ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

QUERRET

Arithmétique. Sur la formation des puissances et l'extraction des racines des nombres

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 12 (1821-1822), p. 359-362
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1821-1822__12__359_1>

ARITHMÉTIQUE.

Sur la formation des puissances et l'extraction des racines des nombres ;

Par M. QUERRET, chef d'institution.

SOIENT posés successivement les équations

$$\frac{m}{1}a+b=A_1\;,$$

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^2+bA_1=A_2\;,$$

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}a^3+bA_2=A_3\;,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\;,$$

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}a^{m-3}+bA_{m-4}=A_{m-3}\,;$$

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^{m-2}+bA_{m-3}=A_{m-2}\,,$$

$$+\frac{m}{1}a^{m-1}+bA_{m-2}=A_{m-1}\,,$$

$$a^m+bA_{m-1}=A_m\,.$$

En prenant la somme de leurs produits respectifs par b^{m-1}, b^{m-2}, b^{m-3}, ... b^3, b^2, b, 1, il vient, en réduisant,

$$A_m=a^m+\frac{m}{1}a^{m-1}b+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^{m-2}b+\ldots+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^2b^{m-2}+\frac{m}{1}ab^{m-1}+b^m$$

c'est-à-dire,

$$A_m=(a+b)^m\,.$$

Si, par exemple, on avait $m=5$, en posant successivement

$$5a+b\quad=A_1\,;$$
$$10a^2+bA_1=A_2\,;$$
$$10a^3+bA_2=A_3\,,$$
$$5a^4+bA_3=A_4\,,$$
$$a^5+bA_4=A_5\,,$$

on aurait

$$A_5=(a+b)^5\,,$$

Voilà donc un moyen assez commode de former une puissance d'un nombre composé de dizaines et d'unités. Soit, par exemple, le nombre 47 dont il soit question de former la cinquième puissance; en le considérant comme $40+7$, prenant 40 pour a et 7 pour b, on écrira d'abord les cinq premières puissances de 40 en cette manière

40, 1600, 64000, 2560000, 102400000,

et au-dessous les coefficiens de la cinquième puissance d'un binome, à partir du second terme, en cette manière,

5, 10, 10, 5, 1.

En

En prenant les produits des termes correspondans des deux suites, on en formera une troisième qui sera

200 , 16000 , 640000 , 12800000 , 102400000 .

On formera enfin une quatrième suite dont le premier terme soit le premier terme de la troisième, augmenté de 7, et dont chacun des autres termes soit le produit du précédent par 7, augmenté du terme qui correspond à ce précédent dans la troisième, en cette manière

207 , 17449 , 762143 , 18135001 , 229345007 ,

et le dernier terme de cette suite sera la puissance cherchée.

Si l'on voulait former une puissance d'un nombre de trois chiffres, tel, par exemple, que 473, on prendrait 470 pour a et 3 pour b; on formerait donc, comme ci-dessus, la première suite des puissances successives de 470, ce qui se réduirait, sauf les zéros à écrire à droite, à faire les puissances successives de 47, à la formation desquelles on pourrait procéder comme nous l'avons fait, dans l'exemple précédent, pour la cinquième. Cette première suite ainsi formée, on en déduirait les autres comme ci-dessus, en employant le chiffre 3 comme nous avions employé le chiffre 7. On se conduirait d'une manière analogue pour la formation d'une puissance d'un nombre de plus de trois chiffres.

Supposons présentement qu'on ait à extraire une racine d'un nombre, la racine cinquième de 229345007, par exemple. Après avoir déterminé la racine cinquième 4 de sa dernière tranche à gauche 2293, et en avoir retranché sa cinquième puissance 1024, on aura pour reste 1269 à côté duquel abaissant la tranche suivante et séparant par une virgule les quatre derniers chiffres à droite, ce qui donnera 12694,5007, il faudra, pour avoir le second chiffre de la racine, diviser la partie 12694 à gauche de la virgule par cinq fois la quatrième puissance de 4, c'est-à-dire, par 1280. Cela donnerait immédiatement 9 pour quotient; et, pour le vérifier, il faudrait former la cinquième puissance de 49 et essayer de la retrancher du nombre proposé; or, nous en avons déjà retranché la cinquième puissance de 40, ce qui nous a donné pour reste 126945007 ; d'un autre côté, notre équation $a^5+bA_4=A_5$, qui revient à $a^5+bA_4=(a+b)^5$ donne $(a+b)^5-a^5=bA_4$; il nous suffira donc de faire pour 49 les quatre suites que nous avons formées tout-à-l'heure pour 47, en les bornant aux quatre premiers termes seulement ; alors, pour que le 9 puisse être admis, il faudra que 9 fois le quatrième terme de la dernière puisse être retranché de 126945007 ; et, comme il ne pourra l'être, on passera au 8 qui ne pourra l'être davantage, et enfin au 7 qu'on trouvera être le véritable.

En particulier, ce procédé, appliqué à l'extraction de la racine cubique, simplifie singulièrement l'opération.

Saint-Malo, le 19 mars 1822.