ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

CHARLES BABBAGE
GERGONNE

Analise algébrique. Des équations fonctionnelles

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 12 (1821-1822), p. 73-103
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1821-1822__12__73_0>

ANALISE ALGÉBRIQUE.

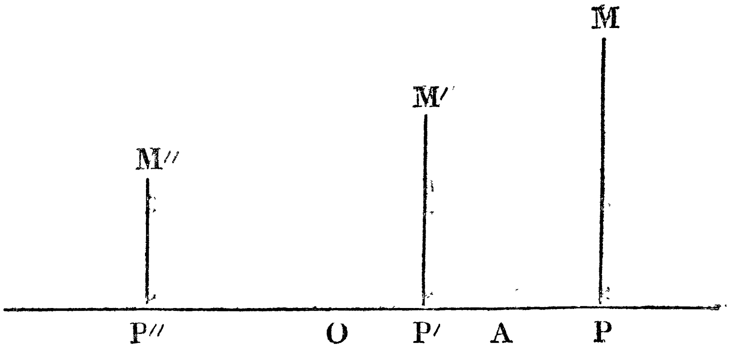
Des équations fonctionnelles ;

Par M. Charles Babbage, de la société royale, secrétaire de la société astronomique de Londres (*).

(*Extrait*)

Par M. Gergonne.

Soit proposé de déterminer une courbe MM′M″ par la propriété que voici :



(*) L'intéressant mémoire dont on va donner une idée succincte se trouve imprimé à la suite d'un *Recueil d'exemples de l'application du calcul aux différences finies* ; par M. J. F. W. Herschel (Cambridge, 1820). Il porte la date du 20 octobre 1820.

O, A sont deux points fixes sur une droite indéfinie ; de l'un quelconque M des points de la courbe on a abaissé une perpendiculaire MP sur cette droite. On a ensuite porté, sur la même droite, à partir du point O, savoir ; à droite, une longueur OP′ quatrième proportionnelle à OP, OA, AP, et à gauche une longueur OP″ troisième proportionnelle à AP et OA. On a élevé ensuite à la droite indéfinie en P′, P″ des perpendiculaires terminées à la courbe en M′, M″ ; et on demande que, quel que soit d'ailleurs le point M de la courbe, on ait toujours le rectangle construit sur OA et M′P′, moins le rectangle construit sur OP et M″P″, égal au rectangle construit sur OA et OP.

En prenant notre droite indéfinie pour axe des x, le point O pour origine, les x positives à droite de ce point, et représentant par a la longueur constante OA, nous aurons $\mathrm{OP}=x$, $\mathrm{AP}=x-a$, d'où nous conclurons

$$\mathrm{OP}'=\frac{a(x-a)}{x}\ ,\quad \mathrm{OP}''=-\frac{a^2}{x-a}\ ;$$

Si donc nous prenons généralement pour équation de la courbe cherchée

$$y=\psi(x)\ ,$$

nous aurons

$$\mathrm{MP}=\psi(x)\ ,\quad \mathrm{M'P'}=\psi\left[\frac{a(x-a)}{x}\right]\ ,\quad \mathrm{M''P''}=\psi\left[-\frac{a^2}{x-a}\right]\ ;$$

mais, par la condition du problème, on doit avoir

$$\mathrm{OA.M'P'}-\mathrm{OP.M''P''}=\mathrm{OA.OP}\ ;$$

donc

$$a\psi\left[\frac{a(x-a)}{x}\right]-x\psi\left[-\frac{a^2}{x-a}\right]=ax\ .$$

Voilà une de ces équations que M. Babbage appelle *équations* *fonctionnelles ;* et on voit qu'il ne s'agit pas de la résoudre, dans le sens qu'on attache vulgairement à ce mot ; c'est-à-dire qu'il ne s'agit pas d'en tirer la valeur de x ; ce qui serait d'ailleurs impossible ; mais qu'il s'agit seulement d'en faire usage pour découvrir la forme de la fonction désignée par ψ. On conçoit en effet que cette forme une fois connue, il ne s'agira plus que de faire une semblable fonction de x et de la substituer dans l'équation $y=\psi(x)$, pour obtenir l'équation de la courbe cherchée.

On conçoit qu'au lieu d'une seule équation devant déterminer la forme de la fonction ψ, on pourrait demander de déterminer la forme de deux fonctions ψ et φ, ou même d'un plus grand nombre, à l'aide de deux ou d'un plus grand nombre d'équations qui les contiendraient. On conçoit aussi qu'au lieu d'affecter une seule variable x, ces fonctions pourraient en affecter un plus grand nombre. On conçoit enfin que les équations, au lieu d'être algébriques, pourraient être différentielles ou aux différences, ou même d'une forme transcendante quelconque. N'ayant d'autre dessein ici que de donner une idée très-sommaire de ces sortes de recherches, nous nous renfermerons strictement dans ce qu'elles offrent de plus élémentaire.

Reprenons notre équation

$$a\psi\left[\frac{a(x-a)}{x}\right]-x\psi\left[-\frac{a^2}{x-a}\right]=ax\ ;$$

en y changeant x en $\dfrac{a(x-a)}{x}$, réduisant et chassant les dénominateurs, elle devient

$$x\psi\left[-\frac{a^2}{x-a}\right]-(x-a)\psi(x)=a(x-a)\ ;$$

faisant encore dans celle-ci le même changement de x en $\dfrac{a(x-a)}{x}$, elle deviendra, après les réductions analogues,

$$a\psi\left[\frac{a(x-a)}{x}\right]+(x-a)\psi(x)=-a^2 ;$$

éliminant donc, entre ces trois équations, les deux fonctions

$$\psi\left[\frac{a(x-a)}{x}\right], \quad \psi\left[-\frac{a^2}{x-a}\right],$$

comme deux inconnues, l'équation résultante sera

$$(x-a)\psi x=-ax ;$$

d'où

$$\psi x=-\frac{ax}{x-a} ;$$

puis donc que nous avons pris pour l'équation de la courbe cherchée $y=\psi x$; cette équation sera

$$y=-\frac{ax}{x-a} ;$$

ainsi la courbe cherchée est une hyperbole qui passe par l'origine et dont les asymptotes, respectivement parallèles aux axes des coordonnées, coupent l'une l'axe des x à une distance a à droite de l'origine, et l'autre l'axe des y à la même distance a au-dessous de cette origine.

Le succès des transformations qui nous ont conduit à la solution du problème que nous nous étions proposé tient, comme on le voit, à ce que la fonction $\frac{a(x-a)}{x}$ se change en $-\frac{a^2}{x-a}$, lorsqu'on y change x en $\frac{a(x-a)}{x}$, et à ce que la dernière se réduit simplement à x, lorsqu'on y opère la même transformation ; c'est-à-dire, en d'autres termes, que, si l'on pose,

$$\varphi(x)=\frac{a(x-a)}{x}\ ,$$

on aura

$$\varphi[\varphi(x)]=-\frac{a^2}{x-a}\ ;$$

et

$$\varphi\{\varphi[\varphi(x)]\}=x\ ;$$

ces sortes de fonctions sont de la nature de celles que M. Babbage appelle *fonctions périodiques* ; et, pour suivre à peu près la marche qu'il a lui-même tracée, nous nous occuperons d'abord des fonctions de cette nature ; nous en ferons ensuite l'application à la résolution des équations fonctionnelles ; et nous terminerons enfin en donnant une idée de la manière d'étendre la méthode aux cas pour lesquels elle semble être en défaut.

§. I.

Des fonctions périodiques.

Tout signe de fonction, quel qu'il soit, est en même temps signe d'opération algébrique, simple ou composée, et l'indication de ces opérations est aussi la définition de la fonction dont il s'agit. Lorsque, par exemple, on pose

$$\varphi(t)=a+bt\ ;$$

on définit la fonction désignée par t, puisqu'on explique que, pour obtenir une telle fonction d'une quantité, quelle qu'elle soit, il faut multiplier cette quantité par la constante b et ajouter le produit à la constante a ; de sorte que, d'après cela, on aura, par exemple,

$$\varphi\left(\frac{a+x}{b-x}\right)=a+b\left(\frac{a+x}{b-x}\right)=\frac{2ab-(a-b)x}{b-x}.$$

On peut appliquer à une même expression algébrique deux ou un plus grand nombre de signes de fonctions ; et si ces fonctions sont définies, on pourra toujours exécuter les opérations qu'elles indiqueront. Soient, par exemple, deux fonctions φ et ψ définies ainsi qu'il suit :

$$\varphi(t)=\frac{a}{a-t}, \quad \psi(t)=\frac{t+b}{b};$$

l'expression

$$\psi\varphi\left(\frac{x+a}{x-b}\right)$$

signifiera qu'il faut d'abord diviser la constante a par cette même constante diminuée de la fraction $\frac{x+a}{x-b}$, ce qui donnera un premier résultat ; et qu'il faudra ensuite diviser par b ce résultat augmenté de cette même quantité b ; on aura donc ainsi

$$\psi\varphi\left(\frac{x+a}{x-b}\right)=\psi\left\{\frac{a}{a-\left(\frac{x+a}{x-b}\right)}\right\}=\psi\left\{\frac{a(x-b)}{(a-1)x-a(b+1)}\right\},$$

et par suite

$$\psi\varphi\left(\frac{x+a}{x-b}\right)=\frac{\frac{a(x-b)}{(a-1)x-a(b+1)}+b}{b}=\frac{(ab+a-b)x-ab(b+2)}{b[(a-1)x-a(b+1)]}.$$

On trouverait, à l'inverse,

$$\varphi\psi\left(\frac{x+a}{x-b}\right)=\varphi\left\{\frac{\frac{x+a}{x-b}+b}{b}\right\}=\varphi\left\{\frac{(b+1)x-(b^2-a)}{b(x-b)}\right\};$$

et par suite

$$\varphi\psi\left(\frac{x+a}{x-b}\right)=\frac{a}{a-\frac{(b+1)x-(b^2-a)}{b(x-b)}}=\frac{ab(x-b)}{(ab-b-1)x-(a^2b-b^2+a)}\ .$$

Il n'en faut pas davantage pour montrer combien, en général, il importe ici d'avoir égard à l'ordre suivant lequel les signes et les opérations se succèdent, et combien il est nécessaire d'opérer toujours du signe le plus voisin de la quantité dont il s'agit à celui qui le précéde immédiatement.

Cette attention cesse au surplus d'être nécessaire, dès qu'il s'agit d'un même signe de fonction plusieurs fois répété ; on peut même alors n'écrire le signe qu'une seule fois, en l'affectant d'un exposant égal au nombre de fois qu'il devrait être écrit consécutivement. Si, par exemple, on donne pour définition du signe φ

$$\varphi(t)=a^t\ ,$$

on aura

$$\varphi(x)=a^x\ ,$$

$$\varphi^2(x)=\varphi[\varphi(x)]=\varphi(a^x)=a^{a^x}\ ;$$

$$\varphi^3(x)=\varphi[\varphi^2(x)]=\varphi(a^{a^x})=a^{a^{a^x}}\ ,$$

et ainsi de suite. Si l'on donne, pour définition du signe ψ,

$$\psi(t)=\frac{2}{2-t}\ ,$$

on trouvera

$$\psi\left(\frac{2-x}{1-x}\right)=\frac{2}{2-\frac{2-x}{1-x}}=-\frac{2(1-x)}{x}\ ,$$

$$\psi^2\left(\frac{2-x}{1-x}\right)=\psi\left(-\frac{2(1-x)}{x}\right)=\frac{2}{2+\frac{2(1-x)}{x}}=x,$$

$$\psi^3\left(\frac{2-x}{1-x}\right)=\psi(x)=\frac{2}{2-x},$$

$$\psi^4\left(\frac{2-x}{1-x}\right)=\psi\left(\frac{2}{2-x}\right)=\frac{2}{2-\frac{2}{2-x}}=\frac{2-x}{1-x}.$$

Il ne faut pas aller plus loin pour apercevoir que la fonction est périodique, et qu'on doit avoir conséquemment $\psi^5(t)=\psi(t)$, $\psi^6(t)=\psi^2(t)$; et ainsi de suite, et en général $\psi^{4n+r}(t)=\psi^r(t)$. Mais puisque les résultats du premier exemple sont a^x, a^{a^x}, $a^{a^{a^x}}$,...... qui, quelque loin qu'on les pousse, ne peuvent jamais conduire à x, il faut en conclure que la périodicité est un caractère particulier à certaines fonctions; ou, ce qui revient au même, que les fonctions ne sont pas toutes périodiques.

Nous disons donc qu'une *fonction* ψ est *périodique* lorsqu'elle est de telle forme que l'on a $\psi^n(t)=t$, n étant un nombre entier positif; et si, de plus, aucune des fonctions $\psi(t)$, $\psi^2(t)$, $\psi^3(t)$ d'ordres inférieurs à n n'est égale à t, nous dirons que la fonction ψ est périodique du n.me ordre.

Puis donc que, généralement parlant, les fonctions ne sont pas toutes périodiques, on peut se proposer de trouver, pour chaque ordre, les fonctions qui sont périodiques. Nous introduirons à la solution générale de ce problème par la considération de quelques cas particuliers.

I. Une fonction périodique du premier ordre serait celle qui satisferait à la condition $\psi x=x$; cette fonction serait donc la quantité sous le signe fonctionnel elle-même.

II. Une fonction périodique du second ordre est celle qui satisfait

tisfait à la condition $\psi^2x=x$, de laquelle il s'agit de déduire la forme générale de la fonction ψ. M. Babbage y parvient par diverses sortes de considérations.

1.° Il remarque, en premier lieu, que l'équation $\psi^2x=x$ donne $\psi x=\psi^{-1}x$, ψ^{-1} désignant la fonction inverse de ψ; d'où il suit qu'en posant $\psi x=y$, on aura $y=\psi^{-1}x$ ou $x=\psi y$; c'est-à-dire que la valeur de x en y doit être absolument de même forme que la valeur de y en x; ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que x et y, c'est-à-dire x et ψx seront liés par une équation symétrique par rapport à ces quantités; et ce qui aura toujours lieu dans ce cas; c'est-à-dire que ψx devra être donnée en x par une équation quelconque de la forme

$$F[\overline{x}\,,\,\overline{\psi(x)}]=0\,.$$

M. Babbage emploie les barres au-dessus de x et $\psi(x)$, pour avertir que la fonction désignée par F doit être symétrique par rapport à ces deux quantités. Ainsi, pour ne s'arrêter qu'aux cas les plus simples, on peut prendre

$$x+\psi(x)=a\,, \qquad \text{ou} \qquad x.\psi(x)=a^2\,;$$

il en résultera

$$\psi(x)=a-x\,, \qquad \text{ou} \qquad \psi(x)=\frac{a^2}{x}\,;$$

on aura en effet, dans le premier cas,

$$\psi^2(x)=\psi(x-a)=a-(a-x)=x\,;$$

et dans le second

$$\psi^2(x)=\psi\left(\frac{a^2}{x}\right)=\frac{a^2}{\frac{a^2}{x}}=x\,.$$

2.° Mais le procédé que voici est beaucoup plus général ; et peut d'ailleurs s'étendre à la recherche d'une fonction périodique d'un ordre quelconque. Soit désignée par f une fonction particulière qui résout le problème, de telle sorte qu'on ait $f^2(t)=t$. Soit en outre φ une fonction tout-à-fait arbitraire ; et soit φ^{-1} son inverse, de telle sorte qu'on ait $\varphi^{-1}\varphi(v)=\varphi\varphi^{-1}(v)=v$; la fonction périodique cherchée du second ordre sera

$$\psi(x)=\varphi^{-1}f\varphi(x) \ .$$

On aura, en effet,

$$\psi^2(x)=\psi[\varphi^{-1}f\varphi(x)]=\varphi^{-1}f\varphi[\varphi^{-1}f\varphi(x)]=\varphi^{-1}f\varphi\varphi^{-1}[f\varphi(x)] \ ;$$

mais

$$\varphi\varphi^{-1}[f\varphi(x)]=f\varphi(x) \ ;$$

donc

$$\psi^2(x)=\varphi^{-1}ff\varphi(x)=\varphi^{-1}f^2\varphi(x) \ ;$$

mais

$$f^2\varphi(x)=\varphi(x) \ ;$$

donc finalement

$$\psi^2(x)=\varphi^{-1}\varphi(x)=x \ ,$$

ainsi qu'il était demandé.

Soient pris, par exemple, $f(x)=a^m-x$, que nous savons être une solution particulière ; soit pris de plus $\varphi(x)=x^m$, d'où $\varphi^{-1}x=\sqrt[m]{x}$, nous aurons ainsi

$$\psi(x)=\varphi^{-1}f\varphi(x)=\sqrt[m]{a^m-x^m} \ ;$$

et, en effet, on aura

$$\psi^2(x)=\psi[\sqrt[m]{a^m-x^m}]=\sqrt[m]{a^m-(a^m-x^m)}=\sqrt[m]{x^m}=x \ .$$

Pour avoir une forme un peu générale de la fonction f, posons

$$f(x)=\frac{a+bx}{c+dx}\;;$$

nous aurons

$$f^2(x)=\frac{a+b\,\dfrac{a+bx}{c+dx}}{c+d\,\dfrac{a+bx}{c+dx}}=\frac{a(c+dx)+b(a+bx)}{c(c+dx)+d(a+bx)}=\frac{a(b+c)+(ad+b^2)x}{(ad+c^2)+d(b+c)x}\;;$$

afin donc d'avoir $f^2(x)=x$; il faudra poser

$$a(b+c)=0\;,$$

$$d(b+c)=0\;;$$

$$ad+c^2=ad+b^2 \quad \text{ou} \quad c^2=b^2\;;$$

on satisfait à la fois à ces trois conditions, en posant $b=-c$ et laissant a, c, d arbitraires; de sorte qu'on a

$$f(x)=\frac{a-cx}{c+dx}\;;$$

il en résulte en effet

$$f^2(x)=\frac{a-c\,\dfrac{a-cx}{c+dx}}{c+d\,\dfrac{a-cx}{c+dx}}=\frac{a(c+dx)-c(a-cx)}{c(c+dx)+d(a-cx)}=\frac{(ad+c^2)x}{ad+c^2}=x.$$

Pour donner aussi un peu de généralité à la fonction φ, posons

$$\varphi(x)=\frac{e+fx}{g+hx}\;;$$

en observant que, si l'on pose

$$\frac{e+fx}{g+hx}=y\,,$$

il en résulte

$$x=-\frac{e-gy}{f-hy}\;;$$

nous en conclurons

$$\varphi^{-1}(x)=-\frac{e-gx}{f-hx}\;;$$

ce qui donne en effet,

$$\varphi^{-1}\varphi(x)=-\frac{e-g\dfrac{e+fx}{g+hx}}{f-h\dfrac{e+fx}{g+hx}}=-\frac{e(g+hx)-g(e+fx)}{f(g+hx)-h(e+fx)}=\frac{(fg-eh)x}{fg-eh}=x.$$

Mettant donc toutes ces valeurs dans la formule

$$\psi(x)=\varphi^{-1}\mathrm{f}\varphi(x)\;,$$

il viendra

$$\psi(x)=\varphi^{-1}\mathrm{f}\left(\frac{e+fx}{g+hx}\right)=\varphi^{-1}\left\{\frac{a-c\dfrac{e+fx}{g+hx}}{c+d\dfrac{e+fx}{g+hx}}\right\}=\varphi^{-1}\left\{\frac{a(g+hx)-c(e+fx)}{c(g+hx)+d(e+fx)}\right\}\;;$$

c'est-à-dire,

$$\psi(x)=\varphi^{-1}\left\{\frac{(ag-ce)+(ah-cf)x}{(cg+de)+(ch+df)x}\right\}=-\frac{e-g\dfrac{(ag-ce)+(ah-cf)x}{(cg+de)+(ch+df)x}}{f-h\dfrac{(ag-ce)+(ah-cf)x}{(cg+de)+(ch+df)x}}\;;$$

ce qui donne, toutes réductions faites,

$$\psi(x)=-\frac{(2ceg+de^2-ag^2)+(ceh+def-agh+cfg)x}{(ceh+def-agh+cfg)+(2cfh+df^2-ah^2)x}\;;$$

formule dans laquelle les sept quantités a, c, d, e f, g, h sont tout-à-fait arbitraires.

On voit, par ce seul exemple, comment on peut façonner, pour ainsi dire, à volonté ces sortes de fonctions. Entre autres cas particuliers donnés par M. Babbage, nous nous bornerons à citer les suivans :

$$\psi(x)=\frac{x}{\sqrt[m]{x^m-a^m}}\,, \qquad \psi x=\text{Log.}(a-e^x)\,;$$

$$\psi(x)=\text{Arc}\{\text{Tang.}=(a-\text{Tang.}x)\}\,, \qquad \psi(x)=x-\text{Log.}(e^x-1)\,;$$

III. Une fonction périodique du troisième ordre est celle qui satisfait à la condition $\psi^3(x)=x$. En suivant un procédé analogue à celui qui vient de nous conduire aux fonctions périodiques du second ordre, si f désigne une fonction d'une forme particulière quelconque satisfaisant à la condition $\mathrm{f}^3(x)=x$ et que φ et φ^{-1} soient toujours deux fonctions tout-à-fait arbitraires, telles que $\varphi^{-1}\varphi(x)=\varphi\varphi^{-1}(x)=x$, c'est-à-dire deux fonctions inverses l'une de l'autre, on aura encore ici

$$\psi(x)=\varphi^{-1}\mathrm{f}\varphi(x)\,.$$

Il en résultera, en effet,

$$\psi^2(x)=\psi[\varphi^{-1}\mathrm{f}\varphi(x)]=\varphi^{-1}\mathrm{f}\varphi[\varphi^{-1}\mathrm{f}\varphi(x)]\,;$$

ou

$$\psi^2(x)=\varphi^{-1}\mathrm{f}^2\varphi(x)\,,$$

et par suite

$$\psi^3(x)=\psi[\varphi^{-1}\mathrm{f}^2\varphi(x)]=\varphi^{-1}\mathrm{f}\varphi[\varphi^{-1}\mathrm{f}^2\varphi(x)]\,,$$

ou

$$\psi^3(x)=\varphi^{-1}\mathrm{f}^3\varphi(x)=\varphi^{-1}\varphi(x)=x\,.$$

Tout se réduit donc à savoir trouver une seule fonction f telle que $\mathrm{f}^3(x)=x$; et, à l'aide de celle-là et de la fonction arbitraire φ, nous pourrons trouver une infinité de valeurs de la fonction ψ. Or, on peut procéder dans la recherche de cette fonction f de la même manière que nous l'avons fait pour le second ordre ; posant en effet,

$$f(x)=\frac{a+bx}{c+dx},$$

nous aurons successivement

$$f^2(x)=\frac{a+b\,\dfrac{a+bx}{c+dx}}{c+d\,\dfrac{a+bx}{c+dx}}=\frac{a(b+c)+(ad+b^2)x}{(ad+c^2)+d(b+c)x},$$

$$f^3(x)=\frac{a(b+c)+(ad+b^2)\,\dfrac{a+bx}{c+dx}}{(ad+c^2)+d(b+c)\,\dfrac{a+bx}{c+dx}}=\frac{a(bc+ad+b^2+c^2)+(2abd+acd+b^3)x}{(2acd+abd+c^3)+d(bc+ad+b^2+c^2)x};$$

afin donc qu'on ait $f^3(x)=x$, il faudra qu'on ait

$$a(bc+ad+b^2+c^2)=0,$$

$$d(bc+ad+b^2+c^2)=0,$$

$$2acd+abd+c^3=2abd+acd+b^3.$$

la dernière de ces trois équations revenant à

$$(b-c)(bc+ad+b^2+c^2)=0,$$

il s'ensuit qu'elles seront toutes satisfaites en posant simplement

$$bc+ad+b^2+c^2=0, \quad \text{d'où} \quad d=-\frac{b^2+bc+c^2}{a},$$

ce qui donne, pour la fonction cherchée,

$$f(x)=\frac{a(a+bx)}{ac-(b^2+bc+c^2)x}.$$

Au surplus, comme nous n'avons ici besoin que d'un cas particulier quelconque, nous pouvons faire $b=0$, ce qui nous donnera

$$\mathrm{f}(x)=\frac{a^2}{c(a-cx)}\ ;$$

il viendra en effet

$$\mathrm{f}^2(x)=\mathrm{f}\left[\frac{a^2}{c(a-cx)}\right]=\frac{a^2}{c\left[a-c\dfrac{a^2}{c(a-cx)}\right]}\ ;$$

c'est-à-dire,

$$\mathrm{f}^2(x)=-\frac{a(a-cx)}{c^2x}\ ;$$

et de là

$$\mathrm{f}^3(x)=\mathrm{f}\left\{-\frac{a(a-cx)}{c^2x}\right\}=\frac{a^2}{c\left[a+c\dfrac{a(a-cx)}{c^2x}\right]}\ ;$$

c'est-à-dire, en réduisant, $\mathrm{f}^3(x)=x$.

Adoptant donc cette valeur de la fonction f, et prenant, par exemple, $\varphi(x)=e^x$, d'où $\varphi^{-1}(x)=\mathrm{Log.}x$, nous aurons

$$\psi(x)=\varphi^{-1}\mathrm{f}\varphi(x)=\varphi^{-1}\mathrm{f}(e^x)=\varphi^{-1}\left\{\frac{a^2}{c(a-ce^x)}\right\}\ ;$$

c'est-à-dire,

$$\psi(x)=\mathrm{Log.}\left\{\frac{a^2}{c(a-ce^x)}\right\}=2\mathrm{Log.}a-\mathrm{Log.}c-\mathrm{Log.}(a-ce^x)\ ;$$

faisant, par exemple, $c=1$, il viendra

$$\psi(x)=2\mathrm{Log.}a-\mathrm{Log.}(a-e^x)\ ;$$

on aura, en effet,

$$\psi^2x=\mathrm{Log.}a+\mathrm{Log.}(a-e^x)-\mathrm{Log.}(-e^x)\ ;$$

et ensuite

$$\psi^3 x = \text{Log.}e^x = x \ .$$

Nous donnerons encore, d'après M. Babbage, les exemples suivans de fonctions périodiques du troisième ordre

$$\psi(x) = \frac{a\sqrt{x^2-a^2}}{x}\ , \qquad \psi(x) = \frac{a^2}{\sqrt[m]{a^m-x^m}}\ ,$$

$$\psi(x) = \frac{a\sqrt[m]{x^m-a^m}}{x}\ , \quad \psi(x) = c - x + \text{Log.}(e^x - e^c)\ ;$$

En général, si f désigne une fonction de telle forme qu'on ait $f^n(x)=x$, et si ϕ et ϕ^{-1} sont deux fonctions arbitraires inverses l'une de l'autre, en posant

$$\psi(x) = \phi^{-1} f \phi(x)\ ,$$

ψ sera une fonction périodique du $n.^{me}$ ordre ; de sorte que toute la difficulté de trouver, dans chaque ordre, tant de fonctions périodiques qu'on voudra se réduit, en dernière analise, à en trouver une seule, et c'est ce à quoi on peut procéder d'une manière analogue à celle dont nous avons fait usage pour le second et le troisième ordre. M. Babbage indique pour cela la formule générale

$$f(x) = \frac{2a\left(1+\text{Cos.}\frac{2m\varpi}{n}\right)(a+bx)}{2ac\left(1+\text{Cos.}\frac{2m\varpi}{n}\right)-\left(b^2-2bc\text{Cos.}\frac{2m\varpi}{n}+c^2\right)x}\ ,$$

en renvoyant, pour un plus ample détail, à un mémoire de M. Horner, inséré dans les *Annales of philosophy* (Nov. 1817).

M. Babbage observe, au surplus, que si, dans l'équation $\psi^n(x)=x$, n est un nombre composé, pq par exemple, toute fonction qui satisfera à l'une ou à l'autre des équations $\psi^p(x)=x$, $\psi^q(x)=x$, satisfera, à plus forte raison, à l'équation $\psi^n(x)=x$.

§. II.

§. II.

Des équations fonctionnelles.

I. Soit, en général, l'équation

$$F\{x, \psi(x), \psi(fx)\}=0,$$

dans laquelle ψ est le signe d'une fonction dont la forme est inconnue et où f désigne une fonction périodique du second ordre; c'est-à-dire, une fonction telle que $f^2(x)=x$; et supposons qu'il soit question de résoudre cette équation par rapport à la caractéristique ψ, c'est-à-dire, de déterminer $\psi(x)$ en fonction de x et des constantes que renferme la proposée.

Pour y parvenir, soit changé x en $f(x)$, l'équation deviendra

$$F\{f(x), \psi(fx), \psi(x)\}=0;$$

éliminant donc $\psi(fx)$ entre celle-ci et la proposée, il en résultera une équation de laquelle on pourra tirer la valeur de (ψx), en fonction de x, $f(x)$ et des constantes; et comme $f(x)$ est supposé une fonction de forme connue, il n'entrera finalement que x et des constantes dans la valeur de $\psi(x)$.

Soit, par exemple, l'équation

$$\psi(x)-a\psi\left(\frac{1}{x}\right)=e^x,$$

où $\frac{1}{x}$ est fonction périodique du second ordre; en y changeant x en $\frac{1}{x}$, elle deviendra

$$\psi\left(\frac{1}{x}\right)-a\psi(x)=e^{\frac{1}{x}}\ ;$$

et, en éliminant $\psi\left(\frac{1}{x}\right)$ entre l'une et l'autre, il viendra

$$\psi(x)=\frac{e^x+ae^{\frac{1}{x}}}{1-a^2}\ .$$

Soit encore l'équation

$$(\psi x)^2.\psi\frac{1-x}{1+x}=c^2x\ ,$$

où $\frac{1-x}{1+x}$ est également fonction périodique du second ordre ; en y changeant x en $\frac{1-x}{1+x}$ elle deviendra

$$\left(\psi\frac{1-x}{1+x}\right)^2.\psi x=c^2\frac{1-x}{1+x}\ ;$$

éliminant ensuite $\psi\frac{1-x}{1+x}$ entre ces deux équations, on tirera de l'equation résultante

$$\psi x=\sqrt[3]{c^2x^2\frac{1+x}{1-x}}\ .$$

Dans la vue de rendre le calcul plus facile, M. Babbage a souvent recours a des transformations dont un peu d'habitude de ce genre de calcul apprend bientôt à faire usage Soit, par exemple, l'equation

$$\frac{\psi x}{\psi x-x}+x\frac{\psi(1-x)}{\psi(1-x)-(1-x)}=1\ ;$$

au lieu de la traiter immédiatement, comme les précédentes, posons

$$\frac{\psi x}{\psi x - x} = \psi_1 x ;$$

en changeant x en $1-x$; nous aurons pareillement

$$\frac{\psi(1-x)}{\psi(1-x)-(1-x)} = \psi_1(1-x) ;$$

au moyen de quoi la proposée deviendra

$$\psi_1 x + x\psi_1(1-x) = 1 .$$

Pour résoudre celle-ci, changeons x en $1-x$, elle deviendra

$$\psi_1(1-x) + (1-x)\psi_1 x = 1 ;$$

et en éliminant $\psi_1(1-x)$ entre l'une et l'autre, nous aurons

$$\psi_1 x = \frac{1-x}{1-x+x^2} ;$$

nous aurons donc aussi

$$\frac{\psi x}{\psi x - x} = \frac{1-x}{1-x+x^2} ,$$

d'où nous tirerons

$$\psi x = \frac{x-1}{x} .$$

II. Soit, en général, une équation de la forme

$$F\{x , \psi(x) , \psi(fx) , \psi(f^2x)\} = 0 ,$$

où ψ représente toujours une fonction dont la forme est inconnue;

et dans laquelle f désigne une fonction périodique déterminée du troisième ordre, c'est-à-dire, telle que $f^3x=x$. En changeant x en fx, cette équation deviendra

$$F\{fx,\ \psi(fx),\ \psi(f^2x),\ \psi(x)\}=0\ ;$$

faisant encore la même transformation, nous aurons

$$F\{f^2x,\ \psi(f^2x),\ \psi(x),\ \psi(fx)\}=0\ ;$$

éliminant enfin $\psi(fx)$ et $\psi(f^2x)$, entre ces trois équations, l'équation résultante nous donnera la valeur de $\psi(x)$.

L'équation du problème de géométrie que nous avons traité au commencement de cet article, offrant déjà un exemple de ce cas, nous nous bornerons à en offrir ici un second. Soit l'équation

$$\psi x+a\psi\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{x}\ ,$$

ou $\frac{1}{1-x}$ est une fonction périodique du troisième ordre ; en changeant x en $\frac{1}{1-x}$, il viendra

$$\psi\left(\frac{1}{1-x}\right)+a\psi\left(\frac{x-1}{x}\right)=1-x\ ;$$

faisant encore le même changement dans cette dernière, on aura

$$\psi\left(\frac{x-1}{x}\right)+a\psi x=\frac{x}{x-1}\ ;$$

éléminant enfin $\psi\left(\frac{1}{1-x}\right)$ et $\psi\left(\frac{x-1}{x}\right)$ entre ces trois équations, nous tirerons de l'équation résultante

$$\psi x=\frac{1-(1+a)x+a(2-a)x^2-ax^3}{(1+a^3)x(1-x)}.$$

En général, si l'on a l'équation

$$F\{x\,,\ \psi(x)\,,\ \psi(fx)\,,\ \psi(f^2x)\ldots\ldots\psi(f^{n-1}y)\}=0\,,$$

dans laquelle fx désigne une fonction périodique du $n.^{me}$ ordre ; c'est-à-dire, telle que $f^nx=x$. en y changeant $n-1$ fois x en fx, il viendra

$$F\{f\,x\,,\ \psi(f\,x)\,,\ \psi(f^2x)\,,\ \psi(f^3x)\ldots\ldots\psi(x)\}=0\,,$$

$$F\{f^2x\,,\ \psi(f^2x)\,,\ \psi(f^3x)\,,\ \psi(f^4x)\ldots\ldots\psi(fx)\}=0\,;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$F\{f^{n-1}x\,,\ \psi(f^{n-1}x)\,,\ \psi(x)\,,\ \psi(fx)\ldots\ldots\psi(f^{n-2}x)\}=0\,;$$

on aura donc ainsi n équations, entre lesquelles éliminant $\psi(fx)$, $\psi(f^2x)$, $\psi(f^3x)$, ...$\psi(f^{n-1}x)$, on tirera de l'équation résultante la valeur de $\psi(x)$ en fonction de x.

§. III.

Des cas où la précédente méthode est en défaut.

La méthode que nous venons de faire connaître pour la résolution des équations fonctionnelles suppose essentiellement que les diverses quantités sous le signe ψ, sont susceptibles d'être déduites les unes des autres et de x par une suite de semblables opérations qui, suffisamment répétées, conduisent de nouveau à cette même quantité x ; elle suppose de plus qu'en substituant dans l'équation proposée, fx à x, autant de fois consécutivement que le comporte l'ordre de périodicité de la fonction fx, les équations qu'on obtient sont essentiellement différentes les unes des autres. Mais il est une multitude de cas où il n'en est point ainsi, et ce sont ceux où l'équation proposée est symétrique, soit par rapport aux diverses fonctions sous le signe ψ, prises en masse, soit par rapport à divers groupes de ces fonctions.

Qu'on ait, par exemple, l'équation

$$\psi x+\psi(fx)=a\ ,$$

où l'on suppose $f^2x=x$; en y changeant x en fx, les deux termes du premier membre ne font que changer de place, de sorte que l'équation reste la même, et qu'il est impossible d'en éliminer $\psi(fx)$ et d'en conclure la valeur de ψx.

Cette impossibilité n'existerait pas toujours si le second membre, au lieu d'être une constante, comme dans le précédent exemple, était au contraire une fonction de x, et on obtiendrait même quelquefois, non seulement la valeur de ψx, mais encore celle de x. Que l'on ait, par exemple, l'équation

$$\psi x+\psi(a-x)=bx\ ;$$

en y changeant x en $a-x$, elle devient

$$\psi(a-x)+\psi x=b(a-x)\ ;$$

or, à raison de l'égalité des premiers membres, on aura $x=\frac{1}{2}a$ qui, substituée dans la proposée, donne

$$2\psi\tfrac{1}{2}a=\tfrac{1}{2}ab \qquad \text{ou} \qquad \psi\tfrac{1}{2}a=\tfrac{1}{4}ab\ ,$$

et, en mettant x pour $\frac{1}{2}a$, $\psi x=\frac{1}{2}bx$ et $\psi(a-x)=\frac{1}{2}b(a-x)$;

substituant donc dans la proposée ces valeurs de ψx et $\psi(a-x)$, elle devient de nouveau $x=\frac{1}{2}a$. Ainsi cette équation donne en même temps la valeur de x et la forme de la fonction ψ.

Soit encore l'équation

$$\psi x . \psi \frac{a^2}{a-x}=a^2 ,$$

où $\frac{a^2}{a-x}$ est une fonction périodique du troisième ordre ; en y changeant x en $\frac{a^2}{a-x}$, il vient

$$\psi \frac{a^2}{a-x} . \psi\left[-\frac{a(a-x)}{x}\right]=a^2 ;$$

changeant de nouveau x en $\frac{a^2}{a-x}$, on aura cette troisième équation

$$\psi\left[-\frac{a(a-x)}{x}\right] . \psi x=a^2 ,$$

en multipliant les deux dernières en croix, on a d'abord

$$\psi x=\psi \frac{a^2}{a-x} ,$$

d'où

$$x=\frac{a^2}{a-x} ,$$

ou encore

$$x^2-ax+a^2=0 ,$$

d'où

$$x=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}a .$$

Si ensuite on divise le produit des équations extrêmes par l'équation intermédiaire, on aura

$$(\psi x)^2=a^2 , \quad \text{d'où} \quad \psi x=\pm a :$$

Si l'on a

$$\psi x . \psi\left(\frac{a^2}{a-x}\right).\psi\left[-\frac{a(a-x)}{x}\right]=a^3 .$$

quelque nombre de fois qu'on y change x en $\frac{a^2}{a-x}$, elle demeurera toujours la même, et on ne pourra conséquemment en éliminer $\psi\left(\frac{a^2}{a-x}\right)$ et $\psi\left[-\frac{a(a-x)}{x}\right]$; mais si l'on avait

$$\psi x.\psi\left(\frac{a^2}{a-x}\right).\psi\left[-\frac{a(a-x)}{x}\right]=abx ;$$

en y changeant deux fois consécutivement x en $\frac{a^2}{a-x}$, et concluant de l'égalité des premiers membres celle des seconds, on en tirerait

$$x=\frac{a^2}{a-x}=-\frac{a(a-x)}{x} ;$$

équation double qui donne $x=a.\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$; en substituant dans la proposée, elle devient

$$\psi\left(a.\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)=\sqrt[3]{a^2b.\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}} ;$$

en y changeant $a.\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$ en x, il vient

ψx

$$\psi x=\sqrt[3]{abx}\ .$$

Soit l'équation

$$a[\psi x+\psi(\mathrm{f}^2x)]+b[\psi(\mathrm{f}x)+\psi(\mathrm{f}^3x)]=c\ ,$$

dans laquelle nous supposons $\mathrm{f}^4x=x$, les changemens successifs de x en $\mathrm{f}x$ ne donneront jamais, outre cette équation, que la suivante :

$$a[\psi(\mathrm{f}x)+\psi(\mathrm{f}^3x)]+b[\psi x+\psi(\mathrm{f}^2x)]=c\ ,$$

et leur ensemble sera insuffisant pour l'élimination des trois fonctions $\psi(\mathrm{F}x)$, $\psi(\mathrm{f}^2x)$, $\psi(\mathrm{f}^3x)$.

Mais, si la méthode est en défaut pour les équations fonctionnelles de cette classe, elles n'en sont pas moins résolubles, et présentent même cette circonstance remarquable que la valeur de $\psi(x)$ alors contient une fonction arbitraire de x. Un petit nombre d'exemples suffira pour faire comprendre comment on peut parvenir à un tel résultat.

Proposons-nous, pour premier exemple, d'assigner l'équation de la courbe qui jouit de cette propriété que, de quelque manière qu'on y choisisse deux ordonnées telles que la somme de leurs abscisses soit constante et égale à a, la somme de ces ordonnées soit elle-même constante et égale à $2b$. En désignant l'une de ces abscisses par x, l'autre sera $a-x$; et, si l'on prend pour équation de la courbe cherchée $y=\psi(x)$, la condition du problème conduira à l'équation fonctionnelle du second ordre

$$\psi x+\psi(a-x)=2b\ ,$$

qui se trouve dans le cas d'exception qui nous occupe. Pour la résoudre, nous lui substituerons la suivante :

$$\psi x+(1+k)\psi(a-x)+k\varphi x=2b\ ,$$

dans laquelle ϕ désigne une fonction arbitraire, et qui revient à la première, lorsqu'on y fait $k=0$. Celle-ci n'étant plus dans l'exception dont il s'agit, nous y changerons x en $a-x$, suivant le procédé général, elle deviendra

$$\psi(a-x)+(1+k)\psi x+k\phi(a-x)=2b\ ;$$

en éliminant $\psi(a-x)$ entre celle-ci et l'autre, il viendra

$$\psi x=\frac{2b+\phi x-(1+k)\phi(a-x)}{2+k}\ ;$$

il faudra donc, pour avoir la solution de la proposée, faire ici $k=0$, ce qui donnera, en transformant les fonctions arbitraires,

$$\psi x=b+\phi x-\phi(a-x)\ ;$$

de sorte que l'équation générale des courbes satisfaisant à la condition exigée sera

$$y=b+\phi x-\phi(a-x)\ .$$

On ramènera facilement à ce problème celui où il serait question de déterminer la courbe dans laquelle le produit de deux ordonnées est constant et égal à b^2, toutes les fois que le produit de leurs abscisses est lui-même constant et égal à a^2. En représentant en effet l'équation de la courbe par $y=\psi x$, la condition du problème donnera

$$\psi x.\psi\frac{a^2}{x}=b^2\ .$$

Or, en posant $\text{Log}.\psi x=\psi_1 x$, d'où $\text{Log}.\psi\frac{a^2}{x}=\psi_1\frac{a^2}{x}$, et prenant les logarithmes des deux membres, cette équation devient

$$\psi_1 x + \psi_1 \frac{a^2}{x} = 2\mathrm{Log}.b\ ,$$

qui, traitée comme la précédente, donne

$$\psi_1 x \text{ ou } \mathrm{Log}.\psi x = \mathrm{Log}.b + \phi x - \phi \frac{a^2}{x}\ ,$$

et par suite

$$\psi x \text{ ou } y = \frac{be^{\phi x}}{e^{\phi \frac{a^2}{x}}}\ .$$

Soit encore l'équation

$$[\psi x]^2 + [\psi(\tfrac{1}{2}\varpi - x)]^2 = 1\ ,$$

à laquelle M. LAPLACE réduit le problème de la composition des forces (*Mécanique céleste*, pag. 5). En faisant $[\psi x]^2 = \psi_1 x$, elle donnera

$$\psi_1 x + \psi_1(\tfrac{1}{2}\varpi - x) = 1\ ,$$

d'où

$$\psi_1 x \text{ ou } [\psi x]^2 = \tfrac{1}{2} + \phi x - \phi(\tfrac{1}{2}\varpi - x)\ ,$$

et par suite

$$\psi x = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \phi x - \phi(\tfrac{1}{2}\varpi - x)}\ .$$

Ces cas, au surplus, ne sont pas les seuls où la valeur de ψx admet une fonction arbitraire, et M. Babbage en indique quelques autres.

Tout ce qui précède n'est, comme l'on voit, relatif qu'au cas où les diverses fonctions de x, soumises au signe ψ, peuvent être déduites les unes des autres et de x par un même procédé; mais on pourrait avoir une équation fonctionnelle de la forme

$$\mathrm{F}\{x\,,\ \psi x\,,\ \psi(\mathrm{f}_1 x)\,,\ \psi(\mathrm{f}_2 x)\,,\ \psi(\mathrm{f}_3 x)\,,\ldots\ldots\}\ ;$$

dans laquelle f_1, f_2, f_3, ... désigneraient des fonctions quelconques de x tout-à-fait indépendantes les unes des autres, et n'étant soumises à aucune loi de dérivation régulière ; et M. Babbage ne dit pas si, dans ce cas général, il y aurait moyen de déduire de l'équation proposée la forme de la fonction x.

Nous observerons à ce sujet que d'abord on peut souvent, par une simple transformation, rendre périodiques des fonctions qui ne paraissent point l'être. Qu'on ait, par exemple, l'équation

$$a\psi\left(\frac{ax^2}{a^2+x^2}\right)-\frac{a^2+x^2}{a}\psi\left(-\frac{a^3}{x^2}\right)=a^2+x^2,$$

dans laquelle aucune des deux fonctions $\frac{ax^2}{a^2+x^2}$, $-\frac{a^3}{x^2}$ ne paraît être périodique ; en y faisant simplement $x=\sqrt{a(x'-a)}$, elle deviendra

$$a\psi\left[\frac{a(x'-a)}{x'}\right]-x'\psi\left[-\frac{a^2}{x'-a}\right]=ax'.$$

équation qui n'est autre chose que celle du problème de géométrie que nous nous sommes proposé au commencement de cet extrait ; nous en tirerons donc, comme alors

$$\psi x'=-\frac{ax'}{x'-a}\,,\quad \text{d'où}\quad \psi x=-\frac{ax}{x-a}\,.$$

Mais de telles transformations sont-elles indistinctement applicables à toutes sortes d'équations fonctionnelles ? et, en supposant qu'il en soit ainsi, comment découvrira-t-on la transformation qui convient à chacune d'elles ? Si, au contraire, ces transformations ne sont applicables qu'à certaines classes d'équations fonctionnelles, à quels caractères distinguera-t-on celles auxquelles elles sont applicables de celles auxquelles elles ne le sont pas ? Voilà, certes, des questions qu'il serait fort intéressant de résoudre.

M. Babbage indique lui même une classe d'équations fonctionnelles qui, ne paraissant pas se rapporter à la théorie des fonctions périodiques, peuvent néanmoins être facilement résolues. Soit, par exemple, l'équation

$$a+b\psi x=\psi(a+bx)\ ,$$

où $a+bx$ n'est point une fonction périodique ; cette équation n'est qu'un cas particulier de celle-ci :

$$\mathrm{f}(\psi x)=\psi(\mathrm{f}x)\ ;$$

laquelle a évidemment pour solution générale

$$\psi x=\mathrm{f}^n x\ ;$$

où n est un nombre tout-à-fait arbitraire. On a en effet, en substituant,

$$\mathrm{f}(\mathrm{f}^n x)=\mathrm{f}^n(\mathrm{f}x)\ ;\quad \text{c'est-à-dire}\ ;\quad \mathrm{f}^{n+1}x=\mathrm{f}^{n+1}x.$$

Or, dans la proposée, $\mathrm{f}x=a+bx$, d'où

$$\mathrm{f}^2x=a+b(a+bx)=a+ab+b^2x\ ;$$

$$\mathrm{f}^3x=a+ab+b^2(a+bx)=a+ab+ab^2+b^3x\ ;$$

. . . .

$$f^n x = a(1+b+b^2+\dots\dots b^{n-1})+b^n x\ ;$$

c'est-à-dire,

$$f^n x = a\frac{1-b^n}{1-b}+b^n x\ ;$$

donc finalement

$$\psi x = a\frac{1-b^n}{1-b}+b^n x\ ,$$

où n est tout-à-fait arbitraire. Par de semblables moyens, on trouvera que l'équation

$$\frac{a\psi x}{b+c\psi x}=\psi\left(\frac{ax}{b+cx}\right)$$

a pour solution générale

$$\psi x = \frac{a^n(a-b)x}{b^n(a-b)+c(a^n-b^n)x}\ .$$

Nous ne pousserons pas plus loin cette analise, et nous renverrons, pour de plus amples développemens, au mémoire de M. Babbage, qui renvoie lui-même à divers autres écrits sur le même sujet. Notre but n'est en effet que de présenter ici, sous une forme tout-à-fait élémentaire, et conséquemment accessible à toutes les classes de lecteurs, les premiers linéamens d'un genre de spéculations analitiques encore peu connu et peu cultivé en France, et qui paraît susceptible de beaucoup d'extension et d'intérêt. Nous déclarons, en terminant, que nous mettrons à l'avenir tous nos soins à tenir nos lecteurs au courant des recherches mathématiques auxquelles on pourra s'appliquer hors de France, toutes les fois du moins que leurs auteurs voudront bien nous les faire connaître, et qu'elles paraîtront de nature à contribuer à l'avancement de la science, au progrès de laquelle ce recueil est spécialement consacré. Ce progrès tient essentiellement, en effet, à une propagation rapide de toutes les idées nouvelles, de toutes les vues utiles; mais la difficulté des communications et la différence des idiômes n'apporte que trop souvent un grave obstacle à cette propagation, et rend, pour ainsi dire, les savans des diverses contrées tout-à-fait étrangers les uns aux autres. Nous nous estimerons donc fort heureux si nous pouvons parvenir à amoindrir un peu cet obstacle; et nous osons croire qu'on ne dédaignera pas de nous aider dans ce projet d'une évidente utilité pour tous.