ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Analise transcendante. Essai sur la recherche des maxima et minima, dans les formules intégrales indéterminées

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 13 (1822-1823), p. 1-93

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1822-1823__13__1_0>

ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Essai sur la recherche des maxima *et* minima *, dans les formules intégrales indéterminées ;*

Par M. Gergonne.

> « L'une des raisons principales qui éloignent
> » ceux qui entrent dans les connaissances du
> » véritable chemin qu'ils doivent suivre, est
> » l'imagination qu'on prend d'abord que les
> » bonnes choses sont inaccessibles, en leur
> » donnant le nom de grandes, hautes, élevées,
> » sublimes. Cela perd tout. Je les voudrais
> » nommer basses, communes, familières ».
>
> Pascal.

Jusqu'à l'époque où Arbogast et Lagrange présentèrent, tour à tour, sous un point de vue tout-à-fait nouveau les principes du *Calcul différentiel*, cette branche d'analise n'avait guère été, aux yeux de la plupart des géomètres, qu'un mystérieux mécanisme, justifié seulement par la constante et rigoureuse exactitude des résultats qu'on en avait obtenus.

Peut-être n'est-ce point une exagération d'avancer qu'aujourd'hui même nous en sommes encore à peu près au même point à l'égard du *Calcul des variations*. Du moins, n'est-il pas rare de rencontrer des géomètres d'assez bonne foi pour convenir, sans détour, qu'ils emploient mécaniquement les procédés de ce calcul, sans être jamais parvenus à en bien saisir l'esprit ; ce qui doit probablement tenir à ce que, pour nous servir des expressions de d'Alembert, les auteurs qui en ont écrit « dédaignant de revenir sur leurs pas, » pour faciliter aux autres le chemin qu'ils avaient eu tant de peine à » se frayer eux-mêmes, ont préféré la gloire d'augmenter l'édifice » au soin d'en éclairer l'entrée ».

On dit communément que l'objet du calcul des variations est de différentier sous un point de vue des quantités qui ont déjà été différentiées sous un autre ; mais on ne fait pas attention que, d'une part, dans les applications de ce calcul, on différentie très-souvent sous le nouveau point de vue des équations de condition qui n'ont encore subi aucune autre sorte de différentiation ; et que, d'une autre part, dans le calcul différentiel partiel, on différentie sans cesse sous un point de vue des fonctions déjà différentiées sous un ou plusieurs autres, et qu'on en fait de même encore lorsque, dans un problème, on a recours à la différentiation des paramètres, sans que pour cela on puisse dire que l'on emploie le calcul des variations, et sans que l'on songe même aucunement à noter ces divers modes de différentiation par des caractéristiques différentes.

On présente aussi le calcul des variations comme le plus haut degré d'abstraction que la science du calcul puisse atteindre ; mais c'est peut-être là, au contraire, ce qu'on devrait soigneusement éviter ; attendu qu'une telle pensée ne peut que préoccuper l'esprit d'une manière fâcheuse et tout-à-fait propre à lui faire manquer le but, en lui faisant chercher trop haut ce qui est tout-à-fait à son niveau ; nous espérons faire voir, en effet, dans l'écrit que l'on va lire, qu'il n'est aucune des questions de *maxima* et de *minima* auxquelles il est d'usage d'appliquer le calcul des variations, et pour la solution desquelles ce calcul a été principalement inventé, qu'on ne puisse traiter d'une manière très-lumineuse et très-briève, par la simple application des procédés les plus vulgaires du calcul différentiel ordinaire, et en ne s'appuyant uniquement que sur la théorie des *maxima* et des *minima*, dans les fonctions déterminées d'une seule variable ; théorie sur laquelle il ne reste plus aujourd'hui le plus léger nuage dans l'esprit de tous ceux qui ont pris la peine de l'étudier dans les bonnes sources (*).

Bien que les notations dont nous allons nous servir ne soient pas dépourvues d'une certaine élégance, il se pourra fort bien que ceux à qui les procédés du calcul des variations sont familiers les trouvent moins simples et moins commodes que celles dont ce calcul fait usage ; mais il s'agit bien moins ici de notations que de principes ;

(*) On ne conçoit pas par quelle fatalité l'illustre auteur du *Calcul des fonctions*, si éminemment clair partout ailleurs, débute lui-même, dans l'exposition des principes du calcul des variations, par un véritable non-sens. « Soit, dit-il, » $\varphi(x, i)$ une fonction de x et de i qui devienne $\varphi(x)$, lorsque $i=0$ ». Il est sans doute bien vrai qu'une fonction de x et de i se réduit à une simple fonction de x, lorsque i devient nul ; mais cette dernière fonction peut-elle être notée par la même caractéristique que la première, et peut-on se permettre, dans une même question, d'employer la même caractéristique à désigner une fonction qui contient deux quantités distinctes et une autre qui n'en contient qu'une seule ? non sans doute. Que répondrions-nous, en effet, à quelqu'un qui, par exemple, après avoir posé $\frac{1+a^2}{1-a^2}=\varphi(a)$, nous demanderait de construire sur ce modèle $\varphi(a, b)$? Fort heureusement cette légère inadvertance n'a pas une influence nécessaire sur les développemens qui viennent à sa suite ; mais enfin, que veut-on que fasse celui qui, voulant étudier pour la première fois le calcul des variations, et ayant pris la résolution de ne rien laisser passer sans le bien saisir, vient, dès le début, se heurter contre un obstacle de cette nature ?

et il est tout simple que, voulant tout déduire du calcul différentiel ordinaire, il nous faille nous renfermer dans les seules notations que ce calcul puisse nous fournir. Nous ne doutons pas, au surplus, que ceux qui auront bien saisi ce qu'on va lire ne se servent ensuite sans aucun embarras des notations du calcul des variations proprement dit, dans lesquelles ils ne verront plus dès-lors que de simples abréviations.

Nous pourrions, dès l'abord, présenter la théorie dans toute sa généralité; mais il nous paraît convenir beaucoup mieux à notre but de nous élever graduellement des cas les plus simples à ceux qui le sont moins. L'obligation où se trouvera ainsi le lecteur de revenir à plusieurs reprises sur les mêmes idées, sur les mêmes considérations, ne pourra que les lui rendre beaucoup plus familières.

Bien que la théorie que nous allons développer puisse être considérée comme purement analitique, nous ne ferons pas difficulté néanmoins de parler quelquefois le langage de la géométrie et même de la mécanique, tant parce que cela fait image que parce qu'il en résulte plus de clarté et de concision dans le discours.

§. I.

1. Soit V une expression de forme connue quelconque, composée de la variable indépendante x, d'une fonction y de cette variable et des coefficiens différentiels de cette fonction, jusqu'à celui de tel ordre qu'on voudra; et considérons l'intégrale

$$\int V\mathrm{d}x\ .$$

Si la composition de y en x était connue, rien ne serait plus aisé que de ramener cette intégrale à la forme $\int X\mathrm{d}x$, ou X serait une fonction connue de x seulement; et alors on pourrait, soit exactement soit par les séries, exécuter l'intégration entre telles limites qu'on voudrait.

Mais on suppose que l'expression de y en x n'est pas donnée ; on suppose qu'elle est l'inconnue du problème ; et on propose de la déterminer par cette condition qu'après la substitution de sa valeur et de celles de ses coefficiens différentiels dans V, l'intégrale $\int V\mathrm{d}x$, qui alors aura la forme $\int X\mathrm{d}x$, prise entre deux limites données quelconques, et sous des conditions données, compatibles toutefois avec la nature du problème, soit plus grande ou plus petite que toutes celles qui pourraient résulter, entre les mêmes limites et sous les mêmes conditions, de toute autre valeur, fonction de x, prise pour y.

2. Comme nous n'avons ici qu'une seule variable indépendante x, il nous sera commode d'employer la notation introduite par Lagrange pour les fonctions dérivées; en conséquence,

$$y', \quad y'', \quad y''', \ldots\ldots$$

seront constamment les symboles respectifs de

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \quad \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}, \ldots\ldots;$$

et, si Y est une autre fonction de x,

$$Y', \quad Y'', \quad Y''', \ldots\ldots$$

seront pareillement les symboles respectifs de

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}x^2}, \quad \frac{\mathrm{d}^3Y}{\mathrm{d}x^3}, \ldots\ldots:$$

Nous ne recourrons ainsi aux notations ordinaires du calcul différentiel que pour représenter les coefficiens différentiels partiels, dont la notation est trop embarrassée dans le système de Lagrange. Ainsi

$$\left(\frac{dV}{dy}\right),\quad \left(\frac{dV}{dy'}\right),\quad \left(\frac{dV}{dy''}\right),\quad \left(\frac{dV}{dy'''}\right),\ldots\ldots$$

seront les coefficiens différentiels qu'on obtient pour la fonction V, en n'y considérant successivement que

$$y,\qquad y',\qquad y'',\qquad y''',\ldots.$$

comme variables. En conséquence,

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)',\quad \left(\frac{dV}{dy'}\right)',\quad \left(\frac{dV}{dy''}\right)',\quad \left(\frac{dV}{dy'''}\right)',\ldots\ldots$$

seront la même chose que

$$\frac{d\left(\frac{dV}{dy}\right)}{dx},\quad \frac{d\left(\frac{dV}{dy'}\right)}{dx},\quad \frac{d\left(\frac{dV}{dy''}\right)}{dx},\quad \frac{d\left(\frac{dV}{dy'''}\right)}{dx},\ldots.$$

Pareillement

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)'',\quad \left(\frac{dV}{dy'}\right)'',\quad \left(\frac{dV}{dy''}\right)'',\quad \left(\frac{dV}{dy'''}\right)'',\ldots\ldots$$

seront la même chose que

$$\frac{d^2\left(\frac{dV}{dy}\right)}{dt^2},\quad \frac{d^2\left(\frac{dV}{dy'}\right)}{dt^2},\quad \frac{d^2\left(\frac{dV}{dy''}\right)}{dt^2},\quad \frac{d^2\left(\frac{dV}{dy'''}\right)}{dt^2},\ldots.$$

et ainsi de suite.

3. Pour en revenir présentement à notre problème ; quelle que soit la valeur de y en x qui doit le résoudre, on peut toujours la considérer comme l'ordonnée d'une certaine courbe dont x serait l'abscisse ; et le problème se réduit ainsi à trouver cette courbe, tout-à-fait déterminée, mais encore inconnue.

Suivant donc l'esprit de la méthode ordinaire *de maximis et minimis*, il faut, pour parvenir à l'équation de cette courbe, exprimer qu'elle est telle que, pour si peu qu'on la déforme, en tout ou en partie, d'une manière arbitraire, et même discontinue si l'on veut, l'intégrale $\int V\mathrm{d}x$, toujours prise entre les mêmes limites et sous les mêmes conditions, deviendra *plus petite* dans le cas du *maximum*, et *plus grande* dans le cas du *minimum*.

4. Conservons y pour le symbole de l'ordonnée de la courbe cherchée; l'ordonnée correspondante, dans toutes les autres courbes dont il vient d'être question, pourra être représentée par la formule générale

$$y+iY\,,$$

dans laquelle Y représente une fonction de x tout-à-fait arbitraire, continue ou discontinue, , et où i est un nombre abstrait, positif ou négatif, si petit qu'on le voudra, sans pourtant être absolument nul. Il est évident, en effet, que, même en se donnant i à volonté, on pourra encore profiter de l'indétermination de la fonction Y de manière que cette formule devienne l'ordonnée de telle courbe donnée qu'on voudra, et qu'ensuite on pourra diminuer graduellement le nombre i, de telle sorte que cette courbe devienne si peu différente de la courbe cherchée qu'on voudra. D'où l'on voit que, si l'on traçait à la main une courbe aussi voisine de la courbe cherchée qu'on le voudrait, on pourrait toujours considérer $y+iY$ comme exprimant l'ordonnée de cette courbe; en sorte qu'en supposant Y arbitraire et i d'une petitesse illimitée, la formule $y+iY$ exprime l'ordonnée de la totalité des courbes que nous devons comparer à la courbe cherchée.

5. Remarquons pourtant, avant d'aller plus loin, qu'il se pourrait, en vertu de certaines conditions de la question, que la fonction Y ne dût point être tout-à-fait arbitraire, ou du moins ne dût l'être que sous certaines restrictions : c'est, par exemple, ce qui arriverait si la courbe cherchée devait passer par deux points donnés;

car alors on n'aurait à lui comparer que les autres courbes qui passeraient par ces deux mêmes points ; mais nous allons voir bientôt qu'on est toujours à temps d'avoir égard à ces restrictions à la fin du calcul, et que jusques-là on peut regarder la fonction arbitraire Y comme absolument indéterminée.

6. Par le changement de y en $y+iY$,

$$\left.\begin{array}{l} y \\ y' \\ y'' \\ y''' \\ \text{»} \end{array}\right\} \text{ deviendront respectivement } \left\{\begin{array}{l} y+iY\,, \\ y'+iY'\,, \\ y''+iY''\,, \\ y'''+iY'''\,, \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

En conséquence, on trouvera, par l'application de la série de Taylor au développement des fonctions des polynomes, que V doit devenir

$$V+\left\{\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)Y+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)Y'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)Y''+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)Y'''+\ldots\right\}\frac{i}{1}+\ldots;$$

en conséquence, $\int V\mathrm{d}x$ deviendra

$$\int V\mathrm{d}x+\frac{i}{1}\int\left\{\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)Y+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)Y'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)Y''+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)Y'''+\ldots\right\}\mathrm{d}x+\ldots$$

Afin donc que $\int V\mathrm{d}x$ soit *maximum* ou *minimum*, il faudra, suivant les principes connus, que le multiplicateur de i soit nul ; et alors $\int V\mathrm{d}x$ sera *maximum* ou *minimum*, suivant que le multiplicateur de i^2 sera constamment *négatif* ou constamment *positif*. La condition commune au *maximum* et *minimum* sera donc exprimée par l'équation

$\int$

$$\int\left\{\left(\frac{dV}{dy}\right)Y+\left(\frac{dV}{dy'}\right)Y'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)Y''+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)Y'''+\ldots\right\}dx=0\ ,$$

laquelle revient simplement à

$$0=\left(\frac{dV}{dy}\right)Y+\left(\frac{dV}{dy'}\right)Y'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)Y''+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)Y'''+\ldots \quad \text{(I)}$$

7. Cela posé, par la formule $(tu)'=ut'+tu'$, d'où $ut'=(tu)'-tu'$, on trouve facilement

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)Y=\left(\frac{dV}{dy}\right)Y\ ,$$

$$\left(\frac{dV}{dy'}\right)Y'=\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)Y\right]'-\left(\frac{dV}{dy'}\right)'Y\ ,$$

$$\left(\frac{dV}{dy''}\right)Y''=\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)Y'\right]'-\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)'Y\right]'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)''Y\ ,$$

$$\left(\frac{dV}{dy'''}\right)Y'''=\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)Y''\right]'-\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'Y'\right]'+\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''Y\right]'-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'''Y,$$

. . . .

Au moyen de quoi l'équation (I) devient

$$\left[\left(\frac{dV}{dy}\right)-\left(\frac{dV}{dy'}\right)'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)''-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'''+\ldots\right]Y$$

$$+\left\{\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''-\ldots\right]Y\right.$$

$$\left.+\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'+\ldots\right]Y'+\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)-\ldots\right]Y''+\ldots\right\}'=0\ ; \quad \text{(II)}$$

or, tout ce qui suit la première ligne du premier membre de cette équation étant une dérivée exacte, quelle que soit Y; tandis que cette première ligne, considérée comme telle, aurait une fonction primitive qui changerait avec Y, il s'ensuit que cette équation ne saurait subsister qu'autant que la première ligne de son premier membre sera nulle d'elle-même; ce qui donne, en divisant par l'arbitraire Y,

$$0=\left(\frac{dV}{dy}\right)-\left(\frac{dV}{dy'}\right)'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)''-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'''+\ldots. \qquad \text{(III)}$$

équation en x et y seulement, qui est conséquemment l'équation différentielle de la courbe cherchée. Son intégration donnera la valeur de y en fonction de x et d'un certain nombre de constantes arbitraires, et nous allons voir tout à l'heure comment ces constantes doivent être déterminées.

8. En supprimant donc la première ligne du premier membre de l'équation (II), et passant ensuite aux fonctions primitives, il viendra

$$Const.=\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''-\ldots\right]Y$$

$$+\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'+\ldots\right]Y'+\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)-\ldots\right]Y''+\ldots \qquad \text{(IV)}$$

En mettant dans cette équation pour y sa valeur en x et en constantes, déduite de l'équation (III), les coefficiens de Y, Y', Y'',.... n'y seront plus que des fonctions de x et de ces mêmes constantes.

9. Soient a_0 et a_1 les limites de l'intégrale; c'est-à-dire, supposons qu'il soit question de rendre *maximum* ou *minimum* l'intégrale $\int V dx$, prise depuis $x=a_0$ jusqu'à $x=a_1$; marquons respectivement des indices 0, 1, les valeurs des diverses quantités qui entrent dans l'équation (IV), lorsqu'on y met pour x les valeurs respectives a_0, a_1, nous aurons ainsi

$$\text{Const.}=\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)_0-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'_0+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_0-\dots\right]Y_0+\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)_0-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_0+\dots\right]Y'_0+\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_0-\dots\right]Y''_0+\dots,$$

$$\text{Const.}=\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)_1-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'_1+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_1-\dots\right]Y_1+\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)_1-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_1+\dots\right]Y'_1+\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_1-\dots\right]Y''_1+\dots;$$

d'où en retranchant ,

$$=\left\{\begin{array}{l}\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)_1-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'_1+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_1-\dots\right]Y_1+\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)_1-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_1+\dots\right]Y'_1+\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_1-\dots\right]Y''_1+\dots\\ -\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)_0-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'_0+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_0-\dots\right]Y_0-\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)_0-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_0+\dots\right]Y'_0-\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_0-\dots\right]Y''_0-\dots\end{array}\right\}\text{(V)}$$

équations que nous appellerons à l'avenir *équation aux limites*, et qui , comme l'on voit , ne renferme plus , outre les valeurs encore indéterminées de Y , Y' , Y'' ,..... aux deux extrémités de l'intégrale, que les deux limites a_0 , a_1 et les constantes introduites par l'intégration de l'équation (III).

10. Cela posé , si aucune condition particulière n'a été prescrite relativement aux limites , les fonctions

$$Y_0\ ,\quad Y'_0\ ,\quad Y''_0\ ,\dots\dots\ Y_1\ ,\quad Y'_1\ ,\quad Y''_1\ ,\dots\dots\dots;$$

devront conserver l'indépendance la plus absolue. L'équation (V) ne pourra donc alors subsister qu'autant que les coefficiens de ces diverses fonctions seront séparément nuls ; cette équation (V) se partagera donc dans les suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll}
=\left(\frac{dV}{dy'}\right)_0-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'_0+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_0-\dots\dots, & 0=\left(\frac{dV}{dy'}\right)_1-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'_1+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_1-\dots\dots,\\
=\left(\frac{dV}{dy''}\right)_0-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_0+\dots\dots, & 0=\left(\frac{dV}{dy''}\right)_1-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_1+\dots\dots,\\
=\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_0-\dots\dots, & 0=\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_1-\dots\dots,\\
=\dots\dots, & 0=\dots\dots,
\end{array}\right\}\text{(VI)}$$

lesquelles seront généralement en même nombre que les constantes introduites, et serviront à en assigner les valeurs.

11. Mais si, au contraire, on exige qu'à l'une ou à l'autre limites, ou à toutes les deux, il existe, entre y et ses divers coefficiens différentiels, une ou plusieurs relations données; Y, toujours indéterminée, ne sera plus dès-lors tout-à-fait arbitraire. Représentons, en effet, une de ces équations par

$$\mathrm{f}(y\,,\,y'\,,\,y''\,,\ldots\ldots)=L=0\;; \qquad \text{(VII)}$$

on devra avoir, pour les diverses courbes que l'on considère,

$$\mathrm{f}(y+iY\,,\,y'+iY'\,,\,y''+iY''\,,\ldots\ldots)=0\;;$$

ou, en développant,

$$L+\left\{\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}y}\right)Y+\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}y'}\right)Y'+\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}y''}\right)Y''+\ldots\right\}\frac{i}{1}+\ldots=0\,,$$

d'où en retranchant l'équation (VII) et exprimant que l'équation résultante a lieu quel que soit i,

$$\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}y}\right)Y+\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}y'}\right)Y'+\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}y''}\right)Y''+\ldots=0\;. \qquad \text{(VIII)}$$

Il faudra d'abord substituer dans (VII, VIII) pour y sa valeur en x et en constantes, déduite de l'équation (III); puis, en supposant, par exemple, qu'il s'agit de la première limite, mettre pour x sa valeur a_0, ce qui changera ces équations en celles-ci:

$$L_0=0\,, \quad \text{(IX)} \quad \left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}y}\right)_0 Y_0+\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}y'}\right)_0 Y'_0+\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}y''}\right)_0 Y''_0+\ldots=0\,. \quad \text{(X)}$$

On pourra avoir plusieurs couples de semblables équations, tant pour l'une que pour l'autre limites; et on se servira de (X) et de ses analogues pour éliminer de (V) le plus grand nombre possible des fonctions Y_0, Y'_0, Y''_0, ... Y_1, Y'_1, Y''_1, ... ; après quoi on égalera séparément à zéro les coefficiens de celles qui n'auront pas disparu. A la vérité, le nombre des équations qui devaient servir à déterminer les constantes se trouvera ainsi réduit; mais toutes les équations qu'on aura de moins se trouveront exactement remplacées par l'équation (IX) et ses analogues; de sorte que ces constantes se trouveront toujours déterminées, et le seront seulement par d'autres conditions.

12. Au surplus, au lieu d'éliminer de l'équation (V) le plus grand nombre possible des fonctions Y_0, Y'_0, Y''_0, ... Y_1, Y'_1, Y''_1, ... au moyen des équations de condition telles que (X), il reviendra au même, et il sera peut-être plus élégant de prendre la somme tant de l'équation (V) que des produits de ces équations de condition par des multiplicateurs indéterminés; d'égaler ensuite séparément à zéro, dans l'équation somme, les coefficiens de toutes les fonctions Y_0, Y'_0, Y''_0, ..., Y_1, Y'_1, Y''_1, ..., et d'éliminer enfin les multiplicateurs indéterminés entre les équations résultantes.

13. Hâtons-nous, avant d'aller plus avant, d'éclaircir ces principes par un exemple.

PROBLÈME I. Quelle est la plus courte ligne plane, entre deux parallèles données?

Solution. Soient pris l'axe des x perpendiculaire et celui des y parallèle aux deux droites données, dont nous supposerons les équations

$$x=a_0\,, \qquad x=a_1\,;$$

la question se trouvera ainsi réduite à assigner la valeur de y en x qui rend l'intégrale $\int dx\sqrt{1+y'^2}$ *minimum*, entre les limites a_0 et a_1.

Nous aurons donc ici $V=\sqrt{1+y'^2}$, d'où

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)=0\,,\quad \left(\frac{dV}{dy'}\right)=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\,,\quad \left(\frac{dV}{dy''}\right)=0\,,\ldots.$$

$$\left(\frac{dV}{dy'}\right)'=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\,,\quad \left(\frac{dV}{dy''}\right)'=0\,,\ldots.$$

$$\left(\frac{dV}{dy''}\right)''=0\,,\ldots.$$

en conséquence, l'équation (III) deviendra

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0\,,\qquad \text{ou}\qquad \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}=\frac{1}{0}=\infty\;;$$

le rayon de courbure de la ligne cherchée est donc infini ; cette ligne est donc une droite ; et l'on peut prendre pour son équation

$$y=Mx+G\,,\qquad \text{d'où}\qquad y'=M\,,\quad y''=0\;;$$

M et G étant des constantes arbitraires.

L'équation aux limites sera ici

$$\frac{M}{\sqrt{1+M^2}}(Y_1-Y_0)=0\;;$$

d'où l'on voit d'abord que la constante G, qui n'entre pas dans cette équation, demeurera tout-à-fait arbitraire ; ce qui revient à dire que les parties de parallèles interceptées entre d'autres parallèles sont de même longueur.

Les coefficiens de Y_0 et Y_1 étant les mêmes, au signe près, on ne saurait établir des conditions distinctes pour l'une et pour l'autre limites ; ce qui revient à dire qu'une droite qui coupe des parallèles fait avec elles des angles égaux.

Si aucune condition n'est prescrite pour l'une et l'autre limites Y_0 et Y_1 devront demeurer tout-à-fait indépendans ; on ne pourra donc poser $Y_1-Y_0=0$, l'équation aux limites ne pourra donc subsister qu'autant qu'on aura $M=0$; de sorte que l'équation de notre droite se reduira simplement à $y=G$, où G demeurera indéterminé. Cela revient à dire que toutes les perpendiculaires entre deux parallèles sont égales et en mesurent la plus courte distance.

Supposons qu'on exige qu'aux deux limites de l'intégrale on ait respectivement

$$y=b_0\,, \qquad y=b_1\,,$$

ce qui revient à faire passer la ligne cherchée par les deux points $(a_0\,, b_0)$, $(a_1\,, b_1)$; les équations analogues à (IX) seront

$$Ma_0+G-b_0=0\,, \qquad Ma_1+G-b_1=0\,;$$

et les équations analogues à (X)

$$Y_0=0\,, \qquad Y_1=0\,;$$

ce qui vérifie l'équation aux limites ; les deux autres équations donnent M et G qui, substituées dans l'équation générale de la ligne cherchée, la font devenir

$$\frac{y-b_0}{b_1-b_0}=\frac{x-a_0}{a_1-a_0}\,;$$

ce qui revient à dire que *le plus court chemin entre deux points donnés est la droite qui joint ces deux points.*

Mais, si l'on demandait le plus court chemin d'un point à une courbe ou d'une courbe à une autre, nos méthodes actuelles ne seraient pas suffisantes pour résoudre ces sortes de problèmes; attendu que les limites a_0 et a_1 que nous avons essentiellement supposées constantes, devraient réellement varier dans ce cas, pour toutes les courbes que nous sommes obligés de considérer concurremment avec la ligne cherchée. Nous verrons plus loin comment on peut parer à cet inconvénient.

14. Il est des problèmes qui, bien que beaucoup plus compliqués en apparence que celui qui vient de nous occuper, s'y ramènent pourtant avec la plus grande facilité. Soient $U, P, Q, R, \ldots$ des quantités composées d'une manière connue quelconque en x, y, y', y'', ... On peut se demander d'assigner, parmi les diverses valeurs de y en x qui, entre des limites déterminées, donnent

$$\int P\mathrm{d}x=a\,, \qquad \int Q\mathrm{d}x=b\,, \qquad \int R\mathrm{d}x=c\,, \ldots\ldots \qquad \text{(XI)}$$

où a, b, c sont des constantes données, quelle est celle qui, entre les mêmes limites, rend $\int U\mathrm{d}x$ *maximum* ou *minimum*.

15. Pour résoudre cette question, on considérera que puisque, entre les limites dont il s'agit, $\int P\mathrm{d}x$, $\int Q\mathrm{d}x$, $\int R\mathrm{d}x$, ... doivent être constantes, il doit en être de même de $A\int P\mathrm{d}x$, $B\int Q\mathrm{d}x$, $C\int R\mathrm{d}x$, ... où A, B, C, ... sont de nouvelles constantes; il en sera donc aussi de même de la somme

$$A\int P\mathrm{d}x+B\int Q\mathrm{d}x+C\int R\mathrm{d}x+\ldots\ldots\ ;$$

d'où il suit que la même relation de y à x qui, entre les limites assignées, rendra *maximum* ou *minimum* l'intégrale $\int U\mathrm{d}x$ devra aussi rendre telle, entre les mêmes limites, la somme

$$\int U\mathrm{d}x+A\int P\mathrm{d}x+B\int Q\mathrm{d}x+C\int R\mathrm{d}x+\ldots\ldots\,,$$

c'est-à-dire,

$$\int(U+AP+BQ+CR+\ldots\ldots)\mathrm{d}x\ ;$$

en posant donc

$$V=U+AP+BQ+CR+\ldots\ldots$$

la question se trouvera réduite au cas où il s'agit simplement de rendre $\int V\mathrm{d}x$ *maximum* ou *minimum*, entre des limites données;

avec

avec cette seule différence que l'équation cherchée en x et y, outre les constantes introduites par l'intégration, renfermera aussi les constantes A, B, C, ...; mais on aura, pour en assigner les valeurs, les équations de condition (XI) qui sont précisément en même nombre. Donnons un exemple des questions de ce genre.

16. *PROBLÈME II. Entre toutes les courbes qui retranchent une même portion déterminée de l'espace indéfini compris entre deux parallèles et une perpendiculaire qui leur est commune, quelle est celle dont l'arc intercepté entre ces parallèles a la moindre longueur ?*

Solution. Soit prise pour axe des x la perpendiculaire commune aux deux parallèles, dont nous supposerons, comme ci-dessus, que les équations sont

$$x=a_0\,, \qquad x=a_1\,.$$

Soit c^2 l'aire qui doit être comprise entre la courbe cherchée, les deux parallèles et l'axe des x ; on devra avoir ainsi, entre a_0 et a_1,

$$\int y\mathrm{d}x=c^2\;;$$

de plus, entre les mêmes limites, $\int\mathrm{d}x\sqrt{1+y'^2}$ devra toujours, comme ci-dessus, être un *minimum*. Il ne s'agira donc (15) que de rendre telle, entre a_0 et a_1, l'intégrale

$$\int(\sqrt{1+y'^2}+Ay)\mathrm{d}x\;,$$

sauf ensuite à déterminer convenablement la constante A.

Nous aurons donc ici $V=\sqrt{1+y'^2}+Ay$, d'où

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)=A,\quad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\,,\quad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)=0\,,\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)'=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\,,\quad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)'=0\,,\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)''=0\,,\ldots\ldots$$

en conséquence, l'équation différentielle de la courbe cherchée sera

$$A-\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}=\frac{1}{A};$$

son rayon de courbure doit donc être constant ; cette courbe est donc un arc de cercle.

En conséquence, nous pourrons prendre pour intégrale de l'équation ci-dessus

$$(x-G)^2+(y-H)^2=R^2;$$

où des trois constantes G, H, R, deux sont censées introduites par l'intégration, tandis que la troisième remplace la constante A, et doit être déterminée par la condition $\int y\mathrm{d}x=c^2$. On tire d'ailleurs de cette équation

$$y=H\pm\sqrt{R^2-(x-G)^2}, \quad y'=\mp\frac{x-G}{\sqrt{R^2-(x-G)^2}}, \quad y''=\mp\frac{R^2}{[R^2-(x-G)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Quant à l'équation aux limites, on trouvera qu'elle est, dans le cas actuel

$$\frac{a_1-G}{R}Y_1-\frac{a_0-G}{R}Y_0=0;$$

Si donc aucune condition particulière n'a été imposée pour les limites, Y_0 et Y_1 devant demeurer absolument indépendans, cette équation ne pourra être satisfaite qu'autant qu'on aura, à la fois,

$$\frac{a_0-G}{R}=0; \qquad \frac{a_1-G}{R}=0;$$

équations qui ne pourront subsister ensemble qu'autant qu'on aura R infini ; ce qui réduit la ligne cherchée à une ligne droite, comme dans le précédent problème, avec cette différence pourtant qu'en prenant comme alors $y=G$ pour l'équation de cette droite, la constante G sera déterminée, puisque, entre les limites a_0 et a_1 on devra avoir

$$\int y\mathrm{d}x \quad \text{ou} \quad \int G\mathrm{d}x \quad \text{ou} \quad Gx+C=c^2\,,$$

ce qui donne

$$G(a_1-a_0)=c^2\,, \qquad \text{d'où} \qquad G=\frac{c^2}{a_1-a_0}\,,$$

de manière que l'équation sera

$$y=\frac{c^2}{a_1-a_0}\,.$$

Supposons, en second lieu, qu'on exige qu'aux limites de l'intégrale la courbe coupe les deux parallèles à l'axe des y sous des angles dont les cotangentes tabulaires soient m_0 et m_1 ; on devra avoir ainsi

$$m_0=y'_0\,, \qquad\qquad m_1=y'_1\,;$$

c'est-à-dire,

$$m_0=\mp\frac{a_0-G}{\sqrt{R^2-(a_0-G)^2}}\,, \qquad m_1=\mp\frac{a_0-G}{\sqrt{R^2-(a_1-G)^2}}\,;$$

équations d'où on tirera les valeurs des constantes G et R; celle de H se déterminera ensuite par la condition $\int y\mathrm{d}x=c^2$.

Si enfin les deux limites étaient fixes, de telle sorte qu'aux valeurs a_0 et a_1 de x dussent répondre respectivement les valeurs b_0 et b_1 de y ; on aurait, pour déterminer deux des trois constantes G, H, R en fonction de la troisième, les deux équations

$$(a_0-G)^2+(b_0-H)^2=R^2 ,$$

$$(a_1-G)^2+(b_1-H)^2=R^2 ;$$

et cette troisième constante se déterminerait toujours par la condition $\int y\mathrm{d}x=c^2$.

17. On voit donc qu'entre toutes les lignes qui, se terminant à deux points donnés, comprennent un même espace entre elles, les ordonnées de ces deux points et l'axe des abscisses, la plus courte est un certain arc de cercle passant par ces deux points; or, l'espace compris entre la corde de cet arc, les ordonnées de ses deux extrémités et l'axe des x, est aussi donné; donc l'espace compris entre l'arc et sa corde l'est également; d'où il suit que *de tous les arcs de courbes qui ont la même corde et comprennent le même espace entre eux et cette corde, l'arc de cercle est celui qui a la moindre longueur*; d'où il est est facile de conclure, à l'inverse, que *de tous les arcs de courbes de même longueur qui ont la même corde, l'arc de cercle est celui qui renferme le plus grand espace entre lui et cette corde.*

18. Et, comme ces propriétés sont indépendantes de la longueur de la corde, elles doivent également avoir lieu lorsque cette longueur est nulle, auquel cas l'arc devient une circonférence entière; ainsi *le cercle jouit de la double propriété d'être la figure de moindre périmètre, entre toutes celles de même surface, et de plus grande surface, entre toutes celles de même périmètre.*

19. Dans les questions qui viennent de nous occuper, il ne se trouvait, sous le signe d'intégration, qu'une seule fonction de la variable indépendante, avec ses diverses dérivées. Examinons présentement ce qu'il y aura à faire lorsqu'il s'y en trouvera plusieurs.

§. II.

20. Soit V une expression de forme connue quelconque, composée de la variable indépendante z, de deux fonctions x et y de cette variable et des coefficiens différentiels de ces fonctions, jusqu'à ceux de tels ordres on voudra ; et considérons l'intégrale

$$\int V\mathrm{d}z.$$

Si la composition de x et y en z était connue ; rien ne serait plus aisé que de ramener cette intégrale à la forme $\int Zz$, où Z serait une fonction de z seulement ; et alors on pourrait, soit exactement, soit par les séries, exécuter l'intégration entre telles limites on voudrait.

Mais on suppose que les expressions de x et y en z ne sont pas données ; on suppose qu'elles sont les inconnues du problème ; et on propose de les déterminer par cette condition qu'après la substitution de leurs valeurs et de celles de leurs coefficiens différentiels dans V, l'intégrale $\int V\mathrm{d}z$, qui alors aura la forme $\int Z\mathrm{d}x$, prise entre deux limites données quelconques, et sous des conditions données, compatibles toutefois avec la nature du problème, soit *plus grande* ou *plus petite* que toutes celles qui pourraient résulter, entre les mêmes limites et sous les mêmes conditions, de toutes autres valeurs, fonctions de z, prises pour x et y.

21. Comme nous n'avons encore ici qu'une seule variable indépendante z, il nous sera commode d'employer la notation de Lagrange pour les fonctions dérivées ; en conséquence,

$$x', \quad x'', \quad x''', \ldots\ldots, \quad y', \quad y'', \quad y''', \ldots\ldots;$$

seront constamment les symboles respectifs de

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\,;\quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2}\,,\quad \frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}z^3}\,,\ldots,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\,,\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}\,,\quad \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}z^3}\,,\ldots;$$

et, si X et Y sont d'autres fonctions de z,

$$X',\quad X'',\quad X''',\ldots\ldots\ldots\quad Y',\quad Y'',\quad Y''',\ldots\ldots\ldots$$

seront pareillement les symboles respectifs de

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}z}\,,\quad \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}z^2}\,,\quad \frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}z^3}\,,\ldots,\quad \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}z}\,,\quad \frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}z^2}\,,\quad \frac{\mathrm{d}^3Y}{\mathrm{d}z^3}\,,\ldots.$$

Nous ne recourrons ainsi aux notations du calcul différentiel ordinaire que lorsqu'il s'agira de représenter des coefficiens différentiels partiels. Ainsi

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right),\ \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right),\ \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right),\ldots\ldots\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right),\ \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right),\ \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right),\ldots\ldots$$

seront les coefficiens différentiels partiels que l'on obtient pour la fonction V, en n'y considérant successivement que

$$x\,;\quad x',\quad x'',\ldots\ldots\quad y,\quad y',\quad y''$$

comme variables. En conséquence, les expressions

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)',\ \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)',\ \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)',\ldots\ldots\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)',\ \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)',\ \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)',\ldots\ldots$$

seront la même chose que

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}z},\ \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)}{\mathrm{d}z},\ \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)}{\mathrm{d}z},\ldots\ \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)}{\mathrm{d}z},\ \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)}{\mathrm{d}z},\ \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)}{\mathrm{d}z},\ldots$$

Pareillement, les expressions

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)'',\ \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)'',\ \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)'',\ldots\ \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)'',\ \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)'',\ \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)'',\ldots$$

seront la même chose que

$$\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}z^2},\ \frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)}{\mathrm{d}z^2},\ \frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)}{\mathrm{d}z^2},\ldots\ \frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)}{\mathrm{d}z^2},\ \frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)}{\mathrm{d}z^2},\ \frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)}{\mathrm{d}z^2},\ldots$$

et ainsi de suite.

22. Pour en revenir présentement à notre problème, quelles que soient les valeurs de x et y en z qui doivent le résoudre, on peut toujours les considérer comme deux des coordonnées d'une certaine courbe à double courbure dont la troisième coordonnée est z; et le problème se réduit ainsi à trouver cette courbe, tout-à-fait déterminée, mais encore inconnue.

Suivant donc l'esprit de la méthode ordinaire *de maximis et minimis*, il faut, pour parvenir aux équations de cette courbe, exprimer qu'elle est telle que, pour si peu qu'on la déforme, en tout ou en partie, d'une manière arbitraire, et même discontinue si l'on veut, l'intégrale $\int V\mathrm{d}z$, toujours prise entre les mêmes limites et sous les mêmes conditions, deviendra *plus petite* dans le cas du *maximum*, et *plus grande* dans le cas du *minimum*.

23. Conservons x et y pour symboles des deux coordonnées fonctions de z qui, conjointement avec cette troisième coordonnée z, appartiennent à la courbe cherchée; les deux coordonnées correspondant à z, dans toutes les autres courbes dont il vient d'être question, pourront être respectivement représentées par les formules générales

$$x+iX\,,\qquad y+iY\,,$$

dans lesquelles X et Y représentent des fonctions de z tout-à-fait arbitraires, continues ou discontinues, et où i est toujours, comme ci-dessus, un nombre abstrait, positif ou négatif, si petit qu'on le voudra, sans pourtant être absolument nul. Il est évident, en effet, que, même en se donnant i à volonté, on pourra encore profiter de l'indétermination des fonctions X et Y, de manière que ces formules deviennent, conjointement avec z, les coordonnées de telle courbe donnée à double courbure qu'on voudra, et qu'ensuite on pourra diminuer graduellement le nombre i de telle sorte que cette courbe devienne si peu différente de la courbe cherchée qu'on voudra. D'où l'on voit que, si l'on traçait à volonté dans l'espace une courbe aussi voisine de la courbe cherchée qu'on le voudrait; on pourrait toujours considérer $x+iX$, $y+iY$ comme étant, concurremment avec z, les trois coordonnées de cette courbe; de sorte qu'en supposant X et Y arbitraires et i d'une petitesse illimitée, les trois formules z, $x+iX$, $y+iY$ expriment les coordonnées de toutes les courbes que nous devons comparer à la courbe cherchée.

24. Remarquons pourtant, avant d'aller plus loin, qu'il se pourrait, dans des cas particuliers, en vertu de certaines conditions de la question, que les fonctions X et Y ne dussent point être tout-à-fait arbitraires, ou du moins ne dussent l'être que sous certaines restrictions : c'est, par exemple, ce qui arriverait si la courbe cherchée devait passer par deux points donnés; car alors on n'aurait à lui comparer que les autres courbes qui passeraient par ces deux mêmes points; mais nous avons déjà vu (§. I.) qu'on était à temps à la fin du calcul d'avoir égard à ces sortes de limitations; et nous allons voir bientôt qu'il en est exactement de même ici.

25. Par le changement respectif de x et y en $x+iX$, $y+iY$,

$$\left.\begin{array}{c} x \\ x' \\ x'' \\ \text{»} \\ y \\ y' \\ y'' \\ \text{»} \end{array}\right\} \text{deviendront respectivement} \left\{\begin{array}{l} x+iX\;; \\ x'+iX'\;, \\ x''+iX''\;, \\ \ldots\ldots, \\ y+iY\;, \\ y'+iY'\;, \\ y''+iY''\;, \\ \ldots\ldots \end{array}\right.$$

On trouvera conséquemment, par l'application de la série de Taylor au développement des fonctions des polynomes, que, par le même changement, V doit devenir

$$V+\left\{\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)X+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)X'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)X''+\ldots+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)Y+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)Y'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)Y''+\ldots\ldots\right\}\frac{i}{1}+\ldots\ldots\;;$$

en conséquence, $\int V\mathrm{d}z$ deviendra

$$\int V\mathrm{d}z+\frac{i}{1}\int\left\{\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)X+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)X'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)X''+\ldots+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)Y+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)Y'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)Y''+\ldots\right\}\mathrm{d}z+\ldots$$

Afin donc que $\int V\mathrm{d}z$ soit *maximum* ou *minimum*, il faudra, suivant les principes connus, que le multiplicateur de i soit nul ; et alors $\int V\mathrm{d}z$ sera *maximum* ou *minimum*, suivant que le multiplicateur de i^2 sera constamment *négatif* ou constamment *positif*. La condition commune au *maximum* et au *minimum* sera donc exprimée par l'équation

$$\int\left\{\left(\frac{dV}{dx}\right)X+\left(\frac{dV}{dx'}\right)X'+\left(\frac{dV}{dx''}\right)X''+\ldots+\left(\frac{dV}{dy}\right)Y+\left(\frac{dV}{dy'}\right)Y'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)Y''+\ldots\right\}dz=0,$$

laquelle revient simplement à

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)X+\left(\frac{dV}{dx'}\right)X'+\left(\frac{dV}{dx''}\right)X''+\ldots+\left(\frac{dV}{dy}\right)Y+\left(\frac{dV}{dy'}\right)Y'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)Y''+\ldots\ldots=0. \qquad \text{(XII)}$$

26. Cela posé, par la formule $(tu)'=tu'+ut'$, d'où $ut'=(tu)'-tu'$, on trouve facilement

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)X=\left(\frac{dV}{dx}\right)X,$$

$$\left(\frac{dV}{dx'}\right)X'=\left[\left(\frac{dV}{dx'}\right)X\right]'-\left(\frac{dV}{dx'}\right)'X,$$

$$\left(\frac{dV}{dx''}\right)X''=\left[\left(\frac{dV}{dx''}\right)X'\right]'-\left[\left(\frac{dV}{dx''}\right)'X\right]'+\left(\frac{dV}{dx''}\right)''X;$$

$$\left(\frac{dV}{dx'''}\right)X'''=\left[\left(\frac{dV}{dx'''}\right)X''\right]'-\left[\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'X'\right]'+\left[\left(\frac{dV}{dx'''}\right)''X\right]'-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'''X,$$

. . . .

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)Y=\left(\frac{dV}{dy}\right)Y,$$

$$\left(\frac{dV}{dy'}\right)Y'=\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)Y\right]'-\left(\frac{dV}{dy'}\right)'Y;$$

$$\left(\frac{dV}{dy''}\right)Y''=\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)Y'\right]'-\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)'Y\right]'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)''Y,$$

$$\left(\frac{dV}{dy'''}\right)Y'''=\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)Y''\right]'-\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'Y'\right]'+\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''Y\right]'-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'''Y,$$

. . . .

au moyen de quoi l'équation (XII) deviendra

$$\left.\begin{array}{l}
\Big\{\Big[\Big(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\Big)-\Big(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\Big)'+\Big(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\Big)''-\Big(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\Big)'''+\ldots\ldots\Big]X \\
\quad+\Big[\Big(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\Big)-\Big(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\Big)'+\Big(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\Big)''-\Big(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\Big)'''+\ldots\ldots\Big]Y\Big\} \\
+\Big\{\Big[\Big(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\Big)-\Big(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\Big)'+\Big(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\Big)''-\ldots\ldots\ldots\ldots\Big]X \\
\quad+\Big[\Big(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\Big)-\Big(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\Big)'+\ldots\Big]X'+\Big[\Big(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\Big)-\ldots\Big]X''+\ldots\Big\}' \\
+\Big\{\Big[\Big(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\Big)-\Big(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\Big)'+\Big(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\Big)''-\ldots\ldots\ldots\ldots\Big]Y \\
\quad+\Big[\Big(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\Big)-\Big(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\Big)'+\ldots\Big]Y'+\Big[\Big(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\Big)-\ldots\Big]Y''+\ldots\Big\}'
\end{array}\right|=0 \quad \text{(XIII)}$$

or, les quatre dernières lignes du premier membre de cette équation sont des derivées exactes, quels que soient X, X', X'', ... Y, Y', Y'', ... tandis que, si l'on voulait considérer comme telles les deux premières lignes, leurs fonctions primitives changeraient avec la forme de ces mêmes quantités X, X', X'', ... Y, Y', Y'', ... Afin donc que cette équation signifie quelque chose, il faut d'abord que ces deux premières lignes soient tout-à-fait nulles ; ce qui donne

$$\begin{array}{l}
\Big[\Big(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\Big)-\Big(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\Big)'+\Big(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\Big)''-\Big(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\Big)'''+\ldots\ldots\Big]X \\
+\Big[\Big(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\Big)-\Big(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\Big)'+\Big(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\Big)''-\Big(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\Big)'''+\ldots\ldots\Big]Y=0\,. \qquad \text{(XIV)}
\end{array}$$

26. Si la courbe n'est assujettie à d'autres conditions que de rendre $\int V\mathrm{d}z$ *maximum* ou *minimum*, entre les limites assignées, les fonctions X et Y, qui pourront fort bien d'ailleurs être liées

entre elles et même déterminées à ces limites, devront être ; dans tout le reste de l'intégrale, tout-à-fait indépendantes; l'équation (XIV) se partagera donc alors dans les deux suivantes:

$$\left.\begin{aligned} 0&=\left(\frac{dV}{dx}\right)-\left(\frac{dV}{dx'}\right)'+\left(\frac{dV}{dx''}\right)''-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'''+\dots,\\ 0&=\left(\frac{dV}{dy}\right)-\left(\frac{dV}{dy'}\right)'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)''-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'''+\dots; \end{aligned}\right\}\quad\text{(XV)}$$

lesquelles, ne contenant plus dès-lors que z, x, x', x'',...... y, y', y'',......., seront les deux équations différentielles de la courbe cherchée.

27. Mais au lieu de chercher quelle est, entre toutes les courbes, celle qui rend $\int V dz$ *maximum* ou *minimum*, on pourrait demander quelle est celle qui jouit de cette propriété, parmi celles qui satisfont à une équation de relation donnée entre x, y et z, ou, ce qui revient au même, parmi celles qui sont sur la surface courbe exprimée par cette équation; il est clair qu'alors la courbe cherchée, dans ses diverses déformations, ne devrait pas quitter cette surface; d'où il suit que les fonctions X et Y, toujours arbitraires d'ailleurs, ne seraient plus dès-lors indépendantes. Soit, en effet,

$$F(x,y,z)=M=0; \qquad \text{(XVI)}$$

l'équation de cette surface; on devra avoir, pour la courbe déformée,

$$F(x+iX,y+iY,z)=0;$$

ou, en développant,

$$0=M+\left\{\left(\frac{dM}{dx}\right)X+\left(\frac{dM}{dy}\right)Y\right\}\frac{i}{1}+\dots;$$

ou,

ou, en retranchant (XVI), divisant par i et exprimant ensuite que l'équation résultante doit avoir lieu quel que soit i,

$$\left(\frac{dM}{dx}\right)X+\left(\frac{dM}{dy}\right)Y=0\;; \qquad \text{(XVII)}$$

équation de relation entre X et Y, au moyen de laquelle on pourra faire disparaître l'une ou l'autre de ces deux fonctions de l'équation (XIV) qui, étant ensuite divisée par l'autre fonction devenue alors facteur de tous ses termes, sera l'équation différentielle d'une certaine surface qui coupera la surface (XVI) suivant la courbe cherchée.

28. On pourra aussi, si l'on veut, ajouter à l'équation (XIV) le produit de l'équation (XVII) par un multiplicateur indéterminé; égaler séparément à zéro, dans l'équation somme, les coefficiens de X et Y, et éliminer ensuite le multiplicateur indéterminé entre les deux équations résultantes; ce qui conduira évidemment au même but.

29. Tout ceci suppose, au surplus, que x et y doivent être réellement des fonctions déterminées de z; mais ils pourraient fort bien ne l'être que d'une manière purement fictive; c'est-à-dire, qu'il se pourrait que, y étant fonction de x seulement, on ait voulu, comme cela est permis, les considérer comme étant tous deux des fonctions d'une troisième variable z, sans rien statuer d'ailleurs sur la nature de cette troisième variable et sur ses relations avec chacune des deux autres. Alors l'intégrale $\int V\mathrm{d}z$ pourrait être considérée comme provenant d'une autre intégrale $\int U\mathrm{d}x$, dans laquelle U aurait été simplement fonction de x, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ,..... et où l'on aurait après coup changé la variable indépendante, en y considérant x et y comme des fonctions d'une troisième variable z; on ne devrait donc parvenir alors, comme dans le §. I, qu'à une équation différentielle unique entre x et y; il faudrait donc que les équations (XV) eussent un facteur commun sans z, c'est-à-dire, ne ren-

fermant simplement que x, x', x'',..... y, y', y'',..... lequel, égalé à zéro, satisferait à l'équation (XIV), indépendamment de toutes relations entre les fonctions X, Y; en supposant donc, dans cette équation unique, $x=z$, ce qui rendrait nuls x'', x''',.... on obtiendrait la différentielle de l'équation cherchée en x et y.

30. Retournons présentement au cas général. En intégrant les deux équations (XV), on en déduira les valeurs de x et y en z, lesquelles contiendront l'une et l'autre un nombre plus ou moins grand de constantes arbitraires. Il s'agit maintenant de voir comment on déterminera ces constantes.

31. La première ligne du premier membre de l'équation (XIII) se trouvant annullée, comme nous l'avons dit, par l'équation (XIV), cette équation, en passant aux fonctions primitives, devient

$$Const.=\left\{\begin{array}{l}\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)''-\ldots\right]X\\+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)'+\ldots\right]X'+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)-\ldots\right]X''+\ldots\\+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)''-\ldots\right]Y\\+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)+\ldots\right]Y'+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)-\ldots\right]Y''+\ldots\end{array}\right\}; \quad \text{(XVIII)}$$

En y mettant pour x et y leurs valeurs en z et en constantes, déduites de l'intégration des équations (XV), les coefficiens de X, X', X'',..... Y, Y', Y'',..... n'y seront plus que des fonctions de z et de ces mêmes constantes.

32. Soient c_0 et c_1 les deux limites de l'intégrale; c'est-à-dire, supposons qu'il soit question de rendre *maximum* ou *minimum* l'intégrale $\int V\mathrm{d}z$, prise depuis $z=c_0$ jusqu'à $z=c_1$; marquons respectivement des indices 0 et 1 les valeurs que prennent les diverses quantités qui entrent dans l'équation (XVIII), lorsqu'on y met pour z les valeurs respectives c_0 et c_1, nous aurons ainsi

$$Const.=\left\{\begin{array}{l}\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)_{0}-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)'_{0}+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)''_{0}-\ldots\ldots\ldots\right]X_{0}\\+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)_{0}-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)'_{0}+\ldots\right]X'_{0}+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)_{0}-\ldots\right]X''_{0}+\ldots\\+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)_{0}-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)'_{0}+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)''_{0}-\ldots\ldots\ldots\right]Y_{0}\\+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)_{0}-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)'_{0}+\ldots\right]Y'_{0}+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)_{0}-\ldots\right]Y''_{0}+\ldots\end{array}\right\},$$

$$Const.=\left\{\begin{array}{l}\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)_{1}-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)'_{1}+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)''_{1}-\ldots\ldots\ldots\right]X_{1}\\+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)_{1}-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)'_{1}+\ldots\right]X'_{1}+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)_{1}-\ldots\right]X''_{1}+\ldots\\+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)_{1}-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)'_{1}+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)''_{1}-\ldots\ldots\ldots\right]Y_{1}\\+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)_{1}-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)'_{1}+\ldots\right]Y_{1}+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)_{1}-\ldots\right]Y''_{1}+\ldots\end{array}\right\};$$

d'où, en retranchant,

$$0=\left\{\begin{array}{l}\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)_{1}-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)'_{1}+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)''_{1}-\ldots\right]X_{1}+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)_{1}-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)'_{1}+\ldots\right]X'_{1}+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)_{1}-\ldots\right]X''_{1}+\ldots\\-\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)_{0}-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)'_{0}+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)''_{0}-\ldots\right]X_{0}-\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)_{0}-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)'_{0}+\ldots\right]X'_{0}-\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)_{0}-\ldots\right]X''_{0}-\ldots\\+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)_{1}-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)'_{1}+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)''_{1}-\ldots\right]Y_{1}+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)_{1}-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)'_{1}+\ldots\right]Y'_{1}+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)_{1}-\ldots\right]Y''_{1}+\ldots\\-\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)_{0}-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)'_{0}+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)''_{0}-\ldots\right]Y_{0}-\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)_{0}-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)'_{0}+\ldots\right]Y'_{0}-\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)_{0}-\ldots\right]Y''_{0}-\ldots\end{array}\right\};\ (\mathrm{XIX})$$

équation que nous appellerons à l'avenir *équation aux limites* ; et qui, comme l'on voit, ne renferme plus, outre les valeurs encore indéterminées de X, X', X'', ... Y, Y', Y'', ... aux deux limites de l'intégrale, que les deux limites c_0, c_1 et les constantes introduites par l'intégration des équations (XV).

33. Cela posé, si aucune condition particulière n'a été prescrite relativement aux limites, les fonctions

$$X_0\,,\ X'_0\,,\ X''_0\,,\ \ldots\ldots\ldots,\ Y_0\,,\ Y'_0\,,\ Y''_0\,,\ \ldots\ldots\ldots$$

$$X_1\,,\ X'_1\,,\ X''_1\,,\ \ldots\ldots\ldots,\ Y_1\,,\ Y'_1\,,\ Y''_1\,,\ \ldots\ldots\ldots$$

devront conserver l'indépendance la plus entière. L'équation (XIX) ne pourra donc alors subsister qu'autant que les coefficiens de ces diverses fonctions seront séparément nuls ; cette équation (XIX) se partagera donc dans les suivantes :

$$0=\left(\frac{dV}{dx'}\right)_0-\left(\frac{dV}{dx''}\right)'_0+\left(\frac{dV}{dx'''}\right)''_0-\ldots,\quad 0=\left(\frac{dV}{dx''}\right)_0-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'_0+\ldots,\quad 0=\left(\frac{dV}{dx'''}\right)_0-\ldots,$$

$$0=\left(\frac{dV}{dy'}\right)_0-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'_0+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_0-\ldots,\quad 0=\left(\frac{dV}{dy''}\right)_0-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_0+\ldots,\quad 0=\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_0-\ldots,$$

$$0=\left(\frac{dV}{dx'}\right)_1-\left(\frac{dV}{dx''}\right)'_1+\left(\frac{dV}{dx'''}\right)''_1-\ldots,\quad 0=\left(\frac{dV}{dx''}\right)_1-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'_1+\ldots,\quad 0=\left(\frac{dV}{dx'''}\right)_0-\ldots,$$

$$0=\left(\frac{dV}{dy'}\right)_1-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'_1+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_1-\ldots,\quad 0=\left(\frac{dV}{dy''}\right)_1-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_1+\ldots,\quad 0=\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_1-\ldots,$$

lesquelles seront, en général, en même nombre que les constantes introduites, et serviront à en assigner les valeurs.

34. Mais si, au contraire, on exige qu'à l'une ou à l'autre limites, ou à toutes les deux, il existe, entre x et y et leurs divers coefficiens différentiels, une ou plusieurs relations données; X et Y, toujours indéterminés, ne seront plus dès-lors tout-à-fait

fait arbitraires. Représentons, en effet, une de ces équations par

$$f(x, x', x'', \ldots\ldots, y, y', y'', \ldots\ldots) = L = 0\,; \qquad \text{(XX)}$$

on devra avoir, pour les diverses courbes que l'on considère, concurremment avec la courbe cherchée

$$f(x+iX, x'+iX', x''+iX'', \ldots, y+iY, y'+iY', y''+iY'', \ldots) = 0\,;$$

ou, en développant,

$$L + \left\{\left(\frac{dL}{dx}\right)X + \left(\frac{dL}{dx'}\right)X' + \left(\frac{dL}{dx''}\right)X'' + \ldots\ldots\right.$$

$$\left. + \left(\frac{dL}{dy}\right)Y + \left(\frac{dL}{dy'}\right)Y' + \left(\frac{dL}{dy''}\right)Y'' + \ldots\right\}\frac{i}{1} + \ldots\ldots = 0$$

d'où, retranchant l'équation (XX) et exprimant que l'équation résultante a lieu quelque petite que soit i,

$$0 = \left(\frac{dL}{dx}\right)X + \left(\frac{dL}{dx'}\right)X' + \left(\frac{dL}{dx''}\right)X'' + \ldots\ldots$$

$$+ \left(\frac{dL}{dy}\right)Y + \left(\frac{dL}{dy'}\right)Y' + \left(\frac{dL}{dy''}\right)Y'' + \ldots\ldots \qquad \text{(XXI)}$$

Il faudra d'abord substituer dans (XX, XXI) pour x et y leurs valeurs en z et en constantes déduites des équations (XV); puis, en supposant, par exemple, qu'il soit question de la première limite, mettre pour z sa valeur c_0, ce qui changera ces équations en celles-ci :

$$L_0 = 0, \ \text{(XXII)} \quad 0 = \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{dL}{dx}\right)_0 X_0 + \left(\frac{dL}{dx'}\right)_0 X'_0 + \left(\frac{dL}{dx''}\right)_0 X''_0 + \ldots \\ &\left(\frac{dL}{dy}\right)_0 Y_0 + \left(\frac{dV}{dy'}\right)_0 Y'_0 + \left(\frac{dL}{dy''}\right)_0 Y''_0 + \ldots \end{aligned}\right\} \ \text{(XXIII)}$$

On pourra avoir plusieurs couples de semblables équations, tant pour l'une que pour l'autre limites; et on se servira de (XXII) et de ses analogues pour éliminer de (XIX) le plus grand nombre possible des fonctions X_0, X'_0, X''_0, ..., Y_0, Y'_0, Y''_0, ..., X_1, X'_1, X''_1, ..., Y_1, Y'_1, Y'', ...; après quoi on égalera séparément à zéro les coefficiens de celles qui n'auront pas disparu. A la vérité, le nombre des équations qui devaient servir à déterminer les constantes se trouvera ainsi réduit; mais toutes les équations qu'on aura de moins se trouveront exactement remplacées par l'équation (XXII) et ses analogues; de sorte que ces constantes se trouveront toujours déterminées, et le seront seulement par d'autres conditions.

35. Au surplus, au lieu d'éliminer de l'équation (XIX) le plus grand nombre possible des fonctions X_0, X'_0, X''_0,..... Y_0, Y'_0, Y''_0,...... X_1, X'_1, X''_1,...... Y_1, Y'_1, Y''_1,......, au moyen des équations de condition telles que (XXIII), il reviendra au même, et il sera peut-être plus élégant de prendre la somme tant de l'équation (XIX) que des produits de ces équations de condition par des multiplicateurs indéterminés; d'égaler ensuite séparément à zéro, dans l'équation somme, les coefficiens de toutes les fonctions X_0, X'_0, X''_0,..... Y_0, Y'_0, Y''_0,..... X_1, X'_1, X''_1,...... Y_1, Y'_1, Y''_1,..... et d'éliminer enfin les multiplicateurs indéterminés entre les équations résultantes.

36. Appliquons présentement ces divers procédés à un exemple.

PROBLÈME III. Quelle est la plus courte ligne entre deux plans parallèles donnés?

Solution. Soient pris l'axe des z perpendiculaire et le plan des xy parallèles aux deux plans donnés, dont nous supposerons les équations

$$z=c_0, \qquad z=c_1;$$

les axes des x et des y étant supposés rectangulaires, mais dirigés d'ailleurs comme on le voudra, la question se trouvera ainsi réduite à assigner pour x et y des valeurs, fonctions de z qui rendent

$$\int dz\sqrt{1+x'^2+y'^2}$$

minimum, entre les limites c_0 et c_1.

Nous aurons donc ici

$$V=\sqrt{1+x'^2+y'^2};$$

d'où (21)

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)=0, \quad \left(\frac{dV}{dx'}\right)=\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}, \quad \left(\frac{dV}{dx''}\right)=0, \ldots$$

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)=0, \quad \left(\frac{dV}{dy'}\right)=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+y'^2}}, \quad \left(\frac{dV}{dy''}\right)=0, \ldots$$

et de là

$$\left(\frac{dV}{dx'}\right)'=\frac{(1+y'^2)x''-x'y'y''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \left(\frac{dV}{dx''}\right)'=0, \ldots$$

$$\left(\frac{dV}{dy'}\right)'=\frac{(1+x'^2)y''-x'y'x''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \left(\frac{dV}{dy''}\right)'=0, \ldots$$

$$\left(\frac{dV}{dx''}\right)''=0, \ldots$$

$$\left(\frac{dV}{dy''}\right)''=0, \ldots$$

au moyen de quoi l'équation (XIV) deviendra

$$\frac{(1+y'^2)x''-x'y'y''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}X+\frac{(1+x'^2)y''-x'y'x''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}Y=0.$$

Si la courbe n'est assujettie à aucune autre condition qu'à celle d'être *minimum* entre les deux plans donnés, X et Y devront demeurer indépendans, et conséquemment cette équation se partagera en ces deux-ci :

$$\frac{(1+y'^2)x''-x'y'y''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0, \quad \frac{(1+x'^2)y''-x'y'x''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0,$$

qu'on pourra mettre ensuite sous cette forme

$$\frac{(1+x'^2+y'^2)x''-(x'x''+y'y'')x'}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0, \quad \frac{(1+x'^2+y'^2)y''-(x'x''+y'y'')y'}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0;$$

ou, en continuant d'employer les notations de Lagrange,

$$\frac{(1+x'^2+y'^2)x''-(1+x'^2+y'^2)'x'}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0, \quad \frac{(1+x'^2+y'^2)y''-(1+x'^2+y'^2)'y'}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0,$$

ou encore

$$\frac{x''\sqrt{1+x'^2+y'^2}-x'(\sqrt{1+x'^2+y'^2})'}{1+x'^2+y'^2}=0, \quad \frac{y''\sqrt{1+x'^2+y'^2}-y'(\sqrt{1+x'^2+y'^2})'}{1+x'^2+y'^2}=0$$

ou enfin

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}\right)'=0, \quad \left(\frac{y'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}\right)'=0,$$

ce qui donne

$$\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}=A; \quad \frac{y'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}=B:$$

En considérant, dans ces équations, x' et y' comme deux inconnues, on en tire, en transformant les constantes,

$$x'=\frac{A}{\sqrt{1-A^2-B^2}}=M; \quad y'=\frac{B}{\sqrt{1-A^2-B^2}}=N;$$

d'où enfin

$$x=Mz+G; \quad y=Nz+H,$$

c'est-à-dire que la ligne cherchée est une ligne droite, comme on pouvait bien s'y attendre.

L'équation aux limites (XIX) devient, dans le même cas,

$$\frac{M}{\sqrt{1+M^2+N^2}}(X_1-X_0)+\frac{N}{\sqrt{1+M^2+N^2}}(Y_1-Y_0)=0\,;$$

de sorte que les constantes G et H demeurent tout-à-fait arbitraires ; ce qui revient à dire que les parties de parallèles interceptées entre des plans parallèles sont de même longueur.

Les coefficiens des deux fonctions X_0 et X_1, ainsi que ceux des deux fonctions Y_0 et Y_1 étant les mêmes aux deux limites, il s'ensuit qu'on ne saurait établir des conditions indépendantes pour ces deux limites, ce qui revient à dire qu'une droite qui perce deux plans parallèles fait des angles égaux avec l'un et l'autre.

S'il n'y a aucune condition particulière prescrite pour les limites, l'indépendance absolue des fonctions X_0, Y_0, X_1, Y_1 ne permettant de poser ni $X_1-X_0=0$ ni $Y_1-Y_0=0$, l'équation aux limites ne pourra être satisfaite qu'en posant simultanément $M=0$, $N=0$, au moyen de quoi les équations de notre droite se réduiront simplement à $x=G$, $y=H$; ce qui revient à dire que, de toutes les droites menées entre les deux mêmes plans parallèles, la perpendiculaire commune, indéterminée d'ailleurs de situation, est la plus courte.

Si les limites étaient des points fixes, tellement situés sur nos deux plans qu'on eût, pour le premier, $x=a_0$, $y=b_0$, et pour le second, $x=a_1$, $y=b_1$; en exprimant que ces valeurs et celles de z satisfont aux deux équations

$$x=Mz+G\,,\qquad y=Nz+H\,,$$

on aurait

$$a_0=Mc_0+G\,,\qquad b_0=Nc_0+H\,;$$

$$a_1=Mc_1+G\,,\qquad b_1=Nc_1+H\,;$$

éliminant donc, entre ces six équations, les quatre constantes M, N, G, H, on obtiendrait pour les équations de la droite cherchée

$$\frac{x-a_0}{a_1-a_0}=\frac{y-b_0}{b_1-b_0}=\frac{z-c_0}{c_1-c_0};$$

ce qui revient à dire que *le plus court chemin entre deux points de l'espace est la ligne droite qui joint ces deux points.*

Au lieu de points fixes, on pourrait donner pour limites des courbes planes tracées sur les deux plans parallèles. Conservons le point fixe (a_0, b_0, c_0) sur le premier plan, et donnons-nous pour limite, sur le second, la courbe plane suivant laquelle il est coupé par la surface cylindrique dont l'équation est

$$f(x, y)=L=0;$$

nous devrons avoir (34) l'équation de condition

$$\left(\frac{dL}{dx}\right)_1 X_1+\left(\frac{dL}{dy}\right)_1 Y_1=0.$$

en ajoutant le produit de cette équation par un multiplicateur indéterminé λ à l'équation aux limites, après avoir fait dans cette dernière $X_0=0$, $Y_0=0$, ainsi qu'on le doit, puisqu'ici la première limite est fixe; il viendra

$$\left\{\frac{M}{\sqrt{1+M^2+N^2}}+\lambda\left(\frac{dL}{dx}\right)_1\right\}X_1+\left\{\frac{N}{\sqrt{1+M^2+N^2}}+\lambda\left(\frac{dL}{dy}\right)_1\right\}Y=0.$$

Egalant présentement à zéro les multiplicateurs de X_1 et Y_1, nous aurons les deux équations

$$\frac{M}{\sqrt{1+M^2+N^2}}+\lambda\left(\frac{dL}{dx}\right)_1=0,\quad \frac{N}{\sqrt{1+M^2+N^2}}+\lambda\left(\frac{dL}{dy}\right)_1=0,$$

entre lesquelles éliminant λ, il viendra finalement

$$\left(\frac{dL}{dx}\right)_1 N=\left(\frac{dL}{dy}\right)_1 M\;;$$

mais, en différentiant l'équation $L=0$, il vient

$$\left(\frac{dL}{dx}\right)_1 dx+\left(\frac{dL}{dy}\right)_1 dy=0,$$

qui, combinée avec la précédente, donne

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N}\;;$$

mais les équations de notre droite étant, dans le cas actuel,

$$x-a_0=M(z-c_0)\;,\qquad y-b_0=N(z-c_0)\;,$$

l'équation de sa projection sur le plan de la courbe sera

$$y-b_0=\frac{N}{M}(x-a_0)\;;$$

d'où l'on voit que cette projection, et par conséquent la droite elle-même sera normale à la courbe.

Il demeure donc établi par là que *le plus court chemin d'un point de l'espace à une courbe plane est la normale menée de ce point à cete courbe*; et il est facile d'en conclure que *le plus court chemin entre deux courbes planes situées dans deux plans parallèles, ou même dans un même plan, est la normale qui leur est commune.*

Nous voilà donc parvenus ici à la solution d'un problème que précédemment (13) nous avions vainement tenté de résoudre; et l'on voit que cela tient à ce qu'alors y était, dès-l'abord, supposée fonction de x, tandis que x, y sont supposés fonctions d'une troisième variable z; ce qui permet d'établir ensuite telle relation en veut entre x et y. Mais nous éprouverions ici une difficulté du même genre si nous nous proposions d'assigner le plus court chemin, soit entre des courbes à double courbure, soit entre des surfaces courbes ; puisqu'il est de l'essence de la question que nous traitons actuellement que les limites c_0 et c_1 demeurent invariables. On peut déjà soupçonner, au surplus, et nous verrons bientôt d'ailleurs ce qu'il y a à faire pour surmonter cette difficulté.

Pour donner un exemple du cas mentionné ci-dessus (27), reprenons l'équation

$$\frac{(1+y'^2)x''-x'y'y''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}X+\frac{(1+x'^2)y''-x'y'x''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}Y=0\ ,$$

et supposons qu'au lieu de chercher quelle est absolument la plus courte ligne entre nos deux plans, on cherche seulement quelle est la plus courte entre toutes celles qui, se terminant à ces deux plans, sont situées sur une sphère ayant pour équation

$$x^2+y^2+z^2-r^2=M=0\ .$$

On aura ici

$$\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\right)=2x\ , \qquad \left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}\right)=2y\ ,$$

de sorte que l'équation de condition (XVII) sera

$$xX+yY=0;$$

ajoutant le produit de cette équation par un multiplicateur indéterminé λ à celle ci-dessus, il viendra

$$\left\{\frac{(1+y'^2)x''-x'y'y''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}+\lambda x\right\}X+\left\{\frac{(1+x'^2)y''-x'y'x''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}+\lambda y\right\}Y=0\ ,$$

égalant alors séparément à zéro les multiplicateurs des fonctions X et Y, il en résultera les deux équations

$(1+y'^2)$

$$\frac{(1+y'^2)x''-x'y'y''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}+\lambda x=0\,,\qquad \frac{(1+x'^2)y''-x'y'x''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}+\lambda y=0\,,$$

qui, d'après le précédent calcul, reviennent à

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}\right)'+\lambda x=0\,,\qquad \left(\frac{y'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}\right)'+\lambda y=0\,,$$

entre lesquelles éliminant λ, il vient

$$x\left(\frac{y'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}\right)'=y\left(\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}\right)'\,;$$

ou, en développant et transposant,

$$\frac{(xy''-yx'')\sqrt{1+x'^2+y'^2}-(xy'-yx')(\sqrt{1+x'^2+y'^2})'}{1+x'^2+y'^2}=0\,,$$

ou encore $$\frac{(xy'-yx')'\sqrt{1+x'^2+y'^2}-(xy'-yx')(\sqrt{1+x'^2+y'^2})'}{1+x'^2+y'^2}=0\,,$$

ou enfin $$\left(\frac{xy'-yx'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}\right)'=0\,,$$

ce qui donne, en intégrant, $$\frac{xy'-yx'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}=C\,. \qquad (\alpha)$$

telle est donc l'équation différentielle de la surface qui doit couper la sphère dont l'équation est $x^2+y^2+z^2=r^2$, (β) suivant la ligne cherchée. Or, soit un plan passant par le centre de cette sphère et ayant pour équation $Ax+By=z$; (γ) les équations (β, γ) donneront par différentiation

$$xx'+yy'=-z\,,\qquad Ax'+By'=+1\,;$$

d'où $$x'=+\frac{y+Bz}{Ay-Bx}\,,\qquad y'=-\frac{x+Az}{Ay-Bx}\,;$$

de là, en ayant égard aux équations (β, γ),

$$xy'-yx'=-\frac{r^2}{Ay-Bx}\,,\qquad \sqrt{1+x'^2+y'^2}=\frac{r\sqrt{1+A^2+B^2}}{Ay-Bx}\,,$$

et par suite $$\frac{xy'-yx'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}=-\frac{r}{\sqrt{1+A^2+B^2}}\,;$$

équation qui équivaut à l'équation (α) ; d'où il suit que le système des équations (β, γ) équivaut au système des équations (α, β); puis donc que les premières appartiennent à un grand cercle de la sphère, il doit en être de même des dernières; la ligne cherchée est donc un arc du grand cercle donné par les deux équations

$$x^2+y^2+z^2=r^2\ , \qquad Ax+By=z\ ;$$

dans lesquelles on peut profiter de l'indétermination des deux constantes A et B pour assujettir la courbe à se terminer à des points donnés sur les intersections de la sphère avec les deux plans parallèles entre lesquels cette courbe doit se trouver comprise. Il demeure donc établi, par ce qui précède, que *le plus court chemin, sur la sphère, entre deux points de sa surface, est l'arc de grand cercle qui joint ces deux points.*

37. On peut, comme nous l'avons fait (14), ramener à la question qui nous occupe, d'autres questions qui semblent d'abord beaucoup plus compliquées. Soient U, P, Q, R,...... des quantités composées d'une manière connue quelconque en z, x, y, x', y', x'', y'',..... On peut se demander d'assigner, parmi les diverses valeurs de x et y en z qui, entre des limites déterminées, donnent

$$\int P\mathrm{d}z=a\ , \qquad \int Q\mathrm{d}z=b\ , \qquad \int R\mathrm{d}z=c\ ,\ldots\ldots \qquad \text{(XXIV)}$$

où a, b, c,...... sont des constantes données, quelles sont celles qui, entre les limites, rendent $\int U\mathrm{d}z$ *maximum* ou *minimum* ? Or, en raisonnant comme nous l'avons fait à l'endroit cité, on verra qu'en posant

$$V=U+AP+BQ+CR+\ldots\ldots\ ,$$

où A, B, C sont de nouvelles constantes, la question se réduit à rendre $\int V\mathrm{d}z$ *maximum* ou *minimum*, entre les limites dont il s'agit, et à déterminer ensuite les constantes A, B, C,........ à l'aide des conditions (XXIV). Voici un exemple.

38 *PROBLÈME IV. Entre toutes les courbes qui, se terminant à deux plans parallèles, sont telles que l'ensemble des perpendiculaires entre ces plans, terminées à l'un et à l'autre, qui passent par les divers points de ces courbes, forme une portion de surface*

cylindrique dont l'aire est donnée, quelle est celle qui, entre ces deux mêmes plans, a la moindre longueur?

Solution. Soient toujours, comme dans le précédent problème, l'axe des z perpendiculaire et le plan des xy parallèle aux deux plans donnés, que nous supposerons encore avoir pour équations

$$z=c_0\ , \qquad z=c_1\ .$$

Soit k^2 l'aire donnée de la portion de surface cylindrique formée par toutes les perpendiculaires entre les plans parallèles menées par les points de la courbe cherchée ; nous aurons, entre les limites c_0 et c_1,

$$(c_1-c_0)\int dz\sqrt{x'^2+y'^2}=k^2\ ;$$

de plus, nous devrons avoir, entre les mêmes limites,

$$\int dz\sqrt{1+x'^2+y'^2}$$

minimum ; d'où l'on voit (37) que tout se réduira à rendre *minimum*, entre les limites dont il s'agit, l'intégrale

$$\int\{\sqrt{1+x'^2+y'^2}+A(c_1-c_0)\sqrt{x'^2+y'^2}\}dz\ ;$$

sauf ensuite à déterminer convenablement la constante A.

En posant, pour abréger, $A(c_1-c_0)=C$, nous aurons donc ici

$$V=\sqrt{1+x'^2+y'^2}+C\sqrt{x'^2+y'^2}\ ,$$

d'où

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)=0,\quad \left(\frac{dV}{dx'}\right)=\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}+\frac{Cx'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},\quad \left(\frac{dV}{dx''}\right)=0,\ldots.$$

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)=0,\quad \left(\frac{dV}{dy'}\right)=\frac{y'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}+\frac{Cy'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},\quad \left(\frac{dV}{dy''}\right)=0,\ldots.$$

$$\left(\frac{dV}{dx'}\right)'=\frac{x''(1+y'^2)-x'y'y''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{Cy'(y'x''-x'y'')}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \left(\frac{dV}{dx''}\right)'=0,\ldots.$$

$$\left(\frac{dV}{dy'}\right)'=\frac{y''(1+x'^2)-x'y'x''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{Cx'(y'x''-x'y'')}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \left(\frac{dV}{dy''}\right)'=0,\ldots.$$

$$\left(\frac{dV}{dx''}\right)''=0,\ldots.$$

$$\left(\frac{dV}{dy''}\right)''=0,\ldots.$$

en conséquence, l'équation (XIV) deviendra

$$\left\{\frac{x''(1+y'^2)-x'y'y''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{Cy'(y'x''-x'y'')}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}X$$
$$+\left\{\frac{y''(1+x'^2)-x'y'x''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{Cx'(y'x''-x'y'')}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}Y=0\,.$$

Si donc la courbe cherchée ne doit être assujettie à aucune autre condition, les coefficiens de X et Y devront être séparément nuls, ce qui donnera, pour les deux équations différentielles de la courbe dont il s'agit

$$\frac{x''(1+y'^2)-x'y'y''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{Cy'(y'x''-x'y'')}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0\,,$$
$$\frac{y''(1+x'^2)-x'y'x''}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{Cx'(y'x''-x'y'')}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0\,;$$

ou bien

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}\right)'+\left(\frac{Cx'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)'=0\,,$$
$$\left(\frac{y'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}\right)'+\left(\frac{Cy'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)'=0\,;$$

ce qui donne, par une première intégration,

$$\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}+\frac{Cx'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=A\,;$$
$$\frac{y'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}+\frac{Cy'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=B\,;$$

on tirera évidemment de là

$$x'=M\,,\qquad y'=N\,;$$

M et N étant deux nouvelles constantes, fonctions de A, B, C, on aura donc, en intégrant de nouveau,

$$x=Mz+G\,,\qquad y=\mathrm{N}z+H\,;$$

la ligne cherchée est donc une droite; la surface cylindrique dont l'aire doit être égale à k^2 se réduit donc à un plan rectangulaire ayant cette droite pour diagonale.

§. III.

39. Dans tout ce qui précède, nous avons constamment supposé qu'il n'y avait dans V qu'une seule variable indépendante ; examinons présentement ce qu'il y aura à faire lorsqu'il y en aura plusieurs, et que la quantité à rendre *maximum* ou *minimum* sera une intégrale multiple. Soit V une expression de forme connue quelconque, composée de deux variables indépendantes x et y, d'une fonction z de ces deux variables et des divers coefficiens différentiels partiels de cette fonction, jusqu'à ceux de tel ordre on voudra; et considérons l'intégrale double

$$\int\int V\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Si la composition de z en x et y était connue, rien ne serait plus aisé que de ramener cette intégrale à la forme $\int\int Z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où Z serait une fonction de x et y seulement; et alors on pourrait, soit exactement, soit par les séries, exécuter l'intégration entre telles limites constantes ou variables qu'on voudrait.

Mais on suppose que l'expression de z en x et y n'est pas donnée, on suppose qu'elle est l'inconnue du problème ; et on propose de la déterminer par cette condition qu'après la substitution de sa valeur et de celles de ses divers coefficiens différentiels partiels dans $\int\int V\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, qui alors prendra la forme $\int\int Z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, cette intégrale, prise entre des limites données quelconques, constantes ou variables, et sous des conditions données, compatibles toutefois avec la nature du problème, soit *plus grande* ou *plus petite* que toutes celles qui pourraient résulter, entre les mêmes limites et sous les mêmes conditions, de toute autre valeur, fonction de x et y, prise pour z.

40. Ici, où nous avons deux variables indépendantes, il nous serait incommode d'employer les notations de Lagrange; en conséquence, nous adopterons les abréviations que voici :

$$\frac{dz}{dx}=l\,,\qquad \frac{d^2z}{dx^2}=n\,,\qquad \frac{d^3z}{dx^3}=q\,,\;\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{dz}{dy}=m\,;\qquad \frac{d^2z}{dx\,dy}=o\,,\qquad \frac{d^3z}{dx^2dy}=r\,,\;\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^2z}{dy^2}=p\,,\qquad \frac{d^3z}{dx\,dy^2}=s\,,\;\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^3z}{dy^3}=t\,,\;\ldots\ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ (*)$$

Quant aux différentielles partielles, nous poserons

$$\left(\frac{dV}{dz}\right)=K\,,\ \left(\frac{dV}{dl}\right)=L\,,\ \left(\frac{dV}{dn}\right)=N\,,\ \left(\frac{dV}{dq}\right)=Q\,,\;\ldots\ldots\,;$$

$$\left(\frac{dV}{dm}\right)=M\,,\ \left(\frac{dV}{do}\right)=O\,,\ \left(\frac{dV}{dr}\right)=R\,,\;\ldots\ldots,$$

$$\left(\frac{dV}{dp}\right)=P\,,\ \left(\frac{dV}{ds}\right)=S\,,\;\ldots\ldots,$$

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)=T\,,\;\ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\,;$$

(*) Nous aurions bien désiré de pouvoir employer les notations ordinaires ; c'est-à-dire, de faire $\frac{dz}{dx}=p$, $\frac{dz}{dy}=q$, et ainsi du reste ; mais, dans le dessein où nous étions de pousser les développemens un peu plus loin qu'on ne le fait communément, cela devenait impossible.

et si nous avons quelques autres fonctions de x et y à considérer, nous en représenterons les divers coefficiens différentiels sans aucune abréviation.

41. Pour en revenir présentement à notre problème ; quelle que soit la valeur encore inconnue de z en x et y qui doit le résoudre, on peut toujours la considérer comme l'ordonnée d'une certaine surface courbe, dont les deux abscisses sont x et y ; et le problème se réduit ainsi à déterminer l'équation de cette surface.

Suivant donc l'esprit de la méthode ordinaire *de maximis et minimis*, il faut, pour parvenir à cette équation, exprimer que la surface cherchée est telle que, pour si peu qu'on la déforme, en tout ou en partie, d'une manière arbitraire, et même discontinue si l'on veut, l'intégrale $\int\int V \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, toujours prise entre les mêmes limites et sous les mêmes conditions, deviendra *plus petite* dans le cas du *maximum*, et *plus grande* dans le cas du *minimum.*

42. Conservons z pour le symbole de l'ordonnée de la surface qui doit résoudre le problème ; l'ordonnée correspondante, dans toutes les autres surfaces dont il vient d'être question, pourra être représentée par la formule générale

$$z+iZ\,,$$

dans laquelle Z est supposé représenter une fonction de x et y tout-à-fait arbitraire, continue ou discontinue, et où i est encore, comme ci-dessus, un nombre abstrait, positif ou négatif, si petit qu'on le voudra, sans pourtant être absolument nul. Il est évident, en effet, que, même en se donnant i à volonté, on pourra encore profiter de l'indétermination de la fonction Z de manière que cette formule devienne l'ordonnée de telle surface qu'on voudra ; et qu'ensuite on pourra diminuer graduellement le nombre i de telle sorte que cette surface devienne si peu différente qu'on le voudra de la surface cherchée. D'où l'on voit que, si l'on construit arbitrairement une surface aussi voisine de la surface cherchée qu'on le voudra, on pourra toujours considérer $z+iZ$ comme exprimant l'ordonnée de cette surface. De sorte qu'en supposant Z arbitraire et i d'une petitesse illimitée, la formule $z+iZ$ exprime l'ordonnée de la totalité des surfaces que nous devons comparer à la surface cherchée.

43. Remarquons pourtant, avant d'aller plus loin, qu'il se pourrait, dans des cas particuliers, en vertu de certaines conditions de la question, que la fonction Z, toujours indéterminée, ne dût point être tout-à-fait arbitraire, ou du moins ne dût l'être que sous certaines restrictions : c'est, par exemple, ce qui arriverait si la surface cherchée devait passer par une courbe donnée, plane ou à double courbure, ou encore par un polygone donné, rectiligne, mixtiligne ou curviligne, plan ou gauche ; car alors on n'aurait à lui comparer que les autres surfaces qui passeraient par cette courbe ou par ce polygone ; mais nous avons déjà vu (§. I et II), et nous verrons bientôt de nouveau qu'on est toujours à temps, à la fin du calcul, d'avoir égard à ces sortes de limitations.

44. Par le changement de z en $z+iZ$, les quantités

$$\begin{array}{lllll}
z, & l, & n, & q, & \ldots\ldots\ldots, \\
 & m, & o, & r, & \ldots\ldots\ldots, \\
 & & p, & s, & \ldots\ldots\ldots, \\
 & & & t, & \ldots\ldots\ldots, \\
 & & & & \ldots\ldots\ldots,
\end{array}$$

deviennent respectivement

$$\begin{array}{llll}
z+iZ, & l+i\dfrac{dZ}{dx}, & n+i\dfrac{d^2Z}{dx^2}, & q+i\dfrac{d^3Z}{dx^3}, \ldots\ldots\ldots, \\
 & m+i\dfrac{dZ}{dy}, & o+i\dfrac{d^2Z}{dxdy}, & r+i\dfrac{d^3Z}{dx^2dy}, \ldots\ldots\ldots,
\end{array}$$

$$p+i\,\frac{d^2Z}{dy^2}\,,\quad s+i\,\frac{d^3Z}{dxdy^2}\,,\ldots\ldots\ldots$$
$$t+i\,\frac{d^3Z}{dy^3}\,,\ldots\ldots\ldots,$$
$$,\ldots\ldots\ldots;$$

en conséquence, on trouvera, par l'application de la série de Taylor au développement des fontions des polynomes, que V doit devenir (40)

$$V+\left\{\begin{array}{r} KZ+L\dfrac{dZ}{dx}+N\dfrac{d^2Z}{dx^2}+Q\dfrac{d^3Z}{dx^3}+\ldots\ldots \\ +M\dfrac{dZ}{dy}+O\dfrac{d^2Z}{dxdy}+R\dfrac{d^3Z}{dx^2dy}+\ldots\ldots \\ +P\dfrac{d^2Z}{dy^2}+S\dfrac{d^3Z}{dxdy^2}+\ldots\ldots \\ +T\dfrac{d^3Z}{dy^3}+\ldots\ldots \\ +\ldots\ldots \end{array}\right\}\frac{i}{1}+\ldots\ldots$$

d'où il suit que $\int\!\!\int V dxdy$ deviendra

$$\int\!\!\int V dxdy+\frac{i}{1}\int\!\!\int\left\{\begin{array}{r} KZ+L\dfrac{dZ}{dx}+N\dfrac{d^2Z}{dx^2}+Q\dfrac{d^3Z}{dx^3}+\ldots\ldots \\ +M\dfrac{dZ}{dy}+O\dfrac{d^2Z}{dxdy}+R\dfrac{d^3Z}{dx^2dy}+\ldots\ldots \\ +P\dfrac{d^2Z}{dy^2}+S\dfrac{d^3Z}{dxdy^2}+\ldots\ldots \\ +T\dfrac{d^3Z}{dy^3}+\ldots\ldots \\ +\ldots\ldots \end{array}\right\}dxdy+\ldots\ldots$$

afin donc que $\int\int V\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ soit *maximum* ou *minimum*, il faudra, suivant les principes connus, que le multiplicateur de i soit nul; et alors le *maximum* ou le *minimum* aura lieu, suivant que le multiplicateur de i^2 sera constamment *négatif* ou constamment *positif*. La condition commune au *maximum* et au *minimum* sera donc exprimée par l'équation

$$\int\int\left\{\begin{array}{r} KZ+L\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}x}+N\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}x^2}+Q\frac{\mathrm{d}^3Z}{\mathrm{d}x^3}+\ldots\\ +M\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}y}+O\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}+R\frac{\mathrm{d}^3Z}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}+\ldots\\ +P\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}y^2}+S\frac{\mathrm{d}^3Z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2}+\ldots\\ +T\frac{\mathrm{d}^3Z}{\mathrm{d}y^3}+\ldots\\ +\ldots \end{array}\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

ou plus simplement, en différentiant,

$$\left.\begin{array}{r} 0=KZ+L\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}x}+N\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}x^2}+Q\frac{\mathrm{d}^3Z}{\mathrm{d}x^3}+\ldots\\ +M\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}y}+O\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}+R\frac{\mathrm{d}^3Z}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}+\ldots\\ +P\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}y^2}+S\frac{\mathrm{d}^3Z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2}+\ldots\\ +T\frac{\mathrm{d}^3Z}{\mathrm{d}y^3}+\ldots\\ +\ldots \end{array}\right\}\quad\text{(XXV)}$$

45. Cela posé, en ayant successivement égard à la variabilité de x et à celle de y, la formule $u\mathrm{d}v=\mathrm{d}(uv)-v\mathrm{d}u$ donne

$$KZ = KZ\ ;$$

$$L\,\frac{dZ}{dx} = -\frac{dL}{dx}\,Z + \frac{d(LZ)}{dx}\ ,$$

$$M\,\frac{dZ}{dy} = -\frac{dM}{dy}\,Z + \frac{d(MZ)}{dy}\ ,$$

$$N\,\frac{d^2Z}{dx^2} = +\frac{d^2N}{dx^2}\,Z - \frac{d\left(\frac{dN}{dx}\,Z - N\,\frac{dZ}{dx}\right)}{dx}\ ,$$

$$O\,\frac{d^2Z}{dxdy} = +\frac{d^2O}{dxdy}\,Z - \frac{d\left(\frac{dO}{dx}\,Z\right)}{dx} - \frac{d\left(\frac{dO}{dx}\,Z\right)}{dy} + \frac{d^2(OZ)}{dxdy}\ ,$$

$$P\,\frac{d^2Z}{dy^2} = +\frac{d^2P}{dy^2}\,Z - \frac{d\left(\frac{dP}{dy}\,Z - P\,\frac{dZ}{dy}\right)}{dy}\ ,$$

$$Q\,\frac{d^3Z}{dx^3} = -\frac{d^3Q}{dx^3}\,Z + \frac{d\left(\frac{d^2Q}{dx^2}\,Z - \frac{dQ}{dx}\,\frac{dZ}{dx} + Q\,\frac{d^2Z}{dx^2}\right)}{dx}\ ,$$

$$R\,\frac{d^3Z}{dx^2dy} = -\frac{d^3R}{dx^2dy}\,Z + \frac{d\left(\frac{d^2R}{dxdy}\,Z - \frac{dR}{dy}\,\frac{dZ}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{d^2R}{dx^2}\,Z\right)}{dy}$$
$$- \frac{d^2\left(\frac{dR}{dx}\,Z - R\,\frac{dZ}{dx}\right)}{dxdy}\ ,$$

$$S\,\frac{d^3Z}{dxdy^2} = -\frac{d^3S}{dxdy^2}\,Z + \frac{d\left(\frac{d^2S}{dy^2}\,Z\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{d^2S}{dx\,dy}\,Z - \frac{dS}{dx}\,\frac{dZ}{dy}\right)}{dy}$$
$$- \frac{d^2\left(\frac{dS}{dy}\,Z - S\,\frac{dZ}{dy}\right)}{dxdy}\ ,$$

$$T\,\frac{d^3Z}{dy^3} = -\frac{d^3T}{dy^3}\,Z + \frac{d\left(\frac{d^2T}{dy^2}\,Z - \frac{dT}{dy}\,\frac{dZ}{dy} + T\,\frac{d^2Z}{dy^2}\right)}{dy}\ ,$$

. . . .

Ces développemens, que l'on peut d'ailleurs vérifier en effectuant les différentiations indiquées, étant substitués dans l'équation (XXV), elle deviendra

$$
0=\left\{\begin{array}{l}
K-\frac{dL}{dx}+\frac{d^2N}{dx^2}-\frac{d^3Q}{dx^3}+\ldots \\
\quad-\frac{dM}{dy}+\frac{d^2O}{dxdy}-\frac{d^3R}{dxdy^2}+\ldots \\
\qquad\qquad+\frac{d^2P}{dy^2}-\frac{d^3S}{dxdy^2}+\ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad-\frac{d^3T}{dy^3}+\ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+\ldots
\end{array}\right\}Z
$$

$$
+\frac{d.}{dx}\left\{\left\{\begin{array}{l}
L-\frac{dN}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\ldots \\
\quad-\frac{dO}{dy}+\frac{d^2R}{dxdy}-\ldots \\
\qquad\qquad+\frac{d^2S}{dy^2}-\ldots \\
\qquad\qquad\qquad\quad-\ldots
\end{array}\right\}Z+\left\{\begin{array}{l}
N-\frac{dQ}{dx}+\ldots \\
\quad-\frac{dR}{dy}+\ldots \\
\qquad\qquad+\ldots
\end{array}\right\}\frac{dZ}{dx}+\left\{\begin{array}{l}
Q-\ldots \\
\quad-\ldots
\end{array}\right\}\frac{d^2Z}{dx^2}+\ldots\right\}
$$

$$
+\frac{d.}{dy}\left\{\left\{\begin{array}{l}
M-\frac{dO}{dx}+\frac{d^2R}{dx^2}-\ldots \\
\quad-\frac{dP}{dy}+\frac{d^2S}{dxdy}-\ldots \\
\qquad\qquad+\frac{d^2T}{dy^2}-\ldots \\
\qquad\qquad\qquad\quad-\ldots
\end{array}\right\}Z+\left\{\begin{array}{l}
P-\frac{dS}{dx}+\ldots \\
\quad-\frac{dT}{dy}+\ldots \\
\qquad\qquad+\ldots
\end{array}\right\}\frac{dZ}{dy}+\left\{\begin{array}{l}
T-\ldots \\
\quad-\ldots
\end{array}\right\}\frac{d^2Z}{dy^2}+\ldots\right\}
$$

$$+$$

$$+\frac{d^2.}{dxdy}\left\{\left\{\begin{matrix} O-\dfrac{dR}{dx}+\ldots \\ -\dfrac{dS}{dy}+\ldots \\ +\ldots \end{matrix}\right\}Z+\left\{\begin{matrix} R-\ldots \\ -\ldots \end{matrix}\right\}\frac{dZ}{dx}+\left\{\begin{matrix} S-\ldots \\ -\ldots \end{matrix}\right\}\frac{dZ}{dy}+\ldots\right\}. \quad \text{(XXVI)}$$

46. L'équation étant mise sous cette forme, on voit qu'une partie de son second membre est une dérivée exacte par rapport à x, tout-à-fait déterminée quel que soit Z, tandis qu'au contraire, si l'on voulait considérer l'autre partie de ce second membre comme une dérivée par rapport à x, cette dérivée changerait de forme avec Z; d'où il suit que cette équation ne peut subsister qu'autant que la partie de son second membre qui est une dérivée exacte par rapport à x et celle qui ne l'est pas seront séparément nulles. Egalant donc d'abord cette dernière partie à zéro, il viendra

$$o=\left\{\begin{matrix} K-\dfrac{dL}{dx}+\dfrac{d^2N}{dx^2}-\dfrac{d^3Q}{dx^3}+\ldots \\ -\dfrac{dM}{dy}+\dfrac{d^2O}{dxdy}-\dfrac{d^3R}{dx^2dy}+\ldots \\ +\dfrac{d^2P}{dy^2}-\dfrac{d^3S}{dxdy^2}+\ldots \\ -\dfrac{d^3T}{dy^3}+\ldots \\ +\ldots \end{matrix}\right\}Z$$

$$+\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}y}\left\{\left\{\begin{array}{l} M-\frac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}-\dots \\ -\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}-\dots \\ \qquad +\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}y^2}-\dots \\ \qquad\qquad -\dots\end{array}\right\}Z+\left\{\begin{array}{l}P-\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}+\dots\\ -\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}y}+\dots \\ \qquad +\dots\end{array}\right\}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}y}+\left\{\begin{array}{l}T-\dots\\ \;-\dots\end{array}\right\}\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}y^2}+\dots\right\}. \qquad \text{(XXVII)}$$

Cette partie étant ainsi supprimée, dans l'équation (XXVI), elle deviendra, en passant aux fonctions primitives,

$$Y=\left\{\begin{array}{l} L-\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}x^2}-\dots \\ -\frac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}-\dots \\ \qquad +\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y^2}-\dots \\ \qquad\qquad -\dots\end{array}\right\}Z+\left\{\begin{array}{l}N-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}+\dots\\ -\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}y}+\dots \\ \qquad +\dots\end{array}\right\}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}x}+\left\{\begin{array}{l}Q-\dots\\ \;-\dots\end{array}\right\}\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}x^2}+\dots$$

$$+\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}x}\left\{\left\{\begin{array}{l} O-\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+\dots \\ -\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}+\dots \\ \qquad +\dots\end{array}\right\}Z+\left\{\begin{array}{l}R-\dots\\ \;-\dots\end{array}\right\}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}x}+\left\{\begin{array}{l}S-\dots\\ \;-\dots\end{array}\right\}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}y}+\dots\right\}. \qquad \text{(XXVIII)}$$

47. Or, présentement, les mêmes considérations qui nous ont conduits à partager l'équation (XXVI) dans les équations (XXVII) et (XXVIII) conduisent également à décomposer chacune de ces

dernières en deux autres ; de sorte que finalement l'équation (XXVI) donne naissance aux quatre suivantes :

$$\left.\begin{array}{r} 0=K-\dfrac{dL}{dx}+\dfrac{d^2N}{dx^2}-\dfrac{d^3Q}{dx^3}+\dots \\ -\dfrac{dM}{dy}+\dfrac{d^2O}{dx\,dy}-\dfrac{d^3R}{dx^2dy}+\dots \\ +\dfrac{d^2P}{dy^2}-\dfrac{d^3S}{dx\,dy^2}+\dots \\ -\dfrac{d^3T}{dy^3}+\dots \\ +\dots \end{array}\right\}\quad \text{(XXIX)}$$

$$X=\left\{\begin{array}{r} M-\dfrac{dO}{dx}+\dfrac{d^2R}{dx^2}-\dots \\ -\dfrac{dP}{dy}+\dfrac{d^2S}{dx\,dy}-\dots \\ +\dfrac{d^2T}{dy^2}-\dots \\ +\dots \end{array}\right\}Z+\left\{\begin{array}{r} P-\dfrac{dS}{dx}+\dots \\ -\dfrac{dT}{dy}+\dots \\ +\dots \end{array}\right\}\frac{dZ}{dy}+\left\{\begin{array}{r} T-\dots \\ -\dots \end{array}\right\}\frac{d^2Z}{dy^2}+\dots\,; \quad \text{(XXX)}$$

$$Y=\left\{\begin{array}{r} L-\dfrac{dN}{dx}+\dfrac{d^2Q}{dx^2}-\dots \\ -\dfrac{dO}{dy}+\dfrac{d^2R}{dx\,dy}-\dots \\ +\dfrac{d^2S}{dy^2}-\dots \\ -\dots \end{array}\right\}Z+\left\{\begin{array}{r} N-\dfrac{dQ}{dx}+\dots \\ -\dfrac{dR}{dy}+\dots \\ +\dots \end{array}\right\}\frac{dZ}{dx}+\left\{\begin{array}{r} Q-\dots \\ -\dots \end{array}\right\}\frac{d^2Z}{dx^2}+\dots\,; \quad \text{(XXXI)}$$

$$C=\left\{\begin{array}{l} O-\dfrac{dR}{dx}+\ldots \\ -\dfrac{dS}{dy}+\ldots \\ \qquad\quad +\ldots \end{array}\right\}Z+\left\{\begin{array}{l} R-\ldots \\ -\ldots \end{array}\right\}\frac{dZ}{dx}+\left\{\begin{array}{l} S-\ldots \\ -\ldots \end{array}\right\}\frac{dZ}{dy}+\ldots; \quad \text{(XXXII)}$$

X étant une fonction arbitraire de x sans y, Y une fonction arbitraire de y sans x et C une constante arbitraire. A la vérité, il semblerait, au premier abord, qu'au lieu de C on dût avoir une autre fonction arbitraire de x sans y; mais remarquons qu'en commençant les intégrations par rapport à y au lieu de les commencer par rapport à x, on serait conduit à conclure qu'au lieu de C on doit avoir une fonction arbitraire de y sans x; d'où l'on voit que C ne doit renfermer ni x ni y, et ne saurait être conséquemment qu'une simple constante arbitraire.

48. L'équation (XXIX) ne renfermant plus ainsi que les données primitives du problème sera conséquemment l'équation différentielle partielle de la surface cherchée. En l'intégrant, on en déduira la valeur de z exprimée en x, y, fonctions et constantes arbitraires, de laquelle on conclura ensuite celles de k, l, m, n, o, p,..... exprimées également en x, y, fonctions et constantes arbitraires. On substituera ces valeurs, ainsi que celle de z, dans les trois équations (XXX, XXXI, XXXII), qui dès-lors ne renfermeront plus que x, y, des fonctions arbitraires de ces deux variables, des constantes arbitraires, Z et ses divers coefficiens différentiels, les deux fonctions arbitraires X et Y et la constante C. Ces équations, ainsi transformées, serviront à déterminer les constantes et fonctions arbitraires introduites par l'intégration de l'équation (XXIX), de manière à satisfaire aux conditions relatives aux limites. Mais, comme des détails sur ce sujet nous entraîneraient trop loin, nous nous bornerons à donner un exemple de la recherche de

l'équation différentielle partielle, en nous proposant le problème suivant :

PROBLÈME V. Quelle est la moindre surface, entre toutes celles qui sont interceptées par une même surface prismique ou cylindrique indéfinie donnée ?

Solution. Soient pris le plan des xy perpendiculaire et l'axe des z parallèles aux arêtes ou élémens rectilignes de la surface cylindrique ou prismique donnée ; les axes des x et des y, dirigés d'ailleurs comme on le voudra dans leur plan, étant néanmoins perpendiculaires l'un à l'autre. La question se réduira à rendre *minimum* l'intégrale $\iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y\sqrt{1+l^2+m^2}$, bornée à la surface du prisme et du cylindre.

Nous aurons donc ici $V=\sqrt{1+l^2+m^2}$, d'où (40)

$$K=0\,,\quad L=\frac{l}{\sqrt{1+l^2+m^2}}\,,\quad N=0\,,\ldots\ldots,$$

$$M=\frac{m}{\sqrt{1+l^2+m^2}}\,,\quad O=0\,,\ldots\ldots;$$

$$P=0\,,\ldots\ldots;$$

$$\ldots\ldots;$$

donc

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}=\frac{(1+m^2)n-lmo}{(1+l^2+m^2)^{\frac{3}{2}}}\,,\quad \frac{\mathrm{d}^2N}{\mathrm{d}x^2}=0\,,\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}=\frac{(1+l^2)p-lmo}{(1+l^2+m^2)^{\frac{3}{2}}}\,,\quad \frac{\mathrm{d}^2O}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=0\,,\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}y^2}=0\,,\ldots\ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots;$$

En conséquence, l'équation (XXIX) deviendra

$$(1+m^2)n-2lmo+(1+l^2)p=0\ ;$$

et telle sera l'équation différentielle partielle de la surface cherchée.

Or, il est connu qu'en représentant par ρ l'un des deux rayons de courbure principaux d'une surface quelconque, en l'un quelconque de ses points, ces deux rayons sont donnés par l'équation

$$(np-o^2)\rho^2+[(1+m^2)n-2lmo+(1+l^2)p](1+l^2+m^2)^{\frac{1}{2}}\rho+(1+l^2+m^2)^2=0\ ;$$

donc l'équation ci-dessus est celle de toutes les surfaces qui, en chacun de leurs points, ont leurs deux courbures principales égales et de signes contraires. Il n'y a donc que des surfaces de ce genre qui puissent résoudre le problème que nous nous sommes proposé. Leur espèce particulière dépendra, dans chaque cas, de la nature des conditions prescrites pour les limites de l'intégrale (*).

Afin donc de pouvoir compléter la solution du problème, il faudrait, avant tout, intégrer l'équation

$$(1+m^2)n-2lmo+(1+l^2)p=0\ ;$$

malheureusement, comme l'observe Lagrange, les intégrales qu'on en a obtenues jusqu'ici ne sont pas sous une forme qui puisse se prêter aux applications.

50. Si l'on avait proposé de déterminer la surface de moindre étendue, entre toutes celles qui se terminent à la même courbe plane ou à double courbure donnée, la question serait rentrée dans la précédente, puisqu'on peut toujours imaginer une telle courbe comme tracée sur une surface ayant toutes ses arêtes ou élémens

---

(*) Voyez, sur ce sujet, une dissertation insérée à la page 143 du VII.e volume du présent recueil.

rectilignes parallèles à l'axe des z, et il en serait encore de même si la limite donnée était un polygone plan ou gauche.

51. Mais si l'on demandait la surface de moindre étendue entre toutes celles qui se terminent à d'autres surfaces données, nos méthodes actuelles ne seraient plus applicables, attendu qu'elles supposent essentiellement que x et y ont aux limites des valeurs ou une relation indépendantes de la valeur de z. Nous dirons bientôt comment on pourrait éluder cette difficulté.

52. Soient P, Q, R,..... des fonctions données de x, y, z, l, m, n,...., et a, b, c,..... des constantes données. Si l'on demande, entre toutes les valeurs de z fonction de x et y qui, entre des limites données, rendent

$$\int\!\!\int P\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a\ ,\quad \int\!\!\int Q\mathrm{d}x\mathrm{d}y=b\ ,\quad \int\!\!\int R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=c\ ,\ldots.. \qquad \text{(XXXIII)}$$

quelle est celle qui, entre les mêmes limites, rend *maximum* ou *minimum* l'intégrale

$$\int\!\!\int U\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ ,$$

où U est aussi une fonction donnée de x, y, z, l, m, n,.....; en raisonnant comme nous l'avons déjà fait (14, 15 et 37), on verra qu'en posant

$$V=U+AP+BQ+CR+\ldots\ldots;$$

tout se réduit à rendre $\int\!\!\int V\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *maximum* ou *minimum*, entre les mêmes limites, sauf ensuite à déterminer les constantes A, B, C,...... à l'aide des conditions (XXXIII). Voici un exemple d'un problème de ce genre.

53. *PROBLÈME VI. Entre toutes les surfaces qui retranchent d'un prisme ou d'un cylindre droit à base quelconque et d'une*

hauteur indéfinie une portion d'un volume donné ; quelle est celle dont l'aire, terminée à la surface latérale de ce prisme ou de ce cylindre est la moindre possible ?

Solution. Soit pris le plan de la base du prisme ou du cylindre pour celui des xy que nous supposerons rectangulaires, mais d'ailleurs de direction quelconque, et soit l'axe des z parallèle aux arêtes ou élémens rectilignes de ce même prisme ou de ce même cylindre. Soit c^3 le volume de la portion du cylindre interceptée du côté de sa base par la surface cherchée, nous devrons avoir, dans les limites déterminées par la surface laterale du prisme ou du cylindre

$$\int\int z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c^3 ,$$

de plus, entre les mêmes limites, $\int\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\sqrt{1+l^2+m^2}$ devra, comme ci-dessus, être un *minimum*. En conséquence, tout se réduira à rendre tel, toujours entre les mêmes limites, l'intégrale

$$\int\int(\sqrt{1+l^2+m^2}+Az)\mathrm{d}x\mathrm{d}y ,$$

sauf à déterminer ensuite convenablement la constante A.

Nous aurons donc ici $V=\sqrt{1+l^2+m^2}+Az$, d'où

$$K=A, \quad L=\frac{l}{\sqrt{1+l^2+m^2}}, \quad N=0, \ldots\ldots;$$

$$M=\frac{m}{\sqrt{1+l^2+m^2}}, \quad O=0, \ldots\ldots,$$

$$P=0, \ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots,$$

donc

$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{dL}{dx}=\frac{(1+m^2)n-lmo}{(1+l^2+m^2)^{\frac{3}{2}}}\,, \qquad \frac{d^2N}{dx^2}=0\,,\ \ldots\ldots\,,$$

$$\frac{dM}{dy}=\frac{(1+l^2)p-lmo}{(1+l^2+m^2)^{\frac{3}{2}}}\,, \qquad \frac{d^2O}{dxdy}=0\,,\ \ldots\ldots\,,$$

$$\frac{d^2P}{dy^2}=0\,,\ \ldots\ldots\,,$$

$$\ldots\ldots\,;$$

En conséquence, l'équation (XXIX) deviendra

$$(1+m^2)n-2lmo+(1+l^2)p=A(1+l^2+m^2)^{\frac{3}{2}}\,;$$

équation qu'on doit encore moins espérer d'intégrer d'une manière commode pour les applications que celle que nous avons obtenue ci-dessus. On s'assurera facilement qu'elle comprend comme cas particuliers la sphère ainsi que le cylindre et le cône de révolution.

54. Quelque étendus que puissent paraître les développemens que nous venons de donner, dans ce paragraphe et dans les deux précédens, ces développemens ne doivent néanmoins être considérés que comme une introduction à la véritable méthode qui va présentement nous occuper, et que comme un moyen d'en bien faire saisir l'esprit et de bien faire comprendre la nécessité des considérations qui lui servent de base.

55. On a vu que le problème de la plus courte distance entre deux courbes planes tracées sur un même plan, qui avait résisté aux méthodes du §. I, a cédé sans efforts à celles du §. II; et cela parce qu'ici, au lieu de considérer x et y comme fonction l'une de l'autre, nous les avions considérées toutes deux comme fonctions d'une troisième variable z; mais, dans ce même §. II, nous avons éprouvé un embarras pareil à celui que nous avons rencontré dans le §. I, du moment que nous avons voulu traiter

le problème de la plus courte distance entre deux surfaces courbes données ; et cet embarras s'est reproduit de nouveau, dans le présent paragraphe, pour la moindre surface entre des surfaces données. En se laissant guider par l'analogie, on est conduit à penser que cet obstacle ne se serait rencontré dans aucun de ces deux endroits si, au lieu de considérer x et y comme fonctions de z dans le premier cas, et z comme fonctions de x et y dans le second, nous les eussions considérées toutes trois, comme fonctions d'une quatrième variable, dans le premier, et comme fonctions de deux nouvelles variables dans le second, ce qui, comme l'on sait, est toujours permis ; et c'est ce que la suite montrera clairement.

56. Voilà donc notre plan tout naturellement tracé. Quel que soit le nombre tant des variables indépendantes que des fonctions de ces variables, et quel que soit en même temps l'ordre de l'intégrale à rendre *maximum* ou *minimum*, nous supposerons constamment toutes les variables, tant indépendantes que subordonnées, fonctions d'une ou de plusieurs variables nouvelles, en même nombre que les variables indépendantes primitives.

57. Nous allons appliquer successivement ces considérations aux divers cas que nous avons déjà traités ; mais comme d'ailleurs les raisonnemens théoriques demeurent exactement les mêmes qu'alors, nous nous dispenserons de les énoncer, ce qui rendra notre marche beaucoup plus rapide.

§. IV.

58. La variable y étant fonction de la seule variable indépendante x, et U étant une quantité composée d'une manière connue quelconque en x, en y et en coefficiens différentiels de cette dernière variable, proposons-nous d'assigner la valeur de y en x qui rend l'intégrale $\int U dx$ *maximum* ou *minimum*, entre des limites données ?

59. Pour résoudre cette question, nous commencerons par passer

par les moyens connus, de l'hypothèse de y fonction de x à celle de x et y fonctions d'une troisième variable t, ce qui fera prendre à notre intégrale la forme $\int V\mathrm{d}t$, où V sera fonction de x, y et des coefficiens différentiels

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\ \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\ \frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3},\ \ldots\ldots,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\ \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3},\ \ldots\ldots$$

que nous représenterons respectivement, comme nous en sommes convenus plus haut, par

$$x',\ x'',\ x''',\ \ldots\ldots,y',\ y'',y''',\ \ldots\ldots$$

Supposant ensuite que x et y deviennent respectivement

$$x+iX, \qquad y+iY,$$

où X et Y sont des fonctions arbitraires de t, et i un nombre abstrait d'une petitesse illimitée, $\int V\mathrm{d}t$ deviendra alors

$$\int V\mathrm{d}t+\frac{i}{1}\int\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)X+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)X'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)X''+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)X'''+\ldots\ldots\\+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)Y+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)Y'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)Y''+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)Y'''+\ldots\ldots\end{array}\right\}\mathrm{d}t+\ldots\ldots \quad (1)$$

En conséquence, la condition commune au *maximum* et au *minimum* sera exprimée par l'équation

$$0=\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)X+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)X'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)X''+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)X'''+\ldots\\+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)Y+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)Y'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)Y''+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)X'''+\ldots\end{array}\right\}. \quad (2)$$

66. Or, on a

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)X=\left(\frac{dV}{dx}\right)X\,,$$

$$\left(\frac{dV}{dx'}\right)X'=\left[\left(\frac{dV}{dx'}\right)X\right]'-\left(\frac{dV}{dx'}\right)'X\,,$$

$$\left(\frac{dV}{dx''}\right)X''=\left[\left(\frac{dV}{dx''}\right)X'\right]'-\left[\left(\frac{dV}{dx''}\right)'X\right]'+\left(\frac{dV}{dx''}\right)''X\,;$$

$$\left(\frac{dV}{dx'''}\right)X'''=\left[\left(\frac{dV}{dx'''}\right)X''\right]'-\left[\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'X'\right]'+\left[\left(\frac{dV}{dx'''}\right)''X\right]'-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'''X,$$

. . . . ;

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)Y=\left(\frac{dV}{dy}\right)Y\,,$$

$$\left(\frac{dV}{dy'}\right)Y'=\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)Y\right]'-\left(\frac{dV}{dy'}\right)'Y\,;$$

$$\left(\frac{dV}{dy''}\right)Y''=\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)Y'\right]'-\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)'Y\right]'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)''Y\,,$$

$$\left(\frac{dV}{dy'''}\right)Y'''=\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)Y''\right]'-\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'Y'\right]'+\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''Y\right]'-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'''Y,$$

. . . .

Ce qui donnera, en substituant,

$$(3)\qquad o=\left\{\begin{array}{l}\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)-\left(\frac{dV}{dx'}\right)'+\left(\frac{dV}{dx''}\right)''-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'''+\ldots\right]X\\ +\left[\left(\frac{dV}{dy}\right)-\left(\frac{dV}{dy'}\right)'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)''-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'''+\ldots\right]Y\end{array}\right\},$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)''-\ldots\ldots\right]X\\+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)'+\ldots\right]X'+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)-\ldots\right]X''+\ldots\\+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)''-\ldots\ldots\right]Y\\+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)'+\ldots\right]Y'+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)-\ldots\right]Y''+\ldots\end{array}\right\};$$

équation qui se décompose en ces deux-ci :

$$\mathrm{o}=\left\{\begin{array}{l}\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)''-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)'''+\ldots\right]X\\+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)''-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)'''+\ldots\right]Y\end{array}\right\} \quad (4)$$

$$Const.=\left\{\begin{array}{l}\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)''-\ldots\ldots\right]X\\+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)'+\ldots\right]X'+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'''}\right)-\ldots\right]X''+\ldots\\+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)'+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)''-\ldots\ldots\right]Y\\+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)'+\ldots\right]Y'+\left[\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'''}\right)-\ldots\right]Y''+\ldots\end{array}\right\}. \quad (5)$$

61. Cela posé, les fonctions arbitraires X et Y de t devant conserver l'indépendance la plus entière dans toute l'étendue de l'intégrale, l'équation (4) donnera séparément

$$\left.\begin{aligned}0&=\left(\frac{dV}{dx}\right)-\left(\frac{dV}{dx'}\right)'+\left(\frac{dV}{dx''}\right)''-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'''+\dots,\\0&=\left(\frac{dV}{dy}\right)-\left(\frac{dV}{dy'}\right)'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)''-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'''+\dots,\end{aligned}\right\}.\quad(6)$$

lesquelles seraient deux équations distinctes en x, y et t, si x et y étaient des fonctions déterminées de t; de sorte qu'il faudrait éliminer t entre leurs intégrales pour parvenir à la relation cherchée entre x et y; mais, comme ce n'est réellement que par une sorte de fiction que x et y sont considérés comme des fonctions de t, et que ces fonctions demeurent absolument indéterminées, il arrivera que les deux équations (6) devront admettre un facteur commun qui, égalé à zéro, sera de même forme qu'une équation primitive en x et y seulement qu'on aurait différentiée une ou plusieurs fois, en y considérant x et y comme des fonctions de t, et par conséquent en y faisant varier dx aussi bien que dy; en posant donc, dans cette équation, $t=x$, d'où $x'=1$, $x''=0$, $x'''=0$, ... on aura, sous forme différentielle, la relation cherchée entre x et y.

62. Marquons présentement des indices 0 et 1 ce que doivent devenir, aux deux limites de l'intégrale, toutes les diverses quantités dont se compose l'équation (5); cette équation devant avoir lieu à ces deux limites, comme dans tout le reste de l'intégrale, on devra avoir, à la fois,

$$Const.=\left\{\begin{aligned}&\left[\left(\frac{dV}{dx'}\right)_0-\left(\frac{dV}{dx''}\right)'_0+\left(\frac{dV}{dx'''}\right)''_0-\dots\dots\dots\dots\right]X_0\\&+\left[\left(\frac{dV}{dx''}\right)_0-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'_0+\dots\right]X'_0+\left[\left(\frac{dV}{dx'''}\right)_0-\dots\right]X''_0+\dots\\&+\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)_0-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'_0+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_0-\dots\dots\dots\dots\right]Y_0\\&+\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)_0-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_0+\dots\right]Y'_0+\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_0-\dots\right]Y''_0+\dots\end{aligned}\right\},$$

$$
Const. = \left\{ \begin{array}{l}
\left[\left(\frac{dV}{dx'}\right)_1 - \left(\frac{dV}{dx''}\right)'_1 + \left(\frac{dV}{dx'''}\right)''_1 - \ldots\ldots\ldots\ldots\right] X_1 \\
+\left[\left(\frac{dV}{dx''}\right)_1 - \left(\frac{dV}{dx'''}\right)'_1 + \ldots\right] X'_1 + \left[\left(\frac{dV}{dx'''}\right)_1 - \ldots\right] X''_1 + \ldots \\
+\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)_1 - \left(\frac{dV}{dy''}\right)'_1 + \left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_1 - \ldots\ldots\ldots\ldots\right] Y_1 \\
+\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)_1 - \left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_1 + \ldots\right] Y'_1 + \left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_1 - \ldots\right] Y''_1 + \ldots
\end{array} \right\};
$$

d'où, en retranchant, on conclura, pour l'*équation aux limites*,

$$
0 = \left\{ \begin{array}{l}
\left[\left(\frac{dV}{dx'}\right)_1 - \left(\frac{dV}{dx''}\right)'_1 + \left(\frac{dV}{dx'''}\right)''_1 - \ldots\right] X_1 + \left[\left(\frac{dV}{dx''}\right)_1 - \left(\frac{dV}{dx'''}\right)'_1 + \ldots\right] X'_1 + \left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_1 - \ldots\right] X''_1 + \ldots \\
-\left[\left(\frac{dV}{dx'}\right)_0 - \left(\frac{dV}{dx''}\right)'_0 + \left(\frac{dV}{dx'''}\right)''_0 - \ldots\right] X_0 - \left[\left(\frac{dV}{dx''}\right)_0 - \left(\frac{dV}{dx'''}\right)'_0 + \ldots\right] X'_0 - \left[\left(\frac{dV}{dx'''}\right)_0 - \ldots\right] X''_0 - \ldots \\
+\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)_1 - \left(\frac{dV}{dy''}\right)'_1 + \left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_1 - \ldots\right] Y_1 + \left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)_1 - \left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_1 + \ldots\right] Y'_1 + \left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_1 - \ldots\right] Y''_1 + \ldots \\
-\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)_0 - \left(\frac{dV}{dy''}\right)'_0 + \left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_0 - \ldots\right] Y_0 - \left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)_0 - \left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_0 + \ldots\right] Y'_0 - \left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_0 - \ldots\right] Y''_0 - \ldots
\end{array} \right\}; \quad (7)
$$

63. Cela posé, si aucune condition n'a été prescrite relativement aux limites de l'intégrale; c'est-à-dire, si les valeurs de x, x', x'',..... y, y', y'',..... peuvent être quelconques à ces limites, les fonctions X, Y, et par suite les dérivées X', Y', X'', Y'',..... devront, à ces mêmes limites, conserver toute leur indétermination et toute leur indépendance; l'équation (7) ne pourra donc subsister alors qu'autant que les multiplicateurs de

$$X_0\ ,\ X'_0\ ,\ X''_0\ ,\ldots\ldots\ldots,\ Y_0\ ,\ Y'_0\ ,\ Y''_0\ ,\ldots\ldots\ldots$$
$$X_1\ ,\ X'_1\ ,\ X''_1\ ,\ldots\ldots\ldots,\ Y_1\ ,\ Y'_1\ ,\ Y''_1\ ,\ldots\ldots\ldots$$

seront séparément nuls ; on devra donc avoir séparément

$$\left.\begin{array}{l}
o=\left(\frac{dV}{dx'}\right)_o-\left(\frac{dV}{dx''}\right)'_o+\left(\frac{dV}{dx'''}\right)''_o-\ldots\ldots,\quad o=\left(\frac{dV}{dx''}\right)_o-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'_o+\ldots\ldots,\quad o=\left(\frac{dV}{dx'''}\right)_o-\ldots\ldots,\ \ldots\ldots\\
o=\left(\frac{dV}{dx'}\right)_1-\left(\frac{dV}{dx''}\right)'_1+\left(\frac{dV}{dx'''}\right)''_1-\ldots\ldots,\quad o=\left(\frac{dV}{dx''}\right)_1-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'_1+\ldots\ldots;\quad o=\left(\frac{dV}{dx'''}\right)_1-\ldots\ldots,\ \ldots\ldots\\
o=\left(\frac{dV}{dy'}\right)_o-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'_o+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_o-\ldots\ldots,\quad o=\left(\frac{dV}{dy''}\right)_o-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_o+\ldots\ldots,\quad o=\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_o-\ldots\ldots,\ \ldots\ldots\\
o=\left(\frac{dV}{dy'}\right)_1-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'_1+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_1-\ldots\ldots,\quad o=\left(\frac{dV}{dy''}\right)_1-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_1+\ldots\ldots,\quad o=\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_1-\ldots\ldots;\ \ldots\ldots
\end{array}\right\}\ (8)$$

équations qui, en général, seront en même nombre que les constantes introduites par l'intégration, et qui serviront à en assigner les valeurs.

64. Si l'une des limites est fixe, la première par exemple ; c'est-à-dire, si les valeurs de x et y à cette limite sont données, il est clair qu'on devra avoir également $X_o=o$, $Y_o=o$, et l'on devrait avoir aussi $X'_o=o$, $Y'_o=o$, $X''_o=o$, $Y''_o=o$; .... si l'on exigeait qu'à la limite dont il s'agit x', y', x'', y'', ... eussent aussi des valeurs données, cela ferait disparaître autant de termes de l'équation (7) ; de sorte que, s'il devait en être de même à l'autre limite, cette équation se trouverait satisfaite d'elle-même ; mais alors les constantes introduites par l'intégration se détermineraient en exprimant qu'à l'une et à l'autre limites x, x', x'', ... y, y', y'', ... ont les valeurs assignées.

65. Enfin, l'une ou l'autre limite peut n'être ni absolument fixe, ni absolument arbitraire. On peut exiger, par exemple, qu'à la première limite, on ait, entre x et y et leurs coefficiens différentiels, une ou plusieurs équations de relation, telles que

$$F(x, x', x'', \ldots\ldots y, y', y'', \ldots\ldots) = L = 0 ;$$

il en résultera l'équation

$$0 = \left(\frac{dL}{dx}\right)_0 X_0 + \left(\frac{dL}{dx'}\right)_0 X'_0 + \left(\frac{dL}{dx''}\right) X''_0 + \ldots\ldots$$

$$+ \left(\frac{dL}{dy}\right)_0 Y_0 + \left(\frac{dL}{dy'}\right)_0 Y'_0 + \left(\frac{dL}{dy''}\right)_0 Y''_0 + \ldots\ldots ; \quad (9)$$

et on pourra en avoir d'analogues pour l'autre limite. On ajoutera alors à l'équation (7) les produits de ces équations par des multiplicateurs indéterminés ; égalant ensuite à zéro dans l'équation somme, les coefficiens des diverses fonctions $X, X', X'', \ldots\ldots$ $Y, Y', Y'', \ldots\ldots$ et éliminant enfin les multiplicateurs indéterminés entre les équations résultantes, il en résultera des équations qui, conjointement avec

$$L_0 = 0 \qquad (10)$$

et ses analogues, serviront à déterminer les constantes.

66. Appliquons ces procédés à un exemple.

PROBLÈME VII. Quelle est la plus courte distance à une courbe plane d'un point situé sur le plan de cette courbe ?

Solution. Soient (a, b) le point donné et $L=0$ l'équation de la courbe donnée en x et y ; la longueur de la distance cherchée sera $\int dt\sqrt{x'^2+y'^2}$; de sorte que nous aurons $V=\sqrt{x'^2+y'^2}$, et par suite

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) = 0, \quad \left(\frac{dV}{dx'}\right) = \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}, \quad \left(\frac{dV}{dx''}\right) = 0, \ldots\ldots,$$

$$\left(\frac{dV}{dx'}\right)' = \frac{y'(y'x''-x'y'')}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \left(\frac{dV}{dx''}\right)' = 0, \ldots\ldots,$$

$$\left(\frac{dV}{dx''}\right)'' = 0; \ldots\ldots ;$$

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)=0,\quad \left(\frac{dV}{dy'}\right)=\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},\quad \left(\frac{dV}{dy''}\right)=0,\ldots\ldots,$$

$$\left(\frac{dV}{dy'}\right)'=-\frac{x'(y'x''-x'y'')}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}},\ \left(\frac{dV}{dy''}\right)'=0,\ldots\ldots;$$

$$\left(\frac{dV}{dy''}\right)''=0,\ldots\ldots,$$

En conséquence, les équations (6) deviendront

$$\frac{y'(x'y''-y'x'')}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0,\qquad \frac{x'(x'y''-y'x'')}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0,$$

et seront conséquemment satisfaites l'une et l'autre en posant

$$\frac{x'y''-y'x''}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0,$$

qui sera conséquemment l'équation différentielle de la ligne cherchée.

Cette équation revient simplement à

$$x'y''-y'x''=0,\qquad \text{ou}\qquad \frac{y''}{y'}=\frac{x''}{x'};$$

ce qui donne, par une première intégration

$$\mathrm{l}y'=\mathrm{l}Mx'\qquad \text{d'où}\qquad y'=Mx',$$

et, par une nouvelle intégration,

$$y=Mx+G;$$

c'est-à-dire que la plus courte ligne que l'on puisse mener à une courbe plane d'un point situé dans le plan de cette courbe est, en général, une ligne droite. Voyons présentement quelle en doit être la direction.

D'après les précédentes déterminations, l'équation (7) devient

$$\frac{x'_1}{\sqrt{x'^2_1+y'^2_1}}X_1-\frac{x'_0}{\sqrt{x'^2_0+y'^2_0}}X_0+\frac{y'_1}{\sqrt{x'^2_1+y'^2_1}}Y_1-\frac{y'_0}{\sqrt{x'^2_0+y'^2_0}}Y_0=0\ ;$$

ou, en y mettant pour y'_0 et y'_1 leurs valeurs Mx'_0, Mx'_1,

$$\frac{1}{\sqrt{1+M^2}}(X_1-X_0)+\frac{M}{\sqrt{1+M^2}}(Y_1-Y_0)=0\ ;$$

or, comme à la première limite on doit avoir $x=a$, $y=b$, il s'ensuit qu'on doit avoir aussi (64) $X_0=0$, $Y_0=0$; de sorte que l'équation aux limites se réduit simplement à

$$\frac{1}{\sqrt{1+M^2}}X_1+\frac{M}{\sqrt{1+M^2}}Y_1=0;$$

mais, à la seconde limite, on doit avoir, entre x et y, l'équation de relation $L=0$, ce qui donnera (65)

$$\left(\frac{dL}{dx}\right)_1X_1+\left(\frac{dL}{dy}\right)_1Y_1=0;$$

Ajoutant le produit de cette équation par λ à la précédente, il viendra

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{1+M^2}}+\lambda\left(\frac{dL}{dx}\right)_1\right\}X_1+\left\{\frac{M}{\sqrt{1+M^2}}+\lambda\left(\frac{dL}{dy}\right)_1\right\}Y_1=0;$$

égalant alors à zéro les coefficiens de X_1 et Y_1, on aura les deux équations

$$\frac{1}{\sqrt{1+M^2}}+\lambda\left(\frac{dL}{dx}\right)_1=0;$$

$$\frac{M}{\sqrt{1+M^2}}+\lambda\left(\frac{dL}{dy}\right)_1=0;$$

entre lesquelles éliminant λ, il viendra finalement

$$\left(\frac{dL}{dx}\right)_1 M-\left(\frac{dL}{dy}\right)_1=0;$$

mais, d'un autre côté, en différentiant l'équation $L_1=0$, considérée comme équation en x et y, il vient

$$\left(\frac{dL}{dy}\right)_1 \frac{dy_1}{dx_1}+\left(\frac{dL}{dx}\right)_1=0,$$

qui, combinée avec la précédente, donne

$$1+M\frac{dy_1}{dx_1}=0,$$

d'un autre côté, si dans l'équation

$$y=Mx+G,$$

on substitue les coordonnées du point (a, b), on aura, en retranchant,

$$y-b=M(x-a);$$

mettant donc dans cette dernière pour M la valeur donnée par l'équation ci-dessus, il viendra, pour l'équation de la ligne cherchée,

$(y-b)$

$$(y-b)\frac{dy_1}{dx_1}+(x-a)=0,$$

ce qui nous apprend que *la plus courte distance à une courbe plane d'un point situé sur le plan de cette courbe est la normale abaissée de ce point sur cette courbe*. Il est facile d'en conclure que *le plus court chemin entre deux courbes planes, tracées sur un même plan, est la normale qui leur est commune* (*).

67. On voit donc, ainsi que nous l'avions annoncé (55), qu'en considérant x et y comme fonction d'uue troisième variable t, le cas des limites variables n'offre plus aucun embarras.

§. V.

68. Les variables x et y étant fonctions de la seule variable indépendante z, et U étant une quantité composée d'une manière connue quelconque en z, x et y et en coefficiens différentiels de ces deux dernières variables, proposons-nous d'assigner les valeurs de x et y en z qui rendent l'intégrale $\int U\mathrm{d}z$ *maximum* ou *minimum*, entre des limites données?

69. Pour résoudre cette question, nous commencerons par passer, par les moyens connus, de l'hypothèse de x et y fonctions de z à celle de x, y, z fonctions d'une quatrième variable t; ce qui fera prendre à notre intégrale la forme $\int V\mathrm{d}t$, où V sera une fonction déterminée de x, y, z et des coefficiens différentiels

(*) On doit remarquer toutefois que la condition du *maximum* étant la même que celle du *minimum*, cette normale commune n'est proprement *minimum* qu'autant qu'elle se termine aux parties convexes des deux courbes.

$$\frac{dx}{dt}\,,\ \frac{d^2x}{dt^2}\,,\ \frac{d^3x}{dt^3}\,,\ldots\ldots\ldots,\ \frac{dy}{dt}\,,\ \frac{d^2y}{dt^2}\,,\ \frac{d^3y}{dt^3}\,,\ldots\ldots\ldots;$$

$$\frac{dz}{dt}\,,\ \frac{d^2z}{dt^2}\,,\ \frac{d^3z}{dt^3}\,,\ldots\ldots\ldots\ldots$$

que nous représenterons respectivement par

$$x'\,,\ x''\,,\ x'''\,,\ldots\ldots,\ y'\,,\ y''\,,\ y'''\,,\ldots\ldots,\ z'\,,\ z''\,,\ z'''\,,\ldots\ldots,$$

Supposant ensuite que x, y, z deviennent respectivement

$$x+iX\,,\qquad y+iY\,,\qquad z+iZ\,,$$

où X, Y, Z sont des fonctions arbitraires de t, et i un nombre abstrait d'une petitesse illimitée, $\int V\mathrm{d}t$ deviendra alors

$$\int V\mathrm{d}t+\frac{i}{1}\int\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{dV}{dx}\right)X+\left(\frac{dV}{dx'}\right)X'+\left(\frac{dV}{dx''}\right)X''+\ldots\\&+\left(\frac{dV}{dy}\right)Y+\left(\frac{dV}{dy'}\right)Y'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)Y''+\ldots\ldots\\&+\left(\frac{dV}{dz}\right)Z+\left(\frac{dV}{dz'}\right)Z'+\left(\frac{dV}{dz''}\right)Z''+\ldots\ldots\end{aligned}\right\}\mathrm{d}t+\ldots\quad(11)$$

ce qui donnera, pour la condition commune au *maximum* et au *minimum*,

$$0=\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{dV}{dx}\right)X+\left(\frac{dV}{dx'}\right)X'+\left(\frac{dV}{dx''}\right)X''+\ldots\ldots\\&+\left(\frac{dV}{dy}\right)Y+\left(\frac{dV}{dy'}\right)Y'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)Y''+\ldots\ldots\\&+\left(\frac{dV}{dz}\right)Z+\left(\frac{dV}{dz'}\right)Z'+\left(\frac{dV}{dz''}\right)Z''+\ldots\ldots\end{aligned}\right\};\qquad(12)$$

70. En traitant cette équation comme nous l'avons fait (60) de l'équation (2), elle deviendra

$$
(13)\quad 0=\left\{\begin{array}{l}
\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)-\left(\frac{dV}{dx'}\right)'+\left(\frac{dV}{dx''}\right)''-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'''+\ldots\right]X \\
+\left[\left(\frac{dV}{dy}\right)-\left(\frac{dV}{dy'}\right)'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)''-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'''+\ldots\right]Y \\
+\left[\left(\frac{dV}{dz}\right)-\left(\frac{dV}{dz'}\right)'+\left(\frac{dV}{dz''}\right)''-\left(\frac{dV}{dz'''}\right)'''+\ldots\right]Z
\end{array}\right\}
$$

$$
+\left\{\begin{array}{l}
\left[\left(\frac{dV}{dx'}\right)-\left(\frac{dV}{dx''}\right)'+\left(\frac{dV}{dx'''}\right)''-\ldots\ldots\right]X \\
+\left[\left(\frac{dV}{dx''}\right)-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'+\ldots\right]X'+\left[\left(\frac{dV}{dx'''}\right)-\ldots\right]X''+\ldots \\
+\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''-\ldots\ldots\right]Y \\
+\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'+\ldots\right]Y'+\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)-\ldots\right]Y''+\ldots \\
+\left[\left(\frac{dV}{dz'}\right)-\left(\frac{dV}{dz''}\right)'+\left(\frac{dV}{dz'''}\right)''-\ldots\ldots\right]Z \\
+\left[\left(\frac{dV}{dz''}\right)-\left(\frac{dV}{dz'''}\right)'+\ldots\right]Z'+\left[\left(\frac{dV}{dz'''}\right)-\ldots\right]Z''+\ldots
\end{array}\right\}'.
$$

71. De là on conclura d'abord l'équation

$$
0=\left\{\begin{array}{l}
\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)-\left(\frac{dV}{dx'}\right)'+\left(\frac{dV}{dx''}\right)''-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'''+\ldots\right]X \\
+\left[\left(\frac{dV}{dy}\right)-\left(\frac{dV}{dy'}\right)'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)''-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'''+\ldots\right]Y \\
+\left[\left(\frac{dV}{dz}\right)-\left(\frac{dV}{dz'}\right)'+\left(\frac{dV}{dz''}\right)''-\left(\frac{dV}{dz'''}\right)'''+\ldots\right]Z
\end{array}\right\}. \quad (14)
$$

Si aucune condition particulière n'a été imposée entre les limites de l'intégrale, les fonctions X, Y, Z devront, entre ces limites, conserver toute leur indépendance; ce qui décomposera cette équation en ces trois-ci:

$$\left.\begin{aligned}
0&=\left(\frac{dV}{dx}\right)-\left(\frac{dV}{dx'}\right)'+\left(\frac{dV}{dx''}\right)''-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'''+\ldots,\\
0&=\left(\frac{dV}{dy}\right)-\left(\frac{dV}{dy'}\right)'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)''-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'''+\ldots,\\
0&=\left(\frac{dV}{dz}\right)-\left(\frac{dV}{dz'}\right)'+\left(\frac{dV}{dz''}\right)''-\left(\frac{dV}{dz'''}\right)'''+\ldots,
\end{aligned}\right\},\qquad(15)$$

desquelles on déduirait, par l'intégration, les valeurs générales de x, y, z en t, et constantes arbitraires, si x, y, z étaient réellement des fonctions déterminées de cette dernière variable; mais, comme ce n'est que par une sorte de fiction qu'elles sont considérées comme telles, il arrivera, si toutefois le problème est possible, que chacune de ces trois équations se trouvera comportée par les deux autres; que par conséquent elles n'équivaudront réellement qu'à deux, lesquelles ne seront autres que celles qu'on obtiendrait si, ayant deux équations de relation entre x, y, z, on les différentiait une ou plusieurs fois, en y considérant ces trois variables comme des fonctions de t; de sorte qu'en posant dans ces équations $t=z$ d'où $z'=1$, $z''=0$, $z'''=0$, ... on aura, sous forme différentielle, les relations cherchées de x et y à z.

72. Mais il pourrait se faire qu'au lieu de demander les valeurs de x et y en z qui rendent $\int U\mathrm{d}z$ ou $\int V\mathrm{d}t$ *maximum* ou *minimum* absolu, on demandât de ne rendre cette intégrale telle que par des valeurs satisfaisant à une équation de relation donnée; dès-lors X, Y, Z, toujours arbitraires, ne seraient plus absolument indépendans. En représentant, en effet, par $S=0$ l'équation de relation donnée, on devrait avoir

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)X+\left(\frac{dS}{dy}\right)Y+\left(\frac{dS}{dz}\right)Z=0\,. \qquad (16)$$

Ajoutant à l'équation (14) le produit de celle-ci par λ, il viendrait

$$0=\left\{\begin{array}{l}\left[\lambda\left(\frac{dS}{dx}\right)+\left(\frac{dV}{dx}\right)-\left(\frac{dV}{dx'}\right)'+\left(\frac{dV}{dx''}\right)''-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'''+\dots\right]X\\ +\left[\lambda\left(\frac{dS}{dy}\right)+\left(\frac{dV}{dy}\right)-\left(\frac{dV}{dy'}\right)'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)''-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'''+\dots\right]Y\\ +\left[\lambda\left(\frac{dS}{dz}\right)+\left(\frac{dV}{dz}\right)-\left(\frac{dV}{dz'}\right)'+\left(\frac{dV}{dz''}\right)''-\left(\frac{dV}{dz'''}\right)'''+\dots\right]Z\end{array}\right\} \quad (17)$$

égalant alors séparément à zéro les multiplicateurs de X, Y, Z; et éliminant λ entre les trois équations résultantes, on obtiendra la double équation

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\left(\frac{dV}{dx}\right)-\left(\frac{dV}{dx'}\right)'+\left(\frac{dV}{dx''}\right)''-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'''+\dots}{\left(\frac{dS}{dx}\right)}\\[2ex] =\dfrac{\left(\frac{dV}{dy}\right)-\left(\frac{dV}{dy'}\right)'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)''-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'''+\dots}{\left(\frac{dS}{dy}\right)}\\[2ex] =\dfrac{\left(\frac{dV}{dz}\right)-\left(\frac{dV}{dz'}\right)'+\left(\frac{dV}{dz''}\right)''-\left(\frac{dV}{dz'''}\right)'''+\dots}{\left(\frac{dS}{dz}\right)}\end{array}\right\}; \quad (18)$$

laquelle, dans l'hypothèse actuelle, ne devra compter que pour une seule, dont il faudra combiner l'intégrale avec $S=0$, pour obtenir les valeurs cherchées de x et y en fonction de z.

73. Quant à l'équation aux limites, elle sera évidemment ici

$$
0=\left\{\begin{array}{l}
\left[\left(\frac{dV}{dx'}\right)_1-\left(\frac{dV}{dx''}\right)'_1+\left(\frac{dV}{dx'''}\right)''_1-\dots\right]X_1+\left[\left(\frac{dV}{dx''}\right)_1-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'_1+\dots\right]X'_1+\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_1-\dots\right]X''_1+\dots\\
-\left[\left(\frac{dV}{dx'}\right)_0-\left(\frac{dV}{dx''}\right)'_0+\left(\frac{dV}{dx'''}\right)''_0-\dots\right]X_0-\left[\left(\frac{dV}{dx''}\right)_0-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'_0+\dots\right]X'_0-\left[\left(\frac{dV}{dx'''}\right)_0-\dots\right]X''_0-\dots\\
+\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)_1-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'_1+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_1-\dots\right]Y_1+\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)_1-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_1+\dots\right]Y'_1+\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_1-\dots\right]Y''_1+\dots\\
-\left[\left(\frac{dV}{dy'}\right)_0-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'_0+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_0-\dots\right]Y_0-\left[\left(\frac{dV}{dy''}\right)_0-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_0+\dots\right]Y'_0-\left[\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_0-\dots\right]Y''_0-\dots\\
+\left[\left(\frac{dV}{dz'}\right)_1-\left(\frac{dV}{dz''}\right)'_1+\left(\frac{dV}{dz'''}\right)''_1-\dots\right]Z_1+\left[\left(\frac{dV}{dz''}\right)_1-\left(\frac{dV}{dz'''}\right)'_1+\dots\right]Z'_1+\left[\left(\frac{dV}{dz'''}\right)_1-\dots\right]Z''_1+\dots\\
-\left[\left(\frac{dV}{dz'}\right)_0-\left(\frac{dV}{dz''}\right)'_0+\left(\frac{dV}{dz'''}\right)''_0-\dots\right]Z_0-\left[\left(\frac{dV}{dz''}\right)_0-\left(\frac{dV}{dz'''}\right)'_0+\dots\right]Z'_0-\left[\left(\frac{dV}{dz'''}\right)_0-\dots\right]Z''_0-\dots
\end{array}\right\};
$$

les indices 0 et 1 ayant ici la même signification que ci-dessus ; et voici l'usage que l'on fera de cette équation.

74. Si aucune condition n'a été prescrite relativement aux limites de l'intégrale ; c'est-à-dire, si à ces limites, les valeurs de x, x', x'', ... y, y', y'', ... z, z', z'', ... peuvent être quelconques, les fonctions X, Y, Z, et par suite leurs dérivées X', Y', Z', X'', Y'', Z'', ..., devront, à ces mêmes limites, conserver toute leur indétermination et toute leur indépendance ; l'équation (19) ne pourra donc subsister alors qu'autant que les multiplicateurs de

$$X_0,\ X'_0,\ X''_0,\ \dots,\ Y_0,\ Y'_0,\ Y''_0,\ \dots,\ Z_0,\ Z'_0,\ Z''_0,\ \dots$$

$$X_1,\ X'_1,\ X''_1,\ \dots,\ Y_1,\ Y'_1,\ Y''_1,\ \dots,\ Z_1,\ Z'_1,\ Z''_1,\ \dots$$

seront séparément nuls ; on devra donc avoir séparément

$$\left.\begin{array}{l}
0=\left(\frac{dV}{dx'}\right)_0-\left(\frac{dV}{dx''}\right)'_0+\left(\frac{dV}{dx'''}\right)''_0-\ldots,\quad 0=\left(\frac{dV}{dx''}\right)_0-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'_0+\ldots,\quad 0=\left(\frac{dV}{dx'''}\right)_0-\ldots,\quad\ldots\\
0=\left(\frac{dV}{dx'}\right)_1-\left(\frac{dV}{dx''}\right)'_1+\left(\frac{dV}{dx'''}\right)''_1-\ldots,\quad 0=\left(\frac{dV}{dx''}\right)_1-\left(\frac{dV}{dx'''}\right)'_1+\ldots,\quad 0=\left(\frac{dV}{dx'''}\right)_1-\ldots,\quad\ldots\\
0=\left(\frac{dV}{dy'}\right)_0-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'_0+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_0-\ldots,\quad 0=\left(\frac{dV}{dy''}\right)_0-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_0+\ldots,\quad 0=\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_0-\ldots,\quad\ldots\\
0=\left(\frac{dV}{dy'}\right)_1-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'_1+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''_1-\ldots,\quad 0=\left(\frac{dV}{dy''}\right)_1-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'_1+\ldots,\quad 0=\left(\frac{dV}{dy'''}\right)_1-\ldots,\quad\ldots\\
0=\left(\frac{dV}{dz}\right)_0-\left(\frac{dV}{dz''}\right)'_0+\left(\frac{dV}{dz'''}\right)''_0-\ldots,\quad 0=\left(\frac{dV}{dz''}\right)_0-\left(\frac{dV}{dz'''}\right)'_0+\ldots,\quad 0=\left(\frac{dV}{dz'''}\right)_0-\ldots,\quad\ldots\\
0=\left(\frac{dV}{dz'}\right)_1-\left(\frac{dV}{dz''}\right)'_1+\left(\frac{dV}{dz'''}\right)''_1-\ldots,\quad 0=\left(\frac{dV}{dz''}\right)_1-\left(\frac{dV}{dz'''}\right)'_1+\ldots,\quad 0=\left(\frac{dV}{dz''}\right)_1-\ldots,\quad\ldots
\end{array}\right\}\quad(20)$$

équations qui, en général, seront en même nombre que les constantes introduites par l'intégration, et qui serviront à en assigner les valeurs.

75. Si l'une des limites est fixe, la première par exemple; c'est-à-dire, si les valeurs de x, y, z sont données à cette limite, il est clair que l'on aura $X_0=0$, $Y_0=0$, $Z_0=0$, et l'on devrait avoir également $X'_0=0$, $Y'_0=0$, $Z'_0=0$, $X''_0=0$, $Y''_0=0$, $Z''_0=0$, ..., si l'on exigeait qu'à la limite dont il s'agit x', y', z', x'', y'', z'', ... eussent aussi des valeurs données; cela ferait disparaître autant de termes de l'équation (19); de sorte que, s'il devait en être de même à l'autre limite, cette équation se trouverait satisfaite d'elle-même; mais alors les constantes introduites par l'intégration se détermineraient en exprimant qu'à l'une et à l'autre limites x, y, z, ... x', y', z', x'', y'', z'', ... ont les valeurs assignées.

76. Enfin, les limites de l'intégrale peuvent n'être ni absolument

fixes, ni absolument indéterminées. On peut exiger, par exemple, qu'à la première limite, on ait, entre x, y, z, et leurs coefficiens différentiels, une ou plusieurs équations de relation, telles que

$$F(x, x', x'', \ldots\ldots, y, y', y'', \ldots\ldots, z, z', z'', \ldots\ldots) = L = 0 ;$$

il en résultera l'équation

$$0=\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{dL}{dx}\right)_0 X_0+\left(\frac{dL}{dx'}\right)_0 X'_0+\left(\frac{dL}{dx''}\right)_0 X''_0+\ldots\ldots \\ +\left(\frac{dL}{dy}\right)_0 Y_0+\left(\frac{dL}{dy'}\right)_0 Y'_0+\left(\frac{dL}{dy''}\right)_0 Y''_0+\ldots\ldots \\ +\left(\frac{dL}{dz}\right)_0 Z_0+\left(\frac{dL}{dz'}\right)_0 Z'_0+\left(\frac{dL}{dz''}\right)_0 Z''_0+\ldots\ldots \end{array}\right\} ; \quad (21)$$

et on pourra en avoir d'analogues pour l'autre limite. On ajoutera alors à l'équation (19) les produits de ces équations par des multiplicateurs indéterminés ; égalant ensuite à zéro dans l'équation somme, les coefficiens des diverses fonctions X, X', X'', ……. Y, Y', Y'', ….. Z, Z', Z'', ….. et éliminant enfin les multiplicateurs indéterminés entre les équations résultantes, il en résultera des équations qui, conjointement avec

$$L_0 = 0 \qquad (22)$$

et ses analogues, serviront à déterminer les constantes.

77. Appliquons présentement ces procédés à divers exemples.

PROBLÈME VIII. Quelle est la plus courte ligne entre deux points de l'espace ?

Solution. Soient (a_0, b_0, c_0), (a_1, b_1, c_1) les deux points donnés ; nous aurons ici $V = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$, et par conséquent

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)=0\,,\quad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)=\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\,,\quad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)=0\,,\ldots\ldots,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\right)'=\frac{x''(x'^2+y'^2+z'^2)-x'(x'x''+y'y''+z'z'')}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}\,,\quad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)'=0\,,\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x''}\right)''=0\,,\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)=0\,,\quad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)=\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\,;\quad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)=0\,,\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y'}\right)'=\frac{y''(x'^2+y'^2+z'^2)-y'(x'x''+y'y''+z'z'')}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}\,,\quad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)'=0\,,\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y''}\right)''=0\,,\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\right)=0\,,\quad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z'}\right)=\frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\,,\quad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z''}\right)=0\,,\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z'}\right)'=\frac{z''(x'^2+y'^2+z'^2)-z'(x'x''+y'y''+z'z'')}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}\,,\quad \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z''}\right)'=0\,,\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z''}\right)''=0\,,\ldots\ldots$$

En conséquence, l'équation (14) sera

$$\left.\begin{array}{r}[x''(x'^2+y'^2+z'^2)-x'(x'x''+y'y''+z'z'')]X\\ +[y''(x'^2+y'^2+z'^2)-y'(x'x''+y'y''+z'z'')]Y\\ +[z''(x'^2+y'^2+z'^2)-z'(x'x''+y'y''+z'z'')]Z\end{array}\right\}=0;$$

dans laquelle il faudra égaler séparément à zéro les coefficiens de X, Y, Z. Cela ne donnera que la double équation

$$\frac{x''}{x'}=\frac{y''}{y'}=\frac{z''}{z'},$$

ou, par une première intégration

$$x'=Mz', \qquad y'=Nz',$$

et ensuite

$$x=Mz+G; \qquad y=Nz+H,$$

exprimant ensuite que cette droite passe par les deux points donnés, on aura, en éliminant les constantes arbitraires, pour les équations de la ligne cherchée

$$\frac{x-a_0}{a_1-a_0}=\frac{y-b_0}{b_1-b_0}=\frac{z-c_0}{c_1-c_0}.$$

78. *PROBLÈME IX. Quelle est, dans l'espace, la plus courte ligne d'un point donné à une surface donnée ?*

Solution. Soit (a_0 , b_0 , c_0) le point donné , et soit $L=0$, l'équation en x , y , z de la surface donnée ; on aura d'abord , comme dans le précédent problème, pour les équations générales de la ligne cherchée

$$x=Mz+G\ , \qquad y=Nz+H\ .$$

En exprimant que cette droite passe par le point (a_0 , b_0 , c_0) ces équations deviendront

$$x-a_0=M(z-c_0)\ , \qquad y-b_0=N(z-c_0)\ ,$$

et tout se déduira à déterminer les constantes M et N.

A cause de la première limite fixe , l'équation aux limites sera simplement (19), en supprimant le dénominateur commun ,

$$x'_1X_1+y'_1Y_1+z'_1Z_1=0\ ;$$

ou , en mettant pour x' et y' leurs valeurs Mz' , Nz' , et divisant par z' ,

$$MX_1+NY_1+Z_1=0\ ;$$

en y ajoutant le produit de l'équation

$$\left(\frac{dL}{dx}\right)_1X_1+\left(\frac{dL}{dy}\right)_1Y_1+\left(\frac{dL}{dz}\right)_1Z_1=0;$$

par un multiplicateur indéterminé λ , et égalant ensuite séparément à zéro, dans l'équation somme, les coefficiens de X_1, Y_1; Z_1, il viendra

$$M+\lambda\left(\frac{dL}{dx}\right)_1=0,\quad N+\lambda\left(\frac{dL}{dy}\right)_1=0,\quad 1+\lambda\left(\frac{dL}{dz}\right)_1=0;$$

d'où on conclura, par l'élimination de λ,

$$M\left(\frac{dL}{dz}\right)_1=\left(\frac{dL}{dx}\right)_1;$$

$$N\left(\frac{dL}{dz}\right)_1=\left(\frac{dL}{dy}\right)_1;$$

mais, en différentiant l'équation $L_1=0$, on a

$$\left(\frac{dL}{dz}\right)_1\frac{dz_1}{dx_1}+\left(\frac{dL}{dx}\right)_1=0,$$

$$\left(\frac{dL}{dz}\right)_1\frac{dz_1}{dy_1}+\left(\frac{dL}{dy}\right)_1=0;$$

mettant donc dans ces dernières les valeurs de $\left(\frac{dL}{dx}\right)_1$ et $\left(\frac{dL}{dy}\right)_1$, tirées des précédentes, il viendra, en supprimant le facteur $\left(\frac{dL}{dz}\right)_1$,

$$M+\frac{dz_1}{dx_1}=0;\qquad N+\frac{dz_1}{dy_1}=0;$$

ce qui prouve que *la plus courte ligne d'un point à une surface courbe est la normale menée de ce point à cette surface*; d'où il est facile de conclure que *la plus courte ligne entre deux surfaces courbes est la normale qui leur est commune.*

79. **PROBLÈME X.** *Quelle est, dans l'espace, la plus courte ligne d'un point donné à une courbe donnée quelconque?*

Solution. Soit encore, comme ci-dessus, (a_0, b_0, c_0) le point donné, et soient $K=0$, $L=0$ les deux équations de la courbe dont il s'agit; nous aurons encore, comme dans le précédent problème, pour les équations générales de la ligne demandée

$$x-a_0=M(z-c_0)\,, \qquad y-b_0=N(z-c_0)\,,$$

et pour l'équation aux limites

$$MX_1+NY_1+Z_1=0\,;$$

en lui ajoutant les produits respectifs des équations

$$\left(\frac{dK}{dx}\right)_1X_1+\left(\frac{dK}{dy}\right)_1Y_1+\left(\frac{dK}{dz}\right)_1Z'_1=0\,,$$

$$\left(\frac{dL}{dx}\right)_1X_1+\left(\frac{dL}{dy}\right)_1Y_1+\left(\frac{dL}{dz}\right)_1Z_1=0\,,$$

par des multiplicateurs indéterminés λ et μ, et égalant séparant à zéro, dans l'équation somme, les coefficiens de X_1, Y_1, Z_1, il viendra

$$M+\lambda\left(\frac{dK}{dx}\right)_1+\mu\left(\frac{dL}{dx}\right)_1=0\,,$$

$$N+\lambda\left(\frac{dK}{dy}\right)_1+\mu\left(\frac{dL}{dy}\right)_1=0\,,$$

$$1+\lambda\left(\frac{dK}{dz}\right)_1+\mu\left(\frac{dL}{dz}\right)_1=0\,;$$

d'où on conclura, par l'élimination de λ et μ;

$$o=\left\{\begin{array}{l} M\left[\left(\frac{dK}{dy}\right)_1\left(\frac{dL}{dz}\right)_1-\left(\frac{dK}{dz}\right)_1\left(\frac{dL}{dy}\right)_1\right] \\ +N\left[\left(\frac{dK}{dz}\right)_1\left(\frac{dL}{dx}\right)_1-\left(\frac{dK}{dx}\right)_1\left(\frac{dL}{dz}\right)_1\right] \\ +\ \left[\left(\frac{dK}{dx}\right)_1\left(\frac{dL}{dy}\right)_1-\left(\frac{dK}{dy}\right)_1\left(\frac{dL}{dx}\right)_1\right] \end{array}\right\}.$$

mais, en différentiant le système des deux équations $K_1=o$, $L_1=o$, on a

$$\left(\frac{dK}{dx}\right)_1\frac{dx_1}{dz_1}+\left(\frac{dK}{dy}\right)_1\frac{dy_1}{dz_1}+\left(\frac{dK}{dz}\right)_1=o,$$

$$\left(\frac{dL}{dx}\right)_1\frac{dx_1}{dz_1}+\left(\frac{dL}{dy}\right)_1\frac{dy_1}{dz_1}+\left(\frac{dK}{dz}\right)_1=o;$$

d'où on conclut

$$\left[\left(\frac{dK}{dx}\right)_1\left(\frac{dL}{dy}\right)_1-\left(\frac{dK}{dy}\right)_1\left(\frac{dL}{dy}\right)_1\right]\frac{dx_1}{dz_1}$$

$$=\left[\left(\frac{dK}{dy}\right)_1\left(\frac{dL}{dz}\right)_1-\left(\frac{dK}{dz}\right)_1\left(\frac{dL}{dy}\right)_1\right],$$

$$\left[\left(\frac{dK}{dx}\right)_1\left(\frac{dL}{dy}\right)_1-\left(\frac{dK}{dy}\right)_1\left(\frac{dL}{dx}\right)_1\right]\frac{dy_1}{dz_1}$$

$$=\left[\left(\frac{dK}{dz}\right)_1\left(\frac{dL}{dx}\right)_1-\left(\frac{dK}{dx}\right)_1\left(\frac{dL}{dz}\right)_1\right],$$

au moyen de quoi l'équation ci-dessus, en M et N, deviendra, par substitution et suppression du facteur commun,

$$1+M\frac{dx_1}{dz_1}+N\frac{dy_1}{dz_1}=0,$$

ce qui prouve que *la plus courte ligne d'un point à une courbe est la normale menée de ce point à cette courbe* ; d'où il est facile de conclure que *la plus courte ligne entre deux courbes quelconques est la normale qui leur est commune.*

80. De ce résultat et de celui du précédent problème, on peut conclure également que *la plus courte ligne entre une courbe et une surface courbe quelconque est la normale commune à l'une et à l'autre.*

81. *PROBLÈME XI. Quelle est la plus courte ligne entre deux points sur une surface courbe donnée ?*

Solution. Soit $S=0$ l'équation de la surface courbe dont il s'agit ; pour donner deux points sur cette surface, il suffira de donner leurs projections sur le plan des xy ; nous supposerons que ces projections sont (a_0, b_0), (a_1, b_1).

Nous aurons encore ici, comme dans le problème VIII,

$$\left.\begin{array}{l}[x''(x'^2+y'^2+z'^2)-x'(x'x''+y'y''+z'z'')]X\\ +[y''(x'^2+y'^2+z'^2)-y'(x'x''+y'y''+z'z'')]Y\\ +[z''(x'^2+y'^2+z'^2)-z'(x'x''+y'y''+z'z'')]Z\end{array}\right\}=0;$$

mais les fonctions X, Y, Z devront être liées entre elles par la condition (16)

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)X+\left(\frac{dS}{dy}\right)Y+\left(\frac{dS}{dz}\right)Z=0.$$

Ajoutant le produit de cette équation par λ à la précédente, et égalant à zéro les coefficiens de X, Y, Z, dans l'équation résultante, il viendra, après l'élimination de λ entre les trois équations auxquelles on sera parvenu,

$$\frac{x''(x'^2+y'^2+z'^2)-x'(x'x''+y'y''+z'z'')}{\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\right)}$$

$$=\frac{y''(x'^2+y'^2+z'^2)-y'(x'x''+y'y''+z'z'')}{\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}\right)}$$

$$=\frac{z''(x'^2+y'^2+z'^2)-z'(x'x''+y'y''+z'z'')}{\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z}\right)}.$$

Telles seront donc alors les deux équations différentielles de la ligne cherchée ; et il est aisé de se convaincre, comme nous l'avons annoncé (72), que, eu égard à l'équation $S=0$, elles n'équivalent qu'à une seule ou, ce qui revient au même, qu'elles comportent cette équation. Si, en effet, on différentie l'équation $S=0$, en y considérant x, y, z comme des fonctions de t, il viendra

$$\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\right)x'+\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}\right)y'+\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z}\right)z'=0:$$

or, si l'on substitue dans cette dernière équation les valeurs de $\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\right)$, $\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}\right)$ tirées des deux premières, et qu'on supprime ensuite le facteur $\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z}\right)$, commun à tous les termes de l'équation résultante, cette équation sera tout-à-fait identique.

La double équation de la courbe cherchée donne, en réduisant,

$$\left\{\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\right)x'+\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z}\right)z'\right\}(z'x''-x'z'')-\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\right)y'(y'z''-z'y'')$$

$$=\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z}\right)y(x'y''-y'x''),$$

$$\left\{\left(\frac{dS}{dz}\right)z'+\left(\frac{dS}{dy}\right)y'\right\}(y'z''-z'y'')-\left(\frac{dS}{dy}\right)x'(z'x''-x'z'')$$

$$=\left(\frac{dS}{dz}\right)x'(x'y''-y'x'') \; ;$$

d'où l'on tire, en éliminant et réduisant de nouveau ;

$$z'x''-x'z''=\frac{y'}{z'}(x'y''-y'x'') \; , \quad y'z''-z'y''=\frac{x'}{z'}(x'y''-y'x'') \; ;$$

mais il est connu que le plan osculateur de la courbe au point (α, β, γ) a pour équation

$$(y'z''-z'y'')(x-\alpha)+(z'x''-x'z'')(y-\beta)+(x'y''-y'x'')(z-c)=0 \; ,$$

en y mettant donc ces valeurs et divisant ensuite par $x'y''-y'x''$, cette équation deviendra simplement

$$x'(x-\alpha)+y'(y-\beta)+z'(z-\gamma)=0 \; ;$$

mais si, par ce même point, on mène un plan tangent à la surface sur laquelle cette courbe est tracée, l'équation de ce plan sera, comme l'on sait,

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)(x-\alpha)+\left(\frac{dS}{dy}\right)(y-\beta)+\left(\frac{dS}{dz}\right)(z-\gamma)=0 \; ;$$

puis donc qu'on a, comme nous l'avons vu tout à l'heure,

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)x'+\left(\frac{dS}{dy}\right)y'+\left(\frac{dS}{dz}\right)z'=0 \; ,$$

il en faut conclure qu'en chaque point de la courbe, son plan osculateur est perpendiculaire au plan tangent au même point de la surface sur laquelle elle est tracée ; et que par conséquent son rayon de courbure absolu est partout normale à cette surface. C'est, au surplus, ce qu'on peut reconnaître aussi par des considérations mécaniques ; la courbe cherchée ne devant être autre que celle qu'affecterait un fil élastique que l'on tendrait entre les deux points donnés, et sur lequel la surface donnée n'exercerait aucune sorte de frottement.

82. *PROBLÈME XII. Quel est, sur une surface donnée, le plus court chemin d'un point donné à une courbe donnée ?*

Solution. Soit toujours $S=0$ l'équation de la surface donnée, et soit $R=0$ l'équation d'une autre surface qui la coupe suivant la courbe donnée. Soient enfin (a, b) les coordonnées de la projection sur le plan des xy du point donné sur la première des deux surfaces. L'équation générale de la ligne cherchée sera encore la même que ci-dessus, et il ne s'agira conséquemment que d'avoir égard aux conditions relatives aux limites.

Or, l'équation aux limites sera ici (73, 77) simplement

$$\frac{x'_1}{\sqrt{x'^2_1+y'^2_1+z'^2_1}}X_1+\frac{y'_1}{\sqrt{x'^2_1+y'^2_1+z'^2_1}}Y_1+\frac{z'_1}{\sqrt{x'^2_1+y'^2_1+z'^2_1}}Z_1=0;$$

puisque la première limite est absolument fixe. A la seconde, on devra avoir

$$R=0\ ; \qquad S=0\ ;$$

d'où (76)

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)_1X_1+\left(\frac{dR}{dy}\right)_1Y_1+\left(\frac{dR}{dz}\right)_1Z_1=0,$$

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)_1X_1+\left(\frac{dS}{dy}\right)_1Y_1+\left(\frac{dS}{dz}\right)_1Z_1=0,$$

Si, à l'équation aux limites, on ajoute les produits de ces deux-ci par λ et μ, et qu'après avoir égalé à zéro, dans l'équation somme, les coefficiens de X_1, Y_1, Z_1, on élimine λ et μ entre les équations résultantes, il viendra

$$\left.\begin{array}{l} x'_1\left[\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}y}\right)_1\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z}\right)_1-\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}z}\right)_1\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}\right)_1\right] \\ +y'_1\left[\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}z}\right)_1\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\right)_1-\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}\right)_1\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z}\right)_1\right] \\ +z'_1\left[\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}\right)_1\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}\right)_1-\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}y}\right)_1\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z'''}\right)_1\right] \end{array}\right\}=0$$

mais, si l'on différentie les deux équations $R=0$, $S=0$, en y considérant x et y comme des fonctions de z, il viendra, en passant à la limite,

$$\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}\right)_1\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}z_1}+\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}y}\right)_1\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}z_1}+\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}z}\right)_1=0,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\right)_1\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}z_1}+\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}\right)_1\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}z_1}+\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z}\right)_1=0;$$

équations d'où l'on tirera

$$\left[\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}y}\right)_1\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z}\right)_1-\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}z}\right)_1\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}\right)_1\right]$$

$$=\left[\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}\right)_1\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}\right)_1-\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}y}\right)_1\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\right)_1\right]\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}z_1},$$

$$\left[\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}z}\right)_1\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\right)_1-\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}\right)_1\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}z}\right)_1\right]$$

$$=\left[\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}\right)_1\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}\right)_1-\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}y}\right)_1\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\right)_1\right]\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}z_1};$$

mettant les valeurs données par ces deux dernières dans l'équation ci-dessus, et supprimant le facteur commun dans l'équation résultante, il viendra, en divisant par z'_1,

$$1+\frac{x'_1}{z'_1}\,\frac{dx_1}{dz_1}+\frac{y'_1}{z'_1}\,\frac{dy_1}{dz_1}=0\,;$$

ce qui montre que *la plus courte ligne tracée sur une surface courbe, d'un point donné à une courbe donnée, doit couper cette courbe orthogonalement.* Il est facile d'en conclure que *la plus courte ligne tracée sur une surface courbe entre deux courbes données doit couper l'une et l'autre courbes orthogonalement*; la courbe doit d'ailleurs, dans l'un et l'autre cas, avoir ses rayons de courbure constamment normaux à la surface sur laquelle elle est tracée (*).

83. Pour compléter la tâche que nous nous sommes imposée, nous aurions encore à traiter des intégrales de la forme $\int\!\!\int U\,dx\,dy$, où z est fonction de x et y, et que, pour suivre l'analogie, il faudrait d'abord ramener à la forme $\int\!\!\int V\,dt\,du$, dans laquelle x, y et z seraient tous trois fonctions de t et u; mais la longueur et la complication des calculs reculeraient, d'une manière notable, les bornes de ce mémoire, déjà excessivement long, et que même nous n'aurions pas entrepris, à travers une multitude de distractions sans cesse renaissantes, ou que du moins nous aurions remis à une époque plus favorable, si, dès l'abord, nous avions pu en prévoir l'étendue.

84. Que si présentement on nous demande quels avantages peuvent avoir nos notations et nos méthodes sur l'algorithme et les

(*) On ne doit pas perdre de vue, au surplus, qu'il n'y a proprement *minimum* que lorsque la courbe cherchée se termine à des parties convexes des courbes données.

procédés

procédés ordinaires du calcul des variations, et quelles vérités nouvelles nous avons ajoutées à celles qui étaient déjà découvertes, nous répondrons que tel n'a pas été notre but; que nous conseillerons même de préférer, dans la pratique, comme nous employons nous-mêmes pour notre propre usage, la méthode des variations proprement dite. Tout ce que nous nous sommes uniquement proposé, c'est de ramener la solution des problèmes qui ont donné naissance à cette méthode, à une forme qui n'exigeât que l'application des notions les plus communes, des théories les plus vulgaires; c'est en un mot de faire ensorte qu'en lisant ceci chacun demeure convaincu que les questions de *maxima* et de *minima*, dans les formules intégrales indéterminées, n'exigent pas, pour être résolues, plus de contention d'esprit que n'en demandent tant d'autres questions qui, jusqu'ici, n'ont pas passé pour difficiles; et nous n'aurons aucun regret de nos soins, si l'on trouve que nous ne sommes pas demeurés trop loin du but.

85. Nous devons, en terminant, réclamer l'indulgence du lecteur pour les négligences, nombreuses sans doute, et même pour les erreurs qui auront pu se glisser dans cet écrit. S'il en faut croire ce qu'on trouve dans un *Opuscule* de M. le D.r Prompt, imprimé en 1820, le travail de l'illustre Lagrange sur la même matière ne serait pas lui-même exempt de reproches. Les notations embarrassantes de ce grand géomètre d'une part, et de l'autre le laconisme de M. Prompt, ne nous ont pas encore permis de vérifier jusqu'à quel point ces reproches peuvent être fondés; mais c'est là un sujet sur lequel nous nous proposons de revenir dans une autre circonstance (*).

(*) Le lecteur est prié d'observer qu'à la page 6, ligne 7, en remontant, tous les dt doivent être changés en dx.