FRÉDÉRIC SARRUS

Analise transcendante. Recherches sur les intégrales définies

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 12 (1821-1822), p. 36-39
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1821-1822__12__36_0>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Recherches sur les intégrales définies ;

Par M. Frédéric Sarrus, docteur ès sciences.

1. L'intégrale

$$\int e^{-z} z^a \mathrm{d}z\ ,$$

prise depuis $z=0$ jusqu'à $z=\frac{1}{0}$, se réduit à une fonction de a seul ; de sorte qu'en convenant de représenter cette fonction par $a!$, on a

$$\int e^{-z} z^a \mathrm{d}z = a\,!\ \boxed{\begin{array}{c} z=0 \\ z=\frac{1}{0} \end{array}}\ ;$$

Faisant $z=mz'$, m étant une quantité positive quelconque, mais indépendante de z', on aura, en substituant, après avoir effacé les accens,

$$\int e^{-mz} z^a \mathrm{d}z = a!m^{-(a+1)}\ \boxed{\begin{array}{c} z=0 \\ z=\frac{1}{0} \end{array}}\ ; \qquad (1)$$

d'où, en différentiant par rapport à m, et faisant ensuite $m=1$;

$$\int e^{-mz}z^{a+1}\,\mathrm{d}z=a!(a+1)\ ;$$

donc, suivant notre notation,

$$(a+1)!=a!(a+1)\ ; \qquad (2)$$

or $0!=1$; donc

$$1!=1.1\ ,\quad 2!=1.1.2\ ,\quad 3!=1.1.2.3\ ,\ldots\ldots,\ n!=1.2.3\ldots\ldots n\ ;$$

En multipliant les deux membres de l'équation (1) par e^{-m} $m^{(a+b+1)}\mathrm{d}m$, et intégrant depuis $m=0$ jusqu'à $m=\frac{1}{0}$, on trouve

$$\iint e^{-m(1+z)}m^{a+b+1}z^a\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}z=a!b!\ ;$$

or, d'après l'équation (1), l'on a, entre les limites désignées ;

$$\int e^{-m(1+z)}m^{a+b+1}\,\mathrm{d}m=(a+b+1)!\,\frac{1}{(1+z)^{a+b+2}}\ ;$$

donc

$$\int\frac{z^a\,\mathrm{d}z}{(1+z)^{a+b+2}}=\frac{a!b!}{(a+b+1)!}\ \boxed{\begin{matrix}z=0\\ z=\frac{1}{0}\end{matrix}}\ . \qquad (3)$$

Si l'on pose $e^{-z}=x$, on trouvera

$$a!=\int\left(\mathrm{l}\,\frac{1}{x}\right)^a\mathrm{d}x\ \boxed{\begin{matrix}x=0\\ x=1\end{matrix}}\ ;$$

Si l'on pose, au contraire, $z=\frac{x}{1-x}$, on trouvera

$$\frac{z^a\,\mathrm{d}z}{(1+z)^{a+b+2}}=x^a(1-x)^b\,\mathrm{d}x\ ;$$

d'où

$$\int x^a(1-x)^b\mathrm{d}x=\frac{a!b!}{(a+b+1)!}\ \boxed{\begin{array}{c}x=0\\ x=1\end{array}}\ ;$$

ce qui établit entre les intégrales Eulériennes une relation très-remarquable, déjà connue depuis long-temps. Nous ne discuterons pas les cas particuliers que présente l'équation (3). On peut les voir dans les *Exercices de calcul intégral* de M. LEGENDRE.

L'on a, en mettant au lieu de $\mathrm{Cos}.qy$ son développement,

$$\int e^{-y}\mathrm{Cos}.qy\mathrm{d}y=\int e^{-y}\mathrm{d}y\left(1-\frac{q^2y^2}{2!}+\frac{q^4y^4}{4!}-\frac{q^6y^6}{6!}+\ldots\ldots\right);$$

d'où, en intégrant depuis $y=0$ jusqu'à $y=\frac{1}{0}$,

$$\int e^{-y}\mathrm{Cos}.qy\mathrm{d}y=1-q^2+q^4-q^6+\ldots\ldots=\frac{1}{1+q^2}. \qquad (4)$$

On trouverait de même, et entre les mêmes limites,

$$\int e^{-y}\mathrm{Sin}.qy\mathrm{d}y=\frac{q}{1+q^2}; \qquad (5)$$

partant

$$\iint e^{-y}\mathrm{Cos}.qy\mathrm{Cos}.qx\mathrm{d}y\mathrm{d}q=\int\frac{\mathrm{Cos}.qx\mathrm{d}q}{1+q^2}=\frac{\pi}{2}e^{-x};$$

$$\iint e^{-y}\mathrm{Sin}.qy\,\mathrm{Sin}.qx\mathrm{d}y\mathrm{d}q=\int\frac{q\mathrm{Sin}.qx\mathrm{d}q}{1+q^3}=\frac{\pi}{2}e^{-x};$$

pourvu qu'on prenne les intégrales depuis $y=0$ jusqu'à $y=\frac{1}{0}$ et depuis $q=0$ jusqu'à $q=\frac{1}{0}$.

Faisant, dans ces formules, $y=my'$, $q=\frac{q'}{m}$ et $x=mx'$, m étant une quantité positive quelconque, mais indépendante de x', y', q', on aura, en substituant et supprimant les accens,

$$\int\!\!\int e^{-my}\mathrm{Cos}.qy\,\mathrm{Cos}.qx\,\mathrm{d}q\mathrm{d}y=\frac{\varpi}{2}e^{-mx} \quad \boxed{\begin{array}{c|c} y=0 & q=0 \\ y=\frac{1}{0} & q=\frac{1}{0} \end{array}}$$

multipliant les deux membres par $\varphi m\mathrm{d}m$ et intégrant entre deux limites positives de m, mais d'ailleurs quelconques, on aura, en faisant $\mathrm{F}x=\int e^{-mx}\varphi m.\mathrm{d}m$, et l'intégrale du second membre étant prise entre les limites désignées,

$$\int\!\!\int \mathrm{Cos}.qy\,\mathrm{Cos}.qx.\mathrm{F}y.\mathrm{d}q.\mathrm{d}y=\frac{\varpi}{2}\mathrm{F}x\;;$$

on trouverait de même

$$\int\!\!\int \mathrm{Sin}.qy\,\mathrm{Sin}.qx.\mathrm{F}y.\mathrm{d}q.\mathrm{d}y=\frac{\varpi}{2}\mathrm{F}x\;.$$

De là on déduira, comme cas particulier, le théorème de M. Fourier.

Saint-Affrique, 26 avril 1821.