J. B. DURRANDE

Questions résolues. Démonstration des deux théorèmes de géométrie énoncés à la page 72 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 12 (1821-1822), p. 168-171
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1821-1822__12__168_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration des deux théorèmes de géométrie énoncés à la page 72 de ce volume ;

Par M. J. B. Durrande, professeur de physique au collége royal de Cahors.

THÉORÈME I. *De tous les systèmes de diamètres conjugués d'une ellipse, les diamètres principaux sont ceux dont la somme est un* minimum ; *et les diamètres conjugués égaux sont ceux dont la somme est un* maximum.

Démonstration. Soient a, b les demi-diamètres principaux d'une ellipse, x, y deux demi-diamètres conjugués quelconques, et γ l'angle que comprennent entre eux ces demi-diamètres ; on aura, comme l'on sait (*),

$$x^2+y^2=a^2+b^2\,; \qquad xy\mathrm{Sin}.\gamma=ab\,.$$

Ajoutant et retranchant successivement le double de la dernière de ces deux équations au produit de la première par Sin.γ, il viendra, en divisant ensuite par Sin.γ et extrayant la racine quarrée des deux membres,

(*) Voyez le précédent article.

J. D. G.

$x+y=$

$$x+y=\sqrt{a^2+b^2+\frac{2ab}{\text{Sin.}\gamma}}\,,\qquad x-y=\sqrt{a^2+b^2-\frac{2ab}{\text{Sin.}\gamma}}\,.$$

Le dernier de ces résultats prouve qu'on ne sauroit avoir

$$a^2+b^2<\frac{2ab}{\text{Sin.}\gamma}\,,\ \text{c'est-à-dire}\ ,\ \text{Sin.}\gamma<\frac{2ab}{a^2+b^2}\,,$$

ou encore

$$\text{Sin.}\gamma<1-\frac{(a-b)^2}{(a-b)^2+2ab}\,,$$

quantité essentiellement positive et moindre que l'unité. Ainsi, Sin.γ est nécessairement compris entre les deux limites

$$1\quad\text{et}\quad\frac{2ab}{a^2+b^2}\,.$$

Il atteint la première lorsqu'on a $x-y=a-b$, c'est-à-dire, lorsque les deux demi-diamètres conjugués x, y sont les demi-diamètres principaux eux-mêmes ; il atteint la seconde, lorsqu'on a $x=y$, c'est-à-dire, lorsque x et y sont les demi-diamètres conjugués égaux.

Or, il résulte évidemment de l'expression de $x+y$, que cette somme sera *minimum* dans le premier cas, et *maximum* dans le second ; le théorème se trouve donc ainsi complètement démontré.

THÉORÈME II. De tous les systèmes de diamètres conjugués d'une ellipsoïde, les diamètres principaux sont ceux dont la somme est un minimum ; *et les diamètres conjugués égaux sont ceux dont la somme est un* maximum.

Démonstration. La démonstration de ce théorème se déduit bien simplement du théorème qui précède.

Il faut d'abord pour cela se rappeler que l'un quelconque des diamètres d'une ellipsoïde étant donné, il n'y a absolument de determiné que le plan de ses deux conjugués, dans lequel, prenant arbitrairement deux diamètres de la section, conjugués l'un à l'autre, ils seront aussi conjugués au premier.

Cela posé, 1.° si l'on nie que les diamètres principaux de l'ellipsoïde soient les diamètres conjugués dont la somme est *minimum*, il faudra qu'on indique un autre système de diamètres conjugués jouissant de cette propriété, et dans lequel deux au moins des trois diamètres ne soient pas perpendiculaires l'un à l'autre; mais alors, en conservant le troisième diamètre, et substituant à ces deux-ci les diamètres principaux de la section qui les contient, on aurait un nouveau système de diamètres conjugués, dont la somme serait (*Théor. I*) moindre que la somme des premiers, qui conséquemment ne saurait être un *minimum*, comme on l'avait supposé.

2.° Si l'on nie que les diamètres conjugués égaux de l'ellipsoïde soient les diamètres conjugués dont la somme est *maximum*, il faudra qu'on indique un autre système de diamètres conjugués jouissant de cette propriété, et dans lequel deux au moins des trois diamètres soient inégaux; mais alors, en conservant le troisième diamètre, et substituant à ces deux-ci les diamètres conjugués égaux de la section qui les contient, on aurait un nouveau système de diamètres conjugués, dont la somme serait (*Théor. I*) plus grande que la somme des premiers, qui conséquemment ne saurait être un *maximum*, comme on l'avait supposé (*).

(*) Puisque, comme on l'a vu dans le précédent article, il existe dans l'ellipsoïde une infinité de systèmes de diamètres conjugués égaux, il y existe donc aussi une infinité de systèmes de diamètres conjugués ayant une somme *maximum*; d'où l'on voit qu'en traitant la seconde partie du théorème par le calcul différentiel, on aurait un exemple du cas singulier dont s'est occupé M. Français, aux pages 132 et 197 du III.e volume de ce recueil, et dans lequel la théorie ordinaire est en défaut, attendu que le *maximum* ou le *minimum* se trouve indéterminé.

J. D. G.

Le second théorème se trouve donc ainsi complètement démontré, comme le premier (*).

(*) Nous avons reçu récemment de M. Tédenat, ancien recteur, correspondant de l'académie royale des sciences, des démonstrations des mêmes théorèmes qui rentrent pour le fond dans celles qu'on vient de lire, et qu'il suffit conséquemment de mentionner. J. D. G.