauf peut-être la condition du *minimum* de longueur; tout se réduira donc à profiter de l'indétermination de la distance de la base à sa parallèle XY, pour faire en sorte que cette dernière condition soit remplie; et c'est ce dont nous allons présentement nous occuper.

Tout étant d'ailleurs dans la figure 10 comme dans les précédentes, soient XY et XVY la corde parallèle à la base et l'arc correspondant qui résolvent le problème; soit joint le sommet S au milieu C de la base AB, par une droite qui sera perpendiculaire sur cette base, ainsi que sur la corde XY, coupera cette corde ainsi que son arc en leurs milieux Z et V, et divisera l'angle S en deux parties égales; cette droite contiendra le centre de l'arc, qui se trouvera ainsi en quelque point O de sa direction.

Faisons

$$SA=a\,;\qquad Ang.ASC=\alpha\,,$$

$$SX=x\,,\qquad Ang.VOX=t\,,$$

nous aurons

$$SC=a\text{Cos.}\alpha\,,\qquad AC=a\text{Sin.}\alpha\,;$$

$$SZ=x\text{Cos.}\alpha\,,\qquad XZ=x\text{Sin.}\alpha\,,$$

d'où nous conclurons

$$AX=a-x\,,\qquad CZ=(a-x)\text{Cos.}\alpha\,;$$

en conséquence de quoi nous trouverons

$$Trapèze.\mathrm{CAXZ}=\frac{\mathrm{CA}+\mathrm{ZX}}{2}.\mathrm{C}Z=\tfrac{1}{2}(a^2-x^2)\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Cos}.\alpha\ .$$

Le triangle SXO donnera ensuite

$$\mathrm{OX}=\frac{x\mathrm{Sin}.\alpha}{\mathrm{Sin}.t},\quad \text{d'où}\quad \mathrm{OZ}=\frac{x\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Cos}.t}{\mathrm{Sin}.t}\ ;$$

d'où on conclura successivement

$$Arc.\mathrm{VX}=\frac{tx\mathrm{Sin}.\alpha}{\mathrm{Sin}.t}\ ,$$

$$Sect.\mathrm{VOX}=\frac{tx^2\mathrm{Sin}.^2\alpha}{2\mathrm{Sin}.^2t}\ ,$$

$$Triang.\mathrm{OZX}=\tfrac{1}{2}\,\mathrm{OZ}\,.\,\mathrm{ZX}=\frac{x^2\mathrm{Sin}.^2\alpha\mathrm{Sin}.t\mathrm{Cos}.t}{2\mathrm{Sin}.^2t}\ ,$$

$$Demi\text{-}segment.\ \mathrm{VXZ}=\frac{x^2\mathrm{Sin}.^2\alpha}{\mathrm{Sin}.^2t}(t-\mathrm{Sin}.t\mathrm{Cos}.t)=\varpi r^2\ ,$$

si donc on exige que la surface totale AXVYB soit équivalente à celle ϖr^2 d'un cercle dont le rayon donné est r, il faudra que sa moitié CAXV soit moitié de celle de ce cercle, ce qui donnera l'équation

$$(a^2-x^2)\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Cos}.\alpha+\frac{x^2\mathrm{Sin}.^2\alpha}{\mathrm{Sin}.^2t}(t-\mathrm{Sin}.t\mathrm{Cos}.t)=\varpi r^2\ ;$$

au moyen de laquelle, en se donnant arbitrairement une des deux variables x et t, l'autre se trouvera aussitôt déterminée. Si, par exemple, c'est t qui est donnée, on tirera de cette équation

$$x=\mathrm{Sin}.t.\sqrt{\frac{\varpi r^2-a^2\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Cos}.\alpha}{[t\mathrm{Sin}.\alpha-\mathrm{Sin}.t\mathrm{Sin}.(t+\alpha)]\mathrm{Sin}.\alpha}}\ ;$$

de sorte qu'en posant, pour abréger,

$b=$

$$b=\sqrt{\frac{\varpi r^2-a^2\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Cos}.\alpha}{\mathrm{Sin}.\alpha}}\ ;$$

on aura simplement

$$\frac{x}{\mathrm{Sin}.t}=\frac{b}{\sqrt{t\mathrm{Sin}.\alpha-\mathrm{Sin}.t\mathrm{Sin}.(t+\alpha)}}\ :$$

Cela posé, on a

$$\textit{Longueur}\ \mathrm{AXV}=\mathrm{AX}+\mathrm{XV}=a-x+\frac{tx\mathrm{Sin}.\alpha}{\mathrm{Sin}.t}\ ;$$

ou encore

$$\mathrm{AXV}=a+(t\mathrm{Sin}.\alpha-\mathrm{Sin}.t)\frac{x}{\mathrm{Sin}.t}\ ;$$

mettant donc pour $\frac{x}{\mathrm{Sin}.t}$ la valeur trouvée ci-dessus, il viendra

$$\mathrm{AVX}=a+b\,.\,\frac{t\mathrm{Sin}.\alpha-\mathrm{Sin}.t}{\sqrt{t\mathrm{Sin}.\alpha-\mathrm{Sin}.t\mathrm{Sin}.(t+\alpha)}}\ ;$$

il s'agira donc de prendre t de telle sorte que cette quantité soit un *minimum*; ce qui se réduira à rendre telle la quantité

$$\frac{t\mathrm{Sin}.\alpha-\mathrm{Sin}.t}{\sqrt{t\mathrm{Sin}.\alpha-\mathrm{Sin}.t\mathrm{Sin}.(t+\alpha)}}\ ;$$

égalant donc à zéro la différentielle de cette dernière, prise par rapport à t, il viendra, toutes réductions faites,

$$(\mathrm{Sin}.t-t\mathrm{Cos}.t)\{1-\mathrm{Sin}.(t+\alpha)\}=0\ .$$

L'égalité du premier facteur à zéro donnerait $t=0$; de sorte que la partie retranchée du triangle se réduirait à un trapèze, ce qui ne peut convenir au *minimum*, puisqu'en retranchant à la partie supérieure du trapèze une portion si petite qu'on voudrait, par une parallèle à ses bases, et en remplaçant la portion retranchée par un segment de cercle équivalent et de même base, on aurait une ligne totale moins longue que la première. C'est donc l'autre facteur qu'il faut égaler à zéro ; on doit donc avoir, pour le *minimum*,

$$\text{Sin}\,(t+\alpha)=1\,,$$

c'est-à-dire, que les angles t et α doivent être supplément l'un de l'autre, ou que la droite OX doit être perpendiculaire à SX, ou qu'enfin la droite XY doit être à telle distance de la base AB du triangle que l'arc XVY soit tangent à ses deux autres côtés en X et Y. Il arrivera donc ainsi que la ligne totale AXVYB qui résoudra le problème sera aussi peu discontinue qu'elle puisse l'être.

On a donc ainsi

$$t=\tfrac{1}{2}\varpi-\alpha\,,\qquad \text{Sin.}t=\text{Cos.}\alpha\,,\qquad \text{Cos.}t=\text{Sin.}\alpha\,,$$

ce qui donne

$$x=\frac{b\text{Cos.}\alpha}{\sqrt{(\frac{1}{2}\varpi-\alpha)\text{Sin.}\alpha-\text{Cos.}\alpha}}=\sqrt{\frac{\varpi r^2-a^2\text{Sin.}\alpha\text{Cos.}\alpha}{[(\frac{1}{2}\varpi-\alpha)\text{Tang}\,\alpha-1]\text{Tang.}\alpha}}\,;$$

et la longueur de la ligne *minimum* sera

$$\text{AXVYB}=2a+2(\alpha\text{Sin.}\alpha-\text{Cos.}\alpha)\sqrt{\frac{\varpi r^2-a^2\text{Sin.}\alpha\text{Cos.}\alpha}{[(\frac{1}{2}\varpi-\alpha)\text{Sin.}\alpha-\text{Cos.}\alpha]\text{Sin.}\alpha}}\,.$$

Si, par exemple, on demandait que cette ligne divisât le triangle en deux parties équivalentes, on devrait avoir

$$\varpi r^2=\frac{1}{2}a^2\text{Sin.}\alpha\text{Cos.}\alpha\ ;$$

ce qui donnerait

$$x=\frac{a\text{Cos.}\alpha}{\sqrt{2-(\varpi-2\alpha)\text{Tang.}\alpha}}\ ;$$

et la longueur de la ligne cherchée serait alors

$$\text{AXVYB}=2a+\frac{2a(\alpha\text{Sin.}\alpha-\text{Cos.}\alpha)}{\sqrt{2-(\varpi-2\alpha)\text{Tang.}\alpha}}\ .$$

On voit, par ce qui précède, que; s'il s'agissait de trouver une courbe qui, ayant pour corde la base d'un rectangle, étant tangente aux côtés adjacens aux deux extrémités de cette base et divisant le rectangle en raison donnée, eût la moindre longueur possible, la partie retranchée devrait être un autre rectangle surmonté d'un demi-cercle.

PROBLÈME II. Assigner la portion de surface courbe la moins étendue, entre toutes celles qui, se terminant à la circonférence de la base d'un cône droit donné, et touchant sa surface convexe suivant cette circonférence, partagent son volume en raison donnée?

Solution. Ce problème donne lieu à des observations tout-à-fait analogues à celles que nous avons faites sur le précédent, et que, pour cette raison, nous nous dispenserons de répéter ici; il s'ensuit que, pour le résoudre, il faut d'abord faire dans le cône une section par un plan parallèle à sa base, et assez peu distant de cette base pour qu'il ne retranche pas de son volume toute la portion exigée par l'énoncé du problème; en construisant ensuite sur la section comme base, et du côté du sommet, un segment sphérique qui complète ce qui manque de volume au tronc pour que le cône soit divisé suivant la raison donnée, la calotte qui terminera le segment, augmentée de la zone conique comprise entre elle et la base du cône formera une surface discontinue qui remplira toutes les conditions du problème, sauf celle du *minimum* de surface ; et il ne s'agira plus que de profiter de l'indétermination de la distance du plan coupant à la base du cône, pour faire en sorte que cette dernière condition soit remplie.

Supposons que la figure 10 représente la section du cône par un plan quelconque passant par son axe ; et concevons les mêmes dénominations et notations que ci-dessus. Alors AC et XZ seront les rayons des deux bases du tronc de cône, dont la hauteur sera CZ ; ZV sera la flèche du segment sphérique, dont le rayon sera OX ou OV ; la droite AX et l'arc VX seront les lignes génératrices de la zone conique et de la calotte sphérique ; enfin α sera l'angle générateur du cône, et t sera l'angle générateur d'un autre cône dont il faudra retrancher le volume de celui du secteur sphérique engendré par la révolution du secteur circulaire VOX pour obtenir le volume du segment sphérique.

Ces choses ainsi entendues, on aura d'abord, pour le volume du tronc de cône engendré par la révolution du trapèze CAXZ,

$$\tfrac{1}{3}\varpi(a^3-x^3)\text{Sin.}^2\alpha\,\text{Cos.}\alpha\ ;$$

en trouvera ensuite successivement

$$\textit{Cir.}\text{OX}=2\varpi\,.\,\frac{x\text{Sin.}\alpha}{\text{Sin.}t}\ ;$$

$$\text{VZ}=\text{OX}-\text{OZ}=\frac{x\text{Sin.}\alpha}{\text{Sin.}t}(1-\text{Cos.}t)\ ;$$

$$\textit{Calotte}\ \text{VX}=2\varpi\,.\,\frac{x^2\text{Sin.}^2\alpha}{\text{Sin.}^2t}(1-\text{Cos.}t)\ ,$$

$$\textit{Sect.}\text{VOX}=\tfrac{2}{3}\varpi\,.\,\frac{x^3\text{Sin.}^3\alpha}{\text{Sin}^3t}(1-\text{Cos.}t)\ ,$$

$$Cercle\ \mathrm{ZX} = \varpi x^2 \mathrm{Sin.}^2\alpha\ ;$$

$$C\hat{o}ne\ \mathrm{OZX} = \tfrac{1}{3}\varpi . \frac{x^3 \mathrm{Sin.}^3\alpha \mathrm{Sin.}^2 t \mathrm{Cos.}t}{\mathrm{Sin.}^3 t}\ ,$$

$$Segm.\mathrm{VXZ} = \tfrac{1}{3}\varpi . \frac{x^3 \mathrm{Sin.}^3\alpha}{\mathrm{Sin.}^3 t}(1 - \mathrm{Cos.}t)^2(2 + \mathrm{Cos.}t) .$$

Si donc on veut que le corps engendré par la révolution de la génératrice VXA détache du cône une portion équivalente au volume d'une sphère dont le rayon donné est r, on devra avoir,

$$(a^3 - x^3)\mathrm{Sin.}^2\alpha \mathrm{Cos.}\alpha + \frac{x^3 \mathrm{Sin.}^3\alpha}{\mathrm{Sin.}^3 t}(1 - \mathrm{Cos.}t)^2(2 + \mathrm{Cos.}t) = 4\varpi r^3\ ;$$

équation qui détermine chacune des deux indéterminées x et t au moyen de l'autre, et de laquelle on tire, en particulier,

$$x = \mathrm{Sin.}t \sqrt[3]{\frac{4r^3 - a^3 \mathrm{Sin.}^2\alpha \mathrm{Cos.}\alpha}{[2\mathrm{Sin.}\alpha(1 - \mathrm{Cos.}t) - \mathrm{Sin.}^2 t \mathrm{Sin}\,(t+\alpha)]\mathrm{Sin.}^2\alpha}}\ ;$$

de sorte qu'en posant, pour abréger,

$$b = \sqrt[3]{\frac{4r^3 - a^3 \mathrm{Sin.}^2\alpha \mathrm{Cos.}\alpha}{\mathrm{Sin.}\alpha}}\ ,$$

on aura simplement

$$\frac{x}{\mathrm{Sin.}t} = \frac{b}{\sqrt[3]{2\mathrm{Sin.}\alpha - \mathrm{Sin.}^2 t \mathrm{Sin.}(t+\alpha)}}\ .$$

Cela posé, la surface de la zone conique engendrée par AX est

$$\varpi(a^2 - x^2)\mathrm{Sin.}^2\alpha\ ;$$

en y ajoutant donc la surface de la calotte sphérique, déjà déterminée ci-dessus ; nous aurons pour la surface totale engendrée par la ligne VXA,

$$\varpi a^2\text{Sin}.\alpha+\varpi\text{Sin}.\alpha\left\{2\text{Sin}.\alpha(1-\text{Cos}.t)-\text{Sin}.^2t\right\}\frac{x^2}{\text{Sin}.^2t};$$

en y introduisant donc pour $\frac{x}{\text{Sin}.t}$ la valeur trouvée ci-dessus, elle deviendra

$$\varpi a^2\text{Sin}.\alpha+\frac{\varpi b^2\text{Sin}.\alpha\left\{2\text{Sin}.\alpha(1-\text{Cos}.t)-\text{Sin}.^2t\right\}}{\sqrt[3]{\left\{2\text{Sin}.\alpha(1-\text{Cos}.t)-\text{Sin}.^2t\,\text{Sin}.(t+\alpha)\right\}^2}};$$

telle est donc la quantité qui doit être *minimum* ; ce qui se réduit à rendre telle la quantité

$$\frac{2\text{Sin}.\alpha(1-\text{Cos}.t)-\text{Sin}.^2t}{\left\{2\text{Sin}.\alpha(1-\text{Cos}.t)-\text{Sin}.^2t\,\text{Sin}.(t+\alpha)\right\}^{\frac{2}{3}}};$$

égalant donc sa différentielle à zéro, il viendra, toutes réductions faites,

$$(1-\text{Cos}.t)^2\left\{1-\text{Sin}.(t+\alpha)\right\}=0\,.$$

L'égalité du premier facteur à zéro donne $t=0$ qui, pour des raisons tout-à-fait analogues à celles que nous avons données ci-dessus, ne saurait convenir au *minimum* ; c'est donc le second qu'il faut égaler à zéro pour l'obtenir ; il faut donc encore ici que l'angle t soit supplément de l'angle α ; la calotte sphérique qui, avec la zone conique, doit composer la surface résolvant le problème doit donc être tangente à cette zone suivant la circonférence par laquelle elle s'unit à elle ; la surface qui résout le problème est donc encore ici aussi peu discontinue qu'elle puisse l'être.

D'après ce résultat, on trouvera

$$x=\sqrt[3]{\frac{(a^3\text{Sin}.^2\alpha\text{Cos}.\alpha-4r^3)\text{Cos}.\alpha}{(1-\text{Sin}.\alpha)^2\text{Tang}.^2\alpha}};$$

et la surface *minimum* aura pour expression

$$\varpi\left\{a^2\text{Sin}.\alpha+\sqrt[3]{\frac{(a^3\text{Sin}.^2\alpha\text{Cos}.\alpha-4r^3)^2(1-\text{Sin}.\alpha)^2}{\text{Sin}.\alpha}}\right\};$$

Si, par exemple, on demande que le cône soit partagé en deux parties équivalentes, on devra avoir

$$4r^3=\tfrac{1}{2}a^3\mathrm{Sin.}^2\alpha\mathrm{Cos.}\alpha\ ,$$

ce qui donnera

$$x=a\mathrm{Cos.}\alpha\sqrt[3]{\frac{\mathrm{Cos.}\alpha}{2(1-\mathrm{Sin.}\alpha)^2}}\ ;$$

et la surface *minimum* sera

$$\tfrac{1}{2}\varpi a^2\mathrm{Sin.}\alpha\left\{2+\sqrt[3]{2(1-\mathrm{Sin.}\alpha)^2\mathrm{Cos.}^2\alpha}\right\}.$$

Si, au lieu d'un cône, c'était un cylindre droit qu'il fallût diviser en raison donnée, on voit, par ce qui précède, que la calotte sphérique devrait être alors un hémisphère.

Concevons que sur la base d'un cône ou d'un cylindre droit creux, en fer-blanc, par exemple, on ait appliqué un cercle de même grandeur d'une étoffe parfaitement flexible et élastique, comme serait, à peu près, un morceau de vessie, et que l'on ait assujettie invariablement sur cette base, par sa circonférence seulement. Si alors, à l'aide d'une petite ouverture pratiquée dans la base, et au moyen d'une pompe de compression ou d'un soufflet, on introduit de l'air entre cette base et le cercle de vessie, il est aisé, par ce qui précède, de voir ce qui arrivera. On voit en effet que le morceau de vessie se courbera d'abord en calotte sphérique d'un rayon continuellement décroissant, et continuera d'affecter cette figure, jusqu'à ce qu'il y ait assez d'air introduit pour rendre la calotte tangente à la surface latérale du cône ou du cylindre; mais ce terme une fois atteint, si on continue à introduire de l'air, la partie de la vessie la plus voisine du bord s'appliquera exactement contre la surface latérale du cône ou du cylindre, où elle formera une sorte de zone, tandis que le surplus continuera à se développer en une calotte sphérique, formant un prolongement à la zone, à laquelle elle sera tangente de toutes parts.

Les choses se passeraient à peu près de même si, au cône ou au cylindre, on substituait un vase conique ayant le diamètre de son ouverture plus grand que celui de son fond, avec cette seule différence qu'ici la calotte sphérique pourrait devenir plus grande que l'hemisphère, et demeurerait constamment telle dès qu'elle le serait devenue.