
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

MICHEL PAGANI

STEIN

QUERRET

**Solution du problème d'analyse transcendante proposé à la
page 321 du XII.e volume des Annales**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 13 (1822-1823), p. 105-114

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1822-1823__13__105_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1822-1823, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

*Solution du problème d'analyse transcendante proposé
à la page 321 du XII.^e volume des Annales ;*

Par MM. PAGANI MICHEL, ingénieur à Genève,
M....s, à Berlin,
C. G., à Grenoble,
STEIN, professeur au collège de Trèves, ancien
élève de l'école polytechnique,
Et QUERRET, chef d'institution à St-Malo.



PROBLÈME. On demande la somme finie de la suite infinie

$$1 + \frac{a \cos x}{1} + \frac{a^2 \cos 2x}{1.2} + \frac{a^3 \cos 3x}{1.2.3} + \frac{a^4 \cos 4x}{1.2.3.4} + \dots ?$$

Solution. La plupart des solutions qu'on a données de ce problème reviennent pour le fond à ce qu'il suit.

Si, dans le terme général,

$$\frac{a^n \cos nx}{1.2.3\dots n} ;$$

en met pour $\cos nx$ sa valeur connue

$$\cos nx = \frac{(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)^n + (\cos x - \sqrt{-1} \sin x)^n}{2} ,$$

en faisant, pour abrégé,

$$a(\text{Cos}.x + \sqrt{-1}\text{Sin}.x) = p, \quad a(\text{Cos}.x - \sqrt{-1}\text{Sin}.x) = q;$$

ce terme général deviendra

$$\frac{1}{n!} \cdot \frac{p^n + q^n}{1.2.3.\dots.n};$$

donc la suite proposée est la somme de deux autres dont les termes généraux sont respectivement

$$\frac{1}{n!} \cdot \frac{p^n}{1.2.3.\dots.n}; \quad \frac{1}{n!} \cdot \frac{q^n}{1.2.3.\dots.n};$$

or, ces suites sont connues et sont les développemens respectifs de

$$\frac{1}{n!} e^p, \quad \frac{1}{n!} e^q;$$

donc, en désignant par S la somme de la suite proposée, on aura

$$2S = e^p + e^q,$$

ou, en remettant pour p et q les fonctions dont ils sont les symboles,

$$2S = e^{a\text{Cos}.x + \sqrt{-1}a\text{Sin}.x} + e^{a\text{Cos}.x - \sqrt{-1}a\text{Sin}.x};$$

ou bien encore

$$2S = e^{a\text{Cos}.x} (e^{+\sqrt{-1}a\text{Sin}.x} + e^{-\sqrt{-1}a\text{Sin}.x});$$

mais on sait que

$$e^{+\sqrt{-1}a\text{Sin}.x} + e^{-\sqrt{-1}a\text{Sin}.x} = 2\text{Cos}.(a\text{Sin}.x);$$

donc enfin

$$S = e^{a \cos x} \cdot \cos(a \sin x).$$

M. Querret déduit ce résultat d'un théorème très-général. Si l'on sait, dit-il, sommer la suite

$$A_0 + A_1 a + A_2 a^2 + A_3 a^3 + A_4 a^4 + \dots \quad (1)$$

dans laquelle A_0, A_1, A_2, \dots sont supposés des coefficients numériques, et qu'on en représente la somme par $f(a)$, on aura

$$\frac{f[a(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)] + f[a(\cos x - \sqrt{-1} \sin x)]}{2}$$

pour la somme de la série

$$A_0 + A_1 a \cos x + A_2 a^2 \cos 2x + A_3 a^3 \cos 3x + \dots \quad (2)$$

et

$$\frac{f[a(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)] - f[a(\cos x - \sqrt{-1} \sin x)]}{2\sqrt{-1}}$$

pour la somme de la série

$$A_1 a \sin x + A_2 a^2 \sin 2x + A_3 a^3 \sin 3x + \dots \quad (3)$$

En effet, suivant la signification donnée à la caractéristique f , en changeant successivement a en

$$a(\cos x + \sqrt{-1} \sin x) \quad \text{et} \quad a(\cos x - \sqrt{-1} \sin x),$$

on a

$$f[a(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)]$$

pour la somme de la série

$$A_0 + A_1 a(\text{Cos}.x + \sqrt{-1}\text{Sin}.x) + A_2 a^2(\text{Cos}.2x + \sqrt{-1}\text{Sin}.2x) + \dots \quad (4)$$

et

$$f[a(\text{Cos}.x - \sqrt{-1}\text{Sin}.x)]$$

pour la somme de la série

$$A_0 + A_1 a(\text{Cos}.x - \sqrt{-1}\text{Sin}.x) + A_2 a^2(\text{Cos}.2x - \sqrt{-1}\text{Sin}.2x) + \dots \quad (5)$$

or, la série (2) est la somme des séries (4, 5) divisée par 2; et la série (3) est la différence de ces mêmes séries, divisée par $2\sqrt{-1}$, donc la somme de la série (2) doit être la somme des séries (4, 5) divisée par 2; et la série (3) doit être la différence de ces mêmes séries, divisée par $2\sqrt{-1}$.

L'application à la série proposée est facile; on a, comme l'on sait,

$$e^a = 1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^3}{1.2.3} + \frac{a^4}{1.2.3.4} + \dots;$$

donc $e^a = f(a)$; donc la somme de la série

$$1 + \frac{a\text{Cos}.x}{1} + \frac{a^2\text{Cos}.2x}{1.2} + \frac{a^3\text{Cos}.3x}{1.2.3} + \frac{a^4\text{Cos}.4x}{1.2.3.4} + \dots$$

sera, d'après ce qui précède,

$$S = \frac{e^{a(\text{Cos}.x + \sqrt{-1}\text{Sin}.x)} + e^{a(\text{Cos}.x - \sqrt{-1}\text{Sin}.x)}}{2}$$

ou

$$S = \frac{e^{a\text{Cos}.x} (e^{+\sqrt{-1}a\text{Sin}.x} + e^{-\sqrt{-1}a\text{Sin}.x})}{2};$$

c'est-à-dire

$S =$

$$S = e^{a \cos x} \cdot \text{Cos.}(a \sin x) ;$$

comme ci-dessus ; résultat qu'on peut mettre aussi sous la forme

$$\frac{e^{ae^{+x\sqrt{-1}}} + e^{ae^{-x\sqrt{-1}}}}{2}$$

M. C. G. observe qu'au surplus le résultat

$$e^{a \cos x} \cdot \text{Cos.}(a \sin x) = 1 + \frac{a \cos x}{1} + \frac{a^2 \cos 2x}{1.2} + \frac{a^3 \cos 3x}{1.2.3} + \dots$$

peut se vérifier immédiatement par le développement. On sait, en effet, que

$$e^{a \cos x} = 1 + \frac{a \cos x}{1} + \frac{a^2 \cos 2x}{1.2} + \frac{a^3 \cos 3x}{1.2.3} + \frac{a^4 \cos 4x}{1.2.3.4} + \dots ;$$

$$\text{Cos.}(a \sin x) = 1 - \frac{a^2 \sin^2 x}{1.2} + \frac{a^4 \sin^4 x}{1.2.3.4} - \frac{a^6 \sin^6 x}{1.2.3.4.5.6} + \frac{a^8 \sin^8 x}{1.2.3.4.5.6.7.8} - \dots ;$$

multipliant ces équations membre à membre, ordonnant le second membre du produit par rapport à a , et faisant attention qu'en général

$$\text{Cos.} nx = \text{Cos.}^n x - \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \text{Sin.}^2 x \text{Cos.}^{n-2} x + \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \frac{n-2}{3} \frac{n-3}{4} \text{Sin.}^4 x \text{Cos.}^{n-4} x - \dots$$

il viendra

$$e^{a \cos x} \cdot \text{Cos.}(a \sin x) = 1 + \frac{a \cos x}{1} + \frac{a^2 \cos 2x}{1.2} + \frac{a^3 \cos 3x}{1.2.3} + \frac{a^4 \cos 4x}{1.2.3.4} + \dots (*)$$

M. Stein observe que, par le même procédé, on se convaincra facilement que

$$e^{a \cos x} \cdot \sin(a \sin x) = \frac{a \sin x}{1} + \frac{a^2 \sin 2x}{1.2} + \frac{a^3 \sin 3x}{1.2.3} + \dots; \quad (\beta)$$

nous observerons, à notre tour, qu'en changeant x en $\frac{1}{2}\pi - x$, on déduit de ces formules

$$e^{a \sin x} \cdot \cos(a \cos x) = 1 + \frac{a \sin x}{1} - \frac{a^2 \cos 2x}{1.2} - \frac{a^3 \sin 3x}{1.2.3} + \dots \quad (\gamma)$$

$$e^{a \sin x} \sin(a \cos x) = \frac{a \cos x}{1} + \frac{a^2 \sin 2x}{1.2} - \frac{a^3 \cos 3x}{1.2.3} - \frac{a^4 \sin 4x}{1.2.3.4} + \dots \quad (\delta)$$

M. Querret déduit bien facilement le premier de ces trois derniers développemens de sa formule générale. En continuant, en effet, de faire $f(a) = e^a$, la série (3) deviendra

$$\frac{a \sin x}{1} + \frac{a^2 \sin 2x}{1.2} + \frac{a^3 \sin 3x}{1.2.3} + \frac{a^4 \sin 4x}{1.2.3.4} + \dots$$

dont la somme sera conséquemment

$$\frac{e^{a(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)} - e^{a(\cos x - \sqrt{-1} \sin x)}}{2\sqrt{-1}},$$

ou bien

$$\frac{e^{a \cos x} (e^{+\sqrt{-1} a \sin x} - e^{-\sqrt{-1} a \sin x})}{2\sqrt{-1}},$$

ou enfin

$$e^{a \cos x} \cdot \sin(a \sin x).$$

M. C. G. observe que la formule

$$e^{a \operatorname{Cos}.x} \cdot \operatorname{Cos.}(a \operatorname{Sin}.x) = 1 + \frac{a \operatorname{Cos}.x}{1} + \frac{a^2 \operatorname{Cos}.2x}{1.2} + \frac{a^3 \operatorname{Cos}.3x}{1.2.3} + \frac{a^4 \operatorname{Cos}.4x}{1.2.3.4} + \dots$$

a cela de très-remarquable qu'elle renferme, comme cas particuliers, les développemens, tant des exponentiels que des fonctions circulaires. Si, en effet, on y fait successivement $x=0$ et $x=\frac{1}{2}\pi$, on trouve

$$e^a = 1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^3}{1.2.3} + \frac{a^4}{1.2.3.4} + \dots,$$

$$\operatorname{Cos}.a = 1 - \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^4}{1.2.3.4} - \frac{a^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots;$$

la formule

$$e^{a \operatorname{Cos}.x} \cdot \operatorname{Sin.}(a \operatorname{Sin}.x) = \frac{a \operatorname{Sin}.x}{1} + \frac{a^2 \operatorname{Sin}.2x}{1.2} + \frac{a^3 \operatorname{Sin}.3x}{1.2.3} + \frac{a^4 \operatorname{Sin}.4x}{1.2.3.4} + \dots$$

donnera pareillement, en faisant $x=\frac{1}{2}\pi$,

$$\operatorname{Sin}.a = \frac{a}{1} - \frac{a^3}{1.2.3} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5} - \frac{a^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \dots$$

M. Stein remarque, à son tour, que, connaissant la série proposée, on en peut déduire les sommes d'autres séries également remarquables. En y changeant, par exemple, x en $2x$, il vient

$$e^{a \operatorname{Cos}.2x} \cdot \operatorname{Cos.}(a \operatorname{Sin}.2x) = 1 + \frac{a \operatorname{Cos}.2x}{1} + \frac{a^2 \operatorname{Cos}.4x}{1.2} + \frac{a^3 \operatorname{Cos}.6x}{1.2.3} + \dots;$$

or, le terme général $\frac{a^n \cdot \operatorname{Cos}.2nx}{1.2.3. \dots .n}$ de cette nouvelle série peut également être mis sous les deux formes

$$\frac{a^n}{1.2.3\dots n} - \frac{2a^n \text{Sin.}^2 nx}{1.2.3\dots n}, \quad \frac{2a^n \text{Cos.}^2 nx}{1.2.3\dots n} - \frac{a^n}{1.2.3\dots n};$$

il viendra donc, en faisant successivement les deux substitutions,

$$e^{a \text{Cos.} 2x} \cdot \text{Cos.}(a \text{Sin.} 2x) = \left(1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^3}{1.2.3} + \dots \right) \\ - 2 \left(\frac{a \text{Sin.}^2 x}{1} + \frac{a^2 \text{Sin.}^2 2x}{1.2} + \frac{a^3 \text{Sin.}^2 3x}{1.2.3} + \dots \right)$$

$$e^{a \text{Cos.} 2x} \cdot \text{Cos.}(a \text{Sin.} 2x) = 2 \left(\frac{a \text{Cos.}^2 x}{1} + \frac{a^2 \text{Cos.}^2 2x}{1.2} + \frac{a^3 \text{Cos.}^2 3x}{1.2.3} + \dots \right) \\ + 2 \left(1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^3}{1.2.3} + \dots \right);$$

d'où on tirera, en transposant et remplaçant l'une des séries par sa valeur e^a ,

$$\frac{a \text{Sin.}^2 x}{1} + \frac{a^2 \text{Sin.}^2 2x}{1.2} + \frac{a^3 \text{Sin.}^2 3x}{1.2.3} + \dots = \frac{e^a - e^{a \text{Cos.} 2x} \cdot \text{Cos.}(a \text{Sin.} 2x)}{2}, \\ 1 + \frac{a \text{Cos.}^2 x}{1} + \frac{a^2 \text{Cos.}^2 2x}{1.2} + \frac{a^3 \text{Cos.}^2 3x}{1.2.3} + \dots = \frac{e^a + e^{a \text{Cos.} 2x} \cdot \text{Cos.}(a \text{Sin.} 2x)}{2},$$

M. Stein remarque encore que, par des moyens semblables à ceux qui ont été appliqués à la série proposée, on parviendrait aussi à sommer la série

$$\frac{a \text{Sin.} x}{1} + \frac{a^2 \text{Sin.} 2x}{2} + \frac{a^3 \text{Sin.} 3x}{3} + \frac{a^4 \text{Sin.} 4x}{4} + \dots,$$

dont le terme général est $\frac{a^n \text{Sin}.nx}{n}$. Le résultat serait compliqué d'imaginaires qu'on ne pourrait faire disparaître que par des moyens peu directs; et on trouverait finalement pour la somme cherchée

$$\text{Arc.} \left(\text{Tang.} = \frac{a \text{Sin}.x}{1-a \text{Cos}.x} \right);$$

aussi la série proposée n'est-elle autre chose que la valeur que l'on tire pour y de l'équation

$$\text{Tang.} y = \frac{a \text{Sin}.x}{1-a \text{Cos}.x},$$

très-usitée en géodesie.

M. Querret tire de sa méthode générale plusieurs autres sommations. Posant, par exemple, $f(a) = \text{Log.}(1+a)$ ou

$$f(a) = \frac{a}{1} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \frac{a^5}{5} - \dots$$

il en conclut que la somme de la série

$$\frac{a \text{Cos}.x}{1} - \frac{a^2 \text{Cos}.2x}{2} + \frac{a^3 \text{Cos}.3x}{3} - \frac{a^4 \text{Cos}.4x}{4} + \dots$$

doit être

$$\frac{\text{Log.}[1+a(\text{Cos}.x+\sqrt{-1}\text{Sin}.x)] + \text{Log.}[1+a(\text{Cos}.x-\sqrt{-1}\text{Sin}.x)]}{2},$$

ou encore

$$\frac{\text{Log.}(1+2a \text{Cos}.x+a^2)}{2};$$

de sorte qu'on a

$$\text{Log.}(1+2a\text{Cos.}x+a^2)=2\left(\frac{a\text{Cos.}x}{1}-\frac{a^2\text{Cos.}2x}{2}+\frac{a^3\text{Cos.}3x}{3}-\dots\right).$$

En faisant successivement $a=+1$ et $a=-1$, il vient

$$\text{Log.}(1+\text{Cos.}x)=-\text{Log.}2+2\left(\frac{\text{Cos.}x}{1}-\frac{\text{Cos.}2x}{2}+\frac{\text{Cos.}3x}{3}-\frac{\text{Cos.}4x}{4}+\dots\right),$$

$$\text{Log.}(1-\text{Cos.}x)=-\text{Log.}2-2\left(\frac{\text{Cos.}x}{1}+\frac{\text{Cos.}2x}{2}+\frac{\text{Cos.}3x}{3}+\frac{\text{Cos.}4x}{4}+\dots\right);$$

développemens donnés par Euler (Voyez son *Calcul intégral*, tom. I, à la fin du chap. VI); il en déduit ensuite

$$\text{Log.}\text{Cos.}\frac{x}{2}=-\text{Log.}2+\text{Cos.}x-\frac{1}{2}\text{Cos.}2x+\frac{1}{3}\text{Cos.}3x-\frac{1}{4}\text{Cos.}4x+\dots$$

$$\text{Log.}\text{Sin.}\frac{x}{2}=-\text{Log.}2-\text{Cos.}x-\frac{1}{2}\text{Cos.}2x-\frac{1}{3}\text{Cos.}3x-\frac{1}{4}\text{Cos.}4x-\dots$$

$$\text{Log.}\text{Tang.}\frac{x}{2}=-2(\text{Cos.}x+\frac{1}{3}\text{Cos.}3x+\frac{1}{5}\text{Cos.}5x+\frac{1}{7}\text{Cos.}7x+\dots).$$
