ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

CONDITIONS DE LA SOUSCRIPTION.

Depuis le premier juillet 1810, ce recueil paraît de mois en mois, par livraisons de 30 à 40 pages d'impression, non compris les planches.

On peut souscrire indifféremment,

Au bureau des *Annales*, rue du St-Sacrement, n.° 252, à Montpellier, [Hérault];

Chez MM. *Bachelier et Huzard*, imprimeurs-libraires pour les mathématiques, rue du Jardinet, n.° 12, quartier de St-André-des-Arcs, à Paris;

Et à tous les bureaux de poste.

Les articles à insérer doivent être envoyés, francs de port, à la première de ces adresses.

Le prix de la souscription annuelle est 21 fr. pour la France, et 24 fr. pour l'étranger. Il en coûte moitié moins, pour six mois. Les lettres et l'argent doivent être affranchis.

AVIS au Relieur,

Sur le placement des Planches.

Planche	I.	Après la page	144.
	II.		260.

ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

RECUEIL PÉRIODIQUE,

RÉDIGÉ ET PUBLIÉ

Par J. D. GERGONNE, professeur d'astronomie, doyen de la faculté des sciences de Montpellier, membre de plusieurs sociétés savantes.

TOME DOUZIÈME.

A NISMES,

DE L'IMPRIMERIE DE P. DURAND-BELLE.

Et se trouve à PARIS, chez MM. BACHELIER et HUZARD, gendres et successeurs de la dame Veuve COURCIER, Imprimeurs-Libraires pour les Mathématiques, rue du Jardinet, n.° 12, quartier St-André-des-Arcs.

1821 ET 1822.

ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

Mémoire sur le parallélisme des lignes et surfaces courbes ;

Par M. Crelle, docteur en philosophie, membre du conseil supérieur des bâtimens de la Prusse.

1.

Si, par tous les points d'une ligne droite ou d'un plan, et d'un même côté, on lui élève des perpendiculaires de même longueur, le lieu des extrémités supérieures de ces perpendiculaires sera, comme l'on sait, une autre ligne droite ou un autre plan, parallèle à la droite ou au plan donné.

Si pareillement, par tous les points d'une courbe plane ou d'une surface courbe, on lui élève, d'un même côté, des normales de même longueur, le lieu géométrique des extrémités supérieures de ces normales sera une autre courbe plane ou une autre surface courbe que, par analogie, on sera conduit à considérer comme *parallèle* à la courbe ou à la surface donnée; et l'analogie conduira également à considérer la relation de parallélisme comme une des plus simples qui puisse exister entre deux courbes et deux surfaces courbes, puisque cette même relation est la plus simple que l'on puisse concevoir entre deux lignes droites ou deux plans.

Cependant la théorie du parallélisme des lignes et surfaces courbes a été jusqu'ici peu approfondie. On connaît les équations différentielles qui expriment le rapport mutuel des coordonnées d'une ligne courbe, parallèle à une autre courbe proposée; et l'on peut trouver, à l'aide de ces équations, l'équation de la parallèle même, dans tous les cas. On a fait aussi des applications de ces équations générales à plusieurs courbes; mais la théorie générale des courbes parallèles dans un plan et celle des surfaces parallèles, soit entre elles, soit à des lignes à double courbure, théorie qui doit embrasser le contact, l'osculation, la rectification, le calcul des aires, etc., reste encore à compléter.

Je viens de trouver quelques théorèmes relatifs à cette théorie, et qui m'ont paru remarquables par leur élégance et leur généralité absolue. Je me propose de les présenter brièvement ici, en abandonnant au lecteur le soin des développemens ultérieurs.

2.

Mais, avant d'entrer en matière, qu'il me soit permis de placer ici une observation.

On n'ignore pas que c'est le calcul différentiel ordinaire, le calcul aux différences partielles, leur système de signe et l'art de les appliquer à la géométrie, qui servent de base aux recherches de la nature de celles que j'ai en vue. Cependant, j'ai la ferme persuasion que l'application de ce calcul à la géométrie, d'après la considération de l'infini, est mal fondée, et que les signes adoptés pour ce même calcul ne sont pas bien choisis. Non seulement je partage ces opinions avec les illustres géomètres qui les ont développées d'une manière si lumineuse, mais j'ai prouvé en outre, dans mon *Essai sur le calcul des quantités variables* (Vandenhoek et Ruprecht; Göttingue, 1813, tom. I), qu'on n'a pas le droit de choisir arbitrairement les signes ultérieurs, dès qu'une fois les signes primordiaux ont été établis; et, dans un autre petit *Traité sur l'application du calcul des variables à la géométrie et à la mécanique*, j'ai montré que toutes les applications du calcul se font, sans le moindre secours de l'idée des quantités infinies, avec la même rigueur que les anciens exigeaient dans la géométrie, et que Lagrange a mise dans sa théorie des contacts. Je suis encore revenu sur cette matière dans le premier volume de mon *Recueil de traités sur divers sujets mathématiques* qui va paraître. Si donc, malgré tout cela, je me sers ici des signes vulgaires et des quantités infinitésimales, ce n'est de ma part ni contradiction ni désaveu tacite de mes principes; mais, ne pouvant présumer que les divers traités que je viens de citer, tous publiés en allemand, soient fort connus en France, en adoptant ici les doctrines qui y sont exposées, je n'aurais pu être compris de la plupart des lecteurs, à moins de faire précéder le présent mémoire d'une introduction qui lui aurait fait excéder de beaucoup les bornes dans lesquelles je dois m'efforcer de le renfermer.

Après cette courte explication, j'entre en matière.

Du parallélisme des courbes dans un plan.

3.

La première recherche qui doit nous occuper ici est celle d'une courbe parallèle à une courbe donnée qui en soit distante d'une quantité donnée.

Soient x, y les coordonnées de la courbe donnée, t, u celle de la courbe cherchée, et k la longueur commune des normales à la première terminées à la seconde. Soit (x', y') un point de la première courbe; et soit (t', u') le point correspondant de la seconde; l'équation de la normale à la première courbe, au point particulier que l'on considère sera, comme l'on sait,

$$(x-x')+(y-y')\frac{dy'}{dx'}=0\,;$$

puis donc que le point (t', u') est sur cette normale, et à une distance k de son point de départ, on doit avoir, à la fois,

$$(t'-x')+(u'-y')\frac{dy'}{dx'}=0\,,\quad (t'-x')^2+(u'-y')^2=k^2\,;$$

ou, en supprimant les accens, désormais inutiles,

$$(t-x)+(u-y)\frac{dy}{dx}=0\,, \tag{1}$$

$$(t-x)^2+(u-y)^2=k^2 \tag{2}$$

équations qui résolvent le problème.

Si, en effet, on veut mener à une courbe, donnée par une équation en x et y, une courbe parallèle qui en soit distante de la quantité k; de la différentielle de l'équation donnée, on tirera la valeur de $\frac{dy}{dx}$ pour la substituer dans l'équation (1), ce qui donnera une première équation finie entre x, y, t, u; l'équation (2) en sera une seconde, et la proposée sera la troisième. Eliminant donc x, y entre ces trois équations, l'équation résultante en t et u sera celle de la courbe cherchée.

Pour premier exemple, supposons que la ligne donnée, à laquelle on veut mener une parallèle à la distance k soit une droite déterminée par l'équation

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\,;$$

on en tirera, par différentiation,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}\,;$$

substituant cette valeur dans l'équation (1), elle deviendra

$$a(t-x)-b(u-y)=0\,;$$

d'un autre côté, l'équation de la droite donnée peut être écrite ainsi :

$$b(t-x)+a(u-y)=bt+au-ab\,:$$

De ces deux dernières équations, on tire

$$t-x=\frac{b(bt+au-ab)}{a^2+b^2}\,,\quad u-y=\frac{a(bt+au-ab)}{a^2+b^2}\,;$$

valeurs qui, substituées dans l'équation (2), donnent, après l'extraction de la racine quarrée, pour l'équation de la parallèle cherchée à la droite donnée,

$$bt+au=ab\pm k\sqrt{a^2+b^2}\,.$$

Cette équation est double, parce qu'en effet à une droite donnée dans un plan, on peut mener deux parallèles qui en soient distantes d'une quantité donnée.

Donnons encore un exemple, et soit, la ligne donnée, un cercle rapporté à des coordonnées que, pour plus de simplicité, nous supposerons rectangulaires et ayant son centre à l'origine ; soit l'équation de ce cercle

$$x^2+y^2=r^2 ,$$

on en tirera, par différentiation

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y} ;$$

au moyen de quoi l'équation (1) deviendra

$$t-x=\frac{x}{y}(u-y) ,$$

qui, combinée avec l'équation (2), donnera

$$t-x=\pm\frac{kx}{\sqrt{x^2+y^2}} ,\quad u-y=\pm\frac{ky}{\sqrt{x^2+y^2}} ;$$

c'est-à-dire,

$$t-x=\pm\frac{kx}{r} ,\quad u-x=\pm\frac{ky}{r} ,$$

d'où

$$x=\frac{rt}{r\pm k} ,\quad y=\frac{rt}{r\pm k} ,$$

en substituant donc ces valeurs dans l'équation du cercle donné, on obtient pour celle de la courbe cherchée

$$t^2+u^2=(r\pm k)^2 ,$$

équation d'un autre cercle, concentrique au premier, et ayant un rayon égal au sien, augmenté ou diminué de la longueur donnée k.

4.

On voit donc que le parallélisme des droites et celui des cercles sont *réciproques* ; c'est-à-dire que, si l'une de ces deux lignes est parallèle à une autre ligne de même dénomination, celle-ci sera, à l'inverse, parallèle à la première ; mais rien ne prouve, *à priori*, qu'il en doive être de même pour toutes les courbes, du moins en général ; c'est-à-dire que nous ne savons pas encore si, en élevant des normales égales d'un même côté par tous les points d'une courbe donnée quelconques, ces normales le seront aussi à la courbe qui joindra leurs extrémités, ou, ce qui revient au même, si les tangentes aux points correspondans des deux courbes seront parallèles.

Tout se réduit évidemment à comparer l'un à l'autre les deux coefficiens differentiels

$$\frac{dy}{dx}\,, \qquad \frac{du}{dt}\,,$$

qui déterminent l'inclinaison de ces tangentes sur l'axe des x ; et ce serait une chose très-facile, si l'on avait les équations des deux courbes ; mais on ne peut les avoir que pour des cas particuliers ; et, en se tenant dans les généralités, on n'a, entre les points correspondans des deux courbes, que les seules relations (1, 2). Voici comment on peut facilement parvenir à éluder cette difficulté.

Quelle que soit la courbe donnée, par le seul fait de l'existence de cette courbe, y se trouve être une fonction de x ; mais, par la relation constante entre les points correspondans des deux courbes, t et u sont, l'un et l'autre, fonctions de x et y ; donc y, t, u peuvent être considérés tous trois comme des fonctions de x.

En différentiant sous ce point de vue l'équation (2), on trouve

$$(t-x)\left(\frac{dt}{dx}-1\right)+(u-y)\left(\frac{du}{dx}-\frac{dy}{dx}\right)=0\,;$$

en éliminant $t-x$ entre celle-ci et l'équation (1) $u-y$ disparaîtra de lui-même et il viendra, en réduisant

$$\frac{du}{dx}=\frac{dy}{dx}\,\frac{dt}{dx}\,,$$

d'où

$$\frac{du}{dt}=\frac{dy}{dx}\,; \qquad (3)$$

donc *le parallélisme est généralement réciproque pour toutes les courbes.*

Au moyen de l'équation (3), les équations (1, 2) peuvent être mises sous cette forme

$$(x-t)+(y-u)\frac{du}{dt}=0\,,$$

$$(x-t)^2+(y-u)^2=k^2\,;$$

et elles ne diffèrent alors de celles-là qu'en ce que t et u s'y trouvent respectivement changés en x et y, et réciproquement; on déterminera donc la première courbe au moyen de la seconde par un calcul tout pareil à celui qui sert à déterminer la seconde à l'aide de la première.

5.

Occupons-nous présentement de la relation entre les rayons de courbure des points correspondans des deux courbes. Mais cherchons d'abord la relation entre les coefficiens différentiels du second ordre.

Dans

Dans l'hypothèse actuelle, on a, en vertu de l'équation (3),

$$\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{d\left(\frac{du}{dt}\right)}{dt}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dt}{dx}}\ ;$$

mais, en différentiant l'équation (1), il vient

$$\frac{dt}{dx}-1+\left(\frac{du}{dx}-\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx}+(u-y)\frac{d^2y}{dx^2}=0\ ;$$

nous avons d'ailleurs trouvé tout à l'heure

$$\frac{du}{dx}=\frac{dy}{dx}\,\frac{dt}{dx}\ ,$$

ce qui donnera en substituant

$$\left(\frac{dt}{dx}-1\right)\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}+(u-y)\frac{d^2y}{dx^2}=0\ ;$$

d'où

$$\frac{dt}{dx}=1-\frac{(u-y)\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ ;$$

substituant cette valeur dans celle de $\frac{d^2u}{dt^2}$, elle deviendra

$$\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1-\frac{(u-y)\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\ ;$$

et telle est la relation cherchée.

Cela posé, en éliminant $t-x$ entre les équations (1, 2), on a

$$u-y=\pm\frac{k}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\,;$$

en conséquence de quoi la valeur de $\frac{d^2u}{dt^2}$ devient

$$\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1\mp\frac{k\,\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}}\,;$$

donc, en vertu de l'équation (3);

$$\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\mp k}=\frac{\left\{1+\left(\frac{du}{dt}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\mp k}\,;$$

ou encore

$$\frac{\left\{1+\left(\frac{du}{dt}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2u}{dt^2}}=\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\mp k\,;$$

mais, en représentant par r le rayon de courbure de la courbe dont les coordonnées sont x, y, et par ρ celui de la courbe dont les coordonnées sont t et u, on a

$$r=\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad \rho=\frac{\left\{1+\left(\frac{du}{dt}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2u}{dt^2}};$$

donc finalement

$$\rho=r\mp k; \qquad (4)$$

c'est-à-dire, que *la différence des rayons de courbure des points correspondans de deux courbes parallèles est constante et égale à la longueur du segment de la normale commune interceptée entre les deux courbes*; d'où il est facile de conclure que *les points correspondans de deux courbes parallèles ont le même centre de courbure*.

6.

Les propositions établies dans les deux articles précédens auraient pu, au surplus, être facilement déduites de la théorie connue des développées. Lorsqu'en effet une courbe est donnée, sa développée l'est aussi; et, en supposant un fil qui la développe, l'un des points de ce fil décrira la courbe proposée, et la direction de ce même fil sera normale à cette courbe dans tout le mouvement. Que, si l'on considère sur ce fil un second point éloigné du premier de la quantité k, il est clair, suivant les définitions que nous avons adoptées, que ce point décrira une courbe parallèle à la première.

Or, on voit, 1.° que les normales seront communes aux deux courbes; 2.° qu'elles auront en leurs points correspondans le même centre de courbure; 3.° que par conséquent leurs rayons de courbure en ces mêmes points différeront constamment de la quantité k; mais il pouvait n'être pas sans intérêt de montrer comment l'analise conduit à tous ces résultats, sans rien emprunter de la théorie des développées.

7.

Passons à la considération des longueurs des arcs correspondans des deux courbes. Soient s un arc quelconque de la première, et σ l'arc correspondant de la seconde; nous aurons

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2},$$

et nous aurions pareillement

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)},$$

si nous considérions u comme fonction de t, variable indépendante; mais, en considérant t et u comme fonctions de x, et nous rappelant en outre de la relation (3), il faudra écrire

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x};$$

or, nous venons de trouver tout-à-l heure

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=1-\frac{(u-y)\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}}{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2};$$

donc, en substituant,

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}-\frac{(u-y)\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}}{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2};$$

mais

$$(u-y)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=(u-y)\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

$$=(u-y)\sqrt{1+\left(\frac{t-x}{u-y}\right)^2}=\sqrt{(t-x)^2+(u-y)^2}=\pm k\ ;$$

donc finalement

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\mp k.\frac{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}}{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\ .$$

En intégrant cette équation, il viendra

$$\sigma=s\mp k\,\mathrm{Arc}\left(\mathrm{Tang.}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+C\ .$$

dans cette intégrale, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ est l'angle que fait la tangente à la courbe avec l'axe des x; de sorte qu'en désignant par θ l'arc qui le mesure, et dont le rayon est égal à l'unité, on aura

$$\sigma=s\mp k\theta+C\ .$$

Si donc on désigne par α et β les valeurs de θ qui répondent aux deux extrémités de l'arc que l'on considère en particulier, on aura pour l'intégrale, prise entre ces limites,

$$\sigma=s\mp k(\alpha-\beta)\ ; \qquad (5)$$

C'est l'expression de l'arc d'une parallèle à une courbe donnée, si la longueur de l'arc, correspondant de cette dernière, est s, et si k est la distance entre l'une et l'autre.

Dans cette formule, $\alpha-\beta$, qui est la différence des angles que forment avec l'axe des x les tangentes aux deux extrémités de l'arc, est en même temps la différence des angles que forment les normales à ces mêmes extrémités avec la même droite ; c'est donc l'angle que forment entre elles ces deux normales ; d'où il suit que $k(\alpha-\beta)$ est la longueur de l'arc de cercle qui, ayant k pour rayon, mesurerait l'angle de ces normales ; on a donc cet élégant théorème :

La différence des longueurs de deux arcs de courbes parallèles, compris entre les deux mêmes normales est égale à la longueur d'un arc de cercle compris entre ces mêmes normales, décrit de leur point de concours comme centre avec un rayon égal à la distance constante entre les deux courbes.

Si l'une des courbes était fermée, à la manière des ellipses, l'autre le serait également ; et, si l'on voulait les considérer dans toute leur étendue, l'angle des normales extrêmes serait alors égal à quatre angles droits ; donc *la différence des longueurs de deux courbes parallèles fermées est égale à la circonférence d'un cercle qui aurait pour rayon la distance constante entre les deux courbes.*

Donc, en particulier, la différence des circonférences de deux cercles concentriques est une autre circonférence qui aurait pour rayon la différence des leurs. C'est, en effet, ce qui se vérifie facilement, puisqu'en désignant par r et r' les rayons des deux cercles, on a $2\varpi r-2\varpi r'=2\varpi(r-r')$. Il est, au surplus, facile de voir qu'il en serait de même pour des arcs des deux cercles compris entre les mêmes rayons ; c'est-à-dire, que leur différence serait l'arc du troisième cercle compris entre ces rayons.

En considérant donc les deux courbes comme engendrées par leur développée commune, ceci pourra servir à démontrer, sans calcul, le théorème ci-dessus. On voit, en effet, que les deux points décrivans du fil développant tracent, à chaque instant, de petits arcs de cercles semblables et concentriques, dont la différence est un troisième arc semblable et concentrique, ayant pour rayon la différence des leurs ; d'où il suit que la différence entre la somme des uns et celle des autres ; c'est-à-dire, la différence entre les arcs correspondans des deux courbes, doit être telle que l'annonce le théorème.

On peut encore observer, d'après ce qui précède, que si, entre nos deux courbes parallèles, on en décrit une troisième qui passe par les milieux des portions de normales interceptées entre elles, cette courbe que, pour cela, nous nommerons la *courbe aux centres*, sera nécessairement parallèle à l'une et à l'autre; en outre, sa longueur sera moyenne arithmétique entre les leurs, puisque les différences de cette longueur, avec celles des deux autres courbes, seront deux arcs de cercles égaux. Ainsi, *la longueur de la courbe aux centres, entre les normales qui terminent deux arcs de courbes parallèles, est égale à la demi-somme de ces arcs.*

8.

Occupons-nous présentement de la mesure de la surface comprise entre les arcs correspondans de deux courbes parallèles et les normales à leurs extrémités, surface que nous désignerons par S.

Considérons l'élément de cette surface compris entre deux normales infiniment voisines; cet élément est la différence entre deux secteurs circulaires concentriques ayant $\mathrm{d}s$ et $\mathrm{d}\sigma$ pour bases et dont les rayons respectifs sont r et ρ; d'où il suit qu'on doit avoir

$$\mathrm{d}S=\tfrac{1}{2}r\mathrm{d}s-\tfrac{1}{2}\rho\mathrm{d}\sigma=\tfrac{1}{2}(r\mathrm{d}s-\rho\mathrm{d}\sigma)\ ,$$

ou plutôt

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}\left(r\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}-\rho\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}\right)\ ;$$

mais, en supposant $\rho<r$, nous avons trouvé

$$\rho=r-k\ ,\qquad \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}-\frac{k\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}}{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\ ;$$

substituant donc et réduisant, on aura

$$\frac{dS}{dx}=\tfrac{1}{2}k\left\{\frac{ds}{dx}+r.\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}-k\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right\};$$

mais

$$r=\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}\frac{ds}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

en substituant donc, nous aurons

$$\frac{dS}{dx}=k\frac{ds}{dx}-\tfrac{1}{2}k^2.\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2};$$

ce qui donne, en intégrant,

$$S=ks-\tfrac{1}{2}k^2\text{Arc}\left(\text{Tang.}=\frac{dy}{dx}\right)+C.$$

en faisant, comme ci-dessus, Arc $\left(\text{Tang.}=\frac{dy}{dx}\right)=\theta$, il viendra

$$S=ks-\tfrac{1}{2}k^2\theta+C.$$

Si, de plus, on désigne par α et β les valeurs de θ aux extrémités de l'arc s, on aura, entre ces limites,

$$S=ks-\tfrac{1}{2}k^2(\alpha-\beta). \qquad (6)$$

or, il est aisé de voir que $\frac{1}{2}k^2(\alpha-\beta)$ exprime l'aire du secteur circulaire qui, ayant son centre au point de concours des normales extrême, et étant compris entre ces normales, aurait pour rayon la distance constante entre les deux courbes, tandis que ks exprime

prime l'aire d'un rectangle qui, ayant pour base la courbe extérieure, aurait pour hauteur cette même distance constante ; on a donc ce théorème :

L'aire du trapèze mixtiligne compris entre les arcs correspondans de deux courbes parallèles et les normales à leurs extrémités est égale à l'aire d'un rectangle qui, ayant pour base l'arc extérieur, aurait pour hauteur la distance constante entre les deux courbes, moins l'aire d'un secteur circulaire qui, ayant son centre au point de concours des normales extrêmes, et étant compris entre ces normales, aurait son rayon égal à cette même distance constante.

Ayant trouvé ci-dessus

$$s=\sigma+k(\alpha-\beta)\ ,$$

il en résulte

$$ks=k\sigma+k^2(\alpha-\beta)\ ;$$

ce qui donne, en substituant et réduisant,

$$S=k\sigma+\tfrac{1}{2}k^2(\alpha-\beta)\ , \qquad (7)$$

c'est-à-dire,

L'aire du trapèze mixtiligne compris entre les arcs correspondans de deux courbes parallèles et les normales à leurs extrémités est égale à l'aire d'un rectangle qui, ayant pour base l'arc intérieur, aurait pour hauteur la distance constante entre les deux courbes, plus l'aire d'un secteur circulaire qui, ayant son centre au point de concours des normales extrêmes, et étant compris entre ces normales, aurait son rayon égal à cette même distance constante.

En prenant la demi-somme de ces deux expressions de S, il vient

$$S=\tfrac{1}{2}k(s+\sigma)\ ;$$

mais $\frac{1}{2}(s+\sigma)$ est la longueur de la courbe aux centres; donc aussi

L'aire du trapèze mixtiligne compris entre les arcs correspondans de deux courbes parallèles et les normales à leurs extrémités, est égale à l'aire du rectangle qui, ayant pour base la longueur de l'arc de la courbe aux centres compris entre les mêmes normales, aurait pour hauteur la distance constante entre les deux courbes extrêmes.

Tous ces résultats peuvent, au surplus, être obtenus sans le moindre calcul. En considérant le trapèze élémentaire compris entre deux normales infiniment voisines, on voit que son aire est la parallèle à ses deux bases également distante de l'une et de l'autre, c'est-à-dire l'arc de la courbe aux centres intercepté, multiplié par sa hauteur, c'est-à-dire, par la distance constante entre les deux courbes extrêmes; prenant donc la somme de tous les produits de cette sorte, à cause du second facteur qui est constant, on tombera sur notre dernier théorème, d'où il sera facile ensuite de déduire les deux qui le précèdent.

Dans le cas de deux courbes parallèles entièrement fermées, comme seraient deux ellipses, l'angle des normales extrêmes étant égal à deux angles droits, on voit que l'espace compris entre elles a pour mesure le rectangle qui, ayant pour base la courbe enveloppante, aurait pour hauteur la distance entre les deux courbes, moins le cercle qui aurait cette même distance pour rayon; ou bien le rectangle qui, ayant pour base la courbe enveloppée et même hauteur que le premier, augmenté de ce même cercle.

Du parallélisme des surfaces courbes.

9.

Pour suivre la même marche que nous avons observée dans la théorie des courbes planes parallèles, voyons, en premier lieu, comment nous déterminerons une surface parallèle à une surface donnée qui en soit distante d'une quantité donnée. Soient x, y, z les coordonnées de la surface donnée, t, u, v celles de la surface cherchée, et k la longueur commune des normales à la première terminées à la seconde. Soit (x', y', z') un point de la première courbe; et soit (t', u', v') le point correspondant de la seconde; les équations de la normale à la première courbe, au point particulier que l'on considère seront, comme l'on sait,

$$(x-x')+(z-z')\frac{dz'}{dx'}=0,$$

$$(y-y')+(z-z')\frac{dz'}{dy'}=0;$$

puis donc que le point (t', u', v') doit être sur cette normale, et à une distance k de son point de départ, on doit avoir, à la fois,

$$(t'-x')+(v'-z')\frac{dz'}{dx'}=0,$$

$$(u'-y')+(v'-z')\frac{dz'}{dy'}=0,$$

$$(t'-x')^2+(u'-y')^2+(v'-z')^2=k^2;$$

ou, en supprimant les accens, désormais inutiles,

$$(t-x)+(v-z)\frac{dz}{dx}=0, \qquad (1)$$

$$(u-y)+(v-z)\frac{dz}{dy}=0, \qquad (2)$$

$$(t-x)^2+(u-y)^2+(v-z)^2=k^2; \qquad (3)$$

équations qui résolvent le problème.

Si, en effet, une surface est donnée, par une équation en x, y, z; en différentiant successivement cette équation, par rapport aux deux variables indépendantes x et y, on en tirera les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ qui pourront être substituées dans les équations (1, 2); joignant les équations résultantes à l'équation (3) et à l'équation de la surface proposée, on aura en tout quatre équations, entre lesquelles éliminant x, y, z, l'équation résultante, en t, u, v, sera celle de la surface demandée.

Pour premier exemple, supposons que la surface à laquelle on veut mener une surface parallèle à la distance k soit un plan donné par l'équation

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

on en tirera, par différentiation,

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{c}{a}, \qquad \frac{dz}{dy}=-\frac{c}{b},$$

au moyen de quoi les équations (1, 2) deviendront

$$t-x=\frac{c}{a}(v-z), \quad u-y=\frac{c}{b}(v-z);$$

mais l'équation du plan donné peut être mise sous cette forme

$$bc(t-x)+ca(u-y)+ab(v-z)=bct+cau+abv-abc;$$

de celle-ci et des deux qui la précède, on tire

$$t-x=\frac{bc(bct+cau+abv-abc)}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2},$$

$$u-y=\frac{ca(bct+cau+abv-abc)}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2},$$

$$v-z=\frac{ab(bct+cau+abv-abc)}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2};$$

substituant donc, dans l'équation (3), on obtiendra, pour l'équation de la surface parallèle cherchée

$$bct+cau+abv=abc\pm k\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2};$$

équation commune à deux plans, comme on pouvait bien s'y attendre.

Soit encore la surface donnée une sphère, rapportée à des coordonnées rectangulaires, et ayant son centre à l'origine; son équation sera

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$

d'où

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{x}{z}, \qquad \frac{dz}{dy}=-\frac{y}{z};$$

au moyen de quoi les équations (1, 2) deviennent

$$t-x=\frac{x}{z}(v-z), \quad u-y=\frac{y}{z}(v-z),$$

et donnent, en les combinant avec l'équation (3),

$$t-x=\pm\frac{kx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad u-y=\pm\frac{ky}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad v-z=\pm\frac{kz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

c'est-à-dire,

$$t-x=\pm\frac{kx}{r}, \quad u-y=\pm\frac{ky}{r}, \quad v-z=\pm\frac{kz}{r};$$

d'où

$$x=\frac{rt}{r\pm k}, \quad y=\frac{ru}{r\pm k}, \quad z=\frac{rv}{r\pm k}.$$

en substituant donc ces valeurs dans l'équation de la sphère donnée, on obtient, pour celle de la surface cherchée

$$t^2+u^2+v^2=(r\pm k)^2 ;$$

équation d'une autre sphère, concentrique à la première, et ayant un rayon égal au sien, augmenté ou diminué de la longueur k.

10.

Le parallélisme est donc réciproque, pour les plans et les sphères, et nous sommes naturellement conduits à chercher s'il en est de même pour toutes les surfaces. Observons auparavant qu'en vertu des équations (1, 2, 3) et de l'equation de la surface donnée, quatre quelconques des six variables t, u, v, x, y, z peuvent être considérées comme fonctions des deux autres. Dans tout ce qui va suivre, nous considérerons t, u, v, z comme fonctions de x et y qui seront ainsi les deux variables indépendantes.

Cela posé, en différentiant successivement l'équation (3) par rapport à x et y, on trouve

$$\left(\frac{dt}{dx}-1\right)(t-x)+\frac{du}{dx}(u-y)+\left(\frac{dv}{dx}-\frac{dz}{dx}\right)(v-z)=0 ,$$

$$\frac{dt}{dy}(t-x)+\left(\frac{du}{dy}-1\right)(u-y)+\left(\frac{dv}{dy}-\frac{dz}{dy}\right)(v-z)=0 ,$$

en mettant, dans ces équations, pour $t-x$, $u-y$ les valeurs données par les équations (1, 2) et reduisant, il viendra

$$\frac{dv}{dx}=\frac{dt}{dx}\,\frac{dz}{dx}+\frac{du}{dx}\,\frac{dz}{dy}\,,\qquad \frac{dv}{dy}=\frac{dt}{dy}\,\frac{dz}{dx}+\frac{du}{dy}\,\frac{dz}{dy}\,.$$

En posant

$$\frac{dz}{dx}=p\,,\qquad \frac{dz}{dy}=q\,,\qquad \frac{dv}{dt}=p'\,,\qquad \frac{dv}{du}=q'\,,$$

ces équations deviennent d'abord

$$\frac{dv}{dx}=p\,\frac{dt}{dx}+q\,\frac{du}{dx}\,,\qquad \frac{dv}{dy}=p\,\frac{dt}{dy}+q\,\frac{du}{dy}\,,$$

on a d'un autre côté

$$dv=p'dt+q'du=p'\left(\frac{dt}{dx}\,dx+\frac{dt}{dy}\,dy\right)+q'\left(\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}\,dy\right)$$

c'est à-dire,

$$dv=\left(p'\,\frac{dt}{dx}+q'\,\frac{du}{dx}\right)dx+\left(p'\,\frac{dt}{dy}+q'\,\frac{du}{dy}\right)dy\,;$$

d'où

$$\frac{dv}{dx}=p'\,\frac{dt}{dx}+q'\,\frac{du}{dx}\,,\qquad \frac{dv}{dy}=p'\,\frac{dt}{dy}+q'\,\frac{du}{dy}\,;$$

valeurs qui, comparées à celles ci-dessus, s'accordent à donner

$$p=p'\,,\qquad q=q'\,,$$

c'est-à-dire,

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dv}{dt}\,,\qquad \frac{dz}{dy}=\frac{dv}{du}\,;\qquad\qquad (4)$$

or, ces coefficiens fixent la direction des plans tangens aux points correspondans des deux surfaces ; ces plans sont donc parallèles ; la normale à l'un d'eux est donc aussi normale à l'autre ; on a donc ce théorème général :

Si les normales à une surface courbe, terminées à une autre surface courbe, sont de même longueur, elles seront également normales à celle-ci ; de sorte que les normales à cette dernière, terminées à la première, seront aussi de même longueur, et que les deux surfaces seront exactement et réciproquement parallèles.

II.

L'aire d'une surface courbe étant, pour cette surface, ce qu'est, pour une ligne courbe, la longueur de cette ligne ; et le volume compris entre deux surfaces courbes parallèles et la surface formée par une suite de normales communes à l'une et à l'autre étant, dans l'espace, ce qu'est, sur un plan, la surface comprise entre deux courbes parallèles et deux quelconques de leurs normales, on devrait s'attendre à rencontrer ici des théorèmes analogues à ceux que nous avons trouvés par rapport aux courbes planes parallèles ; c'est-à-dire qu'on serait fondé à soupçonner que la différence des aires des portions correspondantes de deux pareilles surfaces ne dépend uniquement que de leur distance constante et de la nature de la surface formée par les normales communes à leurs contours ; et que l'espace compris entre elles et cette même surface ne dépend également que de l'intervalle qui les sépare et de l'aire de la portion correspondante de la surface des centres ; mais il est facile de s'assurer que cette analogie n'existe pas. Si, en effet, elle existait, elle devrait encore avoir lieu pour des cas particuliers, et conséquemment pour deux sphères concentriques.

Or, soient r, $r+k$ les rayons de ces deux sphères ; leurs surfaces seront $4\varpi r^2$ et $4\varpi(r+k)^2$ dont la difference $4\varpi k(2r+k)^2$ n'est point independante du rayon r. Leurs volumes sont $\frac{4}{3}\varpi r^3$ et $\frac{4}{3}\varpi(r+k)^3$ dont la difference est $\frac{4}{3}\varpi k(3r^2+3kr+k^2)$. Or, en designant par s la surface

surface des centres dont le rayon est $r+\frac{1}{2}a$, on aura $s=4\varpi(r+\frac{1}{2}k)^2$. En chassant r de l'expression ci-dessus, au moyen de cette équation, elle devient, toutes réductions faites,

$$ks+2.\tfrac{4}{3}\varpi\left(\frac{k}{2}\right)^5 ;$$

ce qui montre que l'espace compris entre deux sphères concentriques n'est pas seulement égal au produit de la surface des centres par la distance entre les deux sphères, mais à ce produit augmenté du double du volume d'une sphère qui aurait cette distance pour diamètre.

12.

Si l'on désigne par S l'aire d'une portion quelconque de la surface dont les coordonnées sont x, y, z, et par Σ l'aire de la portion correspondante de celle dont les coordonnées sont t, u, v, on aura, comme l'on sait,

$$\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^2},\quad \frac{\mathrm{d}^2\Sigma}{\mathrm{d}t\mathrm{d}u}=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)^2}$$

donc, en vertu des relations (4),

$$\frac{\mathrm{d}^2\Sigma}{\mathrm{d}t\mathrm{d}u}=\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} ;$$

mais, en considérant t, u, v, z comme fonctions de x, y, on aura

$$\frac{\mathrm{d}^2\Sigma}{\mathrm{d}t\mathrm{d}u}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}\Sigma}{\mathrm{d}t}\right)}{\mathrm{d}u}=\frac{\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}\Sigma}{\mathrm{d}t}}{\mathrm{d}x}.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}+\frac{\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}\Sigma}{\mathrm{d}t}}{\mathrm{d}y}.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} ,$$

or, dans la même hypothèse,

$$\frac{d\Sigma}{dt} = \frac{d\Sigma}{dx}\cdot\frac{dx}{du} + \frac{d\Sigma}{dy}\cdot\frac{dy}{du},$$

d'où

$$\frac{d.\frac{d\Sigma}{dt}}{dx} = \frac{d^2\Sigma}{dx^2}\cdot\frac{dx}{du} + \frac{d^2\Sigma}{dxdy}\cdot\frac{dy}{du},$$

$$\frac{d.\frac{d\Sigma}{dt}}{dy} = \frac{d^2\Sigma}{dxdy}\cdot\frac{dx}{du} + \frac{d^2\Sigma}{dy^2}\cdot\frac{dy}{du},$$

ce qui donnera, en substituant,

$$\frac{d^2\Sigma}{dtdu} = \frac{d^2S}{dxdy} = \frac{d^2\Sigma}{dx^2}\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \frac{d^2\Sigma}{dy^2}\left(\frac{dy}{du}\right)^2 + 2\frac{d^2\Sigma}{dxdy}\cdot\frac{dx}{du}\cdot\frac{dy}{du}.$$

Cette équation différentielle contient implicitement l'expression cherchée de $\frac{d^2\Sigma}{dxdy}$ en S, x, y. On pourra la résoudre dans des cas particuliers.

13.

Ayant trouvé les expressions des élémens

$$\frac{d^2S}{dxdy}, \qquad \frac{d^2\Sigma}{dtdu},$$

en x, y, on aura aussi celle de l'élément du volume compris entre les deux surfaces parallèles; car cet élément peut être considéré comme une pyramide tronquée, dont nos deux surfaces élémentaires sont les deux bases parallèles et dont la hauteur est k. Il serait intéressant d'appliquer ces formules aux surfaces développables.

Du parallélisme des courbes à double courbure.

14.

Si l'on applique aux courbes à double courbure la définition que nous avons donnée tant des lignes parallèles, dans un plan, que des surfaces parallèles, dans l'espace, on verra aisément qu'il n'y a pas seulement ici une ou deux lignes parallèles et également distantes d'une ligne donnée; mais que ces parallèles sont en nombre infini et forment, par leur ensemble, une sorte de tuyau ou de cylindre courbe, dont la ligne à double courbure donnée peut être considérée comme l'axe.

On peut remarquer, en effet, que, par le point de contact de chaque tangente à une courbe à double courbure, on peut lui mener une infinité de perpendiculaires, toutes comprises dans le plan normal à ce point, et qu'en prenant toutes ces perpendiculaires d'une même longueur k, leurs extrémités appartiendront à une circonférence ayant le point de contact pour centre et cette longueur k pour rayon; et il répondra un pareil cercle à chacun des points de la courbe donnée. Puis donc que la parallèle à cette courbe n'est assujettie qu'à passer par les extrémités d'une suite de normales d'une longueur constante k; il est visible qu'ici le nombre des parallèles sera infini, et qu'elles seront toutes tracées sur le tuyau ou sur la surface annulaire dont il vient d'être question, et dont toutes les sections normales à son axe sont des cercles égaux, mais non parallèles.

15.

Si, par la tangente en l'un des points d'une courbe à double courbure, on conduit un plan arbitraire, et par le point de contact une normale perpendiculaire à ce plan, prolongée jusqu'à la rencontre de la surface parallèle ; le plan tangent à cette surface, par l'extrémité de la normale sera parallèle au plan arbitraire.

Imaginons, en effet, une seconde surface parallèle à la même courbe, et par conséquent concentrique à la première ; il est clair que ces deux surfaces seront parallèles, que les points où elles seront percées par la normale dont il s'agit en seront des points correspondans, et qu'ainsi leurs plans tangens en ces points seront parallèles.

Supposons que, la seconde surface étant intérieure à la première, son rayon diminue sans cesse ; les deux plans tangens ne cesseront point d'être parallèles ; or, il est clair que, lorsque ce rayon sera devenu nul, la seconde surface se trouvant réduite à la courbe donnée, son plan tangent se confondra avec notre plan arbitraire, auquel conséquemment l'autre doit être parallèle.

16.

Voyons présentement de quelle manière, une courbe à double courbure étant donnée, on pourra trouver une surface qui, lui étant parallèle, en soit distante d'une quantité donnée.

Soient x, y, z les coordonnées de la courbe à double courbure, que nous supposons donnée par deux équations entre ces trois variables. Soient t, u, v les coordonnées de la surface cherchée, et soit enfin k la distance constante à laquelle cette surface doit se trouver de la courbe proposée.

Considérons, en particulier, un point (x', y', z') de notre courbe, et soit (t', u', v') le point correspondant de la surface cherchée. Le plan normal au point (x', y', z') aura, comme l'on sait, pour équation

$$(x-x')\frac{dx'}{dz'}+(y-y')\frac{dy'}{dz'}+(z-z')=0\ ;$$

il faudra donc exprimer à la fois que le point (t', u', v') est sur ce plan, et qu'il est à une distance k du premier ; ce qui donnera les deux équations

$$(t'-x')\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}z'}+(u'-y')\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}z'}+(v'-z')=0\,,$$

$$(t'-x')^2+(u'-y')^2+(v'-z')^2=k^2\,;$$

ou, en supprimant les accens désormais inutiles,

$$(t-x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+(u-y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}+(v-z)=0\,, \qquad (1)$$

$$(t-x)^2+(u-y)^2+(v-z)^2=k^2\,; \qquad (2)$$

équations qui résolvent le problème.

La courbe donnée étant, en effet, exprimée par deux équations en x, y, z, on tirera de ces deux équations, par la différentiation, les valeurs de $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$, pour les mettre dans l'équation (1); en joignant l'équation résultante à l'équation (2) et aux deux équations de la courbe proposée, on se trouvera avoir en tout quatre équations entre lesquelles éliminant x, y, z, l'équation résultante en t, u, v sera celle de la surface cherchée.

Pour premier exemple de l'application de cette méthode, supposons que la ligne donnée soit une droite exprimée par la double équation

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\,;$$

nous aurons, par différentiation,

$$\frac{dx}{dz}=\frac{a}{c}\ ,\quad \frac{dy}{dz}=\frac{b}{c}\ ;$$

au moyen de quoi l'équation (1) deviendra

$$a(t-x)+b(u-y)+c(v-z)=0\ ;$$

de celle-ci et de la double équation de notre droite on tirera

$$x=\frac{a(at+bu+cv)}{a^2+b^2+c^2}\ ,\quad y=\frac{b(at+bu+cv)}{a^2+b^2+c^2}\ ,\quad z=\frac{c(at+bu+cv)}{a^2+b^2+c^2}\ ,$$

et, par suite,

$$t-x=\frac{(a^2+b^2+c^2)t-a(at+bu+cv)}{a^2+b^2+c^2}\ ,$$

$$u-y=\frac{(a^2+b^2+c^2)u-b(at+bu+cv)}{a^2+b^2+c^2}\ ,$$

$$v-z=\frac{(a^2+b^2+c^2)v-c(at+bu+cv)}{a^2+b^2+c^2}\ ;$$

substituant donc ces valeurs dans l'équation (2), nous aurons, pour l'équation de la courbe cherchée,

$$(at+bu+cv)^2=(a^2+b^2+c^2)(t^2+u^2+v^2-k^2)\ .$$

Soit encore, pour exemple, le cercle donné par le système des deux équations

$$ax+by+cz=0\ ,$$

$$x^2+y^2+z^2=r^2\ ;$$

on aura ici

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=\frac{bz-cy}{ay-bx}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=\frac{cx-az}{ay-bx}\,;$$

valeurs qui, substituées dans l'équation (1), la changeront en celle-ci :

$$(bz-cy)(t-x)+(cx-az)(u-y)+(ay-bx)(v-z)=0\ ;$$

laquelle se réduit à

$$(cu-bv)x+(av-ct)y+(bt-au)z=0\ ;$$

En la combinant avec les deux équations du cercle donné, et posant

$$a^2+b^2+c^2=1\,,$$

ce qui est permis, on en tirera

$$x=r.\frac{a(at+bu+cv)-t}{\sqrt{(t^2+u^2+v^2)-(at+bu+cv)^2}}\,;$$

$$y=r.\frac{b(at+bu+cv)-v}{\sqrt{(t^2+u^2+v^2)-(at+bu+cv)^2}}\,,$$

$$z=r.\frac{c(at+bu+cv)-v}{\sqrt{(t^2+u^2+v^2)-(at+bu+cv)^2}}\,;$$

substituant ces valeurs dans l'équation (2) on trouvera, pour l'équation de la courbe cherchée,

$$4r^2\{(t^2+u^2+v^2)-(at+bu+cv)^2\}=\{r^2+(t^2+u^2+v^2-k^2)\}^2\,.$$

17.

L'aire et le volume de la surface parallèle à une courbe à double courbure donnée, l'une et l'autre étant prises entre deux plans normaux, peuvent facilement se déterminer sans calcul.

Si, en effet, on imagine deux plans normaux infiniment voisins, ils couperont la surface suivant deux cercles égaux ayant leurs centres sur la courbe à laquelle cette surface est parallèle : ces plans comprendront donc entre eux un cylindre élémentaire, dont, à la vérité, les deux bases pourront fort bien n'être point parallèles ; mais on démontre aisément que, quant à sa surface et quant à son volume, un tel cylindre est équivalent au cylindre à bases parallèles dont la hauteur serait égale à la droite qui joint les centres des deux bases du premier ; or, de là résultent évidemment les deux propositions suivantes, parfaitement analogues à celles que nous avons établies sur les courbes planes parallèles :

L'aire de la portion d'une surface parallèle à une courbe à double courbure comprise entre deux plans normaux à cette courbe, est égale à la circonférence de l'une des sections normales multipliée par la longueur de la portion de la courbe comprise entre les deux mêmes plans.

Le volume du corps terminé par une surface parallèle à une courbe à double courbure et par deux plans normaux à cette courbe, est égal à la surface de l'une des sections normales multipliée par la longueur de la portion de la courbe comprise entre les deux mêmes plans.

18.

D'après ce que nous avons dit ci-dessus, toute courbe tracée sur la surface parallèle à une courbe à double courbure peut être considérée comme parallèle à cette courbe, en ce sens que tous ses points en sont également distans. Mais, entre toutes les courbes qui peuvent être tracées de cette manière, il en est une classe qui méritent plus particulièrement cette dénomination, et qui sont, sur la surface dont il s'agit, ce que sont sur le cylindre ordinaire les

les parallèles à son axe ; ce sont les courbes qui ont leurs tangentes en chaque point parallèles aux tangentes aux points correspondans de la courbe à double courbure à laquelle la surface dont il s'agit est parallèle. Comme ces courbes sont déjà assujetties à être sur une surface qui est censée connue, il ne s'agit plus, pour déterminer l'une d'elles, que d'assigner une autre courbe sur laquelle elle se trouve également.

Soit (x', y', z') un point de la courbe à double courbure donnée ; et soit (t', u', v') le point correspondant de la parallèle cherchée ; les tangentes en ces deux points auront pour équations

$$x-x'=\frac{dx'}{dz'}(z-z')\,, \qquad x-t'=\frac{dt'}{dv'}(z-v')\,,$$

$$y-y'=\frac{dy'}{dz'}(y-y')\,; \qquad y-u'=\frac{du'}{dv'}(z-v')\,;$$

donc, pour que les courbes soient parallèles, on devra avoir, en supprimant les accens,

$$\frac{dx}{dz}=\frac{dt}{dv}\,, \qquad \frac{dy}{dz}=\frac{du}{dv}\,.$$

en différentiant donc les deux équations de la courbe à double courbure donnée, et en changeant, dans leurs différentielles respectivement dx, dy, dz en dt, du, dv, on se trouvera avoir quatre équations, entre lesquelles éliminant x, y, z, on obtiendra pour résultat l'équation différentielle totale d'une surface qui coupera la surface parallèle suivant la courbe cherchée. Ayant intégré cette équation, on déterminera la constante introduite par l'intégration en assujettissant la courbe à passer par un point déterminé de la surface parallèle.

19.

Entre toutes les courbes parallèles et également distantes d'une courbe à double courbure donnée, prises dans le sens que nous venons de dire, il en est deux qui sont particulièrement remarquables ; ce sont celles qui, dans les points qui correspondent à ceux de la courbe à double courbure donnée, ont avec elle le même plan osculateur, et se trouvent conséquemment situées avec cette courbe sur une même surface développable enveloppe de tous ses plans osculateurs.

La courbe à double courbure étant donnée, rien n'est plus facile que d'obtenir ces deux parallèles. Soit (x', y', z') un point de la courbe à double courbure donnée, et soit (t', u', v') le point correspondant de la parallèle cherchée ; les équations du plan normal et du plan osculateur seront

$$(x-x')\frac{dx'}{dz'}+(y-y')\frac{dy'}{dz'}+(z-z')=0\ ,$$

$$(x-x')\frac{d^2y'}{dz'^2}-(y-y')\frac{d^2x'}{dz'^2}=(z-z')\left\{\frac{dx'}{dz'}\,\frac{d^2y'}{dz'^2}-\frac{dy'}{dz'}\,\frac{d^2x'}{dz'^2}\right\};$$

il faudra donc exprimer que le point (t', u', v') est à la fois sur ces deux plans et à une distance k du point (x', y', z') ce qui donnera, en supprimant ensuite les accens,

$$(t-x)\frac{dx}{dz}+(u-y)\frac{dy}{dz}+(v-z)=0\ , \tag{1}$$

$$(t-x)\frac{d^2y}{dz^2}-(u-y)\frac{d^2x}{dz^2}=(v-z)\left\{\frac{dx}{dz}\,\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\,\frac{d^2x}{dz^2}\right\}, \tag{2}$$

$$(t-x)^2+(u-y)^2+(v-z)^2=k^2\ . \tag{3}$$

Lors donc que la courbe à double courbure sera donnée, par deux équations en x, y, z; à l'aide de deux différentiations consécutives, on en tirera les valeurs de $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, $\frac{d^2x}{dz^2}$, $\frac{d^2y}{dz^2}$, que l'on mettra dans les équations (1, 2); il en résultera deux nouvelles équations qui, jointes aux deux proposées et à l'équation (3), en feront cinq en tout; éliminant, x, y, z entre elles, on obtiendra deux équations en t, u, v qui seront celles de la parallèle demandée.

Si l'on développe sur un plan la surface enveloppe des plans normaux, notre courbe à double courbure et ses deux parallèles deviendront évidemment une courbe plane et ses deux parallèles à la distance k; tout ce que nous avons dit des parallèles aux courbes planes a donc lieu ici, pourvu qu'on entende par l'angle des normales extrêmes l'angle que feraient ces normales si la surface enveloppe des plans normaux était étendue sur un plan.

20.

Nous terminerons en remarquant qu'on peut donner une extension beaucoup plus grande à ces sortes de recherches, en considérant, non pas des lignes et surfaces *parallèles*, mais des lignes et surfaces également *inclinées* les unes aux autres dans leurs points correspondans. Ainsi, à ne parler que des courbes planes, on pourrait demander quelle est la courbe qui coupe toutes les normales à une même courbe donnée sous un même angle donné; et, de même que la considération des lignes et surfaces parallèles nous a conduit à considérer des *parallélogrammes* plans et gauches et des *parallélipipèdes* à bases courbes, ces nouvelles questions donneraient naissance à des triangles et à des polygones plans et gauches à côtés courbes et à des pyramides et polyèdres à faces courbes; et parmi ces nouvelles figures quelques-unes pourraient jouir de diverses propriétés très-dignes de remarque.

Berlin, février 1821.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Recherches sur les intégrales définies;

Par M. Frédéric Sarrus, docteur ès sciences.

1. L'intégrale

$$\int e^{-z}z^a\mathrm{d}z\ ,$$

prise depuis $z=0$ jusqu'à $z=\frac{1}{0}$, se réduit à une fonction de a seul; de sorte qu'en convenant de représenter cette fonction par $a!$, on a

$$\int e^{-z}z^a\mathrm{d}z=a\,!\ \boxed{\begin{matrix}z=0\\ z=\frac{1}{0}\end{matrix}}\ ;$$

Faisant $z=mz'$, m étant une quantité positive quelconque, mais indépendante de z', on aura, en substituant, après avoir effacé les accens,

$$\int e^{-mz}z^a\mathrm{d}z=a!m^{-(a+1)}\ \boxed{\begin{matrix}z=0\\ z=\frac{1}{0}\end{matrix}}\ ; \qquad (1)$$

d'où, en différentiant par rapport à m, et faisant ensuite $m=1$;

$$\int e^{-mz} z^{a+1} \mathrm{d}z = a!(a+1) ;$$

donc, suivant notre notation,

$$(a+1)! = a!(a+1) ; \qquad (2)$$

or $0! = 1$; donc

$$1! = 1.1 , \quad 2! = 1.1.2 , \quad 3! = 1.1.2.3 , \ldots\ldots , \quad n! = 1.2.3 \ldots\ldots n ;$$

En multipliant les deux membres de l'équation (1) par $e^{-m} m^{(a+b+1)} \mathrm{d}m$, et intégrant depuis $m=0$ jusqu'à $m=\frac{1}{0}$, on trouve

$$\iint e^{-m(1+z)} m^{a+b+1} z^{a} \mathrm{d}m \mathrm{d}z = a!b! ;$$

or, d'après l'équation (1), l'on a, entre les limites désignées ;

$$\int e^{-m(1+z)} m^{a+b+1} \mathrm{d}m = (a+b+1)! \frac{1}{(1+z)^{a+b+2}} ;$$

donc

$$\int \frac{z^{a}\mathrm{d}z}{(1+z)^{a+b+2}} = \frac{a!b!}{(a+b+1)!} \quad \boxed{\begin{matrix} z=0 \\ z=\frac{1}{0} \end{matrix}} . \qquad (3)$$

Si l'on pose $e^{-z} = x$, on trouverait

$$a! = \int \left(l \frac{1}{x} \right)^{a} \mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{matrix} x=0 \\ x=1 \end{matrix}} ;$$

Si l'on pose, au contraire, $z = \frac{x}{1-x}$, on trouvera

$$\frac{z^{a}\mathrm{d}z}{(1+z)^{a+b+2}} = x^{a}(1-x)^{b}\mathrm{d}x ;$$

d'où

$$\int x^a(1-x)^b\mathrm{d}x=\frac{a!b!}{(a+b+1)!}\ \boxed{\begin{matrix}x=0\\x=1\end{matrix}}\ ;$$

ce qui établit entre les intégrales Eulériennes une relation très-remarquable, déjà connue depuis long-temps. Nous ne discuterons pas les cas particuliers que présente l'équation (3). On peut les voir dans les *Exercices de calcul intégral* de M. LEGENDRE.

L'on a, en mettant au lieu de $\mathrm{Cos}.qy$ son développement,

$$\int e^{-y}\mathrm{Cos}.qy\mathrm{d}y=\int e^{-y}\mathrm{d}y\left(1-\frac{q^2y^2}{2!}+\frac{q^4y^4}{4!}-\frac{q^6y^6}{6!}+\ldots\ldots\right);$$

d'où, en intégrant depuis $y=0$ jusqu'à $y=\frac{1}{0}$,

$$\int e^{-y}\mathrm{Cos}.qy\mathrm{d}y=1-q^2+q^4-q^6+\ldots\ldots=\frac{1}{1+q^2}. \qquad (4)$$

On trouverait de même, et entre les mêmes limites,

$$\int e^{-y}\mathrm{Sin}.qy\mathrm{d}y=\frac{q}{1+q^2}; \qquad (5)$$

partant

$$\int\int e^{-y}\mathrm{Cos}.qy\mathrm{Cos}.qx\mathrm{d}y\mathrm{d}q=\int\frac{\mathrm{Cos}.qx\mathrm{d}q}{1+q^2}=\frac{\varpi}{2}e^{-x};$$

$$\int\int e^{-y}\mathrm{Sin}.qy\,\mathrm{Sin}.qx\mathrm{d}y\mathrm{d}q=\int\frac{q\mathrm{Sin}.qx\mathrm{d}q}{1+q^2}=\frac{\varpi}{2}e^{-x};$$

pourvu qu'on prenne les intégrales depuis $y=0$ jusqu'à $y=\frac{1}{0}$ et depuis $q=0$ jusqu'à $q=\frac{1}{0}$.

Faisant, dans ces formules, $y=my'$, $q=\frac{q'}{m}$ et $x=mx'$, m étant une quantité positive quelconque, mais indépendante de x', y', q', on aura, en substituant et supprimant les accens,

$$\int\int e^{-my}\text{Cos}.qy\text{Cos}.qx\,\text{d}q\text{d}y=\frac{\varpi}{2}e^{-mx}\quad\boxed{\begin{array}{c|c} y=0 & q=0 \\ y=\frac{1}{0} & q=\frac{1}{0}\end{array}}$$

multipliant les deux membres par $\varphi m\text{d}m$ et intégrant entre deux limites positives de m, mais d'ailleurs quelconques, on aura, en faisant $\text{F}x=\int e^{-mx}\varphi m.\text{d}m$, et l'intégrale du second membre étant prise entre les limites désignées,

$$\int\int\text{Cos}.qy\text{Cos}.qx.\text{F}y.\text{d}q.\text{d}y=\frac{\varpi}{2}\text{F}x\ ;$$

on trouverait de même

$$\int\int\text{Sin}.qy\text{Sin}.qx.\text{F}y.\text{d}q.\text{d}y=\frac{\varpi}{2}\text{F}x\ .$$

De là on déduira, comme cas particulier, le théorème de M. Fourier.

Saint-Affrique, 26 avril 1821.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. DEUX lignes du second ordre étant tracées sur un même plan, on demande, 1.° la nature et la situation du lieu géométrique des pôles des tangentes à l'une d'elles, déterminés par rapport à l'autre ; 2.° la nature et la situation de l'enveloppe des polaires de tous les points de l'une d'elles, déterminées par rapport à l'autre ?

II. Deux surfaces du second ordre existant ensemble dans l'espace, on demande, 1.° la nature et la situation du lieu géométrique des pôles des tangentes à l'une d'elles, déterminés par rapport à l'autre ; 2.° la nature et la situation de l'enveloppe des plans polaires de tous les points de l'une d'elles, déterminés par rapport à l'autre ?

OPTIQUE.

Essai d'une théorie générale des mouvemens apparens ;

Par MM. Lenthéric, docteur ès sciences, professeur au collége royal de Montpellier.

Le double mouvement de rotation de la terre sur son axe et de translation de cette planète autour du soleil est, pour ceux de ses habitans qui la supposent absolument fixe, une source perpétuelle d'illusions, et complique singulièrement à leurs yeux les mouvemens de tous les autres corps célestes. Les astronomes eux-mêmes, bien qu'ils ne soient pas dupes de ces illusions, n'en sont pas moins obligés sans cesse de corriger les résultats de leurs observations de la complication qu'y introduit la mobilité du point d'où ils les font.

La considération des mouvemens apparens ou relatifs, et de leur liaison avec les mouvemens absolus, revient donc à chaque pas dans l'astronomie. Cependant la théorie de ces sortes de mouvemens n'a encore été traitée nulle part avec toute l'étendue et la généralité qu'elle comporte ; et on s'est borné à en considérer des cas particuliers qu'on a traité d'une manière tout-à-fait indépendante les uns des autres, sans les rattacher à un principe commun. Je me propose ici d'essayer de remplir cette sorte de lacune que présente la science. Je chercherai les formules les plus générales ;

j'en ferai les applications aux cas les plus ordinaires ; et j'abandonnerai de plus amples développemens à la sagacité du lecteur.

Le problème général qu'il s'agit de résoudre est celui-ci : deux points P , p se meuvent dans l'espace d'un mouvement connu quelconque ; le point p se croyant fixe , quel mouvement attribuera-t-il au point P (*) ?

De quelque nature que soit le mouvement absolu du point p , on sait qu'il doit toujours se réduire à un mouvement de translation uniforme ou varié sur une certaine ligne droite ou courbe , plane ou à double courbure et à un mouvement de rotation uniforme ou varié , autour d'un axe de direction constante ou variable. Quant au point P , on peut faire abstraction de son mouvement de rotation , s'il en a un , attendu que ce mouvement ne serait pas aperçu de p , et ne considérer uniquement que son mouvement de translation dans l'espace.

Rapportons nos deux points à trois axes rectangulaires absolument fixes , mais d'ailleurs tout-à-fait arbitraires ; la position absolue de ces deux points dans l'espace , à une époque quelconque t, sera donnée par deux systèmes d'équations telles que celles-ci :

(*) Au lieu de supposer que le point p se croit fixe , on pourrait supposer qu'il croit se mouvoir d'une manière déterminée et différente de celle dont il se meut réellement , et demander , dans cette nouvelle hypothèse , quel mouvement il attribuera au point P. Le problème que se propose ici M. Lenthéric deviendrait ainsi un cas particulier de celui-là.

On pourrait aussi renverser le problème ; c'est-à-dire , supposer que c'est le mouvement apparent de P et l'un des deux mouvemens absolus qui sont donnés ; ce serait alors l'autre mouvement absolu qu'il s'agirait de déterminer.

J. D. G.

$$\text{Pour P}\left\{\begin{array}{l} x=\mathrm{F}_x(t)\ , \\ y=\mathrm{F}_y(t)\ , \\ z=\mathrm{F}_z(t)\ ; \end{array}\right\}(1) \qquad \text{Pour } p\left\{\begin{array}{l} x=\mathrm{f}_x(t)\ , \\ y=\mathrm{f}_y(t)\ , \\ z=\mathrm{f}_z(t)\ ; \end{array}\right\}(2)$$

c'est-à-dire que ce seront là, comme l'on s'exprime en mécanique, les équations de leur mouvement de translation, entre lesquelles conséquemment l'élimination de t ferait connaître les trajectoires qu'ils décrivent.

Il s'agira présentement d'exprimer la nature du mouvement de rotation de p. Pour cela, concevons que, par ce point, on ait conduit trois axes rectangulaires tout-à-fait fixes par rapport à lui, mais mobiles avec lui dans l'espace; désignons-les par x', y', z'; leur situation à l'époque t par rapport aux axes fixes dépendra de cette époque, et on pourra supposer alors leurs équations telles qu'il suit :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Pour } x', & \dfrac{x-\mathrm{f}_x(t)}{\varphi_x(t)}=\dfrac{y-\mathrm{f}_y(t)}{\varphi_y(t)}=\dfrac{z-\mathrm{f}_z(t)}{\varphi_z(t)}\ , \\ \text{Pour } y', & \dfrac{x-\mathrm{f}_x(t)}{\psi_x(t)}=\dfrac{y-\mathrm{f}_y(t)}{\psi_y(t)}=\dfrac{z-\mathrm{f}_z(t)}{\psi_z(t)}\ , \\ \text{Pour } z', & \dfrac{x-\mathrm{f}_x(t)}{\chi_x(t)}=\dfrac{y-\mathrm{f}_y(t)}{\chi_y(t)}=\dfrac{z-\mathrm{f}_z(t)}{\chi_z(t)}\ ; \end{array}\right\}(3)$$

et dans lesquelles il est permis de supposer

$$\left.\begin{array}{l} \{\varphi_x(t)\}^2+\{\varphi_y(t)\}^2+\{\varphi_z(t)\}^2=1\ , \\ \{\psi_x(t)\}^2+\{\psi_y(t)\}^2+\{\psi_z(t)\}^2=1\ , \\ \{\chi_x(t)\}^2+\{\chi_y(t)\}^2+\{\chi_z(t)\}^2=1\ . \end{array}\right\}(4)$$

En outre, parce que ces axes sont rectangulaires, on aura aussi

$$\left.\begin{aligned}
&\{\psi_x(t)\}\{\chi_x(t)\}+\{\psi_y(t)\}\{\chi_y(t)\}+\{\psi_z(t)\}\{\chi_z(t)\}=0\ ,\\
&\{\chi_x(t)\}\{\varphi_x(t)\}+\{\chi_y(t)\}\{\varphi_y(t)\}+\{\chi_z(t)\}\{\varphi_z(t)\}=0\ ,\\
&\{\varphi_x(t)\}\{\psi_x(t)\}+\{\varphi_y(t)\}\{\psi_y(t)\}+\{\varphi_z(t)\}\{\psi_z(t)\}=0\ ;
\end{aligned}\right\}(5)$$

relations desquelles on en pourrait déduire beaucoup d'autres et qui montrent que de nos neuf fonctions de t relatives au mouvement de rotation trois seulement sont arbitraires.

Il est clair présentement que le point p, se croyant immobile, rapporte tous les points de l'espace aux axes des x', y', z'; et conséquemment c'est aussi à ces axes qu'il faut les rapporter, pour avoir leur mouvement apparent; or, les formules nécessaires pour cela sont, comme l'on sait,

$$\left.\begin{aligned}
x&=f_x(t)+x'\varphi_x(t)+y'\psi_x(t)+z'\chi_x(t)\ ,\\
y&=f_y(t)+x'\varphi_y(t)+y'\psi_y(t)+z'\chi_y(t)\ ,\\
z&=f_z(t)+x'\varphi_z(t)+y'\psi_z(t)+z'\chi_z(t)\ ;
\end{aligned}\right\}(6)$$

desquelles on tire, en ayant égard aux relations (4, 5),

$$\left.\begin{aligned}
x'&=\{x-f_x(t)\}\varphi_x(t)+\{y-f_y(t)\}\varphi_y(t)+\{z-f_z(t)\}\varphi_z(t)\ ,\\
y'&=\{x-f_x(t)\}\psi_x(t)+\{y-f_y(t)\}\psi_y(t)+\{z-f_z(t)\}\psi_z(t)\ ,\\
z'&=\{x-f_x(t)\}\chi_x(t)+\{y-f_y(t)\}\chi_y(t)+\{z-f_z(t)\}\chi_z(t)\ ;
\end{aligned}\right\}(7)$$

mettant donc dans les seconds membres pour x, y, z les valeurs données par les équations (1), et supprimant ensuite, dans les premiers, les accens devenus inutiles, nous aurons pour les équations du mouvement apparent de P par rapport à p,

$$\left.\begin{aligned}
x&=\{F_x(t)-f_x(t)\}\varphi_x(t)+\{F_y(t)-f_y(t)\}\varphi_y(t)+\{F_z(t)-f_z(t)\}\varphi_z(t)\ ,\\
y&=\{F_x(t)-f_x(t)\}\psi_x(t)+\{F_y(t)-f_y(t)\}\psi_y(t)+\{F_z(t)-f_z(t)\}\psi_z(t)\ ,\\
z&=\{F_x(t)-f_x(t)\}\chi_x(t)+\{F_y(t)-f_y(t)\}\chi_y(t)+\{F_z(t)-f_z(t)\}\chi_z(t)\ ,
\end{aligned}\right\}(8)$$

et les équations de la trajectoire apparente seront le résultat de l'élimination de t entre ces trois-là.

Si l'on suppose que, dans le mouvement de p, son axe de rotation est toujours parallèle à lui-même ; en prenant cet axe pour celui des z', on devra avoir

$$\chi_x(t)=g\,, \qquad \chi_y(t)=h\,, \qquad \chi_z(t)=k\;;$$

g, h, k étant des constantes; les équations de condition (4, 5) deviendront

$$\left.\begin{aligned}
\{\varphi_x(t)\}^2+\{\varphi_y(t)\}^2+\{\varphi_z(t)\}^2&=1\,,\\
\{\psi_x(t)\}^2+\{\psi_y(t)\}^2+\{\psi_z(t)\}^2&=1\,,\\
g^2+h^2+k^2&=1\,,
\end{aligned}\right\}\ (9)$$

$$\left.\begin{aligned}
g\{\psi_x(t)\}+h\{\psi_y(t)\}+k\{\psi_z(t)\}&=0\,,\\
g\{\varphi_x(t)\}+h\{\varphi_y(t)\}+k\{\varphi_z(t)\}&=0\,,\\
\{\varphi_x(t)\}\{\psi_x(t)\}+\{\varphi_y(t)\}\{\psi_y(t)\}+\{\varphi_z(t)\}\{\psi_z(t)\}&=0\,;
\end{aligned}\right\}\ (10)$$

et les équations du mouvement apparent de P seront

$$\left.\begin{aligned}
x&=\{F_x(t)-f_x(t)\}\varphi_x(t)+\{F_y(t)-f_y(t)\}\varphi_y(t)+\{F_z(t)-f_z(t)\}\varphi_z(t)\,,\\
y&=\{F_x(t)-f_x(t)\}\psi_x(t)+\{F_y(t)-f_y(t)\}\psi_y(t)+\{F_z(t)-f_z(t)\}\psi_z(t)\,,\\
z&=g\{F_x(t)-f_x(t)\}+h\{F_y(t)-f_y(t)\}+k\{F_z(t)-f_z(t)\}\,;
\end{aligned}\right\}\ (11)$$

Si l'on suppose, en outre, que cet axe de rotation est parallèle à l'axe des z, et conséquemment perpendiculaire au plan des xy primitifs, on aura

$$g=0\,, \qquad h=0\,; \qquad k=1\,;$$

d'où (9, 10)

$$\psi_z(t)=0\,; \qquad \varphi_z(t)=0\,;$$

$$\{\varphi_x(t)\}^2+\{\varphi_y(t)\}^2=1\,,\quad \{\psi_x(t)\}^2+\{\psi_y(t)\}^2=1\,, \tag{12}$$

$$\{\varphi_x(t)\}\{\psi_x(t)\}+\{\varphi_y(t)\}\{\psi_y(t)\}=0\,; \tag{13}$$

et les équations du mouvement apparent de P seront

$$\left.\begin{array}{l} x=\{F_x(t)-f_x(t)\}\varphi_x(t)+\{F_y(t)-f_y(t)\}\varphi_y(t)\,, \\ y=\{F_x(t)-f_x(t)\}\psi_x(t)+\{F_y(t)-f_y(t)\}\psi_y(t)\,, \\ z=F_z(t)-f_z(t)\;; \end{array}\right\} \tag{14}$$

S'il n'y avait pas de mouvement de rotation, on pourrait admettre $\varphi_y(t)=0$, d'où $\varphi_x(t)=1$, $\psi_x(t)=0$, $\psi_y(t)=1$; et les équations du mouvement apparent de P seraient ainsi

$$\left.\begin{array}{l} x=F_x(t)-f_x(t)\,, \\ y=F_y(t)-f_y(t)\,, \\ z=F_z(t)-f_z(t)\,. \end{array}\right\} \tag{15}$$

Si l'on suppose enfin que les mouvemens réels de P et p ont lieu dans le plan des xy primitives, on devra avoir

$$F_z(t)=0\,,\qquad f_z(t)=0\,;$$

et conséquemment $z=0$; le mouvement apparent de P aura donc lieu aussi dans le plan des xy ; le problème deviendra ainsi un problème de géométrie plane ; et les équations du mouvement apparent de P seront simplement

$$\left.\begin{array}{l} x=\{F_x(t)-f_x(t)\}\varphi_x(t)+\{F_y(t)-f_y(t)\}\varphi_y(t)\,, \\ y=\{F_x(t)-f_x(t)\}\psi_x(t)+\{F_y(t)-f_y(t)\}\psi_y(t)\,; \end{array}\right\} \tag{16}$$

dans lesquelles on aura toujours

$$\left.\begin{array}{c}\{\varphi_x(t)\}^2+\{\varphi_y(t)\}^2=1\ ,\quad \{\psi_x(t)\}^2+\{\psi_y(t)\}^2=1\ ,\\ \{\varphi_x(t)\}\{\psi_x(t)\}+\{\varphi_y(t)\}\psi_y(t)\}=0\ ;\end{array}\right\}\quad(17)$$

et l'équation de la trajectoire apparente sera le résultat de l'élimination de t entre les équations (15).

Si le mouvement de rotation n'a pas lieu, comme la situation des axes liés invariablement avec p est arbitraire, il sera permis de supposer

$$\varphi_x(t)=1\ ,$$

d'où résultera (16)

$$\varphi_y(t)=0\ ,\quad \psi_x(t)=0\ ,\quad \psi_y(t)=1\ ;$$

au moyen de quoi les équations (15) du mouvement apparent deviendront simplement

$$x=\mathrm{F}_x(t)-\mathrm{f}_x(t)\ ,\quad y=\mathrm{F}_y(t)-\mathrm{f}_y(t)\ . \qquad (18)$$

Si le mouvement absolu des deux points a lieu suivant l'axe des x, on devra avoir

$$\mathrm{F}_y(t)=0\ ;\qquad \mathrm{f}_y(t)=0\ ;$$

on aura donc aussi $y=0$; c'est-à-dire que le mouvement apparent de P aura lieu aussi suivant cet axe ; le problème deviendra donc ainsi un simple problème de géométrie à une dimension ; et l'équation du mouvement apparent de P sera

$$x=\mathrm{F}(t)-\mathrm{f}(t)\ . \qquad (19)$$

Nous allons présentement faire quelques applications de ces diverses formules ; en les prenant dans un ordre inverse de celui suivant lequel nous y sommes successivement parvenus.

§. I.

Mouvement de deux points sur une même droite.

Nous venons de voir (19) que, les mouvemens absolus de deux points P, p, sur une même droite, ayant respectivement pour leurs équations

$$x=\mathrm{F}(t)\,,\qquad x+\mathrm{f}(t)\;;$$

l'équation du mouvement apparent de P, par rapport à p se croyant fixe, est

$$x=\mathrm{F}(t)-\mathrm{f}(t)\,.$$

Si d'abord le point P est fixe; en prenant ce point pour origine des x, on aura $\mathrm{F}(t)=0$; de sorte que l'équation du mouvement apparent de ce point sera

$$x=-\mathrm{f}(t)\;;$$

ce mouvement apparent sera donc égal et contraire au mouvement réel de p. C'est le cas des navigateurs approchant de la côte et à qui le rivage semble avancer vers eux de la même quantité dont ils s'avancent réellement vers lui.

Supposons, en second lieu, que les deux points P, p sont mus d'un mouvement uniforme; nous pourrons prendre, pour les équations de leurs mouvemens réels,

$$x=A+A't\,,\qquad x=a+a't\;;$$

l'équation du mouvement apparent de P sera

$$x=(A-a)+(A'-a')t\,,$$

c'est-à-dire

c'est-à-dire que ce mouvement apparent sera aussi uniforme. On voit de plus que la vitesse apparente $A'-a'$ sera la différence des vitesses réelles A', a', prises avec leurs signes, c'est-à-dire, la différence effective de ces vitesses ou leur somme, suivant que les deux mobiles seront mus dans le même sens ou en sens contraire. C'est communément le cas de deux voitures sur une même route ou de deux bâteaux sur un même canal rectiligne. On voit, en particulier, que si les vitesses sont égales et de même signe, le point P semblera immobile au point p.

Supposons présentement les deux mouvemens uniformément variés; nous pourrons prendre pour les équations de ces mouvemens

$$x=A+A't+A''t^2\ , \quad x=a+a't+a''t^2\ ;$$

et le mouvement apparent de P aura pour équation

$$x=(A-a)+(A'-a')t+(A''-a'')t^2\ ;$$

c'est-à-dire que ce mouvement sera lui-même uniformément varié. C'est, par exemple, le cas d'un aéronaute qui tombe d'un ballon, tandis qu'on lance une pierre verticalement vers lui.

On voit, au surplus, que, pour que le mouvement apparent soit uniformément varié, il n'est pas nécessaire que les deux mouvemens réels le soient; et qu'il serait encore tel, lors même que l'un de ces mouvemens serait uniforme; avec cette seule différence que, si le mouvement uniforme était celui de p, le mouvement apparent de P serait accéléré ou retardé, suivant que son mouvement réel le serait lui-même; tandis qu'au contraire si le mouvement uniforme appartenait à ce point P, son mouvement apparent serait accéléré ou retardé, suivant que le mouvement réel de p serait retardé ou accéléré.

Si les forces accélératrices étaient égales et de mêmes signes, on aurait $A''-a''=0$; et conséquemment l'équation du mouvement apparent serait

$$x=(A-a)+(A'-a')t\ ,$$

c'est-à-dire que ce dernier mouvement serait uniforme ; c'est le cas d'un homme et d'une pierre tombant de différens points d'une même verticale à des époques différentes.

Si, de plus, la vitesse réelle était la même à chaque instant, on aurait $A'-a'=0$, et par suite $x=A-a$, en sorte que le mouvement apparent de P serait nul. C'est le cas d'un homme et d'une pierre qui tombent au même instant de différens points d'une même verticale.

§. II.

Mouvement de deux points sur un même plan.

Faisons d'abord abstraction du mouvement de rotation de p. Soient les équations du mouvement réel de P et p ainsi qu'il suit :

$$\text{Pour P}\left\{\begin{array}{l} x=\mathrm{F}_x(t)\ ,\\ y=\mathrm{F}_y(t)\ ;\end{array}\right. \qquad \text{Pour } p\left\{\begin{array}{l} x=\mathrm{f}_x(t)\ ,\\ y=\mathrm{f}_y(t)\ ;\end{array}\right.$$

les équations du mouvement apparent de P seront (18)

$$x=\mathrm{F}_x(t)-\mathrm{f}_x(t)\ ,$$

$$y=\mathrm{F}_y(t)-\mathrm{f}_y(t)\ ;$$

Supposons, en premier lieu, que le point P soit fixe ; en prenant ce point pour origine des coordonnées primitives, nous aurons

$$\mathrm{F}_x(t)=0\ , \qquad \mathrm{F}_y(t)=0\ ;$$

d'après quoi les équations du mouvement apparent de ce point seront

$$x=-\mathrm{f}_x(t)\ , \qquad y=-\mathrm{f}_y(t)\ ,$$

c'est-à-dire que ce mouvement sera égal et contraire à celui de p. Ainsi, si p décrit une droite d'un mouvement uniforme ou varié, P lui semblera décrire d'un mouvement inverse une parallèle à cette droite. Si le point p décrit un cercle, le point P lui semblera décrire, en sens inverse, un cercle de même rayon ; de sorte que si p décrit un cercle autour de P, P semblera décrire un cercle autour de p.

C'est par l'effet de cette illusion que celui qui parcourt une route dans une voiture ou un canal dans un bâteau voit les divers objets répandus dans la campagne s'enfuir derrière lui, avec une vitesse égale à celle qu'il a lui-même (*) ; et c'est encore par suite d'une semblable illusion que ceux qui ignorent le mouvement annuel de la terre autour du soleil, d'orient en occident, attribuent au soleil un mouvement annuel autour de la terre d'occident en orient.

Supposons présentement les deux points P, p mus d'un mouvement rectiligne et uniforme ; nous pourrons prendre respectivement pour les équations de leur mouvement réel

(*) On pourrait objecter que les objets paraissent, aux yeux des voyageurs, se mouvoir d'autant plus lentement qu'ils sont plus distans de la route qu'ils parcourent ; mais c'est une pure illusion optique qui tient à l'éloignement. Il est évident, en effet, que si plusieurs points, répandus sur le terrain, marchent tous parallèlement avec la même vitesse effective, ils sembleront marcher d'autant plus lentement qu'ils seront plus distans du spectateur supposé immobile.

J. D. G.

$$\text{Pour P}\left\{\begin{array}{l} x=A+A't\ , \\ y=B+B't\ ; \end{array}\right. \qquad \text{Pour } p\left\{\begin{array}{l} x=a+a't\ ; \\ y=b+b't\ ; \end{array}\right.$$

en conséquence de quoi les équations de leurs trajectoires effectives seront respectivement

$$\frac{x-A}{A'}=\frac{y-B}{B'}\ , \qquad \frac{x-a}{a'}=\frac{y-b}{b'}\ .$$

Les équations du mouvement apparent de P seront ainsi

$$x=(A-a)+(A'-a')t\ , \quad y=(B-b)+(B'-b')t\ ;$$

et par suite celle de sa trajectoire apparente

$$\frac{x-(A-a)}{A'-a'}=\frac{y-(B-b)}{B'-b'}\ ;$$

c'est-à-dire que le mouvement apparent de P sera aussi uniforme et rectiligne. On voit de plus que ses vitesses apparentes parallèlement aux axes ne seront autre chose que les différences des vitesses réelles parallèles à ces mêmes axes, prises avec leurs signes.

Les vitesses absolues de P et p étant respectivement $\sqrt{A'^2+B'^2}$, $\sqrt{a'^2+b'^2}$, si l'on voulait exprimer que ces vitesses sont égales, il faudrait écrire

$$A'^2+B'^2=a'^2+b'^2\ ,$$

c'est-à-dire ;

$$(A'-a')(A'+a')=-(B'-b')(B'+b')\ ;$$

multipliant par cette dernière équation celle de la trajectoire apparente, elle deviendrait

$$(A'+a')\{x-(A-a)\}+(B'+b')\{y-(B-b)\}=0\,;$$

Si l'on supposait que les trajectoires effectives des deux points P, p sont des droites parallèles, il faudrait écrire

$$\frac{B'}{A'}=\frac{b'}{a'}\;;$$

de sorte qu'en représentant par λ la valeur commune de ces deux fractions, on aurait

$$B'=\lambda A'\;,\qquad b'=\lambda a'\;,$$

d'où

$$B'-b'=\lambda(A'-a')\;,$$

les équations du mouvement apparent de P seraient donc

$$x=(A-a)+(A'-a')t\;,\quad y=(B-b)+\lambda(A'-a')t\;;$$

ce qui donnerait pour celle de sa trajectoire apparente

$$\lambda\{x-(A-a)\}=y-(B-b)\;.$$

Dans le même cas, les vitesses effectives $\sqrt{A'^2+B'^2}$, $\sqrt{a'^2+b'^2}$ deviennent respectivement

$$A'\sqrt{1+\lambda^2}\;,\qquad a'\sqrt{1+\lambda^2}\;;$$

si donc l'on veut supposer qu'elles sont égales, il suffira d'écrire $a'=A'$ ou $A'-a'=0$; ce qui donnera, pour les équations du mouvement apparent de P,

$$x=A-a\;;\qquad y=B-b\;;$$

c'est-à-dire, en d'autres termes, que le point p le croira immobile.

Et, comme ce que nous venons de dire du point P peut être appliqué à tant d'autres points P′, P″, P‴, ... qu'on voudra, il s'ensuit généralement que, si tant de points qu'on voudra décrivent dans l'espace des droites parallèles, avec une vitesse commune. et que l'un d'eux se croie fixe, tous les autres lui sembleront immobiles.

Il en serait encore de même si la vitesse commune à tous ces points venait à changer, soit brusquement, soit d'une manière insensible, pourvu qu'elle demeurât toujours la même pour tous. Les mêmes choses auraient encore lieu si la direction commune des mouvemens venait à changer, soit brusquement, soit par degrés insensibles, pourvu que leur parallélisme se conservât constamment et que les distances entre les points du système demeurassent invariables.

En supposant toujours le mouvement de nos deux points rectilignes, si nous voulons le supposer uniformément varié, il faudra admettre que ce mouvement est donné ainsi qu'il suit :

$$\text{Pour P}\begin{cases} x=A+A'(1+Ct)t\,, \\ y=B+B'(1+Ct)t\,; \end{cases} \qquad \text{Pour } p\begin{cases} x=a+a'(1+ct)t\,, \\ y=b+b'(1+ct)t\,; \end{cases}$$

ce qui donnera pour les équations des trajectoires effectives

$$\frac{x-A}{A'}=\frac{y-B}{B'}\,, \qquad \frac{x-a}{a'}=\frac{y-b}{b'}\,;$$

et, pour les équations du mouvement apparent de P,

$$y=(A-a)+(A'-a')t+(A'C-a'c)t^2\,,$$

$$y=(B-b)+(B'-b')t+(B'C-b'c)t^2\,;$$

on trouvera, en conséquence, pour l'équation de la trajectoire apparente de P,

$$\{(B'C-b'c)[x-(A-a)]-(A'C-a'c)[y-(B-b)]\}^2$$

$$=(C-c)(A'b'-B'a')\{(B'-b')[x-(A-a)]-(A'-a')[y-(B-b)]\}$$

équation qui appartient évidemment à une parabole ; elle appartiendrait encore à cette courbe quand bien même C ou c serait nul, c'est-à-dire, quand bien même l'un des deux mouvemens effectifs serait uniforme. Ainsi, lorsqu'un corps pesant tombe verticalement du haut des airs sur une route ou dans un canal rectiligne, il doit sembler décrire une parabole à celui qui, se croyant immobile, parcourt cette route ou ce canal d'un mouvement uniforme.

Pour ne nous arrêter qu'aux cas les plus simples des mouvemens curvilignes, supposons de suite que nos deux points P, p parcourent deux circonférences concentriques, d'un mouvement uniforme. En représentant par R, r le rayon des deux cercles, et prenant leur centre commun pour origine des coordonnées primitives, les équations de leur mouvement seront telles qu'il suit:

$$\text{Pour P}\left\{\begin{array}{l} x=R\text{Cos.}(C+C't)\ , \\ y=R\text{Sin.}(C+C't)\ ; \end{array}\right. \qquad \text{Pour } p\left\{\begin{array}{l} x=r\text{Cos.}(c+c't)\ , \\ y=r\text{Sin.}(c+c't)\ ; \end{array}\right.$$

ce qui donnera pour les équations de leurs trajectoires effectives

$$x^2+y^2=R^2\ , \qquad x^2+y^2=r^2\ ;$$

les équations du mouvement apparent de P seront

$$x=R\text{Cos.}(C+C't)-r\text{Cos.}(c+c't)\ ;$$

$$y=R\,\text{Sin.}(C+C't)-r\text{Sin.}(c+c't)\ ;$$

et l'équation de sa trajectoire apparente sera le résultat de l'élimination de t entre ces deux-là.

Si nous désignons par ρ la longueur du rayon visuel conduit de p vers P et par θ l'angle que fait ce rayon avec l'axe des x, nous aurons

$$\rho^2=x^2+y^2=R^2-2Rr\,\text{Cos.}\{(C-c)+(C'-c')t\}+r^2\ ,$$

$$\text{Tang.}\theta=\frac{x}{y}=\frac{R\,\text{Sin.}\,(C+C't)-r\,\text{Sin.}\,(c+c't)}{R\,\text{Cos.}(C+C't)-r\,\text{Cos.}(c+c't)}\ .$$

Lorsqu'on n'aspire pas à une grande précision, on peut considérer les planètes comme animées d'un mouvement circulaire et uniforme dans un même plan autour du soleil. En supposant donc que p soit la terre et P une autre planète quelconque, ces formules feront connaître, pour chaque instant, la distance ρ de l'observateur à cette planète et l'angle θ que forme le rayon visuel dirigé vers elle avec une droite fixe quelconque.

La distance ρ est un *maximum* ou un *minimum*, suivant qu'on a

$$(C-c)+(C'-c')t=(2n+1)\varpi \quad \text{ou} \quad (C-c)+(C'-c')t=2n\varpi\ ;$$

c'est-à-dire,

$$t=\frac{(2n+1)\varpi-(C-c)}{C'-c'} \quad \text{ou} \quad t=\frac{2n\varpi-(C-c)}{C'-c'}\ ;$$

formules au moyen desquelles on pourra calculer les époques des oppositions et conjonctions.

Si l'on veut compter les temps à partir d'une conjonction, ce qui est permis, on devra avoir

$$C-c=2n\varpi\ ,$$

au moyen de quoi la valeur générale de ρ^2 deviendra simplement

$$\rho^2=R^2-2Rr\,\text{Cos.}(C'-c')t+r^2$$

Si,

Si de plus on suppose que cette conjonction a lieu sur l'axe des x, ce qui est encore permis, puisque la direction de cet axe est arbitraire ; il faudra qu'à $t=0$ répondent aussi

$$C+C't=0\ , \qquad c+c't=0\ ;$$

c'est à-dire qu'on devra avoir à la fois

$$C=0\ , \qquad c=0\ ;$$

les équations du mouvement absolu de P et p deviendront ainsi

$$\text{Pour P}\left\{\begin{array}{l} x=R\text{Cos}.C't\ , \\ y=R\,\text{Sin}.C't\ ; \end{array}\right. \qquad \text{Pour } p\left\{\begin{array}{l} x=r\text{Cos}.c't\ , \\ y=r\,\text{Sin}.c't\ ; \end{array}\right.$$

les équations du mouvement apparent de P seront donc.

$$x=R\text{Cos}\,C't-r\text{Cos}.c't\ , \qquad y=R\text{Sin}.C't-r\text{Sin}.c't\ ;$$

θ étant l'angle du rayon visuel avec l'axe des x, on aura

$$\text{Tang}.\theta=\frac{R\text{Sin}.\,C't-r\,\text{Sin}.c't}{R\text{Cos}.C't-r\text{Cos}.c't}\ ,$$

et on calculera les époques des oppositions et conjonctions par les formules

$$t=\frac{(2n+1)\varpi}{C'-c'}\ , \qquad t=\frac{2n\varpi}{C'-c'}\ ;$$

d'où l'on voit que, si l'on représente par τ l'intervalle de temps entre deux conjonctions ou oppositions consécutives, on aura

$$\tau=\frac{2\varpi}{C'-c'}\ .$$

En égalant à zéro la différentielle de Tang. θ prise par rapport à t, on aura

$$C'R^2-(C'+c')Rr\,\mathrm{Cos.}(C'-c')t+c'r^2=0\ ;$$

d'où

$$t=\frac{1}{C'-c'}\ \mathrm{Arc}\left\{\mathrm{Cos.}=\frac{C'R^2+c'r^2}{(C'+c')Rr}\right\}\ ;$$

formule qui servira à calculer les époques des plus grandes élongations pour les planètes inférieures et celles des rétrogradations pour les planètes supérieures.

Soient S, s les durées respectives des révolutions sydérales, on devra avoir

$$C'(t+S)-C't=2\varpi\ , \qquad c'(t+s)-c't=2\varpi\ ,$$

d'où

$$C'=\frac{2\varpi}{S}\ , \qquad c'=\frac{2\varpi}{s}\ ;$$

alors les époques des oppositions et conjonctions pourront se calculer par les formules

$$t=-\frac{(2n+1)Ss}{2(S-s)}\ , \qquad t=-\frac{nSs}{S-s}\ ;$$

de sorte que l'intervalle de temps entre deux conjonctions ou oppositions consécutives sera

$$\tau=\frac{Ss}{S-s}\ ;$$

enfin les époques des plus grandes élongations ou rétrogradations se calculeront par la formule

$$t=-\frac{S-s}{2\varpi}\ \mathrm{Arc}\left\{\mathrm{Cos.}=\frac{sR^2+Sr^2}{(S+s)Rr}\right\}\ ;$$

mais, d'après la troisième loi de Képler,

$$S^2r^3=s^2R^3\ ;$$

employant donc cette formule pour éliminer l'un des deux rayons R, r, l'autre disparaîtra aussi, et il viendra

$$t=-\frac{S-s}{2\varpi}\ \text{Arc}\left\{\text{Cos.}=\frac{(\sqrt[3]{S}+\sqrt[3]{s})\sqrt[3]{Ss}}{S+s}\right\}\ ;$$

c'est-à-dire que les époques des plus grandes élongations et rétrogradations ne dépendent uniquement que des durées des révolutions sydérales.

Si, en admettant toujours $C=0$, $c=0$, on avait $C'=c'$, les équations du mouvement apparent de P deviendraient

$$x=(R-r)\text{Cos.}c't\ , \qquad y=(R-r)\text{Sin.}c't\ ;$$

d'où

$$x^2+y^2=(R-r)^2\ ;$$

c'est-à-dire que ce mouvement serait circulaire et uniforme.

Donnons présentement au point p un mouvement de rotation sur un axe perpendiculaire au plan des trajectoires ; mais, pour ne point nous engager dans des calculs trop compliqués, supposons que ces trajectoires soient toujours des cercles concentriques, décrits d'un mouvement uniforme autour de l'origine des coordonnées primitives, et supposons en outre que le mouvement de rotation de p soit aussi uniforme. Les équations du mouvement effectif seront encore, comme ci-dessus :

$$\text{Pour P}\left\{\begin{array}{l} x=R\text{Cos.}(C+C't)\ , \\ y=R\text{Sin.}(C+C't)\ ; \end{array}\right. \qquad \text{Pour } p\left\{\begin{array}{l} x=r\text{Cos.}(c+c't)\ , \\ y=r\,\text{Sin.}(c+c't)\ ; \end{array}\right.$$

il est aisé de voir (16, 17) qu'on pourra prendre pour les équations du mouvement apparent de P,

$$x=+\{R\text{Cos.}(C+C't)-r\text{Cos.}(c+c't)\}\text{Cos.}(k+k't)$$

$$+\{R\text{Sin.}(C+C't)-r\text{Sin.}(c+c't)\}\text{Sin.}(k+k't)\ ;$$

$$y=-\{R\text{Cos.}(C+C't)-r\text{Cos.}(c+c't)\}\text{Sin.}(k+k't)$$

$$+\{R\text{Sin.}(C+C't)-r\text{Sin.}(c+c't)\}\text{Cos.}(k+k't)\ ;$$

$k+k't$ étant l'angle variable que fait l'axe des x, mobile avec p, avec l'axe des x primitifs. C'est en éliminant t entre ces deux équations qu'on obtiendrait celle de la trajectoire apparente de P. Bornons-nous à considérer quelques cas particuliers.

Supposons, en premier lieu, que les deux points P, p sont fixes l'un et l'autre, sauf le mouvement de rotation de p, et que le point P est à l'origine des coordonnées primitives; nous aurons ainsi

$$R=0\ , \qquad c'=0\ ;$$

au moyen de quoi les équations du mouvement apparent de P se réduiront à

$$x=-r\text{Cos.}(c-k-k't)\ , \qquad y=-r\text{Sin.}(c-k-k't)\ ;$$

d'où

$$x^2+y^2=r^2\ ;$$

c'est-à-dire que le point fixe P semblera avoir un mouvement circulaire et uniforme autour de p, en sens inverse du mouvement de rotation de celui-ci et avec une vitesse angulaire égale à la sienne. C'est précisément par suite d'une illusion semblable que ceux qui ignorent la rotation diurne de la terre d'occident en orient attribuent au soleil une révolution journalière autour d'elle d'orient en occident.

Supposons toujours le point P fixe, à l'origine des coordonnées primitives, mais rendons au point p son mouvement circulaire et uniforme autour de lui, en lui conservant d'ailleurs son mouvement de rotation; nous aurons ainsi simplement $R=0$; au moyen de quoi les équations du mouvement apparent de P se réduiront à

$$x=-r\,\text{Cos.}[(c-k)+(c'-k')t]\ ,$$

$$y=-r\,\text{Sin.}[(c-k)+(c'-k')t]\ ;$$

d'où

$$x^2+y^2=r^2\ ;$$

Ainsi généralement ce mouvement apparent sera un mouvement circulaire et uniforme autour de p, en sens inverse de son mouvement de rotation, et avec une vitesse angulaire $c'-k'$ égale à la différence entre ses vitesses angulaires c', k' de révolution autour de P et de rotation sur lui-même, prises avec leurs signes.

Si donc ces deux vitesses sont égales, les équations du mouvement deviendront

$$x=-r\,\text{Cos.}(c-k)\ ,\qquad y=-r\,\text{Sin.}(c-k)\ ;$$

c'est-à-dire, en d'autres termes, que le point P semblera tout-à-fait immobile. C'est précisément sous cet aspect que la terre doit s'offrir aux habitans de la lune.

Traitons encore un cas. Supposons que le point p, placé à l'origine, n'ait qu'un simple mouvement de rotation pendant que le point P décrit une ligne droite passant aussi par cette origine; en supposant les deux mouvemens uniformes, les équations du mouvement effectif de P seront

$$x=A(1+\lambda t)\ .\qquad y=B(1+\lambda t)\ ;$$

ce qui donnera, pour l'équation de la droite parcourue,

$$\frac{x}{A}=\frac{y}{B}\ .$$

Quant aux équations de son mouvement apparent, elles seront de la forme

$$x=(1+\lambda t)\{A\text{Cos.}(k+k't)+B\text{Sin.}(k+k't)\}\ ;$$

$$y=(1+\lambda t)\{B\text{Cos.}(k+k't)-A\text{Sin.}(k+k')\}\ ;$$

d'où

$$x^2+y^2=(A^2+B^2)(1+\lambda t)^2$$

Désignons par r le rayon vecteur et par θ l'angle qu'il fait avec l'axe des x, nous aurons

$$r=(1+\lambda t)\sqrt{A^2+B^2}\ .$$

et en outre

$$x=r\text{Cos.}\theta=(1+\lambda t)\sqrt{A^2+B^2}\text{Cos.}\theta\ ,$$

$$y=r\text{Sin.}\theta=(1+\lambda t)\sqrt{A^2+B^2}\text{Sin.}\theta\ ;$$

égalant ces valeurs de x, y à celles que nous avons trouvées ci-dessus, et posant, pour abréger,

$$A^2+B^2=C^2\ ,$$

il viendra, en réduisant,

$$C\text{Cos.}\theta=A\text{Cos.}(k+k't)+B\text{Sin.}(k+k't)\ ,$$

$$C\text{Sin.}\theta=B\text{Cos.}(k+k't)-A\text{Sin.}(k+k't)\ ;$$

d'où

$$C\text{Sin.}(k+k't)=B\text{Cos.}\theta-A\text{Sin.}\theta\ ;$$

$$C\text{Cos.}(k+k't)=A\text{Cos.}\theta+B\text{Sin.}\theta\ ;$$

et par conséquent

$$\text{Tang.}(k+k't)=\frac{B\text{Cos.}\theta-A\text{Sin.}\theta}{A\text{Cos.}\theta+B\text{Sin.}\theta}\ ;$$

En posant

$$A=C\text{Cos.}\alpha\ ,\qquad B=C\text{Sin.}\alpha\ ;$$

cette équation deviendra

$$\text{Tang.}(k+k't)=\frac{\text{Sin.}(\alpha-\theta)}{\text{Cos.}(\alpha-\theta)}=\text{Tang.}(\alpha-\theta)\ ;$$

d'où

$$k+k't=\alpha-\theta\ ;$$

mais la valeur de r donne

$$1+\lambda t=\frac{r}{C}\ ;$$

éliminant donc t entre ces deux dernières équations, nous aurons, pour l'équation polaire de la trajectoire apparente,

$$r=\frac{C}{k'}\left\{k'-\lambda(k-\alpha)-\lambda\theta\right\}\ ;$$

équation de la spirale d'Archimède, comme on pouvait bien s'y attendre.

§. III.

Mouvement de deux points dans l'espace.

A raison de la complication des formules, nous ne nous étendrons pas beaucoup sur cette dernière partie de nos recherches.

Faisons d'abord abstraction du mouvement de rotation de p. Soient les équations du mouvement effectif de P et p ainsi qu'il suit :

$$\text{Pour P}\left\{\begin{array}{l} x=F_x(t)\ , \\ y=F_y(t)\ , \\ z=F_z(t)\ ; \end{array}\right. \qquad \text{Pour } p\left\{\begin{array}{l} x=f_x(t)\ , \\ y=f_y(t)\ ; \\ z=f_z(t)\ ; \end{array}\right.$$

nous savons que les équations du mouvement apparent de P seront (15)

$$x=F_x(t)-f_x(t)\ ,$$

$$y=F_y(t)-f_y(t)\ ,$$

$$z=F_z(t)-f_z(t)\ .$$

Si d'abord on suppose que le point P est fixe, en prenant ce point pour origine des coordonnées primitives, on aura

$$F_x(t)=0\ , \qquad F_y(t)=0\ , \qquad F_z(t)=0\ ;$$

de sorte que les équations du mouvement apparent de ce même point seront

$$x=-f_x(t)\ , \qquad y=-f_y(t)\ , \qquad z=-f_z(t)\ ;$$

c'est-à-dire que ce mouvement sera exactement égal et contraire au mouvement effectif de p.

Supposons, en second lieu, que les mouvemens effectifs soient tous deux rectilignes et uniformes, et donnés ainsi qu'il suit :

$$\text{Pour P}\left\{\begin{array}{l} x=A+A't\ , \\ y=B+B't\ , \\ z=C+C't\ ; \end{array}\right. \qquad \text{Pour } p\left\{\begin{array}{l} x=a+a't\ , \\ y=b+b't\ , \\ z=c+c't\ ; \end{array}\right.$$

de

de sorte que les droites décrites aient respectivement pour équations

$$\frac{x-A}{A'}=\frac{y-B}{B'}=\frac{z-C}{C'}\,, \qquad \frac{x-a}{a'}=\frac{y-b}{b'}=\frac{z-c}{c'}\,;$$

les équations du mouvement apparent de P seront

$$x=(A-a)+(A'-a')t\,,$$
$$y=(B-b)+(B'-b')t\,,$$
$$z=(C-c)+(C'-c')t\,;$$

de sorte que les équations de sa trajectoire apparente seront

$$\frac{x-(A-a)}{A'-a'}=\frac{y-(B-b)}{B'-b'}=\frac{z-(C-c)}{C'-c'}\,;$$

c'est-à-dire que le mouvement apparent de P sera aussi rectiligne et uniforme. On voit de plus que ses vitesses apparentes parallèlement aux axes seront respectivement les différences des vitesses effectives parallèles à ces mêmes axes prises avec leurs signes.

Supposons présentement que le point p, fixé à l'origine, n'ait qu'un simple mouvement de rotation uniforme autour de l'axe des z, tandis que le point P parcourt uniformément une parallèle à cet axe. Les équations du mouvement effectif de ce dernier point seront

$$x=A\,, \quad y=B\,, \quad z=C+C't\,,$$

tandis qu'on pourra prendre (12, 13, 14) pour celles de son mouvement apparent

$$x=+A\mathrm{Cos.}(k+k't)+B\mathrm{Sin.}(k+k't)\,,$$
$$y=-A\mathrm{Sin.}(k+k't)+B\mathrm{Cos.}(k+k't)\,,$$
$$z=C+C't\,;$$

En prenant la somme des quarrés des deux premières, et faisant pour abréger

$$A^2+B^2=R^2 \;;$$

il viendra

$$x^2+y^2=R^2 \;;$$

ce qui nous apprend que la projection sur le plan des xy de la trajectoire apparente de P est un cercle ayant son centre à l'origine.

En posant, en outre,

$$A=R\,\text{Cos.}\alpha \;, \qquad B=R\,\text{Sin.}\alpha \;,$$

nous aurons

$$\frac{y}{x}=\frac{\text{Sin.}(\alpha-k-k't)}{\text{Cos.}(\alpha-k-k't)}=\text{Tang.}(\alpha-k-k't) \;;$$

mais la dernière équation donne

$$t=\frac{z-C}{C'} \;;$$

en substituant donc, il viendra

$$\frac{y}{x}=\text{Tang.}\left(\alpha-k-k'\frac{z-C}{C'}\right) \;,$$

ou encore

$$z=C+\frac{1}{k'}\left\{C'(\alpha-k)-\text{Arc}\left(\text{Tang.}=\frac{y}{x}\right)\right\} \;;$$

deuxième équation de la trajectoire apparente de P. Il est aisé de se convaincre que l'ensemble de ces deux équations appartient à une hélice.

Pour dernière application, nous supposerons les deux points P, p invariablement fixés à une surface de révolution tournant uniformément sur son axe que nous prendrons pour l'axe des z ; en faisant passer le plan des xy par le cercle que décrit le point p. Soit r le rayon de ce cercle ; soit R le rayon du cercle décrit par le point P, et soit D la distance de son centre à l'origine. Les équations du mouvement de translation de nos deux points seront de la forme

$$\text{Pour P}\begin{cases} x=R\,\text{Cos.}(K+\lambda t)\,, \\ y=R\,\text{Sin.}(K+\lambda t)\,, \\ z=D\,; \end{cases}\qquad \text{Pour } p\begin{cases} x=r\,\text{Cos.}(k+\lambda t)\,, \\ y=r\,\text{Sin.}(k+\lambda t)\,, \\ z=0\,. \end{cases}$$

On doit remarquer présentement que p étant supposé invariablement lié à la surface de révolution, ce point doit avoir par là même un mouvement de rotation sur son axe dont la vitesse angulaire sera égale à celle de translation. En conséquence, on trouvera (12, 13, 14) pour les équations du mouvement apparent de P,

$$\begin{aligned} x=&+\{R\,\text{Cos.}(K+\lambda t)-r\,\text{Cos.}(k+\lambda t)\}\,\text{Cos.}(c+\lambda t) \\ &+\{R\,\text{Sin.}(K+\lambda t)-r\,\text{Sin.}(k+\lambda t)\}\,\text{Sin.}(c+\lambda t)\,, \\ y=&-\{R\,\text{Cos.}(K+\lambda t)-r\,\text{Cos.}(k+\lambda t)\}\,\text{Sin.}(c+\lambda t) \\ &+\{R\,\text{Sin.}(K+\lambda t)-r\,\text{Sin.}(k+\lambda t)\}\,\text{Cos.}(c+\lambda t)\,, \\ z=&D\,. \end{aligned}$$

Ces équations reviennent aux suivantes :

$$\begin{aligned} x&=R\,\text{Cos.}\{(c+\lambda t)-(K+\lambda t)\}-r\,\text{Cos.}\{(c+\lambda t)-(k+\lambda t)\}\,, \\ y&=R\,\text{Sin.}\{(c+\lambda t)-(K+\lambda t)\}-r\,\text{Sin.}\{(c+\lambda t)-(k+\lambda t)\}\,; \\ z&=D\,. \end{aligned}$$

ou encore à celle-ci :

$$x=R\,\text{Cos.}(c-K)-r\,\text{Cos.}(c-k)\,,\qquad y=R\,\text{Sin.}(c-K)-r\,\text{Sin.}(c-k)\,;$$

$$z=D\,;$$

qui nous montre que le point P semblera immobile au point p. C'est le cas où nous nous trouvons sur la surface de la terre; et il n'est pas surprenant que nous ne nous apercevions pas du mouvement qu'entraine, dans les divers objets qui frappent nos regards, sa rotation sur son axe.

Quoique nous ayons supposé le mouvement de rotation uniforme, il est aisé de voir que les choses en iraient encore de même s'il ne l'était pas; on pourrait, en effet, partager le temps en une suite d'intervalles assez courts pour que durant chacun le mouvement pût être considéré comme uniforme; le point P, à chaque instant, semblerait donc immobile; d'où il suit qu'il paraîtrait constamment fixe.

Nous avons supposé que l'axe de rotation était fixe; mais, s'il était transporté d'une manière quelconque dans l'espace, il en irait encore de même, puisqu'à chaque instant les points P, p décriraient dans l'espace des droites parallèles avec des vitesses égales, et que, comme nous l'avons vu au commencement de cet essai, un tel mouvement ne saurait produire aucun mouvement apparent dans P par rapport à p.

Cela posé, soit un système de points P, P′, P″,..... en nombre quelconque, invariablement liés entre eux; et supposons que ce système soit emporté dans l'espace d'un mouvement quelconque. Nous pourrons, à chaque instant, supposer que ce système tourne sur une axe variable, soit par rapport au système, soit par rapport aux points fixes de l'espace; d'où il suit qu'à chaque instant aussi l'un quelconque des points de ce système se trouvera, par rapport à tous les autres, dans les mêmes circonstances où se trouvait tout-à-l'heure le point p par rapport au point P; c'est-à-dire que ce point jugera tous les autres immobiles. Ainsi, *il est absolument impossible de s'apercevoir du mouvement des divers points d'un système de forme invariable dont on fait soi-même partie* (*).

(*) Au lieu de supposer, dans tout ce qu'on vient de lire, que le point p se croit immobile, on aurait pu supposer, plus généralement, qu'il se croit animé d'un mouvement d'une espèce déterminée, différent de celui qu'il a

GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE.

Lettre au Rédacteur des Annales,

Sur la démonstration, donnée à la page 326 du XI.ᵉ volume de ce recueil, des deux théorèmes énoncés à la page 289 du IX.ᵉ volume du même recueil;

Par M. Vecten, licencié ès sciences, ancien professeur de mathématiques spéciales.

J'ai été bien surpris, mon très-cher ami, en lisant le dernier numéro de votre excellent recueil, de voir que vous aviez vainement cherché des démonstrations purement géométriques pour les deux théorèmes énoncés à la page 289 du IX.ᵉ volume; et que vous incliniez même à penser que toute autre voie que celle que vous avez prise ne pourrait conduire que très-difficilement au but. La vérité est que dès que les énoncés de ces deux théorèmes me

---

réellement; et demander, en conséquence, quel mouvement il attribuera au point P. Il est clair que les divers problèmes qui viennent d'être résolus ne sont que des cas particuliers de celui-là.

Dans ce cas, et dans celui où le point p se croit immobile, au lieu de supposer connus les mouvemens effectifs des points P, p, on pourrait supposer que l'un d'eux seulement est donné, et demander quel devrait être l'autre, pour que le mouvement apparent du point P fût un mouvement d'une espèce déterminée. J. D. G.

furent connus, j'en cherchai la démonstration que je trouvai sans beaucoup d'efforts, et par les moyens généralement employés en pareil cas. Si je négligeai alors de vous adresser le résultat de mes recherches, c'est que la chose m'avait paru trop simple pour en valoir la peine, que je ne doutai pas que beaucoup d'autres n'y parvinssent comme moi, et que je craignais d'arriver trop tard. Quoique les démonstrations que vous avez vous-même données ne laissent certainement rien à désirer du côté de la rigueur, de la brièveté et de l'élégance, ceux à qui les principes de la statique sont inconnus peuvent désirer de se convaincre de la vérité de ces théorèmes par des considérations purement géométriques. C'est ce qui me détermine à vous adresser mes démonstrations dont vous ferez d'ailleurs tel usage qu'il vous plaira.

Tout repose sur une proposition bien connue de tous ceux qui se sont occupés de la géométrie de la règle ; proposition rappelée et mise en œuvre en maints endroits des annales ; et dont la vérité se déduit d'ailleurs bien simplement de la considération de la perspective d'un tronc de pyramide triangulaire à bases non parallèles. Cette proposition consiste en ce que, si deux triangles ABC, A'B'C', tracés sur un même plan, sont tels que les trois droites AA', BB', CC' concourent en un même point, les trois points de concours des côtés AB et A'B', BC et B'C', CA et C'A', appartiendront à une même ligne droite, et réciproquement.

En se bornant en effet, pour les motifs que vous avez vous-même indiqués, aux cas particuliers que vous avez considérés ; on voit, par le premier théorème, que les trois droites

$$\overline{(1)(234)}\ ,\quad \overline{(12)(34)}\ ,\quad \overline{(123)(4)}\ ,$$

joignent deux à deux les sommets de deux triangles dont l'un a pour ses trois côtés les droites

$$\overline{(1)(2)}\ ,\quad \overline{(12)(3)}\ ,\quad \overline{(1)(23)}\ ;$$

et l'autre pour les siens

$$\overline{(2)(34)}\ ,\quad \overline{(3)(4)}\ ,\quad \overline{(23)(4)}\ ;$$

or, les côtés correspondans de ces deux triangles concourent aux trois points

$$(2)\ ,\quad (3)\ ,\quad (23)\ ,$$

lesquels, par construction, sont sur une même droite $\overline{(2)(3)}$; donc les trois droites ci-dessus dénommées, doivent concourir en un même point (1234); et on démontrera, par une semblable considération, que les trois droites

$$\overline{(2)(345)}\ ,\quad \overline{(23)(45)}\ ,\quad \overline{(234)(5)}\ ,$$

concourent en un même point (2345).

On démontrera semblablement que trois quelconques des quatre droites

$$\overline{(1)(2345)}\ ,\quad \overline{(12)(345)}\ ,\quad \overline{(123)(45)}\ ,\quad \overline{(1234)(5)}\ .$$

concourent en un même point; d'où on conclura que ces quatre droites se coupent en un point unique (12345).

Pour le second théorème, on voit que les trois points

$$(\overline{1}, \overline{234})\ ,\quad (\overline{12}, \overline{34})\ ,\quad (\overline{123}, \overline{4})\ ;$$

sont les points de concours des directions des côtés correspondans de deux triangles dont l'un a pour ses sommets les points

$$(\overline{1}, \overline{2})\ ,\quad (\overline{12}, \overline{3})\ ,\quad (\overline{1}, \overline{23})\ ,$$

et l'autre les points

$$(\overline{2}, \overline{34})\ ,\quad (\overline{3}, \overline{4})\ ;\quad (\overline{23}, \overline{4})\ ;$$

or, les droites

$$\overline{2}\,,\quad \overline{3}\,,\quad \overline{23}\,,$$

qui joignent les sommets correspondans de ces deux triangles, concourent, par construction, en un même point $(\overline{2},\overline{3})$; donc les trois points ci-dessus dénommés doivent appartenir à une même droite $\overline{1234}$; et on démontrera, par une semblable considération, que les trois points

$$(\overline{2},\overline{345})\,,\quad (\overline{23},\overline{45})\,,\quad (\overline{234},\overline{5})\,,$$

appartiennent à une même ligne droite.

On démontrera semblablement que trois quelconques des quatre points

$$(\overline{1},\overline{2345})\,,\quad (\overline{12},\overline{345})\,,\quad (\overline{123},\overline{45})\,,\quad (\overline{1234},\overline{5})\,,$$

appartiennent à une même ligne droite, d'où l'on conclura que ces quatre points sont sur une droite unique $\overline{12345}$.

Agreez, etc.

Paris, le 26 mai 1821.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorèmes de Géométrie.

I. De tous les systèmes de diamètres conjugués d'une ellipse; les diamètres principaux sont ceux dont la somme est un *minimum*, et les diamètres conjugués égaux sont ceux dont la somme est un *maximum*.

II. De tous les systèmes de diamètres conjugués d'une ellipsoïde; les diamètres principaux sont ceux dont la somme est un *minimum*, et les diamètres conjugués égaux sont ceux dont la somme est un *maximum*.

ANALISE ALGÉBRIQUE.

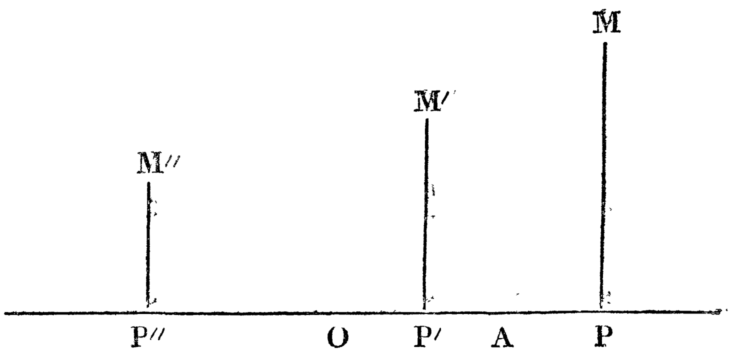
Des équations fonctionnelles ;

Par M. CHARLES BABBAGE, de la société royale, secrétaire de la société astronomique de Londres (*).

(*Extrait*)

Par M. GERGONNE.

SOIT proposé de déterminer une courbe MM′M″ par la propriété que voici :



(*) L'intéressant mémoire dont on va donner une idée succincte se trouve imprimé à la suite d'un *Recueil d'exemples de l'application du calcul aux différences finies* ; par M. J. F. W. HERSCHEL (Cambridge, 1820). Il porte la date du 20 octobre 1820.

O, A sont deux points fixes sur une droite indéfinie ; de l'un quelconque M des points de la courbe on a abaissé une perpendiculaire MP sur cette droite. On a ensuite porté, sur la même droite, à partir du point O, savoir ; à droite, une longueur OP′ quatrième proportionnelle à OP, OA, AP, et à gauche une longueur OP″ troisième proportionnelle à AP et OA. On a élevé ensuite à la droite indéfinie en P′, P″ des perpendiculaires terminées à la courbe en M′, M″ ; et on demande que, quel que soit d'ailleurs le point M de la courbe, on ait toujours le rectangle construit sur OA et M′P′, moins le rectangle construit sur OP et M″P″, égal au rectangle construit sur OA et OP.

En prenant notre droite indéfinie pour axe des x, le point O pour origine, les x positives à droite de ce point, et représentant par a la longueur constante OA, nous aurons $OP=x$, $AP=x-a$, d'où nous conclurons

$$OP'=\frac{a(x-a)}{x}\ , \quad OP''=-\frac{a^2}{x-a}\ ;$$

Si donc nous prenons généralement pour équation de la courbe cherchée

$$y=\psi(x)\ ,$$

nous aurons

$$MP=\psi(x)\ , \quad M'P'=\psi\left[\frac{a(x-a)}{x}\right]\ , \quad M''P''=\psi\left[-\frac{a^2}{x-a}\right]\ ;$$

mais, par la condition du problème, on doit avoir

$$OA.M'P'-OP.M''P''=OA.OP\ ;$$

donc

$$a\psi\left[\frac{a(x-a)}{x}\right]-x\psi\left[-\frac{a^2}{x-a}\right]=ax\ .$$

Voilà une de ces équations que M. Babbage appelle *équations* *fonctionnelles ;* et on voit qu'il ne s'agit pas de la résoudre, dans le sens qu'on attache vulgairement à ce mot ; c'est-à-dire qu'il ne s'agit pas d'en tirer la valeur de x ; ce qui serait d'ailleurs impossible ; mais qu'il s'agit seulement d'en faire usage pour découvrir la forme de la fonction désignée par ψ. On conçoit en effet que cette forme une fois connue, il ne s'agira plus que de faire une semblable fonction de x et de la substituer dans l'équation $y=\psi(x)$, pour obtenir l'équation de la courbe cherchée.

On conçoit qu'au lieu d'une seule équation devant déterminer la forme de la fonction ψ, on pourrait demander de déterminer la forme de deux fonctions ψ et φ, ou même d'un plus grand nombre, à l'aide de deux ou d'un plus grand nombre d'équations qui les contiendraient. On conçoit aussi qu'au lieu d'affecter une seule variable x, ces fonctions pourraient en affecter un plus grand nombre. On conçoit enfin que les équations, au lieu d'être algébriques, pourraient être différentielles ou aux différences, ou même d'une forme transcendante quelconque. N'ayant d'autre dessein ici que de donner une idée très-sommaire de ces sortes de recherches, nous nous renfermerons strictement dans ce qu'elles offrent de plus élémentaire.

Reprenons notre équation

$$a\psi\left[\frac{a(x-a)}{x}\right]-x\psi\left[-\frac{a^2}{x-a}\right]=ax\ ;$$

en y changeant x en $\dfrac{a(x-a)}{x}$, réduisant et chassant les dénominateurs, elle devient

$$x\psi\left[-\frac{a^2}{x-a}\right]-(x-a)\psi(x)=a(x-a)\ ;$$

faisant encore dans celle-ci le même changement de x en $\dfrac{a(x-a)}{x}$, elle deviendra, après les réductions analogues,

$$a\psi\left[\frac{a(x-a)}{x}\right]+(x-a)\psi(x)=-a^2\ ;$$

éliminant donc, entre ces trois équations, les deux fonctions

$$\psi\left[\frac{a(x-a)}{x}\right],\quad \psi\left[-\frac{a^2}{x-a}\right],$$

comme deux inconnues, l'équation résultante sera

$$(x-a)\psi x=-ax\ ;$$

d'où

$$\psi x=-\frac{ax}{x-a}\ ;$$

puis donc que nous avons pris pour l'équation de la courbe cherchée $y=\psi x$; cette équation sera

$$y=-\frac{ax}{x-a}\ ;$$

ainsi la courbe cherchée est une hyperbole qui passe par l'origine et dont les asymptotes, respectivement parallèles aux axes des coordonnées, coupent l'une l'axe des x à une distance a à droite de l'origine, et l'autre l'axe des y à la même distance a au-dessous de cette origine.

Le succès des transformations qui nous ont conduit à la solution du problème que nous nous étions proposé tient, comme on le voit, à ce que la fonction $\frac{a(x-a)}{x}$ se change en $-\frac{a^2}{x-a}$, lorsqu'on y change x en $\frac{a(x-a)}{x}$, et à ce que la dernière se réduit simplement à x, lorsqu'on y opère la même transformation ; c'est-à-dire, en d'autres termes, que, si l'on pose,

$$\varphi(x)=\frac{a(x-a)}{x},$$

on aura

$$\varphi[\varphi(x)]=-\frac{a^2}{x-a};$$

et

$$\varphi\{\varphi[\varphi(x)]\}=x;$$

ces sortes de fonctions sont de la nature de celles que M. Babbage appelle *fonctions périodiques* ; et, pour suivre à peu près la marche qu'il a lui-même tracée, nous nous occuperons d'abord des fonctions de cette nature ; nous en ferons ensuite l'application à la résolution des équations fonctionnelles ; et nous terminerons enfin en donnant une idée de la manière d'étendre la méthode aux cas pour lesquels elle semble être en défaut.

§. I.

Des fonctions périodiques.

Tout signe de fonction, quel qu'il soit, est en même temps signe d'opération algébrique, simple ou composée, et l'indication de ces opérations est aussi la définition de la fonction dont il s'agit. Lorsque, par exemple, on pose

$$\varphi(t)=a+bt;$$

on définit la fonction désignée par t, puisqu'on explique que, pour obtenir une telle fonction d'une quantité, quelle qu'elle soit, il faut multiplier cette quantité par la constante b et ajouter le produit à la constante a ; de sorte que, d'après cela, on aura, par exemple,

$$\varphi\left(\frac{a+x}{b-x}\right)=a+b\left(\frac{a+x}{b-x}\right)=\frac{2ab-(a-b)x}{b-x}\,.$$

On peut appliquer à une même expression algébrique deux ou un plus grand nombre de signes de fonctions ; et si ces fonctions sont définies, on pourra toujours exécuter les opérations qu'elles indiqueront. Soient, par exemple, deux fonctions φ et ψ définies ainsi qu'il suit :

$$\varphi(t)=\frac{a}{a-t}\,,\quad \psi(t)=\frac{t+b}{b}\;;$$

l'expression

$$\psi\varphi\left(\frac{x+a}{x-b}\right)$$

signifiera qu'il faut d'abord diviser la constante a par cette même constante diminuée de la fraction $\frac{x+a}{x-b}$, ce qui donnera un premier résultat ; et qu'il faudra ensuite diviser par b ce résultat augmenté de cette même quantité b ; on aura donc ainsi

$$\psi\varphi\left(\frac{x+a}{x-b}\right)=\psi\left\{\frac{a}{a-\left(\frac{x+a}{x-b}\right)}\right\}=\psi\left\{\frac{a(x-b)}{(a-1)x-a(b+1)}\right\}\,,$$

et par suite

$$\psi\varphi\left(\frac{x+a}{x-b}\right)=\frac{\frac{a(x-b)}{(a-1)x-a(b+1)}+b}{b}=\frac{(ab+a-b)x-ab(b+2)}{b[(a-1)x-a(b+1)]}\,.$$

On trouverait, à l'inverse,

$$\varphi\psi\left(\frac{x+a}{x-b}\right)=\varphi\left\{\frac{\frac{x+a}{x-b}+b}{b}\right\}=\varphi\left\{\frac{(b+1)x-(b^2-a)}{b(x-b)}\right\}\;;$$

et par suite

$$\varphi\psi\left(\frac{x+a}{x-b}\right)=\frac{a}{a-\dfrac{(b+1)x-(b^2-a)}{b(x-b)}}=\frac{ab(x-b)}{(ab-b-1)x-(a^2b-b^2+a)}.$$

Il n'en faut pas davantage pour montrer combien, en général, il importe ici d'avoir égard à l'ordre suivant lequel les signes et les opérations se succèdent, et combien il est nécessaire d'opérer toujours du signe le plus voisin de la quantité dont il s'agit à celui qui le précéde immédiatement.

Cette attention cesse au surplus d'être nécessaire, dès qu'il s'agit d'un même signe de fonction plusieurs fois répété; on peut même alors n'écrire le signe qu'une seule fois, en l'affectant d'un exposant égal au nombre de fois qu'il devrait être écrit consécutivement. Si, par exemple, on donne pour définition du signe φ

$$\varphi(t)=a^t\ ,$$

on aura

$$\varphi(x)=a^x\ ,$$

$$\varphi^2(x)=\varphi[\varphi(x)]=\varphi(a^x)=a^{a^x}\ ;$$

$$\varphi^3(x)=\varphi[\varphi^2(x)]=\varphi(a^{a^x})=a^{a^{a^x}}\ ,$$

et ainsi de suite. Si l'on donne, pour définition du signe ψ,

$$\psi(t)=\frac{2}{2-t}\ ,$$

on trouvera

$$\psi\left(\frac{2-x}{1-x}\right)=\frac{2}{2-\dfrac{2-x}{1-x}}=-\frac{2(1-x)}{x}\ ,$$

$$\psi^2\left(\frac{2-x}{1-x}\right)=\psi\left(-\frac{2(1-x)}{x}\right)=\frac{2}{2+\frac{2(1-x)}{x}}=x,$$

$$\psi^3\left(\frac{2-x}{1-x}\right)=\psi(x)=\frac{2}{2-x},$$

$$\psi^4\left(\frac{2-x}{1-x}\right)=\psi\left(\frac{2}{2-x}\right)=\frac{2}{2-\frac{2}{2-x}}=\frac{2-x}{1-x}.$$

Il ne faut pas aller plus loin pour apercevoir que la fonction est périodique, et qu'on doit avoir conséquemment $\psi^5(t)=\psi(t)$, $\psi^6(t)=\psi^2(t)$; et ainsi de suite, et en général $\psi^{4n+r}(t)=\psi^r(t)$. Mais puisque les résultats du premier exemple sont a^x, a^{a^x}, $a^{a^{a^x}}$,....... qui, quelque loin qu'on les pousse, ne peuvent jamais conduire à x, il faut en conclure que la périodicité est un caractère particulier à certaines fonctions; ou, ce qui revient au même, que les fonctions ne sont pas toutes périodiques.

Nous disons donc qu'une *fonction* ψ est *périodique* lorsqu'elle est de telle forme que l'on a $\psi^n(t)=t$, n étant un nombre entier positif; et si, de plus, aucune des fonctions $\psi(t)$, $\psi^2(t)$, $\psi^3(t)$ d'ordres inférieurs à n n'est égale à t, nous dirons que la fonction ψ est périodique du n.^{me} ordre.

Puis donc que, généralement parlant, les fonctions ne sont pas toutes périodiques, on peut se proposer de trouver, pour chaque ordre, les fonctions qui sont périodiques. Nous introduirons à la solution générale de ce problème par la considération de quelques cas particuliers.

I. Une fonction périodique du premier ordre serait celle qui satisferait à la condition $\psi x=x$; cette fonction serait donc la quantité sous le signe fonctionnel elle-même.

II. Une fonction périodique du second ordre est celle qui satisfait

tisfait à la condition $\psi^2 x=x$, de laquelle il s'agit de déduire la forme générale de la fonction ψ. M. Babbage y parvient par diverses sortes de considérations.

1.° Il remarque, en premier lieu, que l'équation $\psi^2 x=x$ donne $\psi x=\psi^{-1}x$, ψ^{-1} désignant la fonction inverse de ψ; d'où il suit qu'en posant $\psi x=y$, on aura $y=\psi^{-1}x$ ou $x=\psi y$; c'est-à-dire que la valeur de x en y doit être absolument de même forme que la valeur de y en x; ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que x et y, c'est-à-dire x et ψx seront liés par une équation symétrique par rapport à ces quantités; et ce qui aura toujours lieu dans ce cas; c'est-à-dire que ψx devra être donnée en x par une équation quelconque de la forme

$$F[\overline{x}\,,\,\overline{\psi(x)}]=0\,.$$

M. Babbage emploie les barres au-dessus de x et $\psi(x)$, pour avertir que la fonction désignée par F doit être symétrique par rapport à ces deux quantités. Ainsi, pour ne s'arrêter qu'aux cas les plus simples, on peut prendre

$$x+\psi(x)=a\,, \qquad \text{ou} \qquad x.\psi(x)=a^2\,;$$

il en résultera

$$\psi(x)=a-x\,, \qquad \text{ou} \qquad \psi(x)=\frac{a^2}{x}\,;$$

on aura en effet, dans le premier cas,

$$\psi^2(x)=\psi(x-a)=a-(a-x)=x\,;$$

et dans le second

$$\psi^2(x)=\psi\left(\frac{a^2}{x}\right)=\frac{a^2}{\frac{a^2}{x}}=x\,.$$

2.° Mais le procédé que voici est beaucoup plus général ; et peut d'ailleurs s'étendre à la recherche d'une fonction périodique d'un ordre quelconque. Soit désignée par f une fonction particulière qui résout le problème, de telle sorte qu'on ait $f^2(t)=t$. Soit en outre φ une fonction tout-à-fait arbitraire ; et soit φ^{-1} son inverse, de telle sorte qu'on ait $\varphi^{-1}\varphi(\nu)=\varphi\varphi^{-1}(\nu)=\nu$; la fonction périodique cherchée du second ordre sera

$$\psi(x)=\varphi^{-1}f\varphi(x) .$$

On aura, en effet,

$$\psi^2(x)=\psi[\varphi^{-1}f\varphi(x)]=\varphi^{-1}f\varphi[\varphi^{-1}f\varphi(x)]=\varphi^{-1}f\varphi\varphi^{-1}[f\varphi(x)] ;$$

mais

$$\varphi\varphi^{-1}[f\varphi(x)]=f\varphi(x) ;$$

donc

$$\psi^2(x)=\varphi^{-1}ff\varphi(x)=\varphi^{-1}f^2\varphi(x) ;$$

mais

$$f^2\varphi(x)=\varphi(x) ;$$

donc finalement

$$\psi^2(x)=\varphi^{-1}\varphi(x)=x ,$$

ainsi qu'il était demandé.

Soient pris, par exemple, $f(x)=a^m-x$, que nous savons être une solution particulière ; soit pris de plus $\varphi(x)=x^m$, d'où $\varphi^{-1}x=\sqrt[m]{x}$, nous aurons ainsi

$$\psi(x)=\varphi^{-1}f\varphi(x)=\sqrt[m]{a^m-x^m} ;$$

et, en effet, on aura

$$\psi^2(x)=\psi[\sqrt[m]{a^m-x^m}]=\sqrt[m]{a^m-(a^m-x^m)}=\sqrt[m]{x^m}=x .$$

Pour avoir une forme un peu générale de la fonction f, posons

$$\mathrm{f}(x)=\frac{a+bx}{c+dx}\ ;$$

nous aurons

$$\mathrm{f}^2(x)=\frac{a+b\,\dfrac{a+bx}{c+dx}}{c+d\,\dfrac{a+bx}{c+dx}}=\frac{a(c+dx)+b(a+bx)}{c(c+dx)+d(a+bx)}=\frac{a(b+c)+(ad+b^2)x}{(ad+c^2)+d(b+c)x}\ ;$$

afin donc d'avoir $\mathrm{f}^2(x)=x$; il faudra poser

$$a(b+c)=0\ ,$$

$$d(b+c)=0\ ;$$

$$ad+c^2=ad+b^2 \quad \text{ou} \quad c^2=b^2\ ;$$

on satisfait à la fois à ces trois conditions, en posant $b=-c$ et laissant a, c, d arbitraires; de sorte qu'on a

$$\mathrm{f}(x)=\frac{a-cx}{c+dx}\ ;$$

il en résulte en effet

$$\mathrm{f}^2(x)=\frac{a-c\,\dfrac{a-cx}{c+dx}}{c+d\,\dfrac{a-cx}{c+dx}}=\frac{a(c+dx)-c(a-cx)}{c(c+dx)+d(a-cx)}=\frac{(ad+c^2)x}{ad+c^2}=x.$$

Pour donner aussi un peu de généralité à la fonction φ, posons

$$\varphi(x)=\frac{e+fx}{g+hx}\ ;$$

en observant que, si l'on pose

$$\frac{e+fx}{g+hx}=y\ ,$$

il en résulte

$$x=-\frac{e-gy}{f-hy}\;;$$

nous en conclurons

$$\varphi^{-1}(x)=-\frac{e-gx}{f-hx}\;;$$

ce qui donne en effet,

$$\varphi^{-1}\varphi(x)=-\frac{e-g\dfrac{e+fx}{g+hx}}{f-h\dfrac{e+fx}{g+hx}}=-\frac{e(g+hx)-g(e+fx)}{f(g+hx)-h(e+fx)}=\frac{(fg-eh)x}{fg-eh}=x:$$

Mettant donc toutes ces valeurs dans la formule

$$\psi(x)=\varphi^{-1}\mathrm{f}\varphi(x)\;,$$

il viendra

$$\psi(x)=\varphi^{-1}\mathrm{f}\left(\frac{e+fx}{g+hx}\right)=\varphi^{-1}\left\{\frac{a-c\dfrac{e+fx}{g+hx}}{c+d\dfrac{e+fx}{g+hx}}\right\}=\varphi^{-1}\left\{\frac{a(g+hx)-c(e+fx)}{c(g+hx)+d(e+fx)}\right\}\;;$$

c'est-à-dire,

$$\psi(x)=\varphi^{-1}\left\{\frac{(ag-ce)+(ah-cf)x}{(cg+de)+(ch+df)x}\right\}=-\frac{e-g\dfrac{(ag-ce)+(ah-cf)x}{(cg+de)+(ch+df)x}}{f-h\dfrac{(ag-ce)+(ah-cf)x}{(cg+de)+(ch+df)x}}\;;$$

ce qui donne, toutes réductions faites,

$$\psi(x)=-\frac{(2ceg+de^2-ag^2)+(ceh+def-agh+cfg)x}{(ceh+def-agh+cfg)+(2cfh+df^2-ah^2)x}\;;$$

formule dans laquelle les sept quantités a, c, d, e f, g, h sont tout-à-fait arbitraires.

On voit, par ce seul exemple, comment on peut façonner, pour ainsi dire, à volonté ces sortes de fonctions. Entre autres cas particuliers donnés par M. Babbage, nous nous bornerons à citer les suivans :

$$\psi(x)=\frac{x}{\sqrt[m]{x^m-a^m}}\ , \qquad \psi x=\text{Log.}(a-e^x)\ ;$$

$$\psi(x)=\text{Arc}\{\text{Tang.}=(a-\text{Tang.}x)\}\ , \qquad \psi(x)=x-\text{Log.}(e^x-1)\ .$$

III. Une fonction périodique du troisième ordre est celle qui satisfait à la condition $\psi^3(x)=x$. En suivant un procédé analogue à celui qui vient de nous conduire aux fonctions périodiques du second ordre, si f désigne une fonction d'une forme particulière quelconque satisfaisant à la condition $f^3(x)=x$ et que φ et φ^{-1} soient toujours deux fonctions tout-à-fait arbitraires, telles que $\varphi^{-1}\varphi(x)=\varphi\varphi^{-1}(x)=x$, c'est-à-dire deux fonctions inverses l'une de l'autre, on aura encore ici

$$\psi(x)=\varphi^{-1}f\varphi(x)\ .$$

Il en résultera, en effet,

$$\psi^2(x)=\psi[\varphi^{-1}f\varphi(x)]=\varphi^{-1}f\varphi[\varphi^{-1}f\varphi(x)]\ ;$$

ou

$$\psi^2(x)=\varphi^{-1}f^2\varphi(x)\ ,$$

et par suite

$$\psi^3(x)=\psi[\varphi^{-1}f^2\varphi(x)]=\varphi^{-1}f\varphi[\varphi^{-1}f^2\varphi(x)]\ ,$$

ou

$$\psi^3(x)=\varphi^{-1}f^3\varphi(x)=\varphi^{-1}\varphi(x)=x\ .$$

Tout se réduit donc à savoir trouver une seule fonction f telle que $f^3(x)=x$; et, à l'aide de celle-là et de la fonction arbitraire φ, nous pourrons trouver une infinité de valeurs de la fonction ψ. Or, on peut procéder dans la recherche de cette fonction f de la même manière que nous l'avons fait pour le second ordre ; posant en effet,

$$f(x)=\frac{a+bx}{c+dx},$$

nous aurons successivement

$$f^2(x)=\frac{a+b\,\dfrac{a+bx}{c+dx}}{c+d\,\dfrac{a+bx}{c+dx}}=\frac{a(b+c)+(ad+b^2)x}{(ad+c^2)+d(b+c)x},$$

$$f^3(x)=\frac{a(b+c)+(ad+b^2)\,\dfrac{a+bx}{c+dx}}{(ad+c^2)+d(b+c)\,\dfrac{a+bx}{c+dx}}=\frac{a(bc+ad+b^2+c^2)+(2abd+acd+b^3)x}{(2acd+abd+c^3)+d(bc+ad+b^2+c^2)x};$$

afin donc qu'on ait $f^3(x)=x$, il faudra qu'on ait

$$a(bc+ad+b^2+c^2)=0,$$

$$d(bc+ad+b^2+c^2)=0,$$

$$2acd+abd+c^3=2abd+acd+b^3.$$

la dernière de ces trois équations revenant à

$$(b-c)(bc+ad+b^2+c^2)=0,$$

il s'ensuit qu'elles seront toutes satisfaites en posant simplement

$$bc+ad+b^2+c^2=0, \quad \text{d'où} \quad d=-\frac{b^2+bc+c^2}{a},$$

ce qui donne, pour la fonction cherchée,

$$f(x)=\frac{a(a+bx)}{ac-(b^2+bc+c^2)x}.$$

Au surplus, comme nous n'avons ici besoin que d'un cas particulier quelconque, nous pouvons faire $b=0$, ce qui nous donnera

$$f(x)=\frac{a^2}{c(a-cx)}\;;$$

il viendra en effet

$$f^2(x)=f\left[\frac{a^2}{c(a-cx)}\right]=\frac{a^2}{c\left[a-c\dfrac{a^2}{c(a-cx)}\right]}\;;$$

c'est-à-dire,

$$f^2(x)=-\frac{a(a-cx)}{c^2x}\;;$$

et de là

$$f^3(x)=f\left\{-\frac{a(a-cx)}{c^2x}\right\}=\frac{a^2}{c\left[a+c\dfrac{a(a-cx)}{c^2x}\right]}\;;$$

c'est-à-dire, en réduisant, $f^3(x)=x$.

Adoptant donc cette valeur de la fonction f, et prenant, par exemple, $\varphi(x)=e^x$, d'où $\varphi^{-1}(x)=\text{Log}.x$, nous aurons

$$\psi(x)=\varphi^{-1}f\varphi(x)=\varphi^{-1}f(e^x)=\varphi^{-1}\left\{\frac{a^2}{c(a-ce^x)}\right\}\;;$$

c'est-à-dire,

$$\psi(x)=\text{Log}.\left\{\frac{a^2}{c(a-ce^x)}\right\}=2\text{Log}.a-\text{Log}.c-\text{Log}.(a-ce^x)\;;$$

faisant, par exemple, $c=1$, il viendra

$$\psi(x)=2\text{Log}.a-\text{Log}.(a-e^x)\;;$$

on aura, en effet,

$$\psi^2x=\text{Log}.a+\text{Log}.(a-e^x)-\text{Log}.(-e^x)\;;$$

et ensuite

$$\psi^3 x = \text{Log.}e^x = x \ .$$

Nous donnerons encore, d'après M. Babbage, les exemples suivans de fonctions périodiques du troisième ordre

$$\psi(x) = \frac{a\sqrt{x^2-a^2}}{x}\ , \qquad \psi(x) = \frac{a^2}{\sqrt[m]{a^m-x^m}}\ ,$$

$$\psi(x) = \frac{a\sqrt[m]{x^m-a^m}}{x}\ , \quad \psi(x) = c - x + \text{Log.}(e^x - e^c)\ ;$$

En général, si f désigne une fonction de telle forme qu'on ait $f^n(x)=x$, et si ϕ et ϕ^{-1} sont deux fonctions arbitraires inverses l'une de l'autre, en posant

$$\psi(x) = \phi^{-1}f\phi(x)\ ,$$

ψ sera une fonction périodique du $n.^{me}$ ordre ; de sorte que toute la difficulté de trouver, dans chaque ordre, tant de fonctions périodiques qu'on voudra se réduit, en dernière analise, à en trouver une seule, et c'est ce à quoi on peut procéder d'une manière analogue à celle dont nous avons fait usage pour le second et le troisième ordre. M. Babbage indique pour cela la formule générale

$$f(x) = \frac{2a\left(1+\text{Cos.}\frac{2m\varpi}{n}\right)(a+bx)}{2ac\left(1+\text{Cos.}\frac{2m\varpi}{n}\right)-\left(b^2-2bc\text{Cos.}\frac{2m\varpi}{n}+c^2\right)x}\ ,$$

en renvoyant, pour un plus ample détail, à un mémoire de M. Horner, inséré dans les *Annales of philosophy* (Nov. 1817).

M. Babbage observe, au surplus, que si, dans l'équation $\psi^n(x)=x$, n est un nombre composé, pq par exemple, toute fonction qui satisfera à l'une ou à l'autre des équations $\psi^p(x)=x$, $\psi^q(x)=x$, satisfera, à plus forte raison, à l'équation $\psi^n(x)=x$.

§. II.

§. II.

Des équations fonctionnelles.

I. Soit, en général, l'équation

$$F\{x, \psi(x), \psi(fx)\}=0,$$

dans laquelle ψ est le signe d'une fonction dont la forme est inconnue et où f désigne une fonction périodique du second ordre; c'est-à-dire, une fonction telle que $f^2(x)=x$; et supposons qu'il soit question de résoudre cette équation par rapport à la caractéristique ψ, c'est-à-dire, de déterminer $\psi(x)$ en fonction de x et des constantes que renferme la proposée.

Pour y parvenir, soit changé x en $f(x)$, l'équation deviendra

$$F\{f(x), \psi(fx), \psi(x)\}=0;$$

éliminant donc $\psi(fx)$ entre celle-ci et la proposée, il en résultera une équation de laquelle on pourra tirer la valeur de (ψx), en fonction de x, $f(x)$ et des constantes; et comme $f(x)$ est supposé une fonction de forme connue, il n'entrera finalement que x et des constantes dans la valeur de $\psi(x)$.

Soit, par exemple, l'équation

$$\psi(x)-a\psi\left(\frac{1}{x}\right)=e^x,$$

où $\frac{1}{x}$ est fonction périodique du second ordre; en y changeant x en $\frac{1}{x}$, elle deviendra

$$\psi\left(\frac{1}{x}\right)-a\psi(x)=e^{\frac{1}{x}} ;$$

et, en éliminant $\psi\left(\frac{1}{x}\right)$ entre l'une et l'autre, il viendra

$$\psi(x)=\frac{e^x+ae^{\frac{1}{x}}}{1-a^2} .$$

Soit encore l'équation

$$(\psi x)^2.\psi\frac{1-x}{1+x}=c^2x ,$$

où $\frac{1-x}{1+x}$ est également fonction périodique du second ordre ; en y changeant x en $\frac{1-x}{1+x}$ elle deviendra

$$\left(\psi\frac{1-x}{1+x}\right)^2.\psi x=c^2\frac{1-x}{1+x} ;$$

éliminant ensuite $\psi\frac{1-x}{1+x}$ entre ces deux équations, on tirera de l'equation résultante

$$\psi x=\sqrt[3]{c^2x^2\frac{1+x}{1-x}} .$$

Dans la vue de rendre le calcul plus facile, M. Babbage a souvent recours a des transformations dont un peu d'habitude de ce genre de calcul apprend bientôt à faire usage Soit, par exemple, l'equation

$$\frac{\psi x}{\psi x-x}+x\frac{\psi(1-x)}{\psi(1-x)-(1-x)}=1 ;$$

au lieu de la traiter immédiatement, comme les précédentes, posons

$$\frac{\psi x}{\psi x - x} = \psi_1 x\,;$$

en changeant x en $1-x$; nous aurons pareillement

$$\frac{\psi(1-x)}{\psi(1-x)-(1-x)} = \psi_1(1-x)\,;$$

au moyen de quoi la proposée deviendra

$$\psi_1 x + x\psi_1(1-x) = 1\,.$$

Pour résoudre celle-ci, changeons x en $1-x$, elle deviendra

$$\psi_1(1-x) + (1-x)\psi_1 x = 1\,;$$

et en éliminant $\psi_1(1-x)$ entre l'une et l'autre, nous aurons

$$\psi_1 x = \frac{1-x}{1-x+x^2}\,;$$

nous aurons donc aussi

$$\frac{\psi x}{\psi x - x} = \frac{1-x}{1-x+x^2}\,,$$

d'où nous tirerons

$$\psi x = \frac{x-1}{x}\,.$$

II. Soit, en général, une équation de la forme

$$F\{x\,,\ \psi(x)\,,\ \psi(fx)\,,\ \psi(f^2x)\} = 0\,,$$

où ψ représente toujours une fonction dont la forme est inconnue;

et dans laquelle f désigne une fonction périodique déterminée du troisième ordre, c'est-à-dire, telle que $f^3x=x$. En changeant x en fx, cette équation deviendra

$$F\{fx, \psi(fx), \psi(f^2x), \psi(x)\}=0;$$

faisant encore la même transformation, nous aurons

$$F\{f^2x, \psi(f^2x), \psi(x), \psi(fx)\}=0;$$

éliminant enfin $\psi(fx)$ et $\psi(f^2x)$, entre ces trois équations, l'équation résultante nous donnera la valeur de $\psi(x)$.

L'équation du problème de géométrie que nous avons traité au commencement de cet article, offrant déjà un exemple de ce cas, nous nous bornerons à en offrir ici un second. Soit l'équation

$$\psi x+a\psi\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{x},$$

ou $\frac{1}{1-x}$ est une fonction périodique du troisième ordre; en changeant x en $\frac{1}{1-x}$, il viendra

$$\psi\left(\frac{1}{1-x}\right)+a\psi\left(\frac{x-1}{x}\right)=1-x;$$

faisant encore le même changement dans cette dernière, on aura

$$\psi\left(\frac{x-1}{x}\right)+a\psi x=\frac{x}{x-1};$$

éléminant enfin $\psi\left(\frac{1}{1-x}\right)$ et $\psi\left(\frac{x-1}{x}\right)$ entre ces trois équations, nous tirerons de l'équation résultante

$$\psi x = \frac{1-(1+a)x+a(2-a)x^2-ax^3}{(1+a^3)x(1-x)} .$$

En général, si l'on a l'équation

$$F\{x\,,\ \psi(x)\,,\ \psi(\mathrm{f}x)\,,\ \psi(\mathrm{f}^2x)\ldots\ldots\psi(\mathrm{f}^{n-1}y)\}=0\ ,$$

dans laquelle $\mathrm{f}x$ désigne une fonction périodique du n.me ordre ; c'est-à-dire, telle que $\mathrm{f}^nx=x$. en y changeant $n-1$ fois x en $\mathrm{f}x$, il viendra

$$F\{\mathrm{f}\,x\,,\ \psi(\mathrm{f}\,x)\,,\ \psi(\mathrm{f}^2x)\,,\ \psi(\mathrm{f}^3x)\ldots\ldots\psi(x)\}=0\ ,$$

$$F\{\mathrm{f}^2x\,,\ \psi(\mathrm{f}^2x)\,,\ \psi(\mathrm{f}^3x)\,,\ \psi(\mathrm{f}^4x)\ldots\ldots\psi(\mathrm{f}x)\}=0\ ;$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\ ;$$

$$F\{\mathrm{f}^{n-1}x\,,\ \psi(\mathrm{f}^{n-1}x)\,,\ \psi(x)\,,\ \psi(\mathrm{f}x)\ldots\ldots\psi(\mathrm{f}^{n-2}x)\}=0\ ;$$

on aura donc ainsi n équations, entre lesquelles éliminant $\psi(\mathrm{f}x)$, $\psi(\mathrm{f}^2x)$, $\psi(\mathrm{f}^3x)$, ... $\psi(\mathrm{f}^{n-1}x)$, on tirera de l'équation résultante la valeur de $\psi(x)$ en fonction de x.

§. III.

Des cas où la précédente méthode est en défaut.

La méthode que nous venons de faire connaître pour la résolution des équations fonctionnelles suppose essentiellement que les diverses quantités sous le signe ψ, sont susceptibles d'être déduites les unes des autres et de x par une suite de semblables opérations qui, suffisamment répétées, conduisent de nouveau à cette même quantité x ; elle suppose de plus qu'en substituant dans l'équation proposée, $\mathrm{f}x$ à x, autant de fois consécutivement que le comporte l'ordre de périodicité de la fonction $\mathrm{f}x$, les équations qu'on obtient sont essentiellement différentes les unes des autres. Mais il est une multitude de cas où il n'en est point ainsi, et ce sont ceux où l'équation proposée est symétrique, soit par rapport aux diverses fonctions sous le signe ψ, prises en masse, soit par rapport à divers groupes de ces fonctions.

Qu'on ait, par exemple, l'équation

$$\psi x+\psi(\mathrm{f}x)=a\ ,$$

où l'on suppose $\mathrm{f}^2x=x$; en y changeant x en $\mathrm{f}x$, les deux termes du premier membre ne font que changer de place, de sorte que l'équation reste la même, et qu'il est impossible d'en éliminer $\psi(\mathrm{f}x)$ et d'en conclure la valeur de ψx.

Cette impossibilité n'existerait pas toujours si le second membre, au lieu d'être une constante, comme dans le précédent exemple, était au contraire une fonction de x, et on obtiendrait même quelquefois, non seulement la valeur de ψx, mais encore celle de x. Que l'on ait, par exemple, l'équation

$$\psi x+\psi(a-x)=bx\ ;$$

en y changeant x en $a-x$, elle devient

$$\psi(a-x)+\psi x=b(a-x)\ ;$$

or, à raison de l'égalité des premiers membres, on aura $x=\frac{1}{2}a$ qui, substituée dans la proposée, donne

$$2\psi\tfrac{1}{2}a=\tfrac{1}{2}ab \qquad \text{ou} \qquad \psi\tfrac{1}{2}a=\tfrac{1}{4}ab\ ,$$

et, en mettant x pour $\frac{1}{2}a$, $\psi x=\frac{1}{2}bx$ et $\psi(a-x)=\frac{1}{2}b(a-x)$;

substituant donc dans la proposée ces valeurs de ψx et $\psi(a-x)$, elle devient de nouveau $x=\frac{1}{2}a$. Ainsi cette équation donne en même temps la valeur de x et la forme de la fonction ψ.

Soit encore l'équation

$$\psi x.\psi\frac{a^2}{a-x}=a^2\ ,$$

où $\frac{a^2}{a-x}$ est une fonction périodique du troisième ordre ; en y changeant x en $\frac{a^2}{a-x}$, il vient

$$\psi\frac{a^2}{a-x}.\psi\left[-\frac{a(a-x)}{x}\right]=a^2\ ;$$

changeant de nouveau x en $\frac{a^2}{a-x}$, on aura cette troisième équation

$$\psi\left[-\frac{a(a-x)}{x}\right].\psi x=a^2\ ,$$

en multipliant les deux dernières en croix, on a d'abord

$$\psi x=\psi\frac{a^2}{a-x}\ ,$$

d'où

$$x=\frac{a^2}{a-x}\ ,$$

ou encore

$$x^2-ax+a^2=0\ ,$$

d'où

$$x=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}a\,.$$

Si ensuite on divise le produit des équations extrêmes par l'équation intermédiaire, on aura

$$(\psi x)^2=a^2\,,\qquad \text{d'où}\qquad \psi x=\pm a\,:$$

Si l'on a

$$\psi x\,.\,\psi\left(\frac{a^2}{a-x}\right).\psi\left[-\frac{a(a-x)}{x}\right]=a^3\,.$$

quelque nombre de fois qu'on y change x en $\frac{a^2}{a-x}$, elle demeurera toujours la même, et on ne pourra conséquemment en éliminer $\psi\left(\frac{a^2}{a-x}\right)$ et $\psi\left[-\frac{a(a-x)}{x}\right]$; mais si l'on avait

$$\psi x.\psi\left(\frac{a^2}{a-x}\right).\psi\left[-\frac{a(a-x)}{x}\right]=abx\,;$$

en y changeant deux fois consécutivement x en $\frac{a^2}{a-x}$, et concluant de l'égalité des premiers membres celle des seconds, on en tirerait

$$x=\frac{a^2}{a-x}=-\frac{a(a-x)}{x}\,;$$

équation double qui donne $x=a\,.\,\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$; en substituant dans la proposée, elle devient

$$\psi\left(a\,.\,\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)=\sqrt[3]{a^2b\,.\,\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}}\,;$$

en y changeant $a\,.\,\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$ en x, il vient

ψx

$$\psi x=\sqrt[3]{abx}\ .$$

Soit l'équation

$$a[\psi x+\psi(\mathrm{f}^2x)]+b[\psi(\mathrm{f}x)+\psi(\mathrm{f}^3x)]=c\ ,$$

dans laquelle nous supposons $\mathrm{f}^4x=x$, les changemens successifs de x en $\mathrm{f}x$ ne donneront jamais, outre cette équation, que la suivante :

$$a[\psi(\mathrm{f}x)+\psi(\mathrm{f}^3x)]+b[\psi x+\psi(\mathrm{f}^2x)]=c\ ,$$

et leur ensemble sera insuffisant pour l'élimination des trois fonctions $\psi(\mathrm{F}x)$, $\psi(\mathrm{f}^2x)$, $\psi(\mathrm{f}^3x)$.

Mais, si la méthode est en défaut pour les équations fonctionnelles de cette classe, elles n'en sont pas moins résolubles, et présentent même cette circonstance remarquable que la valeur de $\psi(x)$ alors contient une fonction arbitraire de x. Un petit nombre d'exemples suffira pour faire comprendre comment on peut parvenir à un tel résultat.

Proposons-nous, pour premier exemple, d'assigner l'équation de la courbe qui jouit de cette propriété que, de quelque manière qu'on y choisisse deux ordonnées telles que la somme de leurs abscisses soit constante et égale à a, la somme de ces ordonnées soit elle-même constante et égale à $2b$. En désignant l'une de ces abscisses par x, l'autre sera $a-x$; et, si l'on prend pour équation de la courbe cherchée $y=\psi(x)$, la condition du problème conduira à l'équation fonctionnelle du second ordre

$$\psi x+\psi(a-x)=2b\ ,$$

qui se trouve dans le cas d'exception qui nous occupe. Pour la résoudre, nous lui substituerons la suivante :

$$\psi x+(1+k)\psi(a-x)+k\varphi x=2b\ ,$$

dans laquelle φ désigne une fonction arbitraire, et qui revient à la première, lorsqu'on y fait $k=0$. Celle-ci n'étant plus dans l'exception dont il s'agit, nous y changerons x en $a-x$, suivant le procédé général, elle deviendra

$$\psi(a-x)+(1+k)\psi x+k\varphi(a-x)=2b\ ;$$

en éliminant $\psi(a-x)$ entre celle-ci et l'autre, il viendra

$$\psi x=\frac{2b+\varphi x-(1+k)\varphi(a-x)}{2+k}\ ;$$

il faudra donc, pour avoir la solution de la proposée, faire ici $k=0$, ce qui donnera, en transformant les fonctions arbitraires,

$$\psi x=b+\varphi x-\varphi(a-x)\ ;$$

de sorte que l'équation générale des courbes satisfaisant à la condition exigée sera

$$y=b+\varphi x-\varphi(a-x)\ .$$

On ramènera facilement à ce problème celui où il serait question de déterminer la courbe dans laquelle le produit de deux ordonnées est constant et égal à b^2, toutes les fois que le produit de leurs abscisses est lui-même constant et égal à a^2. En représentant en effet l'équation de la courbe par $y=\psi x$, la condition du problème donnera

$$\psi x.\psi\frac{a^2}{x}=b^2\ .$$

Or, en posant $\text{Log}.\psi x=\psi_1 x$, d'où $\text{Log}.\psi\frac{a^2}{x}=\psi_1\frac{a^2}{x}$, et prenant les logarithmes des deux membres, cette équation devient

$$\psi_1 x+\psi_1 \frac{a^2}{x}=2\mathrm{Log}.b\ ,$$

qui, traitée comme la précédente, donne

$$\psi_1 x \text{ ou } \mathrm{Log}.\psi x=\mathrm{Log}.b+\varphi x-\varphi\frac{a^2}{x}\ ;$$

et par suite

$$\psi x \text{ ou } y=\frac{be^{\varphi x}}{e^{\varphi \frac{a^2}{x}}}\ .$$

Soit encore l'équation

$$[\psi x]^2+[\psi(\tfrac{1}{2}\varpi-x)]^2=1\ ,$$

à laquelle M. Laplace réduit le problème de la composition des forces (*Mécanique céleste*, pag. 5). En faisant $[\psi x]^2=\psi_1 x$, elle donnera

$$\psi_1 x+\psi_1(\tfrac{1}{2}\varpi-x)=1\ ,$$

d'où

$$\psi_1 x \text{ ou } [\psi x]^2=\tfrac{1}{2}+\varphi x-\varphi(\tfrac{1}{2}\varpi-x)\ .$$

et par suite

$$\psi x=\sqrt{\tfrac{1}{2}+\varphi x-\varphi(\tfrac{1}{2}\varpi-x)}\ .$$

Ces cas, au surplus, ne sont pas les seuls où la valeur de ψx admet une fonction arbitraire, et M. Babbage en indique quelques autres.

Tout ce qui précède n'est, comme l'on voit, relatif qu'au cas où les diverses fonctions de x, soumises au signe ψ, peuvent être déduites les unes des autres et de x par un même procédé; mais on pourrait avoir une équation fonctionnelle de la forme

$$\mathrm{F}\{x\,,\ \psi x\,,\ \psi(\mathrm{f}_1 x)\,,\ \psi(\mathrm{f}_2 x)\,,\ \psi(\mathrm{f}_3 x)\,,\ldots\ldots\}\ ;$$

dans laquelle f_1, f_2, f_3, ... désigneraient des fonctions quelconques de x tout-à-fait indépendantes les unes des autres, et n'étant soumises à aucune loi de dérivation régulière ; et M. Babbage ne dit pas si, dans ce cas général, il y aurait moyen de déduire de l'équation proposée la forme de la fonction x.

Nous observerons à ce sujet que d'abord on peut souvent, par une simple transformation, rendre périodiques des fonctions qui ne paraissent point l'être. Qu'on ait, par exemple, l'équation

$$a\psi\left(\frac{ax^2}{a^2+x^2}\right)-\frac{a^2+x^2}{a}\psi\left(-\frac{a^3}{x^2}\right)=a^2+x^2,$$

dans laquelle aucune des deux fonctions $\frac{ax^2}{a^2+x^2}$, $-\frac{a^3}{x^2}$ ne paraît être périodique ; en y faisant simplement $x=\sqrt{a(x'-a)}$, elle deviendra

$$a\psi\left[\frac{a(x'-a)}{x'}\right]-x'\psi\left[-\frac{a^2}{x'-a}\right]=ax'.$$

équation qui n'est autre chose que celle du problème de géométrie que nous nous sommes proposé au commencement de cet extrait ; nous en tirerons donc, comme alors

$$\psi x'=-\frac{ax'}{x'-a}\,,\quad \text{d'où}\quad \psi x=-\frac{ax}{x-a}\,.$$

Mais de telles transformations sont-elles indistinctement applicables à toutes sortes d'équations fonctionnelles ? et, en supposant qu'il en soit ainsi, comment découvrira-t-on la transformation qui convient à chacune d'elles ? Si, au contraire, ces transformations ne sont applicables qu'à certaines classes d'équations fonctionnelles, à quels caractères distinguera-t-on celles auxquelles elles sont applicables de celles auxquelles elles ne le sont pas ? Voilà, certes, des questions qu'il serait fort intéressant de résoudre.

M. Babbage indique lui même une classe d'équations fonctionnelles qui, ne paraissant pas se rapporter à la théorie des fonctions périodiques, peuvent néanmoins être facilement résolues. Soit, par exemple, l'équation

$$a+b\psi x=\psi(a+bx)\ ,$$

où $a+bx$ n'est point une fonction périodique ; cette équation n'est qu'un cas particulier de celle-ci :

$$\mathrm{f}(\psi x)=\psi(\mathrm{f}x)\ ;$$

laquelle a évidemment pour solution générale

$$\psi x=\mathrm{f}^n x\ ;$$

où n est un nombre tout-à-fait arbitraire. On a en effet, en substituant,

$$\mathrm{f}(\mathrm{f}^n x)=\mathrm{f}^n(\mathrm{f}x)\ ;\quad \text{c'est-à-dire}\ ;\quad \mathrm{f}^{n+1}x=\mathrm{f}^{n+1}x.$$

Or, dans la proposée, $\mathrm{f}x=a+bx$, d'où

$$\mathrm{f}^2x=a+b(a+bx)=a+ab+b^2x\ ;$$

$$\mathrm{f}^3x=a+ab+b^2(a+bx)=a+ab+ab^2+b^3x\ ;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathrm{f}^n x = a(1+b+b^2+\ldots\ldots b^{n-1})+b^n x\ ;$$

c'est-à-dire,

$$\mathrm{f}^n x = a\,\frac{1-b^n}{1-b}+b^n x\ ;$$

donc finalement

$$\psi x = a\,\frac{1-b^n}{1-b}+b^n x\ ,$$

où n est tout-à-fait arbitraire. Par de semblables moyens, on trouvera que l'équation

$$\frac{a\psi x}{b+c\psi x}=\psi\left(\frac{ax}{b+cx}\right)$$

a pour solution générale

$$\psi x = \frac{a^n(a-b)x}{b^n(a-b)+c(a^n-b^n)x}\ .$$

Nous ne pousserons pas plus loin cette analise, et nous renverrons, pour de plus amples développemens, au mémoire de M. Babbage, qui renvoie lui-même à divers autres écrits sur le même sujet. Notre but n'est en effet que de présenter ici, sous une forme tout-à-fait élémentaire, et conséquemment accessible à toutes les classes de lecteurs, les premiers linéamens d'un genre de spéculations analitiques encore peu connu et peu cultivé en France, et qui paraît susceptible de beaucoup d'extension et d'intérêt. Nous déclarons, en terminant, que nous mettrons à l'avenir tous nos soins à tenir nos lecteurs au courant des recherches mathématiques auxquelles on pourra s'appliquer hors de France, toutes les fois du moins que leurs auteurs voudront bien nous les faire connaître, et qu'elles paraîtront de nature à contribuer à l'avancement de la science, au progrès de laquelle ce recueil est spécialement consacré. Ce progrès tient essentiellement, en effet, à une propagation rapide de toutes les idées nouvelles, de toutes les vues utiles; mais la difficulté des communications et la différence des idiômes n'apporte que trop souvent un grave obstacle à cette propagation, et rend, pour ainsi dire, les savans des diverses contrées tout-à-fait étrangers les uns aux autres. Nous nous estimerons donc fort heureux si nous pouvons parvenir à amoindrir un peu cet obstacle; et nous osons croire qu'on ne dédaignera pas de nous aider dans ce projet d'une évidente utilité pour tous.

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstration de quelques théorèmes d'algèbre ;

Par M. Treuil, professeur de mathématiques au collége royal de Versailles, professeur de mathématiques et de physique des Pages du Roi.

Soient les deux expressions

$$a+b+\sqrt{ab}\,, \qquad a'+b'+\sqrt{a'b'}\,;$$

si l'on a $\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}$, on aura

$$(a+b+\sqrt{ab})+(a'+b'+\sqrt{a'b'})=(a+a')+(b+b')+\sqrt{(a+a')(b+b')}\,; \qquad \text{(I)}$$

car, soit $\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}=m$, il viendra $b=ma$, $b'=ma'$, et de là

$$a+b+\sqrt{ab}=a(1+m+\sqrt{m})\,,$$

$$a'+b'+\sqrt{a'b'}=a'(1+m+\sqrt{m})\,,$$

d'où, en ajoutant

$$(a+b+\sqrt{ab})+(a'+b'+\sqrt{a'b'})=(a+a')+(ma+ma')+\sqrt{(a+a')(ma+ma')}\,,$$

qui,

qui, en mettant dans le second membre b et b' pour ma et ma' revient au théorème (I). On prouvera d'une manière tout-à-fait semblable que

$$(a+b+\sqrt{ab})-(a'+b'+\sqrt{a'b'})=(a-a')+(b-b')+\sqrt{(a-a')(b-b')} \,. \quad \text{(II)}$$

Si, dans l'équation (I), on suppose que a', b' se changent respectivement en $a'+a''$, $b'+b''$, elle deviendra

$$(a+b+\sqrt{ab})+\{(a'+a'')+(b'+b'')+\sqrt{(a'+a'')(b'+b'')}\}$$

$$=(a+a'+a'')+(b+b'+b'')+\sqrt{(a+a'+a'')(b+b'+b'')}\;;$$

mais, si l'on a $\frac{b''}{a''}=\frac{b'}{a'}=\frac{b}{a}$, on aura, par ce qui précède,

$$(a'+a'')+(b'+b'')+\sqrt{(a'+a'')(b'+b'')}=(a'+b'+\sqrt{a'b'})+(a''+b''+\sqrt{a''b''});$$

donc, en substituant,

$$\left.\begin{array}{l}(a+b+\sqrt{ab})\\+(a'+b'+\sqrt{a'b'})\\+(a''+b''+\sqrt{a''b''})\end{array}\right\}=(a+a'+a'')+(b+b'+b'')+\sqrt{(a+a'+a'')(b+b'+b'')}.$$

On pourrait présentement supposer que a'' et b'' se changent respectivement en $a''+a'''$ et $b''+b'''$, et continuer ainsi indéfiniment, en supposant toujours $\frac{b'''}{a'''}=\frac{b''}{a''}=\frac{b'}{a'}=\frac{b}{a}$, et ainsi de suite ; d'où l'on voit qu'en posant, pour abréger,

$$\Sigma(a+b+\sqrt{ab})=(a+b+\sqrt{ab})+(a'+b'+\sqrt{a'b'})+(a''+b''+\sqrt{a''b''})+\ldots$$

$$\Sigma(a)=a+a'+a''+\ldots\ldots\ , \qquad \Sigma(b)=b+b'+b''+\ldots\ldots\ ;$$

et supposant d'ailleurs

$$\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}=\frac{b''}{a''}=\ldots\ldots\ ,$$

on doit avoir

$$\Sigma(a+b+\sqrt{ab})=\Sigma(a)+\Sigma(b)+\sqrt{\Sigma(a).\Sigma(b)}\ . \qquad \text{(III)}$$

On démontrerait pareillement que, si l'on fait

$$\Sigma(a+b+c+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab})=\begin{cases}\ \ (a+b+c+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab})\\ +(a'+b'+c'+\sqrt{b'c'}+\sqrt{c'a'}+\sqrt{a'b'})\\ +(a''+b''+c''+\sqrt{b''c''}+\sqrt{c''a''}+\sqrt{a''b''})\\ +\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

$$\Sigma(a)=a+a'+a''+\ldots,\ \Sigma(b)=b+b'+b''+\ldots,\ \Sigma(c)=c+c'+c''+\ldots\ ;$$

et qu'on ait à la fois

$$\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}=\frac{a''}{c''}=\ldots\ , \qquad \frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}=\frac{b''}{c''}=\ldots\ ,$$

on aura

$$\Sigma(a+b+c+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab})$$

$$=\Sigma(a)+\Sigma(b)+\Sigma(c)+\sqrt{\Sigma(b).\Sigma(c)}+\sqrt{\Sigma(c).\Sigma(a)}+\sqrt{\Sigma(a).\Sigma(b)}\ . \qquad \text{(IV)}$$

Le théorème (III) trouve son application en géométrie. Si, en effet, a, a', a'', ... sont les bases inférieures et b, b', b'', ...

les bases supérieures respectives des troncs de pyramides triangulaires résultant de la décomposition d'un tronc de pyramide quelconque à bases parallèles, en représentant par v, v', v'', ... les volumes des premiers et par V le volume du dernier; et si, en outre, on représente par A, B ses deux bases, on aura

$$A=\Sigma(a)\,,\quad B=\Sigma(b)\,,\quad V=\Sigma(v)\,;$$

mais on démontre, par les élémens que h étant la hauteur du tronc

$$v\;=(a\;+b\;+\sqrt{ab})\frac{h}{3}\;,$$

$$v'\;=(a'+b'+\sqrt{a'b'})\frac{h}{3}\;,$$

$$v''=(a''+b''+\sqrt{a''b''})\frac{h}{3}\;,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,;$$

donc

$$V=\{\Sigma(a+b+\sqrt{ab})\}\frac{h}{3}\;;$$

mais on a de plus

$$\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}=\frac{b''}{a''}=\ldots\ldots;$$

donc

$$\Sigma(a+b+\sqrt{ab})=\Sigma(a)+\Sigma(b)+\sqrt{\Sigma(a).\Sigma(b)}=A+B+\sqrt{AB}\;;$$

donc enfin

$$V=(A+B+\sqrt{AB})\frac{h}{3}\;.$$

Versailles, le 11 juin 1821.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. QUEL est le plus grand de tous les quadrilatères inscrits à une même ellipse ?

II. Quel est le plus grand de tous les exaèdres octogones inscrits à une même ellipsoïde ?

III. Quelle est la plus petite de toutes les ellipses circonscrites à un même parallélogramme donné ?

IV. Quel est le plus petit de tous les ellipsoïdes circonscrits à un même parallélipipède donné ?

On demande l'équation la plus générale de la courbe qui jouit de cette propriété que, si par chacun de ses points on lui mène une normale terminée à l'axe des abscisses, cette normale ait même longueur que l'ordonnée qui a son pied au même point de cet axe ?

GÉOMÉTRIE DES COURBES.

Démonstration du théorème de NEWTON *, sur les quadrilatères circonscrits à une même section conique ;*

Par M. PONCELET , capitaine du génie , ancien élève de l'école polytechnique.

THÉORÈME. *Les centres de toutes les sections coniques inscrites à un même quadrilatère plan quelconque sont situés sur une même droite passant par les milieux des trois diagonales de ce quadrilatère* (*).

Démonstration. Soit ABCD (fig. 1) un quadrilatère simple , dont les côtés opposés AD , BC concourent en P et les côtés AB et CD en Q , de sorte que P et Q sont les deux autres sommets du quadrilatère complet ; soient I , K , L les milieux respectifs des trois diagonales BD , AC , PQ ; il est connu que ces trois points appartiennent à une même ligne droite ; et il s'agit de prouver que cette droite est le lieu des centres de toutes les sections coniques qui touchent à la fois les quatre côtés du quadrilatère dont il s'agit,

(*) Voyez, pour la démonstration analitique de ce théorème , la page 382 du XI.e volume de ce recueil.

J. D. G.

Soient E, F les points où les diagonales BD, AC, qui partent des deux extrémités de l'un quelconque AB des côtés du quadrilatère, rencontrent la troisième diagonale PQ. Soit Z le point de contact de ce même côté avec l'une quelconque des sections coniques dont il s'agit; en menant ZE, ZF, coupant les côtés adjacens AD, BC en Z′, Z″, ces points seront ceux de contact de la section conique avec ces mêmes côtés (*); donc, si l'on divise les cordes de contact ZZ′, ZZ″ en deux parties égales, aux points G, H, et qu'on mène ensuite les droites AG, BH; leur point de concours X sera le centre de la section conique correspondant au point de contact Z. Tout se réduit donc à prouver que ce point X est sur la droite IKL.

Or, d'après la manière dont le point X vient d'être déterminé, on voit que la direction de la droite AX est conjuguée à celle de ZZ′E, par rapport aux droites AB et AD ou AP; d'où il suit que, si l'on mène la parallèle AY à ZZ′, elle sera *conjuguée harmonique* de AX; c'est-à-dire que les quatre droites AB, AP, AY, AX formeront entre elles un *faisceau harmonique* (**). Pareillement, si l'on mène BY, parallèle à ZZ″F, les quatre droites BP, BQ, BX, BY formeront aussi un faisceau harmonique.

Il suit de là que si, par le point Y d'intersection des parallèles AY, BY à ZE, ZF et par le point P, on mène la droite PY, elle passera par le point X; car les points où la droite PY rencontre les droites AX et BX doivent être, à la fois, les quatrièmes harmoniques des trois points P, Y, M (ce dernier étant celui où PY coupe AB); ce qui ne peut avoir lieu à moins que les deux points dont il s'agit ne se confondent en un seul et même point en X.

Il suit de là aussi que, si le point Y parcourait une droite, il

---

(*) *Mémoire sur les lignes du second ordre*, par C. J. BRIANCHON, page 22, art. XIX.

(**) Voyez le même ouvrage, pag. 9, art. V.

en irait de même de son conjugué X; or, c'est ce qu'il est très-facile de démontrer.

Menons, en effet par Y la parallèle YT à PQ, rencontrant AB prolongée en T, les triangles TBY et FQZ, TAY et EQZ, respectivement semblables, donneront

$$TB \times FQ = TY \times QZ\,, \qquad TA \times EQ = TY \times QZ\,,$$

d'où

$$TB \times FQ = TA \times EQ\;;$$

ce qui démontre que le point T est invariable, ainsi que la parallèle TY à FQ, qui conséquemment sera parcourue toute entière par le point Y, lorsqu'on fera mouvoir le point Z sur AB. Au surplus, on démontrerait la même chose sans proportion, au moyen de la propriété de l'hexagone inscrit à deux lignes droites.

Ainsi, le lieu des centres X des coniques inscrites à un quadrilatère ABCD est une droite unique LX, laquelle passe évidemment par le point T, en même temps que sa conjuguée YT; je dis de plus qu'elle divise en deux parties égales chacune des trois diagonales de ce quadrilatère. En effet, si l'on suppose, par exemple, que EZ'Z se confond avec la diagonale BD, le point G, et par suite le point X, sera confondu lui-même avec le point I, milieu de cette diagonale; et il en sera de même du point H pour le point K, milieu de la diagonale AC, si l'on suppose que le point Z tombe en A.

De là résulte donc ce beau *théorème* de Newton : *La droite qui contient les milieux des diagonales d'un quadrilatère circonscrit à une conique contient aussi le centre de la courbe.*

Corollaire. *Les centres de toutes les coniques tangentes aux trois mêmes droites et passant par un même point donné, sur un plan, sont sur une autre section conique* (*).

Démonstration. En effet, soient AD, DC, BC les trois tan-

(*) Voyez, pour la démonstration analitique de ce théorème, la page 385 du XI.e volume du présent recueil. *J. D. G.*

gentes et V le point dont il s'agit. Traçons une droite indéfinie LT quelconque, et proposons-nous de rechercher tous les points où elle rencontre la courbe, lieu des centres des sections coniques, ou, ce qui revient au même, cherchons les coniques qui, touchant les droites AD, DC; BC et passant par le point V, auraient leurs centres sur cette droite.

Remarquons que, pour l'une quelconque de ces coniques, il y aura toujours une quatrième tangente AB qui, avec les trois autres, formera un quadrilatère ABCD par les milieux des diagonales duquel passe la droite arbitraire LT. Or, on peut trouver, *à priori*, cette quatrième tangente, indépendamment de la courbe dont il s'agit; car si, par le milieu de la distance qui sépare le point ou sommet D du côté indéfini CB, on mène une parallèle à ce côté, laquelle passera évidemment par le milieu de CD, cette parallèle devra renfermer le milieu I de la diagonale BD, correspondant avec le sommet D, et par conséquent le point où elle ira rencontrer la droite donnée LT sera le milieu I lui-même. Tirant donc DI, son prolongement ira couper CB au sommet B du quadrilatère cherché, lequel sommet appartiendra au quatrième côté ou à la tangente AB. La même opération, par rapport au point C et au côté indéfini DA, donnera le point milieu K de la diagonale AC, et par suite cette diagonale et le quatrième sommet A du quadrilatère qui ainsi sera complètement déterminé.

Ayant quatre tangentes à la conique que l'on considère, et cette conique passant d'ailleurs par le point donné V, on obtiendra aisément la position de son centre sur la droite donnée LT; mais il existe, comme on sait, deux coniques qui résolvent le problème; donc il y a, en général, deux centres sur la droite arbitraire en question; et, comme il ne peut y en avoir plus de deux, la courbe des centres des coniques tangentes aux trois droites AD, DC, CB et passant par V, ne peut être coupée en plus de deux points par une droite arbitraire quelconque LT; donc cette courbe est du second degré, et par conséquent une conique.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Sur la nature des courbes qu'on obtient en coupant un cône par un plan ;

Par M. Gergonne.

Il n'est point sans intérêt de savoir que, de quelque manière qu'on coupe un cône droit ou oblique par un plan, on ne peut jamais obtenir que l'une des trois courbes connues sous la dénomination de *lignes du second ordre.* C'est, par exemple, par suite de ce principe que la perspective d'un cercle sur un plan situé d'une manière quelconque par rapport à ce cercle est constamment une de ces courbes, quelle que soit d'ailleurs la situation de l'œil par rapport au tableau ; et on pourrait en déduire beaucoup d'autres conséquences remarquables.

Cependant la démonstration que l'on donne de ce principe dans les traités élémentaires n'est relative qu'au seul cône droit. A la vérité, on pourrait facilement l'étendre au cône oblique ; mais dans le cas seulement où le plan coupant serait perpendiculaire à celui qui, passant par le sommet et par le centre de la base du cône, serait perpendiculaire au plan de cette base. Il serait donc démontré alors qu'on peut obtenir toutes ces courbes en coupant un cône oblique par un plan ; mais non pas qu'on ne saurait en obtenir d'autres.

Cette négligence serait excusable, si l'on ne pouvait étendre au cône oblique, coupé d'une manière quelconque, la démonstration que l'on donne pour le cône droit; mais la vérité est que la démonstration n'est ni plus longue ni plus difficile pour l'un que pour l'autre. Celle qu'on va voir m'a été communiquée, il y a déjà plusieurs années, par M. Vecten, alors professeur de mathématiques spéciales au lycée de Nismes.

Soit S le sommet d'un cône, droit ou oblique (fig. 2, 3, 4), coupé d'une manière quelconque par un plan donnant une section MAN. Par l'un quelconque M des points de cette section, soit conduit un plan parallèle à la base, la section MGNH sera un cercle, coupé par la section oblique à la base suivant une corde MN. Par le milieu P de cette corde, menons au cercle un diamètre GH, qui lui sera perpendiculaire. Par le sommet S et par ce diamètre, soit conduit un plan qui coupera le cône suivant les droites SG, SH, et la section oblique suivant AP. Il pourra arriver (fig. 2) que AP prolongée rencontre SH en un point B situé du même côté du sommet S que le point A; ou que ce point B (fig. 3) soit situé de l'autre côté du sommet par rapport au point A, ou enfin (fig. 4) que AP soit parallèle à SH. Dans ces trois cas, on aura également, par la propriété du cercle,

$$\overline{PM}^2 = PG.PH.$$

On aura donc (fig. 2, 3)

$$\frac{\overline{PM}^2}{PA.PB} = \frac{PG}{PA}\cdot\frac{PH}{PB};$$

mais, dans les triangles GPA, HPB, on peut, aux rapports des côtés, substituer ceux des sinus des angles opposés; on aura donc ainsi

$$\frac{\overline{PM}^2}{PA.PB} = \frac{\text{Sin.BAS}}{\text{Sin.HGS}}\cdot\frac{\text{Sin.ABS}}{\text{Sin.GHS}};$$

or, il est aisé de voir que le second membre de cette équation est constant, quel que soit d'ailleurs la situation du point M sur la courbe ; donc le premier l'est aussi, quel que soit ce point M ; donc il y a un rapport constant entre les quarrés des ordonnées parallèles PM et les produits des abscisses correspondantes PA et PB tombant de différens côtés de l'ordonnée (fig. 2) et du même côté de cette ordonnée (fig. 3) ; donc cette courbe est une ellipse (fig. 2) et une hyperbole (fig. 3) ; on voit de plus que AB en est un diamètre, et que PM est parallèle à la tangente à son extrémité.

On aura aussi (fig. 4)

$$\frac{\overline{PM}^2}{AP}=PH.\frac{PG}{AP},$$

ou, en substituant au rapport des côtés du triangle APG, le rapport des sinus des angles opposés,

$$\frac{\overline{PM}^2}{AP}=PH.\frac{\text{Sin.SAP}}{\text{Sin.SGH}};$$

Or, le second membre de cette équation est constant, quel que soit le point M sur la courbe ; donc le premier l'est aussi, quel que soit ce point M ; il y a donc un rapport constant entre les quarrés des ordonnées parallèles à PM et les abscisses qui leur correspondent ; la courbe est donc une parabole dont AP est un diamètre et dans laquelle les ordonnées sont parallèles à la tangente à l'extrémité de ce diamètre.

Ces sortes de démonstrations ne sauraient au surplus avoir quelque prix qu'à raison de leur extrême simplicité ; elles sont d'ailleurs les seules qu'on puisse donner à ceux à qui la géométrie analitique à trois dimensions est étrangère ; mais cette géométrie en offre une qui peut d'autant mieux figurer dans un traité de géométrie analitique que du moins elle ne fait pas alors bigarrure avec le ton général de l'ouvrage, et offre au lecteur un sujet d'exercice de plus.

Soient a, b, c les coordonnées du sommet d'un cône à base circulaire, rapporté à trois axes rectangulaires quelconques. Soient α, β, γ les coordonnées du centre de sa base, dont nous supposons le plan donné par l'équation

$$A(x-\alpha)+B(x-\beta)+C(z-\gamma)=0\ , \qquad (1)$$

dans laquelle il est permis de supposer A, B, C liés par la condition

$$A^2+B^2+C^2=1\ . \qquad (2)$$

Si nous représentons par r le rayon de cette base, son périmètre sera donné par le système de l'équation (1) et de la suivante qui est celle d'une sphère ayant même centre et même rayon

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2 \qquad (3)$$

Cela posé, on pourra prendre pour les équations d'une droite menée d'une manière quelconque par le sommet du cône

$$\frac{x-a}{X}=\frac{y-b}{Y}=\frac{z-c}{Z}\ ; \qquad (4)$$

X, Y, Z étant trois indéterminées qu'il est permis de supposer liées par la relation

$$X^2+Y^2+Z^2=1\ . \qquad (5)$$

En combinant entre elles les équations (1, 4), les valeurs qui en résulteront pour x, y, z seront les coordonnées du point où notre droite

droite doit percer le plan de la base du cône, on trouvera ainsi, pour ces coordonnées,

$$x=a-X.\frac{A(a-\alpha)+B(b-\beta)+C(c-\gamma)}{AX+BY+CZ},$$

$$y=b-Y.\frac{A(a-\alpha)+B(b-\beta)+C(c-\gamma)}{AX+BY+CZ},$$

$$z=c-Z.\frac{A(a-\alpha)+B(b-\beta)+C(c-\gamma)}{AX+BY+CZ}.$$

Si présentement on veut que la droite (4) soit sur le cône, il faudra que le point où elle perce le plan de sa base soit un point du périmètre de cette base, et conséquemment un point de la sphère (3); il faudra donc exprimer que les coordonnées de ce point satisfont à l'équation de la sphère; or, des formules ci-dessus, on tire

$$x-\alpha=a-\alpha-X.\frac{A(a-\alpha)+B(b-\beta)+C(c-\gamma)}{AX+BY+CZ},$$

$$y-\beta=b-\beta-Y.\frac{A(a-\alpha)+B(b-\beta)+C(c-\gamma)}{AX+BY+CZ},$$

$$z-\gamma=c-\gamma-Z.\frac{A(a-\alpha)+B(b-\beta)+C(c-\gamma)}{AX+BY+CZ};$$

exprimant donc que la somme des quarrés de ces valeurs est égale à r^2, nous aurons

$$r^2=(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma).$$

$$-2\frac{\{A(a-\alpha)+B(b-\beta)+C(c-\gamma)\}\{X(a-\alpha)+Y(b-\beta)+Z(c-\gamma)\}}{AX+BY+CZ}$$

$$+(X^2+Y^2+Z^2)\frac{\{A(a-\alpha)+B(b-\beta)+C(c-\gamma)\}^2}{(AX+BY+CZ)^2};$$

En chassant le dénominateur et ayant égard à la relation (5), cette équation devient

$$\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2-r^2\}(AX+BY+CZ)^2$$

$$-2\{A(a-\alpha)+B(b-\beta)+C(c-\gamma)\}\{X(a-\alpha)+Y(b-\beta)+Z(c-\gamma)\}(AX+BY+CZ)$$

$$+\{A(a-\alpha)+B(b-\beta)+C(c-\gamma)\}^2=0; \qquad (6)$$

elle exprime la relation qui doit exister entre X, Y, Z, déjà liés par la condition (5), pour que la droite (4) soit sur le cône.

Des équations (4, 5), on tire

$$X=\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

$$Y=\frac{y-b}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

$$Z=\frac{z-c}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}};$$

d'où

$$AX+BY+CZ=\frac{A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

$$X(a-\alpha)+Y(b-\beta)+Z(c-\gamma)=\frac{(a-\alpha)(x-a)+(b-\beta)(y-b)+(c-\gamma)(z-c)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

substituant donc ces valeurs dans l'équation (6), on aura, pour l'équation de la surface convexe du cône dont il s'agit,

$$\frac{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}{\{A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)\}^2}$$

$$-2.\frac{(a-\alpha)(x-a)+(b-\beta)(y-b)+(c-\gamma)(z-c)}{\{A(a-\alpha)+B(b-\beta)+C(c-\gamma)\}\{A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)\}}$$

$$+\frac{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2-r^2}{\{A(a-\alpha)+B(b-\beta)+C(c-\gamma)\}^2}=0. \qquad (7)$$

Or, puisque ce cône est quelconque par rapport aux plans coordonnés, il s'ensuit que réciproquement les plans coordonnés sont quelconques par rapport à lui ; donc, en particulier, sa trace sur le plan des xy est son intersection par un plan quelconque ; or, on obtient l'équation de cette trace en faisant $z=0$; donc la section du cône par un plan quelconque est une ligne du second ordre, puisque, par cette hypothèse, on obtiendra une équation du second degré en x et y. Il serait d'ailleurs facile de prouver que cette équation pourra indistinctement exprimer une parabole, une ellipse ou une hyperbole, et même une section conique dont les dimensions seraient données.

PROBABILITÉS.

Solution du problème des rencontres ;

Par M. TÉDENAT, ancien recteur, correspondant de l'académie royale des sciences.

PROBLÈME. *Quelqu'un tient dans ses mains un paquet de cartes, au nombre de* n, *portant les nombres* 1, 2, 3,......n *de la suite naturelle, mêlées au hasard. Il abat, tour à tour, ces cartes sur une table, en prononçant en même temps les mots* un, deux, trois, ... *dans leur ordre successif ; quelle est la probabilité qu'une fois au moins il lui arrivera, en abattant une carte, de prononcer en même temps le nom du numéro qu'elle porte ?* (*)

(*) Ce problème revient évidemment au suivant : *Deux urnes contiennent chacune les* n *numéros* 1, 2, 3, ... n. *Après les avoir bien mêlés dans l'une et dans l'autre, on procède à leur extraction simultanée ; c'est-à-dire qu'on tire à la fois un numéro de chaque urne. Quelle est la probabilité qu'une fois au moins le même numéro sortira en même temps des deux urnes ?*

On trouve une ébauche de solution du problème dans le *Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques* de BERTRAND, de Genève, tom. I, pag. 410.

Il a été un peu généralisé par M. LAPLACE, dans sa *Théorie analitique des probabilités*, pag. 217, où il suppose qu'il y a dans chaque urne un nombre

Rappelons-nous d'abord ce principe fondamental de la doctrine des probabilités, savoir, que la probabilité d'un évènement est une fraction qui a pour dénominateur le nombre total des chances et pour numérateur le nombre de celles d'entre elles d'où peut résulter l'évènement dont il s'agit; du moins, lorsque ces chances sont toutes d'une égale facilité.

Première solution. On parvient quelquefois, assez commodément, à la solution des problèmes de probabilité, en s'élevant par degrés

---

r de numéros de chaque sorte, et où il cherche la probabilité de une, deux, trois...... rencontres.

On pourrait le généraliser davantage encore, en l'énonçant ainsi qu'il suit: *On a, dans une urne*, α *lettres* a, β *lettres* b, γ *lettres* c, *et ainsi de suite, et, dans une autre urne*, α' *lettres* a, β' *lettres* b, γ' *lettres* c, *et ainsi de suite, de telle sorte que*

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots=\alpha'+\beta'+\gamma'+\ldots\ldots=n.$$

Après avoir bien mêlé ces lettres dans les deux urnes, on procède à leur extraction, en tirant à la fois une lettre de chaque urne. Quelle est la probabilité qu'une fois au moins la même lettre sortira en même temps des deux urnes?

On pourrait aussi considérer le cas où, après chaque tirage, on remettrait dans chacune des deux urnes la lettre qu'on en aurait extraite. Il ne serait plus alors nécessaire de supposer $\alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots=\alpha'+\beta'+\gamma'+\ldots\ldots$

Enfin, au lieu de demander quelle est la probabilité d'une rencontre au moins, on pourrait demander quelle est la probabilité que le nombre des rencontres ne sera ni plus grand que p ni moindre que q.

Nous terminerons par observer qu'à ces sortes de questions se rapporte la théorie du jeu de cartes connu des enfans sous le nom de *la bataille*. On pourrait encore y rapporter la recherche du degré de confiance que méritent les devins, les tireuses de cartes et diseuses de bonne-aventure, ainsi que la recherche de la probabilité que les ordonnances de certains médecins ou les avis de certains jurisconsultes doivent être salutaires à leurs malades ou à leurs cliens.

J. D. G.

des cas les plus simples à ceux qui le sont moins ; et c'est ainsi que nous allons d'abord procéder.

1.° S'il n'y a qu'une seule carte, il n'y aura qu'un tirage possible ; cette carte portera le numéro 1, on prononcera le mot *un* en la tirant ; de sorte que le nombre total des chances et celui des chances favorables sera également l'unité ; la probabilité demandée sera donc $\frac{1}{1}$, c'est-à-dire la certitude.

2.° Sil y a deux cartes, elles porteront les numéros 1, 2, et il y aura deux tirages possibles, que l'on pourra présenter dans le tableau suivant ;

$$\begin{array}{rl} \text{Nombres prononcés} & 1\,,\,2 \\ \hline \text{Tirages possibles} & \left\{\begin{array}{l} 1\,,\,2 \\ 2\,,\,1 \end{array}\right. \end{array}$$

Le premier de ces deux tirages donne seul des rencontres ; d'où il suit que la probabilité cherchée est ici $\frac{1}{2}$.

3.° S'il y a trois cartes, elles porteront les numéros 1, 2, 3, et il y aura six tirages possibles, que l'on pourra présenter dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{rl} \text{Nombres prononcés} & 1\,,\,2\,,\,3 \\ \hline \text{Tirages possibles} & \left\{\begin{array}{l} 1\,,\,2\,,\,3 \\ 1\,,\,3\,,\,2 \\ 2\,,\,1\,,\,3 \\ 2\,,\,3\,,\,1 \\ 3\,,\,1\,,\,2 \\ 3\,,\,2\,,\,1 \end{array}\right. \end{array}$$

De ces tirages, les 1.er, 2.me, 3.me et 6.me donnent seuls lieu à des rencontres ; d'où il suit qu'ici la probabilité cherchée est $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

Si l'on continue de la même manière, et qu'on rassemble les résultats obtenus, on pourra en former le tableau suivant :

Pour $n=1$,	probabilité $=$	$\frac{1}{1}$,
2,		$\frac{1}{2}$,
3,		$\frac{4}{6}$,
4,		$\frac{15}{24}$,
5,		$\frac{76}{120}$,
6,		$\frac{455}{720}$,
7,		$\frac{3186}{5040}$,
. . . . (*)		

(*) C'est à peu près à cela que se réduit l'analise de Bertrand. Il remarque ensuite que ces probabilités, réduites en décimales, sont

Pour $n=1$, ...	1,00000
2, ...	0,50000
3, ...	0,66666
4, ...	0,62500
5, ...	0,63333

Si l'on prend les différences consécutives de ces probabilités, on les trouvera égales à

$$-\frac{1}{2!}\,,\ +\frac{1}{3!}\,,\ -\frac{1}{4!}\,,\ +\frac{1}{5!}\,,\ -\frac{1}{6!}\,,\ +\frac{1}{7!}\,,-\ldots\ldots$$

d'où l'analogie conduira à conclure que pour un nombre quelconque n de numéros, la probabilité d'une rencontre au moins sera

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}-\ldots\ldots\pm\frac{1}{n!}\ ;$$

ce qui se trouvera tout-à-l'heure confirmé par d'autres procédés.

Deuxième solution. Pour n numéros, il est clair que le nombre total des chances est $1.2.3.4\ldots\ldots n=n!$. Quant au nombre des chances favorables, il se compose ainsi qu'il suit:

1.° Des chances qui ont le numéro 1 au premier rang et les autres dans un ordre quelconque;

6, ... 0,63194

7, ... 0,63214

. . . . ;

de sorte qu'elles sont alternativement décroissantes et croissantes, suivant que n devient pair ou impair, mais de manière à tendre rapidement vers une certaine limite; de telle sorte que, si l'on ne veut qu'une simple approximation, on aura sensiblement la probabilité qui doit répondre à une très-grande valeur de n, en calculant celle qui répond à une beaucoup moindre valeur de ce nombre.

J. D. G.

2.°

2.° Des chances qui ont le numéro 2 au second rang, sans avoir le numéro 1 au premier;

3.° Des chances qui ont le numéro 3 à son rang, sans avoir les numéros 1, 2 aux leurs;

4.° Des chances qui ont le numéro 4 à son rang, sans avoir aucun des numéros 1, 2, 3 aux leurs;

Et ainsi de suite, jusqu'aux chances qui ont le numéro n à son rang, sans donner aucun des précédens aux leurs. Voyons donc combieu il y a de chances de chacune de ces diverses sortes.

1.° Il y a d'abord évidemment autant de manières d'avoir le numéro 1 au premier rang, qu'il y a de manières de ranger les $n-1$ autres à sa droite; de sorte que ce nombre est $(n-1)!$.

2.° Il y a également $(n-1)!$ manières d'avoir le numéro 2 au second rang; mais il faut en déduire le nombre de celles d'entre elles qui placent le numéro 1 au premier, puisque nous en avons déjà tenu compte; or, ce nombre est évidemment le nombre des manières de disposer les $n-2$ numéros restans à la suite de ces deux-là, lequel est $(n-2)!$; il ne reste donc plus dans ce cas, pour le nombre des chances favorables, que $(n-1)!-(n-2)!$

3.° Le nombre des manières d'avoir le numéro 3 au troisième rang, sans avoir le numéro 2 au second sera, pour les mêmes raisons, $(n-1)!-(n-2)!$; mais il faudra en déduire le nombre des cas où le numéro 1 est au premier rang, lequel est $(n-2)!-(n-3)!$ puisqu'alors c'est comme si l'on avait un numéro de moins; il restera donc, pour le cas présent,

$$[(n-1)!-(n-2)!]-[(n-2)!-(n-3)!]=(n-1)!-2(n-2)!+(n-3)!.$$

4.° Le nombre des manières d'avoir le numéro 4 à son rang, sans avoir les numéros 2, 3 aux leurs, sera semblablement

$$(n-1)!-2(n-2)!+(n-3)!\ ;$$

mais il faudra en déduire le nombre des cas où le numéro 1 occupe le premier rang ; lequel est

$$(n-2)!-2(n-3)!+(n-4)! \ ;$$

en prenant donc la différence, il restera pour le nombre des cas où le numéro 4 est au 4^{me} rang, sans qu'aucun de ceux qui le précèdent soient au sien

$$(n-1)!-3(n-2)!+3(n-3)!-(n-4)! \ .$$

Par de semblables considérations, on se convaincra qu'en général, si le nombre des cas où le numéro k occupe le $k.^{me}$ rang sans qu'aucun de ceux qui le précèdent soit au sien, est

$$(n-2)!-\frac{k-1}{1}(n-2)!+\frac{k-1}{1}\cdot\frac{k-2}{2}(n-3)!-\frac{k-1}{1}\cdot\frac{k-2}{2}\cdot\frac{k-3}{3}(n-4)!+\ldots;$$

le nombre des cas où le numéro $k+1$ occupera le $(k+1)^{me}$ rang, sans qu'aucun de ceux qui le précèdent occupe le sien, sera

$$\left\{(n-1)!-\frac{k-1}{1}(n-2)!+\frac{k-1}{1}\cdot\frac{k-2}{2}(n-3)!-\frac{k-1}{1}\cdot\frac{k-2}{2}\cdot\frac{k-3}{3}(n-4)!+\ldots\right\}$$

$$-\left\{(n-2)!-\frac{k-1}{1}(n-3)!+\frac{k-1}{1}\cdot\frac{k-2}{2}(n-4)!-\frac{k-1}{1}\cdot\frac{k-2}{2}\cdot\frac{k-3}{3}(n-5)!+\ldots\right\};$$

se qui donne, toutes réductions faites,

$$(n-1)!-\frac{k}{1}(n-2)!+\frac{k}{1}\cdot\frac{k-1}{2}(n-3)!-\frac{k}{1}\cdot\frac{k-1}{2}\cdot\frac{k-2}{3}(n-4)-\ldots\pm 1;$$

ce qui prouve que, si la loi se soutient jusqu'au $k.^{me}$ numéro, elle aura lieu aussi pour le $(k+1)^{me}$, et qu'ainsi elle est générale.

On voit donc que le nombre total des cas favorables sera la somme des termes de cette série

$$(n-1)!$$

$$+(n-1)!-(n-2)!$$

$$+(n-1)!-2(n-2)!+(n-3)!$$

$$+(n-1)!-3(n-2)!+3(n-3)!-(n-4)$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+(n-1)!-\frac{n-1}{1}(n-2)!+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}(n-3)!-\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-3}{3}(n-4)!+\ldots\pm 1\ ;$$

or, par la théorie des nombres figurés, on a

$$1+1+1+\ldots\ldots+1=n\ ,$$

$$1+2+3+\ldots\ldots+(n-1)=\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\ ,$$

$$1+3+6+\ldots+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}=\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

donc la somme des termes de cette série, ou le nombre des cas favorables est

$$\frac{n}{1}(n-1)!-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}(n-2)!+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}(n-3)!-\ldots\pm 1\ ;$$

c'est-à-dire,

$$n!\left\{\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}-\ldots\ldots\pm\frac{1}{n!}\right. ;$$

puis donc que le nombre total des cas est $n!$; il s'ensuit que la probabilité cherchée est

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}-\ldots\ldots\pm\frac{1}{n!} ;$$

comme nous l'avions déjà trouvé.

Troisième solution. Pour fixer les idées, supposons que les numéros soient au nombre de six seulement, et qu'on demande quel est alors le nombre des cas favorables. Supposons qu'il s'agisse de former les arrangemens auxquels ces cas répondent, et soient C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, les nombres respectifs de cas favorables pour 1, 2, 3, 4, 5, 6 numéros.

Plaçons d'abord 1 à son rang, et les cinq autres numéros de toutes les manières possibles dans les autres rangs ; nous aurons fait ainsi 5! arrangemens.

Plaçons ensuite 2 à son rang et les cinq autres numéros de toutes les manières possibles dans les autres rangs ; nous aurons encore fait 5! arrangemens.

Continuons de la même manière, pour les numéros 3, 4, 5 jusqu'au numéro 6 inclusivement, nous aurons fait ainsi $5!6=6!$ arrangemens, présentant tous évidemment des cas favorables, et les présentant même tous ; mais certains d'entre eux se trouveront répétés plusieurs fois, ainsi que nous allons le voir, et il s'agit présentement d'en faire la réduction.

D'abord l'arrangement 123456, où chaque numéro sera à son rang, se trouvera une fois dans chaque groupe, et sera conséquemment répété 6 fois.

Il est impossible que cinq numeros soient à leurs rangs sans que le sixième n'y soit également, ainsi ce second cas rentre dans le premier.

Chacun des arrangemens où quatre numéros seulement seront à leurs rangs se trouvera à la fois dans 4 des six groupes ; mais il faut voir combien il y aura de ces arrangemens. Or, on voit d'abord que ces quatre numéros pourront être choisis parmi 6 d'un nombre de manières exprimé par $\frac{6}{1}.\frac{5}{2}$; il faudra ensuite arranger les deux numéros restans dans les plans vides de manière à ne pas produire des rencontres, puisqu'alors on retomberait dans les cas précédens ; or, le nombre total des manières de les arranger étant 2! et le nombre des rencontres que peuvent offrir leurs diverses dispositions étant C_2, le nombre de leurs arrangemens qui n'en fourniront pas sera $2!-C_2$. Le nombre total des sortes d'arrangemens répétés quatre fois sera donc $\frac{6}{1}.\frac{5}{2}(2!-C_2)$.

Par un raisonnement tout semblable, on s'assurera que le nombre des sortes d'arrangemens répétés chacun 3 fois est $\frac{6.5.4}{1.2.3}(3!-C_3)$; que le nombre total des sortes d'arrangemens répétés chacun deux fois sera $\frac{6.5}{1.2}(4!-C_4)$; et qu'enfin le nombre total des sortes d'arrangemens simples, c'est-à-dire, de ceux où un seul numéro est à sa place, et qui ne sont conséquemment écrits qu'une seule fois est $\frac{6}{1}(5!-C_5)$.

Puis donc que dans C_6 il ne doit entrer qu'un seul arrangement de chaque sorte, on doit avoir

$$C_6=1+\frac{6.5}{1.2}(2!-C_2)+\frac{6.5.4}{1.2.3}(3!-C_3)+\frac{6.5}{1.2}(4!-C_4)+\frac{6}{1}(5!-C_5).$$

Au surplus, comme on a $C_1=1$, et par conséquent $\frac{6}{1}(1!-C_1)=0$, on pourra écrire, pour plus de symétrie,

$$C_6=1+\frac{6}{1}(1!-C_1)+\frac{6.5}{1.2}(2!-C_2)+\frac{6.5.4}{1.2.3}(3!-C_3)$$

$$+\frac{6.5}{1.2}(4!-C_4)+\frac{6}{1}(5!-C_5)\ ;$$

cela donnera, en transposant,

$$C_6+\frac{6}{1}C_5+\frac{6.5}{1.2}C_4+\frac{6.5.4}{1.2.3}C_3+\frac{6.5}{1.2}C_2+\frac{6}{1}C_1$$

$$=1+6+6.5+6.5.4+6.5.4.3+6.5.4.3.2$$

$$=6!\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}\right).$$

En généralisant ce raisonnement, ce qui est aisé, on trouvera

$$C_n+\frac{n}{1}C_{n-1}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}C_{n-2}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}+\ldots+\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}C_2+\frac{n}{1}C_1$$

$$=n!\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\ldots\ldots+\frac{1}{n!}\right).$$

Si ensuite on désigne par P_1, P_2, P_3, ... P_n, les probabilités qui répondent à 1, 2, 3, ... n numéros, on aura, comme nous l'avons vu,

$$C_1=P_1\ ;\quad C_2=2P_2\ ,\quad C_3=3!P_3\ ,\ldots\ldots\ C_n=n!P_n\ ,$$

ce qui donnera, en substituant et divisant les deux membres par $n!$,

$$P_n+\frac{P_{n-1}}{1}+\frac{P_{n-2}}{2}+\frac{P_{n-3}}{3!}+\frac{P_{n-4}}{4!}+\ldots+\frac{P_1}{(n-1)!}$$

$$=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{n!}\ ;$$

équation au moyen de laquelle on déterminera la probabilité qui répond à une valeur quelconque de n, au moyen de celles qui répondent aux valeurs inférieures de cette lettre.

Quatrième solution. Le nombre des chances qui donnent le numéro x à son rang, sans donner aucun des précédens aux leurs, dépendant visiblement de n et de x, nous pouvons le représenter par $Z_{n,x}$. En conséquence, le nombre des chances qui donnent le numéro $x-1$ à son rang, sans donner aucun des précédens aux leurs, devra être désigné par $Z_{n-1,x}$; et s'il y avait un numéro de moins, ce dernier nombre devrait être désigné par $Z_{n-1,x-1}$.

Or, le nombre des cas qui donnent le numéro x à son rang, sans donner aucun des précédens aux leurs, est évidemment égal au nombre de ceux où le numéro $x-1$ est à son rang, sans qu'aucun des précédens soient aux leurs, moins le nombre des cas où les numéros x et $x-1$ sont à leurs rangs, sans qu'aucun des précédens soient aux leurs.

Mais ce dernier nombre est évidemment le même qu'il le serait pour le numéro $x-1$, si le numéro x n'existait pas, c'est-à-dire, s'il n'y avait que $n-1$ numéros seulement ; d'où il suit qu'on doit avoir l'équation aux différences finies et partielles

$$Z_{n,x}=Z_{n,x-1}-Z_{n-1,x-1}.$$

Pour intégrer cette équation, nous poserons, suivant la méthode de Lagrange, $Z_{n,x}=M\alpha^n\beta^x$, α et β étant deux constantes indéterminées, et M un nombre arbitraire ; l'équation deviendra ainsi

$$M\alpha^n\beta^x=M\alpha^n\beta^{x-1}-M\alpha^{n-1}\beta^{x-1}, \quad \text{ou} \quad \alpha\beta=\alpha-1\ ;$$

d'où

$$\beta=1-\frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad \beta^x=\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^x\ ;$$

ce qui donnera

$$Z_{n,x}=M\alpha^n\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^x.$$

Pour la facilité du développement, nous pourrons supposer $M=\frac{\alpha}{1-\alpha}$; il viendra alors

$$Z_{n,x}=\alpha^n\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^{x-1}=\alpha^n-\frac{x-1}{1}\alpha^{n-1}+\frac{x-1}{1}\cdot\frac{x-2}{2}\alpha^{n-2}$$

$$-\frac{x-1}{1}\cdot\frac{x-2}{2}\cdot\frac{x-3}{3}\alpha^{n-3}+\ldots\ldots$$

Pour déterminer α, nous remarquerons que, lorsque $x=1$, on a $Z_{n,1}=(n-1)!$; donc $\alpha^n=(n-1)!$, $\alpha^{n-1}=(n-2)!$, et ainsi de suite ; d'où

$$Z_{n,x}=(n-1)!-\frac{x-1}{1}(n-2)!+\frac{x-1}{1}\cdot\frac{x-2}{2}(n-3)!-\ldots$$

qui, en mettant successivement pour x les valeurs 1, 2, 3, ... nous fera retomber sur les résultats déjà obtenus dans notre seconde solution.

On sait que $e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\ldots$ d'après quoi on doit avoir

$$e^{-1} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{e}=1-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\ldots$$

donc

$$\frac{e-1}{e}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\ldots\ldots ;$$

donc,

donc, lorsque le nombre n des numéros est infini, la probabilité demandée est $\frac{e-1}{e}=0,6321394......$; et, comme la série est extrêmement convergente, on en doit conclure que c'est aussi là, à très-peu près, la probabilité cherchée, toutes les fois que n est un grand nombre quelconque.

Si, au lieu de supposer un seul numéro de chaque sorte, on en supposait un nombre m, on remarquerait qu'un numéro ne peut être à son rang que dans les n premiers tirages; que conséquemment on devra arrêter le développement à ses n premiers termes. L'équation à intégrer sera

$$Z_{mn,x}=Z_{mn,x-1}-mZ_{mn-1,x-1}\ ;$$

elle donnera

$$Z_{mn,1}=m(mn-1)!\ ,$$

$$Z_{mn,2}=m(mn-1)!-m^2(mn-2)!\ ,$$

$$Z_{mn,3}=m(mn-1)!-2m^2(mn-2)!+m^3(mn-3)!$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,$$

$$Z_{mn,x}=m(mn-1)!-\frac{x-1}{1}m^2(mn-2)!+\frac{x-1}{1}\cdot\frac{x-2}{2}m^3(mn-3)!-\ldots$$

d'où

$$\Sigma Z_{mn,x}=m.\frac{x}{1}(mn-1)!-\frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}m^2(mn-2)!+\frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{3}m^3(mn-3)!-\ldots$$

faisant donc $x=n$ et divisant ensuite par $(mn)!$, il viendra, pour la probabilité d'une rencontre au moins,

$$\frac{n}{mn}\cdot\frac{m}{1}-\frac{n}{mn}\cdot\frac{n-1}{mn-1}\cdot\frac{m^2}{2}+\frac{n}{mn}\cdot\frac{n-1}{mn-1}\cdot\frac{n-2}{mn-2}\cdot\frac{m^3}{3!}$$

$$-\frac{n}{mn}\cdot\frac{n-1}{mn-1}\cdot\frac{n-2}{mn-2}\cdot\frac{n-3}{mn-3}\cdot\frac{m^4}{4!}+\ldots\ldots$$

formule qui rentre exactement dans la première, lorsqu'on suppose $m=1$ (*).

(*) Au moment où on termine l'impression de ce qui précède, M. Tédenat nous écrit que, depuis plusieurs années, l'état de sa vue ne lui permettant pas de s'occuper sérieusement de la lecture des ouvrages de mathématiques, il n'est pas surprenant, d'après cela, qu'il ait ignoré que M. Laplace avait traité le problème dont il s'est lui-même occupé, et qui lui avait été proposé, il y a plus de 40 ans, par M. Legendre ; que, sur notre observation, il venait de consulter l'ouvrage de M. Laplace ; qu'il s'était assuré ainsi de la conformité de ses formules avec celles de cet illustre géomètre ; et qu'il pensait qu'au surplus son travail sur ce sujet ne serait point tout-à-fait une redite, à raison de la variété des moyens de solution qu'il présente.

J. D. G.

GÉOMÉTRIE DES COURBES.

Sur la construction graphique du centre de courbure d'une courbe en l'un de ses points ;

Par un ABONNÉ.

Au Rédacteur des *Annales* ;

MONSIEUR,

VOUS avez publié, à la page 361 du XI.e volume des *Annales*, un procédé graphique pour déterminer le centre de courbure d'une courbe plane, soumise ou non à la loi de continuité, en l'un quelconque de ses points. L'auteur de cette méthode a fort bien fait sentir la difficulté que l'on doit éprouver à tracer à la main la courbe enveloppe d'une suite de droites données ; mais il me semble que la construction qu'il propose ne saurait convenir au cas où la loi de continuité se trouverait interrompue au point même pour lequel on demanderait le centre de courbure.

Pour ne prendre qu'un exemple très-simple, supposons la courbe composée de deux arcs de cercles de rayons inégaux, tangens l'un à l'autre à leur point commun, ainsi qu'il arrive dans les anses de paniers, et supposons que le point pour lequel on demande le centre de courbure soit précisément ce point commun. En appliquant à ce cas le procédé indiqué, on trouve que le centre de courbure est à l'intersection de la normale avec deux droites qui lui sont perpendiculaires, et par conséquent parallèles entre elles, ce qui donnerait deux centres de courbure pour un même point.

Ces deux centres de courbure se présenteront toujours toutes les fois que le point donné sera le point de contact de deux arcs de courbes d'une nature différente; il arrivera seulement, lorsque ces arcs ne seront pas des arcs de cercles, que ces centres ne seront plus déterminés par les insersections de la normale avec deux lignes droites, mais par les intersections de cette normale avec deux courbes la coupant en des points différens.

Il est donc nécessaire de recourir à un autre principe pour déterminer le centre de courbure, du moins dans le cas particulier dont il s'agit; et j'inclinerais assez à penser que ce principe doit être que la somme des courbures des deux courbes au point donné doit être une quantité constante et double de la courbure du cercle osculateur au même point. Cela donnerait $\frac{2}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, a et b étant les rayons de courbure particuliers aux deux arcs, au point dont il s'agit, et x le rayon de courbure cherché. On en tirerait $x=\frac{2ab}{a+b}$; et il ne serait pas difficile d'imaginer des procédés de solution qui, dans le cas particulier dont il s'agit, donneraient cette valeur pour le rayon de courbure cherché.

La géométrie descriptive faisant partie de l'enseignement de l'école polytechnique, on doit sans doute y examiner tout ce que l'on propose de nouveau sur cette branche des mathématiques. En outre, M. Hachette est occupé, dans ce moment, d'un nouveau traité de géométrie descriptive, dont il a déjà présenté les planches à l'académie des sciences, et il est à craindre qu'il remarque le défaut de la construction proposée. A la vérité, on pourrait lui répondre que, lors même que la difficulté de tracer une courbe qui touche une suite de droites données n'existerait pas, sa construction ne pourrait convenir au cas où la courbe serait discontinue au point dont on cherche le centre de courbure ; mais il faudrait tâcher, si cela était possible, de lever la difficulté que l'on rencontre en cet endroit.

Agréez, etc.

Parme, le 8 juin 1821.

Réflexions sur le contenu de la précédente lettre, suivies d'une méthode graphique, pour mener une tangente à une courbe plane par un point extérieur;

Par M. Gergonne.

La construction d'un tangente à une courbe en l'un de ses points est, en général, un problème du premier degré parce qu'en général par un point donné sur une courbe on ne peut lui mener qu'une tangente unique.

Si cependant le point donné se trouve l'intersection de plusieurs branches de la courbe dont il s'agit, elle aura, dans ce cas particulier, plusieurs tangentes en ce point ; et un procédé graphique qui, en cette rencontre, ne donnerait pas toutes les tangentes, serait, par là même, un procédé vicieux, ou du moins incomplet, et, s'il n'en donnait aucune, il faudrait en chercher un autre, spécialement propre à cette circonstance particulière.

C'est précisément le cas des méthodes analitiques; elles ne donnent, en général, qu'une seule tangente en chaque point d'une courbe, et, lorsqu'il doit y en avoir plusieurs, l'analise, qui ne peut errer, nous présente alors une réponse d'oracle, une réponse ambiguë, qui nous avertit que notre procédé général ne saurait s'appliquer à cette circonstance particulière, pour laquelle il est nécessaire de recourir à une méthode spéciale.

On peut même affirmer, *à priori*, que généralement toutes les fois que nous appliquerons, à un problème susceptible d'un nombre déterminé de solutions, une méthode analitique de nature à nous fournir un nombre de solutions plus ou moins grand, nous devrons trouver pour l'inconnue la valeur ambiguë $\frac{0}{0}$, et cela à raison du privilège d'infaillibilite de l'analise, qui n'a que ce moyen de s'exprimer, sans trahir la vérité, lorsqu'elle ne peut donner exactement ce qu'on lui demande.

Ce que nous venons de dire de la tangente à une courbe plane, en l'un de ses points, s'applique litteralement à la recherche de son centre de courbure; elle n'en a généralement qu'un seul en chaque point, et les procedes généraux, soit graphiques, soit analitiques, n'en doivent pas donner davantage. Il peut cependant arriver que plusieurs branches d'une même courbe se touchent au même point, auquel cas la courbe a, pour ce point, plusieurs centres de courbure; et tout procédé qui, en cette rencontre, n'en donnerait qu'un seul, ou qui seulement ne les donnerait pas tous, serait plus justement reprochable que celui qui n'en donnerait aucun. La méthode analitique est, sous ce point de vue, à l'abri de tout reproche, car on sait qu'elle est alors en défaut, et qu'il faut la modifier pour parvenir au but; il faut donc qu'il en soit de même pour un procédé graphique, si du moins, ce qui serait certainement préférable, il ne donne pas toutes les solutions du problème.

Il se pourrait donc que ce que l'estimable auteur de la lettre qu'on vient de lire regarde comme une imperfection de la méthode à laquelle cette lettre se rapporte, fût, au contraire, un titre en sa faveur, et qu'il eût, comme on dit vulgairement, trouvé la mariée trop belle. Qu'est-ce en effet que le centre de courbure d'une courbe, en l'un de ses points, sinon le centre du cercle dont la courbure ressemble à la sienne en ce point ? Or, si l'on nous donne, pour courbe unique, deux arcs de différentes courbes qui se touchent par leurs extrémités, et ont en leur point de contact des courbures inégales, et si l'on nous demandé le centre de courbure de cette prétendue courbe unique, en ce point; ne faut-il pas que notre procédé, si du moins il est fondé en théorie, nous avertisse de cette circonstance, et nous donne deux centres de courbure au lieu d'un, puisqu'il y en a deux, en effet.

Tout rayon de courbure moyen entre ceux qui répondent à ces deux centres, de quelque manière que l'on prétendît le choisir, ne saurait être admis, et ne répondrait à rien de concevable et de définissable, puisqu'il appartiendrait à un cercle dont la courbure, au point de jonction des deux arcs, ne ressemblerait ni à la courbure de l'un ni à celle de l'autre. En adoptant ce rayon, on ressemblerait, en quelque sorte, à celui qui, étant conduit par un problème, à une équation du second degré, prendrait pour solution unique du problème, la demi-somme ou la racine quarrée du produit des deux racines de cette équation. On peut bien, si l'on veut, changer la définition du centre de courbure; mais alors une courbe pourra avoir, en chacun de ses points, autant de centres de courbure qu'on aura adopté de définitions différentes.

Si le procédé, dont l'examen fait le sujet de la précédente lettre, pouvait être reprochable, ce ne serait pas pour le cas où il est attaqué; mais pour celui où l'arc donné serait formé d'une suite de petits arcs de cercles, tangens les uns aux autres, et où le point pour lequel on demanderait le centre de courbure ne serait pas un point de contact. Il arriverait alors, en effet, que le centre que donnerait la construction pourrait n'être point le centre du cercle dont cet arc ferait partie, ainsi que cela devrait être. Mais, outre qu'en multipliant suffisamment les points de la courbe dont l'intersection avec la normale doit donner le centre de courbure demandé; la discontinuité de cette courbe avertirait assez de cette circonstance; outre que le centre de courbure obtenu ne s'écarterait pas sensiblement du véritable, on ne doit jamais perdre de vue que les méthodes graphiques, à l'aide desquelles on résout les problèmes relatifs aux courbes dont la loi n'est pas connue, ne sont et ne sauraient être que des procédés plus ou moins approximatifs; qu'on suppose d'ailleurs tacitement que le coefficient différentiel du premier ordre n'éprouve pas de changemens brusques, lorsqu'il s'agit des tangentes; qu'on fait la même supposition à l'égard de celui du second ordre, lorsqu'il s'agit des centres de courbure; et qu'on devrait étendre la même supposition aux coefficiens différentiels des ordres supérieurs, si l'on avait à résoudre des problèmes dans lesquels ces coefficiens dussent être implicitement employés.

Comme on a enseigné (tome X, page 89) à mener graphiquement une tangente à une courbe plane, par l'un quelconque de ses points; afin de compléter la théorie qui nous occupe, nous terminerons par indiquer le procédé graphique qui nous a paru le plus commode pour mener une tangente à une courbe plane par un point extérieur, ou plutôt pour trouver son point de contact avec la tangente; car, dans la pratique, on peut bien mener immédiatement cette tangente (*); voici en quoi ce procédé consiste :

(*) Euclide suppose uniquement, dans ses élémens, que l'on sait décrire un cercle d'un centre et d'un rayon donné, et que l'on sait tracer une droite qui passe par deux points donnés; mais le tracé immédiat d'une tangente à un cercle ou à une courbe quelconque par un point extérieur, et celui d'une tangente commune à deux cercles ou à deux courbes quelconques, étant tout aussi sûr et tout aussi facile, pourrait tout aussi bien, sans inconvéniens, être admis au nombre des *demandes*, ce qui abrégerait, d'une manière assez notable, les élémens de géométrie.

Par le point donné P (fig. 5) menez à la courbe une suite de sécantes PA , PA′ , PA″ ,..... ; sur les cordes interceptées AB, A′B′ , A″B″ ,......, comme bases communes, construisez des deux côtés une suite de triangles équilatéraux dont les sommets opposés à ces bases soient M , M′ , M″ ,...... pour ceux qui sont construits du côté de la concavité et N , N′ , N″ ,...... pour ceux qui sont construits du côté de la convexité; faisant alors passer une courbe par les points....... M″ , M′ , M , N , N′ , N″ ,...... le point T , où cette courbe coupera la courbe proposée , sera le point de contact cherché.

Nous avons indiqué les triangles équilatéraux comme les plus faciles à construire ; mais , si l'on trouvait qu'ils écartent trop l'un de l'autre les points M , N , et laissent ainsi la position du point T trop incertaine , on pourrait leur substituer des triangles isocèles égaux deux à deux , et ayant pour hauteur commune la moitié, le tiers , le quart ou toute autre fraction de la corde qui leur servirait de base commune.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution des deux problèmes de géométrie proposés à la page 344 du XI.e volume de ce recueil ;

Par M. J. B. Durrande, professeur de mathématiques et de physique au collége royal de Cahors.

Théorème I. De tous les parallélogrammes circonscrits à une même ellipse, les parallélogrammes conjugués *sont ceux dont l'aire est un* minimum.

Démonstration. Soit, en effet, EFHG (fig. 6) un parallélogramme non conjugué, circonscrit à une ellipse dont le point O est le centre. Par ce point O, soit mené un diamètre LM, parallèle à deux côtés opposés quelconques EF, GH de ce parallélogramme ; et, par les extrémités L, M de ce diamètre, soient menées à l'ellipse deux tangentes, rencontrant le côté EF en A et B, et son opposé GH en C et D. La figure ABDC sera évidemment un parallélogramme conjugué ; et ce parallélogramme aura même hauteur que EFHG, puisqu'ils sont compris entre les mêmes parallèles ; mais, parce que EG est une tangente en un point différent de L, dont tous les points, autres que le point de contact, doivent être hors de l'ellipse, son point I d'intersection avec LM devra être sur le prolongement de cette droite, et il en sera de même, pour la même raison, du point K d'intersection de FH avec la même droite; IK sera donc plus grand que LM ; GH=IK sera donc plus grand que CD=LM ; la base du premier parallélogramme sera donc plus grande que celle du second ; son aire sera donc aussi plus grande ; le parallélogramme conjugué sera donc le parallélogramme *minimum*.

THÉORÈME II. De tous les parallélogrammes inscrits à une même ellipse, les parallélogrammes conjugués *sont ceux dont l'aire est un* maximum.

Démonstration. Soit EBFD (fig. 7) un parallélogramme non conjugué quelconque, inscrit à une ellipse dont le centre est O, intersection des deux diagonales de ce parallélogramme. Par ce centre O, soit mené le diamètre AC, conjugué de la diagonale BD ; en joignant AD, AB, CD, CB, le parallélogramme ABCD sera un parallélogramme conjugué. Or, d'après cette construction, la tangente en A devant être parallèle à BD ; d'où il suit que le point E doit être situé entre BD et cette tangente ; que par conséquent des deux triangles de même base BED, BAD le dernier est celui dont la hauteur et conséquemment dont l'aire est la plus grande ; et, comme, pour de semblables raisons, on prouverait la même chose du triangle BCD, comparé au triangle BFD, il faut en conclure que l'aire du parallélogramme conjugué ABCD est plus grande que celle de l'autre parallélogramme EBFD.

De ces deux théorèmes, on conclut, sans aucune difficulté, les deux autres théorèmes que voici :

THÉORÈME III. De toutes les ellipses inscrites à un même parallélogramme, celle qui a pour diamètres conjugués les deux droites qui joignent les milieux des côtés opposés est aussi celle dont l'aire est un maximum.

THÉORÈME. IV. De toutes les ellipses circonscrites à un même parallélogramme, celle qui a pour diamètres conjugués les deux diagonales de ce parallélogramme est aussi celle dont l'aire est un minimun.

Remarque. Ces théorèmes n'ont point leurs analogues pour l'hyperbole où les parallélogrammes inscrits et circonscrits ne sont point susceptibles de limites.

QUESTIONS PROPOSÉES.

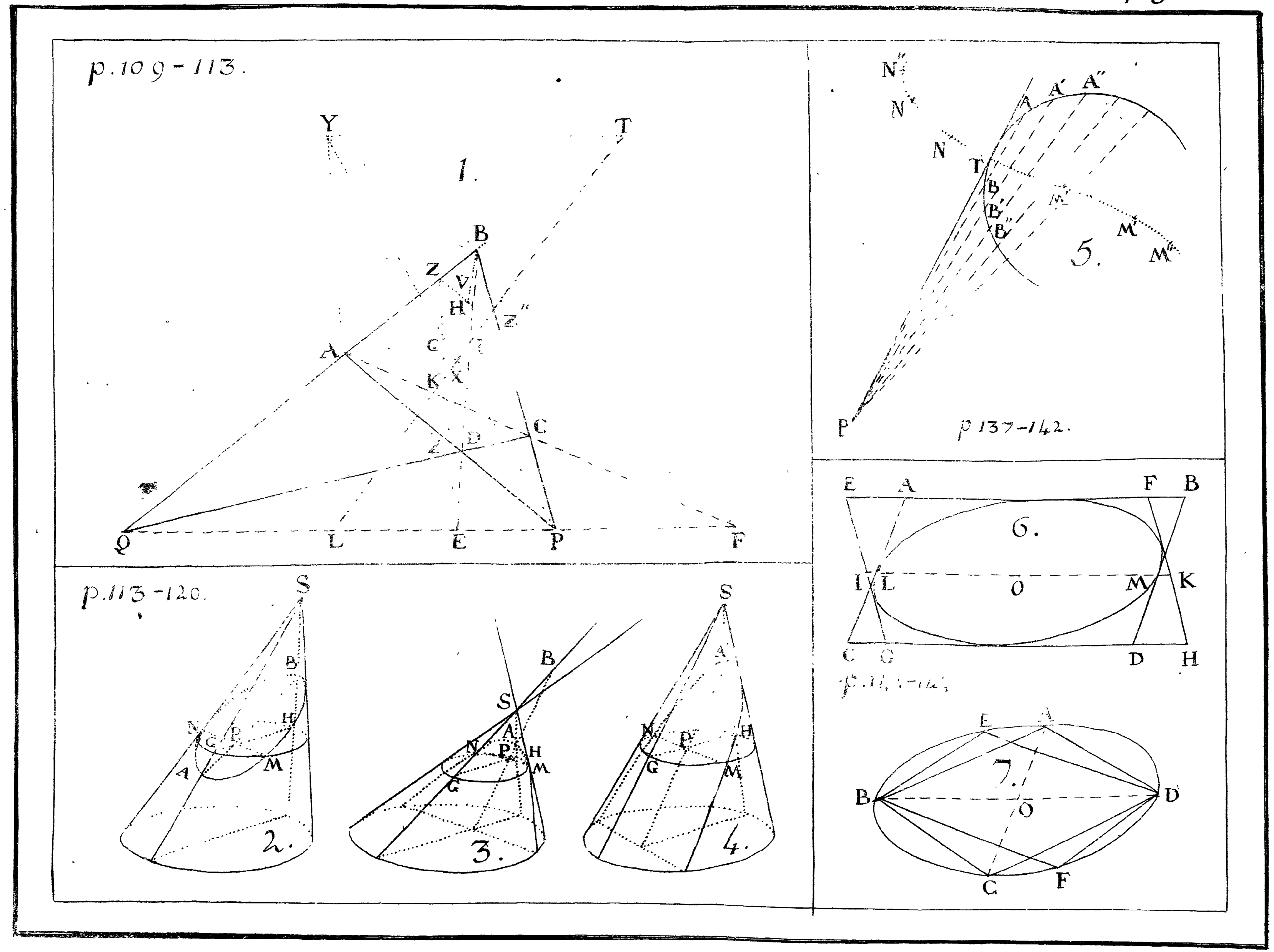
Problème de géométrie descriptive.

ETANT données les deux projections d'une courbe, reconnaître, par un tracé graphique, si cette courbe est plane ou à double courbure, et chercher, dans le premier de ces deux cas, les traces de son plan?

Chercher, dans le second cas, les traces du plan osculateur en un point de la courbe dont les projections sont données ainsi que les projections de son centre de courbure absolu, pour ce même point?

Problème de statique.

Des boules, au nombre de n, assez petites pour pouvoir être considérées comme des points, sont enfilées dans une tige rectiligne, d'une longueur déterminée, le long de laquelle elles peuvent courir librement; mais dont elles ne sauraient franchir les extrémités, à raison d'obstacles invincibles qui s'y trouvent établis. En supposant que ces boules exercent les unes sur les autres une action répulsive, en raison directe des masses repoussantes et inverse du quarré de leur distance aux masses repoussées; quelles doivent être les masses de ces boules pour qu'en les espaçant également le long de la tige, elles y demeurent d'elles-mêmes en équilibre?



J. D. G. fecit.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Éclaircissemens sur la théorie de l'intégrale $\int\frac{dx}{\text{Log}.x}$, *prise depuis* $x=0$;

Par M. Plana, professeur d'astronomie à l'université, et membre de l'académie royale des sciences de Turin.

I. On doit à M. Bessel une théorie fort remarquable de l'intégrale $\int\frac{dx}{\text{Log}.x}$, dans laquelle sont exposées des séries propres à en fournir la valeur numérique, pour une valeur quelconque de x (*). Suivant cette théorie, on obtient toujours une valeur *réelle* pour cette intégrale ; ce qui semblerait n'être pas d'accord avec la doctrine récemment exposée par M. Poisson, sur les intégrales dont les élémens passent par l'infini, comme cela a lieu relativement au cas dont il est ici question, toutes les fois que l'on prend pour x une valeur plus grande que l'unité. Mais, tout en admettant la théorie de M. Poisson, il est facile de faire disparaître la con-

(*) Voyez le recueil périodique intitulé : *Konigsberger Archiv Naturwissenchaft und Mathematik* (janvier 1811) ; ou bien le *Traité des différences et des séries* de M. Lacroix, deuxième édition, chap. VI, pag. 525, n.° 1231.

J. D. G.

tradiction qui se présente ici, à l'aide d'une distinction entre l'*intégrale arithmétique* et l'*intégrale analitique.*

Imaginons, pour un instant, l'existence d'une fonction finie de x qui, étant differentiée, donne $\frac{dx}{\text{Log.}x}$, et soit $F(x)$ cette fonction; alors, l'intégrale que j'appelle *analitique* sera donnée par l'équation

$$\int \frac{dx}{\text{Log.}x} = F(x) - F(o) \;;$$

celle-ci sera toujours imaginaire, lorsqu'on donnera à x une valeur plus grande que l'unité, ainsi que nous le ferons voir.

Maintenant, si l'on construit sur le même axe et avec la même origine, 1.° la courbe ayant pour ordonnée

$$y = \frac{1}{\text{Log.}x'}, \text{ depuis } x'=0 \text{ jusqu'à } x'=1 \;;$$

2.° la courbe ayant pour ordonnée

$$y = \frac{1}{\text{Log.}(1+x)}, \text{ depuis } x=0 \text{ jusqu'à } x=\infty \;;$$

j'entends par intégrale *arithmétique* de $\frac{dx'}{\text{Log.}x'}$ une fonction de x propre à donner la mesure de l'aire terminée par l'une ou l'autre de ces courbes; ou bien la mesure de la différence des aires formées par une portion quelconque de la seconde courbe et la totalité de la première. Ainsi, en désignant par $\psi(x')$ la fonction de l'abscisse qui donne l'aire *négative* terminée par la première courbe, on aura

$$\int \frac{dx'}{\text{Log.}x'} = \psi(x'),$$

pour l'intégrale arithmétique de $\frac{dx}{\text{Log.}x}$, depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$;

et, en désignant par $\varphi(x)-\varphi(o)$ l'aire *positive* terminée par la seconde courbe, on aura

$$\int\frac{dx}{\text{Log.}(1+x)}=\varphi(x)-\varphi(0)\ ,$$

pour l'intégrale arithmétique de $\frac{dx}{\text{Log.}x}$, depuis $x=1$ jusqu'à $x=x$ (*).

L'aire totale de la première courbe étant exprimée négativement par $\psi(1)$, il est évident que

$$\varphi(x)-\varphi(0)+\psi(1)\ ,$$

sera la mesure de la différence entre l'aire partielle de la seconde courbe, et l'aire totale de la première ; de sorte que nous avons

$$\int\frac{dx}{\text{Log.}x}=\varphi(x)-\varphi(0)+\psi(1)\ ,$$

pour l'intégrale arithmétique de $\frac{dx}{\text{Log.}x}$, correspondant à une valeur quelconque de x plus grande que l'unité. Les formules données par M. Bessel fournissent la valeur de cette dernière fonction avec

(*) Pour bien suivre tout ceci, il faut avoir bien présente à l'esprit la nature de la courbe exprimée par l'équation $y=\frac{1}{\text{Log.}x}$, laquelle est composée de deux parties distinctes ; la première, entièrement située au-dessous de l'axe des x, et comprise entre l'axe des y et une parallèle menée à cet axe à la distance $+1$, a cette parallèle pour asymptote et va se terminer brusquement à l'origine ; la seconde, entièrement située au-dessus de l'axe des x et à droite de la parallèle dont il vient d'être question, est inscrite dans l'angle de ces deux droites qui en sont les asymptotes ; de sorte qu'elle a deux branches infinies, à la manière des hyperboles, et que la parallèle à l'axe des y est asymptote commune des deux courbes.

J. D. G.

toute la précision désirable. Mais on conçoit bien que, en considérant ainsi l'intégrale en question, rien n'établit l'identité entre l'intégrale arithmétique représentée par $\varphi(x)-\varphi(0)+\psi(1)$ et l'intégrale analitique représentée par $F(x)-F(0)$.

Il est vrai que cette identité a lieu, généralement parlant; mais elle ne saurait avoir lieu dans les cas particuliers où il n'y a pas une continuité *physique* entre les differentes parties de la courbe qui a pour ordonnée le coefficient de dx. Alors l'analise pure met, pour ainsi dire, en évidence l'impossibilité d'une continuité physique dans la surface terminée par la courbe et l'axe des abscisses, en présentant, par l'intégration directe, un résultat en partie réel et en partie imaginaire. Plusieurs exemples démontrent que, en pareil cas, il suffit de supprimer la partie imaginaire du résultat ainsi trouvé, pour obtenir l'intégrale arithmétique; mais je n'ose croire qu'un tel moyen puisse, dans tous les cas, être employé avec sureté. Toutefois, je vais faire voir que du moins il est légitime, relativement à l'intégrale $\int\frac{dx}{\text{Log}.x}$.

II. En intégrant depuis $n=0$ jusqu'à $n=1$, il est clair que l'on a

$$\int_0^1 a^n dn=\frac{a-1}{\text{Log}.a};$$

donc, en changeant successivement a en $1+\alpha$ et $1-\alpha$, nous aurons

$$\int_0^1 (1+\alpha)^n dn=\frac{+\alpha}{\text{Log}(1+\alpha)},$$

$$\int_0^1 (1-\alpha)^n dx=\frac{-\alpha}{\text{Log}.(1-\alpha)};$$

de là on conclura, en développant le binome $(1-\alpha)^n$,

$$-\frac{\alpha}{\text{Log.}(1-\alpha)}=\int_0^1 dn-\alpha\int_0^1\frac{n}{1}dn+\alpha^2\int_0^1\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}dn$$

$$-\alpha^3\int_0^1\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}dn+\ldots\ldots;$$

ainsi, en posant, pour plus de simplicité,

$$-\frac{\alpha}{\text{Log.}(1-\alpha)}=1+B_1\alpha+B_2\alpha^2+B_3\alpha^3+B_4\alpha^4+\ldots, \qquad (1)$$

on aura

$$B_1=-\int_0^1\frac{n}{1}dn=-\tfrac{1}{2}$$

$$B_2=+\int_0^1\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}dn=-\tfrac{1}{12}$$

$$B_3=-\int_0^1\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}dn=-\tfrac{1}{24};$$

$$B_4=\int_0^1\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}dn=-\tfrac{19}{720};$$

$$B_5=\int_0^1\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}\cdot\frac{n-4}{5}dn=-\tfrac{3}{160};$$

. . . .

et il est clair que les mêmes coefficiens donnent

$$\frac{\alpha}{\text{Log.}(1+\alpha)}=1-B_1\alpha+B_2\alpha^2-B_3\alpha^3+B_4\alpha^4-\ldots\ldots \qquad (2)$$

Cela posé, si l'on écrit Log.$[1-(1-x)]$ au lieu de Log.x, on obtiendra, à l'aide de la formule (1),

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{Log}.x}=\int-\frac{\mathrm{d}x}{1-x}-\int\mathrm{d}x[B_1+B_2(1-x)+B_3(1-x)^2+\ldots] ;$$

ou bien, en exécutant l'intégration

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{Log}\,x}=\mathrm{Const.}+\mathrm{Log}.(1-x)-B_1x+\tfrac{1}{2}B_2(1-x)^2+\tfrac{1}{3}B_3(1-x)^3+\ldots .$$

En déterminant la constante arbitraire de manière que l'intégrale soit nulle lorsque $x=0$, il viendra

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{Log}.x}=\mathrm{Log}.(1-x)+B_1[(1-x)-1]+\tfrac{1}{2}B_2[(x-1)^2-1]+\tfrac{1}{3}B_3[(1-x)^3-1]+\ldots ;$$

donc, en désignant par C la valeur numérique de la série infinie et convergente

$$C=-(B_1+\tfrac{1}{2}B_2+\tfrac{1}{3}B_3+\tfrac{1}{4}B_4+\ldots\ldots) ; \qquad (a)$$

on aura

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{Log}.x}=C+\mathrm{Log}.(1-x)+B_1(1-x)+\tfrac{1}{2}B_2(1-x)^2+\tfrac{1}{3}B_3(1-x)^3+\ldots \quad (3).$$

La valeur de la constante C pourrait être trouvée avec toute la précision que l'on désirerait, en sommant un nombre suffisant de termes du second membre de l'équation (a); mais ce moyen n'est pas le plus expéditif. Il y en a d'autres plus rapides, à l'aide desquels on a calculé ce nombre avec 32 chiffres décimaux, dont les premiers donnent $C=0{,}5772156\ldots..$

Le second membre de l'équation (3), formé d'après les principes directs du calcul intégral, doit être regardé comme un véritable développement de l'intégrale analitique représentée plus haut par $\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(0)$.

Ce développement est évidemment réel et négatif pour toute valeur de x positive et moindre que l'unité ; il augmente toujours dans le même sens, à mesure que x s'approche de l'unité, et finit par devenir infiniment grand et négatif, lorsque $x=1$. A ce point, l'équation (3) donne

$$\int_0^1 \frac{dx}{\text{Log}.x} = C + \text{Log}.0 \ .$$

Lorsque x surpasse l'unité, le terme $\text{Log}.(1-x)$ est absolument imaginaire, il est même indéterminé, eu égard à la multiplicité des valeurs de $\text{Log}.(-1)$; mais avant de tirer de là la conséquence que le second membre de l'équation (3) est effectivement imaginaire, il faut démontrer que la série affectée des coefficiens B_1, B_2, B_3, ... ne peut pas être elle-même le développement d'une fonction qui devienne imaginaire lorsqu'on a $x>1$; car autrement on pourrait objecter qu'il y aura destruction entre les parties imaginaires.

A cet effet, remarquons que, si dans l'équation (3), on remplace $\text{Log}.(x-1)$ par $\int -\frac{dx}{1-x}$, on obtient

$$\int dx \left\{ \frac{1}{1-x} + \frac{1}{\text{Log}.\,x} \right\} = C + B_1(1-x) + \tfrac{1}{2}B_2(1-x)^2 + \ldots \qquad (4)$$

Or, il est facile de voir que la valeur de cette série infinie est toujours assignable par une quantité réelle, en appliquant convenablement la méthode des quadratures à l'intégrale qui forme le premier membre de l'équation (4), et dont les élémens ne deviennent jamais infinis ; car, en suivant la marche de la courbe dont l'équation est

$$y = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{\text{Log}.x} ,$$

il est visible que ces ordonnées vont en decroissant, depuis $x=0$, et que l'on doit prendre $y=0$ lorsque $x=1$, puisque la loi de continuité exige que l'on prenne à ce point $y=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}$. Au reste, cette courbe est tangente à l'axe lorsque $x=1$; car alors $\frac{dy}{dx}=0$; et l'équation (4) démontre que l'on a

$$\int_0^1 dx\left\{\frac{1}{1-x}+\frac{1}{\text{Log}.x}\right\}=C\ ,$$

pour l'expression de sa surface depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, ce qui est connu depuis long-temps.

Il me paraît donc incontestablement prouvé par là que le développement de l'intégrale analitique $F(x)-F(0)$ acquiert toujours une valeur imaginaire, lorsque x est plus grand que l'unité; et, par la nature même du developpement des fonctions, on doit en conclure que cette propriété est inhérente à la fonction même $F(x)-F(0)$ supposée exprimée explicitement sous forme finie.

Il suit de là que la série (3) n'est propre à fournir l'intégrale arithmétique de $\frac{dx}{\text{Log}.x}$ que depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$; de sorte que, conformément aux notations adoptées ci-dessus (I), on a

$$\int\frac{dx'}{\text{Log}.x'}=\psi(x')=C+\text{Log}.(1-x')+B_1(1-x')+\tfrac{1}{2}B_2(1-x')^2+\ldots\ldots$$

$$\psi(1)=C+\text{Log}.(0)\,.$$

III. Pour avoir l'intégrale arithmétique de $\frac{dx}{\text{Log}.(1+x)}$, depuis $x=0$, remarquons que, d'après la formule (2), l'on a

$$\int\frac{dx}{\text{Log}.(1+x)}=\int dx\left(\frac{1}{x}-B_1+B_2x-B_3x^2+B_4x^3-\ldots\ldots\right)\,,$$

ou bien

$\int\frac{dx}{\text{Log}.(1+x)}$

$$\int \frac{dx}{\text{Log}(1+x)} = \text{Const.} + \text{Log}.x - B_1 x + \tfrac{1}{2} B_2 x^2 - \tfrac{1}{3} B_3 x^3 + \ldots\ldots .$$

cette expression devant être nulle lorsque $x=0$, il faut prendre

$$\text{Const.} = -\text{Log}.0 ,$$

ce qui donne un résultat que l'on peut mettre sous cette forme

$$\int \frac{dx}{\text{Log}(1+x)} = C - [C + \text{Log}\,0] + \text{Log}.[(1+x)-1] - B_1[(1+x)-1]$$
$$+ \tfrac{1}{2} B_2 [(1+x)-1]^2 - \tfrac{1}{3} B_3 [(1+x)-1]^3 + \ldots .$$

donc, en écrivant x à la place de $1+x$, et *convenant* que x doit être plus grand que l'unité, cette équation donnera

$$\int \frac{dx}{\text{Log}.x} = C - \psi(1) + \text{Log}.(x-1) + B_1(1-x) + \tfrac{1}{2} B_2 (1-x)^2 + \ldots .$$

pour l'intégrale arithmétique de $\frac{dx}{\text{Log}.x}$, prise depuis $x=1$. Cette valeur est, comme l'on voit, toujours infinie, à cause que $-\psi(1)=+\infty$; mais si, au lieu de cette aire, toujours positive, on convient de prendre la somme qu'elle constitue en lui ajoutant l'aire négative représentée par $\psi(1)$, on aura

$$\int \frac{dx}{\text{Log}.x} = C + \text{Log}.(x-1) + B_1(1-x) + \tfrac{1}{2} B_2 (1-x)^2 + \tfrac{1}{3} B_3 (1-x)^3 + \ldots \quad (6)$$

pour expression de la mesure de la différence absolue de ces deux aires. Pour peu que l'on examine la configuration des deux aires qui constituent cette différence, on sentira que cette série doit fournir des valeurs négatives pour des valeurs de x fort rapprochées de l'unité ; mais, avant $x=1,5$, on voit succéder le signe positif au signe négatif ; de sorte qu'il y a certainement une abscisse, comprise entre $x=1$ et $x=1,5$, qui donne une valeur nulle pour l'intégrale arithmétique de $\frac{dx}{\text{Log.}x}$. Marcheroni et M. Bessel ont trouvé que ce point remarquable répond à $x=1,4513692349 5$.

Maintenant, si l'on compare les deux séries fournies par les seconds membres des équations (5), (6), on voit que l'on peut réunir ces deux équations dans l'équation unique

$$\int \frac{dx}{\text{Log}\, x} = C + \text{Log.}[\pm(1-x)] + B_1(1-x) + \tfrac{1}{2} B_2 (1-x)^2 + \ldots \quad (7)$$

en convenant que la quantité soumise au signe logarithmique doit être prise

Avec le signe $+$, lorsqu'on a $x<1$,

Avec le signe $-$, lorsqu'on a $x>1$.

C'est dans cette ambiguité que consiste la différence essentielle entre l'intégrale arithmétique et l'intégrale analitique, laquelle doit toujours être unique, d'après la manière même dont on conçoit son existence ; mais il est remarquable qu'ici, comme dans d'autres cas particuliers, il suffise de changer, dans l'intégrale analitique (3), le terme $\text{Log.}(1-x)$ en $\text{Log.}(x-1)+\text{Log.}(-1)$, et de supprimer ensuite la partie imaginaire $\text{Log.}(-1)$, pour avoir l'intégrale arithmétique qui répond au cas où on a $x>1$.

IV. Jusqu'ici nous avons évité à dessein l'emploi de la série la plus communément connue pour donner la valeur de cette intégrale. On l'obtient en substituant pour dx la différentielle du second membre de l'équation

$$x = e^{\text{Log}.x} = 1 + \frac{\text{Log}.x}{1} + \frac{(\text{Log}.x)^2}{1.2} + \frac{(\text{Log}.x)^3}{1.2.3} + \ldots\ldots \qquad (8)$$

alors, en intégrant, on a

$$\int \frac{\text{d}x}{\text{Log}.x} = \text{Const.} + \text{Log}.(\text{Log}.x) + \text{Log}.x + \tfrac{1}{2}\frac{(\text{Log}.x)^2}{1.2} + \ldots \qquad (8)$$

En partant de cette dernière série, tout ce qui était auparavant fort clair devient tout-à-fait obscur. Afin donc d'établir ici la clarté convenable, il faut d'abord remarquer que, au lieu de prendre

$$\int \frac{\text{d.Log}.x}{\text{Log}.x} = \text{Log}.(+\text{Log}.x)\,,$$

rien n'empêche d'écrire

$$\int \frac{-\text{d.Log}.x}{-\text{Log}.x} = \text{Log}.(-\text{Log}.x)\,.$$

Ensuite, il faut considérer la série (8) comme un véritable développement de l'une ou de l'autre des deux séries désignées précédemment par (5) et (6), et conclure de là la valeur de la constante arbitraire. Or, en substituant au lieu de Log.x

$$\text{Log}.[1-(1-x)] = -[(1-x) + \tfrac{1}{2}(1-x)^2 + \tfrac{1}{3}(1-x)^3 + \tfrac{1}{4}(1-x)^4 + \ldots]\,,$$

on conçoit la possibilité de transformer le second membre de l'équation (8) de manière que l'on ait

$$\int \frac{\text{d}x}{\text{Log}.x} = \text{Const.} + \text{Log}\{\mp[1-(1-x)]\} + M(1-x) + M'(1-x)^2 + \ldots\,;$$

mais on a

$$-\text{Log.}[1-(1-x)] = \text{Log.}(1-x) + \text{Log.}[1+\tfrac{1}{2}(1-x)+\tfrac{1}{3}(1-x)^2+\ldots],$$

$$+\text{Log}[1-(1-x)] = \text{Log.}(x-1) + \text{Log.}[1+\tfrac{1}{2}(1-x)+\tfrac{1}{3}(1-x)^2+\ldots];$$

donc, en imaginant développée, suivant les puissances de $1-x$, la seconde partie de ces expressions, on formera enfin, ou

$$\int \frac{dx}{\text{Log.}x} = \text{Const.} + \text{Log.}(1-x) + N(1-x) + N'(1-x)^2 + \ldots$$

ou bien

$$\int \frac{dx}{\text{Log.}\,x} = \text{Const.} + \text{Log.}(x-1) + N(1-x) + N'(1-x)^2 + \ldots.$$

Ces deux séries devant être identiques avec l'une ou l'autre des séries (5) et (6), il faut en conclure que la constante est la même dans ces deux équations, et que sa valeur est précisément égale à celle du nombre désigné plus haut par C. Et, comme l'équation (8) fournit ces dernières par un calcul qui ne peut, en aucune sorte, modifier la constante arbitraire primitivement introduite, il faut en conclure en outre que, dans cette même équation, on a $Const. = C$, lorsque l'intégrale doit être nulle avec $x=0$. D'après cela, il est hors de doute que, en posant

$$\int \frac{dx}{\text{Log.}x} = C + \text{Log.}(\mp\text{Log}\,x) + \text{Log.}x + \tfrac{1}{2}\frac{(\text{Log.}x)^2}{1.2} + \tfrac{1}{3}\frac{(\text{Log}\,x)^3}{1.2.3} + \ldots \quad (9)$$

on a une véritable transformation de l'équation désignée par (7), où le signe ambigu doit être pris de manière que Log.($\mp$Log.x) soit toujours une quantité réelle. Il serait sans doute plus satisfaisant de parvenir à ce même résultat en transformant directement la série qui constitue le second membre de l'équation (7); mais cela présente des difficultés assez graves dans l'exécution du calcul. Cependant, ce que nous venons d'exposer suffit pour écarter toute obscurité, et donner une signification précise des valeurs numériques et réelles de cette transcendante. Celles-ci sont en effet les seules qu'on doive employer, en général, dans les applications physiquement possibles. Les valeurs imaginaires, au contraire, devront être prises en considération, lorsque cette intégrale se trouvera combinée avec d'autres expressions imaginaires, afin d'éviter toute méprise dans les résultats tirés d'une telle combinaison.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Recherches sur le nombre, la grandeur et la situation des systèmes de diamètres conjugués égaux, dans l'ellipsoïde;

Par M. Gergonne.

On sait que, parmi les systèmes de diamètres conjugués, en nombre infini, que peut fournir une même ellipse, il en est un, et un seul où ces deux diamètres sont égaux, et que ces deux-là sont dirigés suivant les diagonales du rectangle formé par les tangentes aux quatre sommets de la courbe. Mais personne ne s'est jamais demandé, du moins que je sache, si, dans l'ellipsoïde, il y avait un ou plusieurs systèmes de diamètres conjugués égaux, ni quelle était leur situation par rapport à cette surface; c'est cette question que nous nous proposons de traiter ici; mais, afin de trouver dans l'analogie un modèle de la manière de procéder, nous nous occuperons d'abord de l'ellipse, et afin d'élargir un peu la question, nous y comprendrons la théorie des diamètres conjugués en général.

Soient $2a$, $2b$ les deux diamètres principaux d'une ellipse; prenons-les pour axes des coordonnées, et adoptons X, Y pour symboles des coordonnées courantes; l'équation de la courbe sera ainsi

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2+\left(\frac{Y}{b}\right)^2=1.$$

Soient (x, y), (x', y') deux points de la courbe, dont les distances à son centre soient respectivement a', b'; nous aurons

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1, \quad (1) \qquad x^2+y^2=a'^2, \quad (3)$$

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2+\left(\frac{y'}{b}\right)^2=1, \quad (2) \qquad x'^2+y'^2=b'^2, \quad (4)$$

De plus, en désignant par γ l'angle des deux demi-diamètres a', b', nous aurons

$$\text{Sin.}\gamma=\frac{xy'-yx'}{a'b'}, \quad (5) \qquad \text{Cos.}\gamma=\frac{xx'+yy'}{a'b'}. \quad (6)$$

Si l'on veut que $2a'$, $2b'$ soient des diamètres conjugués, il sera nécessaire et suffisant pour cela que le diamètre parallèle à la tangente en (x, y) contienne (x', y'); or, l'équation de ce diamètre est

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}=0;$$

puis donc que cette équation doit être satisfaite par (x', y'), on aura

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=0\,; \quad \text{ou} \quad \left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{x'}{a}\right)+\left(\frac{y}{b}\right)\left(\frac{y'}{b}\right)=0\,. \qquad (7)$$

Or, par la théorie de la transformation des coordonnées, il est connu que trois relations telles que (1, 2, 7) peuvent être remplacées par les trois suivantes :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{x'}{a}\right)^2=1\,, \qquad \left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{y'}{b}\right)^2=1\,, \qquad \left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{y}{b}\right)+\left(\frac{x'}{a}\right)\left(\frac{y'}{b}\right)=0\,.$$

lesquelles reviennent à

$$x^2+x'^2=a^2\,, \qquad (8)$$

$$y^2+y'^2=b^2\,, \qquad (9)$$

$$xy+x'y'=0\,. \qquad (10)$$

Cela posé, en prenant la somme des équations (8, 9) et ayant égard aux équations (3, 4), il vient

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2\;;$$

Et, si du produit des équations (8, 9) on retranche le quarré de l'équation (10), on trouvera, en ayant égard à l'équation (5) et extrayant la racine quarrée

$$a'b'\operatorname{Sin}\gamma=ab\;;$$

ce sont les relations connues entre les diamètres principaux et deux diamètres conjugués quelconques ; et c'est là, à ce qu'il nous paraît, la manière la plus simple de les obtenir.

Si, connaissant les coordonnées x, y de l'extrémité d'un diamètre, on voulait obtenir celles x', y' de l'extrémité de son conjugué, on y parviendrait au moyen des équations (8 ; 9), qui donnent

$$x'=\sqrt{a^2-x^2}\ , \qquad y'=\sqrt{b^2-y^2}\ ,$$

quantités faciles à construire.

Si l'on veut que les diamètres conjugués soient égaux, il faudra écrire

$$x^2+y^2=x'^2+y'^2\ ,$$

mettant pour x'^2, y'^2 dans cette équation les valeurs données par les équations (8, 9), elle deviendra

$$x^2+y^2=\frac{a^2+b^2}{2}\ ,$$

c'est le quarré de la moitié de l'un de ces diamètres. En combinant cette équation avec l'équation (1), on en tirera

$$x=\pm a\sqrt{\tfrac{1}{2}}\ , \qquad y=\pm b\sqrt{\tfrac{1}{2}}\ ;$$

de sorte que l'équation du diamètre qui, en général, est

$$Y=\frac{y}{x}X\ ,$$

deviendra

$$Y=\pm\frac{b}{a}X\ ;$$

équation que l'on reconnaît facilement pour être celle de l'une ou de l'autre des deux diagonales du rectangle formé par les tangentes aux quatre sommets de la courbe.

En mettant pour x, y, dans l'équation (7), les valeurs que nous venons de trouver ; on en tire $\frac{y'}{x'}=\mp\frac{b}{a}$; de sorte que l'équation du conjugué de notre diamètre qui serait, en général,

$Y=$

$$Y=\frac{y'}{x'}X\,,$$

devient, dans le cas actuel,

$$Y=\pm\frac{b}{a}X\,;$$

ainsi, les diamètres dirigés suivant les deux diagonales du rectangle dont il vient d'être question, sont à la fois conjugués l'un à l'autre et égaux entre eux ; et ce sont les seuls qui jouissent de cette double propriété.

Soient $2a$, $2b$, $2c$ les trois diamètres principaux d'une ellipsoïde; prenons-les pour axes des coordonnées, et adoptons X, Y, Z pour symboles des coordonnées courantes; l'équation de la surface sera ainsi

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2+\left(\frac{Y}{b}\right)^2+\left(\frac{Z}{c}\right)^2=1\,.$$

Soient $(x\,,\,y\,,\,z)$, $(x'\,,\,y'\,,\,z')$, $(x''\,,\,y''\,,\,z'')$ trois points de cette surface, dont les distances respectives au centre de l'ellipsoïde soient a', b', c'; nous aurons

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1\,, \quad (1) \qquad x^2+y^2+z^2=a'^2\,, \quad (4)$$

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2+\left(\frac{y'}{b}\right)^2+\left(\frac{z'}{c}\right)^2=1\,, \quad (2) \qquad x'^2+y'^2+z'^2=b'^2\,, \quad (5)$$

$$\left(\frac{x''}{a}\right)^2+\left(\frac{y''}{b}\right)^2+\left(\frac{z''}{c}\right)^2=1\,, \quad (3) \qquad x''^2+y''^2+z''^2=c'^2\,. \quad (6)$$

De plus, en désignant par α, β, γ, les angles que forment deux à deux les demi-diamètres a', b', c', nous aurons

$$\text{Sin.}\alpha=\frac{\sqrt{(x'y''-x''y')^2+(y'z''-y''z')^2+(z'x''-z''x')^2}}{b'c'}\,, \tag{7}$$

$$\text{Sin.}\beta=\frac{\sqrt{(x''y-xy'')^2+(y''z-yz'')^2+(z''x-zx'')^2}}{c'a'}\,, \tag{8}$$

$$\text{Sin.}\gamma=\frac{\sqrt{(xy'-x'y)^2+(yz'-y'z)^2+(zx'-z'x)^2}}{a'b'}\,, \tag{9}$$

$$\text{Cos.}\alpha=\frac{x'x''+y'y''+z'z''}{b'c'}\,, \tag{10}$$

$$\text{Cos.}\beta=\frac{x''x+y''y+z''z}{c'a'}\,, \tag{11}$$

$$\text{Cos.}\gamma=\frac{xx'+yy'zz'}{a'b'}\,. \tag{12}$$

Si l'on veut que $2a'$, $2b'$, $2c'$ forment un système de diamètres conjugués, il sera nécessaire et suffisant pour cela que le plan diamétral parallèle au plan tangent en chacun des trois points (x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z'') contienne les deux autres points ; or, les équations des trois plans diamétraux sont

$$\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{x'}{a}\right)+\left(\frac{y}{b}\right)\left(\frac{y'}{b}\right)+\left(\frac{z}{c}\right)\left(\frac{z'}{c}\right)=1\,, \tag{13}$$

$$\left(\frac{x'}{a}\right)\left(\frac{x''}{a}\right)+\left(\frac{y'}{b}\right)\left(\frac{y''}{b}\right)+\left(\frac{z'}{c}\right)\left(\frac{z''}{c}\right)=1\,, \tag{14}$$

$$\left(\frac{x''}{a}\right)\left(\frac{x}{a}\right)+\left(\frac{y''}{b}\right)\left(\frac{y}{b}\right)+\left(\frac{z''}{c}\right)\left(\frac{z}{c}\right)=1\,. \tag{15}$$

Si donc l'on se donne arbitrairement, sur l'ellipsoïde, le point (x, y, z), l'on n'aura, pour déterminer les six coordonnées x', y', z', x'', y'', z'' des deux autres que les cinq équations (2, 3, 13, 14, 15) ; d'où l'on voit que, tandis qu'à chaque diamètre de l'ellipse, il en répond un autre qui lui est conjugué, il arrive, au contraire, qu'à chaque diamètre de l'ellipsoïde peuvent répondre, d'une infinité de manières, deux autres diamètres qui lui soient conjugués; attendu que ces derniers sont uniquement assujettis à être deux diamètres conjugués quelconques de la section faite par le centre parallèlement au plan tangent à l'extrémité du diamètre donné.

Cela posé, il est connu, par la théorie de la transformation des coordonnées, que les six relations (1, 2, 3, 13, 14, 15) peuvent être remplacées par les suivantes :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{x'}{a}\right)^2+\left(\frac{x''}{a}\right)^2=1,$$

$$\left(\frac{y}{b}\right)\left(\frac{z}{c}\right)+\left(\frac{y'}{b}\right)\left(\frac{z'}{c}\right)+\left(\frac{y''}{b}\right)\left(\frac{z''}{c}\right)=0,$$

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{y'}{b}\right)^2+\left(\frac{y''}{b}\right)^2=1,$$

$$\left(\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}\right)+\left(\frac{z'}{c}\right)\left(\frac{x'}{a}\right)+\left(\frac{z''}{c}\right)\left(\frac{x''}{a}\right)=0,$$

$$\left(\frac{z}{c}\right)^2+\left(\frac{z'}{c}\right)^2+\left(\frac{z''}{c}\right)^2=1,$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{y}{b}\right)+\left(\frac{x'}{a}\right)\left(\frac{y'}{b}\right)+\left(\frac{x''}{a}\right)\left(\frac{y''}{b}\right)=0.$$

c'est-à-dire, en simplifiant,

$$x^2+x'^2+x''^2=a^2, \quad (16) \qquad yz+y'z'+y''z''=0; \quad (19)$$

$$y^2+y'^2+y''^2=b^2, \quad (17) \qquad zx+z'x'+z''x''=0; \quad (20)$$

$$z^2+z'^2+z''^2=c^2, \quad (18) \qquad xy+x'y'+x''y''=0. \quad (21)$$

Or, 1.° en prenant la somme des équations (16, 17, 18), et ayant égard aux équations (4, 5, 6), on aura

$$a'^2+b'^2+c'^2=a^2+b^2+c^2\ .$$

2.° En prenant la somme des produits de ces mêmes équations deux à deux, et retranchant de cette somme la somme des quarrés des équations (19, 20, 21), il viendra, en ayant égard aux équations (4, 5, 6, 7, 8, 9),

$$b'^2c'^2\text{Sin.}^2\alpha+c'^2a'^2\text{Sin.}^2\beta+a'^2b'^2\text{Sin.}^2\gamma=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\ ;$$

3.° Si, enfin, du produit des équations (16, 17, 18), on retranche le produit des équations (19, 20, 21), en ayant égard aux équations (4, 5, 6, 10, 11, 12), il viendra

$$(1-\text{Cos.}^2\alpha-\text{Cos.}^2\beta-\text{Cos.}^2\gamma+2\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma)a'^2b'^2c'^2=a^2b^2c^2\ .$$

Ce sont là les trois relations entre les diamètres principaux de l'ellipsoïde et trois autres diamètres conjugués quelconques, telles qu'elles ont été données par M. Bérard, dans le présent recueil (tom. III, pag. 113).

Si l'on veut présentement que les trois diamètres soient de même longueur, il faudra poser en outre la double équation

$$x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2=x''^2+y''^2+z''^2\ ; \qquad (22)$$

qui, jointe aux six précédentes, ne portera leur nombre total qu'à *huit* seulement, nombre insuffisant pour déterminer les *neuf* coordonnées x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''; de sorte qu'en éliminant les six dernières, on parviendra aux deux équations en x, y, z d'une ligne courbe sur laquelle devra se trouver le point (x, y, z), pour que le diamètre, passant par ce point, puisse faire partie d'un système de diamètres conjugués égaux. Ainsi, tandis que le problème de la recherche des diamètres conjugués égaux est déterminé pour l'ellipse, ce problème est indéterminé pour l'ellipsoïde.

Rien n'est plus facile que d'obtenir les deux équations de la courbe dont il vient d'être question. D'abord, le point (x, y, z) étant sur l'ellipsoïde, on peut prendre pour l'une d'elles l'équation (1), c'est-à-dire,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

En second lieu, si l'on prend la somme des équations (16, 17, 18), en ayant égard à la double équation (22), on aura pour la deuxième équation cherchée

$$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{3};$$

c'est celle d'une sphère concentrique à l'ellipsoïde et dont l'intersection avec elle sera le lieu de tous les points de cette surface où l'on peut placer l'extrémité d'un diamètre pour que ce diamètre puisse faire partie d'un système de diamètres conjugués égaux. Il y a donc cette analogie entre l'ellipse et l'ellipsoïde que, tandis que dans l'ellipse, les extrémités des diamètres conjugués égaux sont aux intersections de la courbe avec un cercle qui lui est concentrique, les extrémités des diamètres conjugués égaux dans l'ellipsoïde se trouvent à l'intersection de cette surface avec celle d'une sphère qui lui est concentrique. On voit par là que, bien qu'il y ait dans l'ellipsoïde, quant à la direction, une infinité de systèmes de diamètres conjugués égaux, les diamètres, dans tous ces systèmes, ont néanmoins une même longueur constante.

On voit que le lieu géométrique de la totalité des diamètres qui appartiennent aux systèmes de diamètres conjugués égaux est une surface conique qui a son centre au centre de l'ellipsoïde. Il est très-aisé d'ailleurs d'obtenir l'équation de cette surface. Soient, en effet,

$$x=Mz \ , \qquad y=Nz \ ,$$

les deux équations d'une droite quelconque partant du centre, en la combinant d'une part avec celle de l'ellipsoïde et d'une autre avec celle de la sphère, pour en éliminer x et y, il viendra

$$\left(\frac{1}{c^2}+\frac{M^2}{a^2}+\frac{N^2}{b^2}\right)z^2=1 \ ,$$

$$(1+M^2+N^2)z^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \ .$$

Pour que cette droite soit la génératrice de la surface conique dans l'une de ses positions, il faut que ces deux équations donnent une même valeur pour z ; éliminant donc z entre elles, on obtiendra pour la condition cherchée

$$3(1+M^2+N^2)=(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{c^2}+\frac{M^2}{a^2}+\frac{N^2}{b^2}\right)$$

en y mettant donc pour M et N leurs valeurs $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, il viendra pour l'équation de la surface conique dont il s'agit

$$3\,\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \ ;$$

Si donc on trace arbitrairement une droite sur cette surface et que, par le centre, on mène un plan parallèle au plan tangent au point où elle rencontre la surface de l'ellipsoïde, ce plan coupera la surface conique suivant deux droites qui, avec la première, composeront un système de diamètres conjugués égaux.

Cette équation est évidemment satisfaite en posant

$$x=\pm a\,,\qquad y=\pm b\,,\qquad z=\pm c\,,$$

de quelque manière d'ailleurs que l'on combine les signes + ou — devant ces valeurs; donc la surface conique dont il s'agit passe par les huit sommets du parallélipipède rectangle formé par les plans tangens aux extrémités des diamètres principaux de l'ellipsoïde. Ainsi, de même que, dans l'ellipse, les diagonales du réctangle construit sur les axes sont des diamètres conjugués égaux, les diagonales du parallélipipède construit sur les axes de l'ellipsoïde en sont aussi, quant à leur direction, des diamètres conjugués égaux; mais, tandis que les deux diagonales sont conjuguées l'une à l'autre dans l'ellipse, chacune des quatre diagonales, dans l'ellipsoïde, a ses deux conjuguées étrangères aux trois autres.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration des deux théorèmes de géométrie énoncés à la page 72 de ce volume ;

Par M. J. B. Durrande, professeur de physique au collége royal de Cahors.

Théorème I. *De tous les systèmes de diamètres conjugués d'une ellipse, les diamètres principaux sont ceux dont la somme est un* minimum ; *et les diamètres conjugués égaux sont ceux dont la somme est un* maximum.

Démonstration. Soient a, b les demi-diamètres principaux d'une ellipse, x, y deux demi-diamètres conjugués quelconques, et γ l'angle que comprennent entre eux ces demi-diamètres ; on aura, comme l'on sait (*),

$$x^2+y^2=a^2+b^2\,; \qquad xy\,\mathrm{Sin}.\gamma=ab\,.$$

Ajoutant et retranchant successivement le double de la dernière de ces deux équations au produit de la première par Sin.γ, il viendra, en divisant ensuite par Sin.γ et extrayant la racine quarrée des deux membres,

(*) Voyez le précédent article.

J. D. G.

$x+y=$

$$x+y=\sqrt{a^2+b^2+\frac{2ab}{\text{Sin.}\gamma}}\ , \quad x-y=\sqrt{a^2+b^2-\frac{2ab}{\text{Sin.}\gamma}}\ .$$

Le dernier de ces résultats prouve qu'on ne sauroit avoir

$$a^2+b^2<\frac{2ab}{\text{Sin.}\gamma}\ ,\ \text{c'est-à-dire}\ ,\ \text{Sin.}\gamma<\frac{2ab}{a^2+b^2}\ ,$$

ou encore

$$\text{Sin.}\gamma<1-\frac{(a-b)^2}{(a-b)^2+2ab}\ ,$$

quantité essentiellement positive et moindre que l'unité. Ainsi, Sin.γ est nécessairement compris entre les deux limites

$$1 \quad \text{et} \quad \frac{2ab}{a^2+b^2}\ .$$

Il atteint la première lorsqu'on a $x-y=a-b$, c'est-à-dire, lorsque les deux demi-diamètres conjugués x, y sont les demi-diamètres principaux eux-mêmes ; il atteint la seconde, lorsqu'on a $x=y$, c'est-à-dire, lorsque x et y sont les demi-diamètres conjugués égaux.

Or, il résulte évidemment de l'expression de $x+y$, que cette somme sera *minimum* dans le premier cas, et *maximum* dans le second ; le théorème se trouve donc ainsi complètement démontré.

THÉORÈME II. De tous les systèmes de diamètres conjugués d'une ellipsoïde, les diamètres principaux sont ceux dont la somme est un minimum ; *et les diamètres conjugués égaux sont ceux dont la somme est un* maximum.

Démonstration. La démonstration de ce théorème se déduit bien simplement du théorème qui précède.

Il faut d'abord pour cela se rappeler que l'un quelconque des diamètres d'une ellipsoïde étant donné, il n'y a absolument de determiné que le plan de ses deux conjugués, dans lequel, prenant arbitrairement deux diamètres de la section, conjugués l'un à l'autre, ils seront aussi conjugués au premier.

Cela posé, 1.° si l'on nie que les diamètres principaux de l'ellipsoïde soient les diamètres conjugués dont la somme est *minimum*, il faudra qu'on indique un autre système de diamètres conjugués jouissant de cette propriété, et dans lequel deux au moins des trois diamètres ne soient pas perpendiculaires l'un à l'autre; mais alors, en conservant le troisième diamètre, et substituant à ces deux-ci les diamètres principaux de la section qui les contient, on aurait un nouveau système de diamètres conjugués, dont la somme serait (*Théor. I*) moindre que la somme des premiers, qui conséquemment ne saurait être un *minimum*, comme on l'avait supposé.

2.° Si l'on nie que les diamètres conjugués égaux de l'ellipsoïde soient les diamètres conjugués dont la somme est *maximum*, il faudra qu'on indique un autre système de diamètres conjugués jouissant de cette propriété, et dans lequel deux au moins des trois diamètres soient inégaux; mais alors, en conservant le troisième diamètre, et substituant à ces deux-ci les diamètres conjugués égaux de la section qui les contient, on aurait un nouveau système de diamètres conjugués, dont la somme serait (*Théor. I*) plus grande que la somme des premiers, qui conséquemment ne saurait être un *maximum*, comme on l'avait supposé (*).

(*) Puisque, comme on l'a vu dans le précédent article, il existe dans l'ellipsoïde une infinité de systèmes de diamètres conjugués égaux, il y existe donc aussi une infinité de systèmes de diamètres conjugués ayant une somme *maximum*; d'où l'on voit qu'en traitant la seconde partie du théorème par le calcul différentiel, on aurait un exemple du cas singulier dont s'est occupé M. Français, aux pages 132 et 197 du III.e volume de ce recueil, et dans lequel la théorie ordinaire est en défaut, attendu que le *maximum* ou le *minimum* se trouve indéterminé.

J. D. G.

Le second théorème se trouve donc ainsi complètement démontré, comme le premier (*).

Autres démonstrations des mêmes théorèmes et de théorèmes plus généraux ;

Par M. Pagani Michel, ingénieur italien, résidant à Genève.

L'application du calcul différentiel à la démonstration des théorèmes proposés, au moyen de l'expression des diamètres conjugués en fonction des axes et des angles que ces diamètres font avec eux, ne pouvant offrir d'autre difficulté que la longueur des calculs, nous nous sommes cru fondés à penser qu'en demandant la démonstration de ces théorèmes, ce n'était pas tant une démonstration quelconque qu'on désirait qu'une démonstration simple et élémentaire, à la portée des jeunes-gens qui étudient l'application de l'analise algébrique à la géométrie des lignes et surfaces du second ordre.

C'est d'après cette considération que nous nous sommes proposés de démontrer les théorèmes dont il s'agit, sans rien emprunter du calcul infinitésimal, et en nous appuyant uniquement sur ces principes connus, savoir que, dans l'ellipse et l'ellipsoïde, la somme des quarrés des diamètres conjugués est une quantité constante,

---

(*) Nous avons reçu récemment de M. Tédenat, ancien recteur, correspondant de l'académie royale des sciences, des démonstrations des mêmes théorèmes qui rentrent pour le fond dans celles qu'on vient de lire, et qu'il suffit conséquemment de mentionner. *J. D. G.*

et que le plus grand et le plus petit des diamètres principaux sont aussi le plus grand et le plus petit de tous les diamètres.

Ayant ensuite aperçu que ces théorèmes n'étaient que des cas particuliers d'autres théorèmes plus généraux et non moins faciles à démontrer ; nous avons pensé devoir nous attacher de préférence à la démonstration de ces derniers.

THÉORÈME I. Si deux variables x , y , *constamment positives l'une et l'autre, sont liées entre elles par l'équation* $x^m+y^m=a^m+b^m$, *où* a *et* b *sont aussi des quantités positives, que l'on suppose inégales, et dans laquelle* m *est un nombre positif quelconque plus grand que l'unité; et si* x *et* y, *ne pouvant varier qu'entre les limites* a *et* b, *peuvent d'ailleurs recevoir, entre ces limites, toutes les valeurs compatibles avec l'équation qui les lie*; x+y *et* xy *seront* maximums, *lorsqu'on aura* x=y, *et* minimums, *lorsqu'on aura* x=a, y=b.

Démonstration. Soit posé

$$x^m+y^m=a^m+b^m=2c^m\ ,$$

ce qui est permis, et soient fait ensuite

$$x^m=c^m+t\ , \qquad y^m=c^m-t\ ,$$

t étant une nouvelle variable, il viendra

$$x=c\sqrt[m]{1+\frac{t}{c^m}}=c\left\{1+\frac{1}{m}\frac{t}{c^m}-\frac{1}{m}\cdot\frac{m-1}{2m}\frac{t^2}{c^{2m}}+\frac{1}{m}\cdot\frac{m-1}{2m}\cdot\frac{2m-1}{3m}\frac{t^3}{c^{3m}}-\ldots\right\},$$

$$y=c\sqrt[m]{1-\frac{t}{c^m}}=c\left\{1-\frac{1}{m}\frac{t}{c^m}-\frac{1}{m}\cdot\frac{m-1}{2m}\frac{t^2}{c^{2m}}-\frac{1}{m}\cdot\frac{m-1}{2m}\cdot\frac{2m-1}{3m}\frac{t^3}{c^{3m}}-\ldots\right\};$$

d'où

$$x-y=2c\left\{\frac{1}{m}\frac{t}{c^m}+\frac{1}{m}\cdot\frac{m-1}{2m}\cdot\frac{2m-1}{3m}\frac{t^3}{c^{3m}}+\frac{1}{m}\cdot\frac{m-1}{2m}\cdot\frac{2m-1}{3m}\cdot\frac{3m-1}{4m}\cdot\frac{4m-1}{5m}\frac{t^5}{c^{5m}}+\ldots\right\},$$

$$x+y=2c-2c\left\{\frac{1}{m}\cdot\frac{m-1}{2m}\cdot\frac{t^2}{c^{2m}}+\frac{1}{m}\cdot\frac{m-1}{2m}\cdot\frac{2m-1}{3m}\cdot\frac{3m-1}{4m}\cdot\frac{t^4}{c^{4m}}+\ldots\right\};$$

on aura ensuite

$$x^my^m=c^{2m}-t^2\ , \quad \text{d'où} \quad xy=\sqrt[m]{c^{2m}-t^2}=c^2\sqrt[m]{1-\left(\frac{t}{c^m}\right)^2}.$$

Cela posé, on voit que t sera d'autant plus petit ou d'autant plus grand que $x-y$ sera lui-même plus petit ou plus grand, c'est-à-dire, que x et y approcheront plus ou moins de l'égalité, mais, par les expressions de $x+y$ et de xy, on voit que ces deux fonctions seront d'autant plus grandes que t sera plus petit, et d'autant moindres que t sera plus grand; donc $x+y$ et xy seront *maximums* lorsqu'on aura $x=y$, et *minimums*, lorsqu'on aura $x=a$, $y=b$.

Si l'on suppose que a, b sont les deux demi-diamètres principaux d'une ellipse; et qu'on fasse $m=2$, x et y seront deux demi-diamètres conjugués quelconques: ce théorème deviendra donc le premier des deux théorèmes proposés, et il sera démontré en outre que l'angle des diamètres conjugués, dont le sinus est en général $\frac{ab}{xy}$, devient le plus petit possible, lorsque ces diamètres sont égaux.

THÉORÈME II. Si trois variables x, y, z; *constamment positives, sont liées entre elles par l'équation* $x^m+y^m+z^m=a^m+b^m+c^m$, *où* a, b, c *sont également des quantités positives, telles qu'on a* $a>b$, $b>c$, *et dans laquelle* m *est un nombre positif quelconque plus grand que l'unité; et si* x, y, z, *ne pouvant varier qu'entre les limites* a, c, *peuvent d'ailleurs recevoir, entre ces limites, toutes les valeurs compatibles avec l'équation qui les lie*; $x+y+z$ *et* xyz *seront* maximums, *lorsqu'on aura* $x=y=z$, *et* minimums, *lorsqu'on aura* $x=a$, $y=b$, $z=c$.

Démonstration. 1.° Si l'on niait que le *maximum*, tant de $x+y+z$

que de xyz ; dût répondre au cas où $x=y=z$, il faudrait qu'on montrât des *maximums* de ces deux fonctions dans lesquels deux au moins des trois variables x, y, z fussent inégales. Supposons que ce soient x, y ; en mettant l'équation de condition sous la forme

$$x^m+y^m=a^m+b^m+c^m-z^m\,,$$

et considérant z comme une constante, on voit qu'aux valeurs inégales de x, y, on pourrait (*Théor. I*) substituer des valeurs égales qui rendraient $x+y$ et xy, et conséquemment $x+y+z$ et xyz, plus grand qu'auparavant ; leurs valeurs primitives ne seraient donc point *maximums*, ainsi qu'on l'avait supposé.

2.° Si l'on niait que le *minimum*, tant de $x+y+z$ que de xyz, dût répondre au cas où deux des trois variables x, y, z ont atteint les limites de grandeur et de petitesse entre lesquelles elles se trouvent renfermées, et où conséquemment la troisième a la valeur moyenne entre ces limites, il faudrait qu'on montrât des *minimums* de ces fonctions dans lesquelles deux au moins des trois variables auraient des valeurs différentes de a, b, c ; supposons que ce soient x, y ; en mettant l'équation de condition sous la forme

$$x^m+y^m=a^m+b^m+c^m-z^m\,;$$

et supposant z constant, on voit qu'il y aurait moyen de rendre x et y plus inégaux encore, sans que cette équation cessât d'avoir lieu ; mais alors (*Théor. I*) $x+y$ et xy, et par conséquent $x+y+z$ et xyz deviendraient plus petits qu'ils ne l'étaient d'abord, et conséquemment leurs valeurs primitives ne seraient point des *minimums*, ainsi qu'on l'avait d'abord supposé.

En supposant que a, b, c sont les trois demi-diamètres principaux d'une ellipsoïde, et faisant $m=2$, on pourra considérer x, y, z comme trois demi-diamètres conjugués quelconques, et notre théorème deviendra le dernier des deux théorèmes proposés.

On voit de plus qu'en poursuivant de la même manière on étendrait sans peine la proposition à un nombre quelconque de variables.

En recourant au calcul différentiel, on peut même s'élever à un théorème incomparablement plus général et démontrer que si des variables x, y, z,....., en nombre quelconque sont liées entre elles par la condition

$$\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(y)+\mathrm{f}(z)+\ldots\ldots\ldots=\text{Const.}$$

leur somme $x+y+z+\ldots\ldots$ et leur produit $xyz\ldots\ldots\ldots$ seront *maximums*, si les deux premières dérivées $\mathrm{f}'(x)$ et $\mathrm{f}''(x)$ sont de mêmes signes; et qu'au contraire $x+y+z+\ldots\ldots$ sera *minimum*, si ces deux mêmes dérivées sont de signes contraires, et qu'il en sera de même de $xyz\ldots\ldots$, si dans ce cas on a en outre $1+x\dfrac{\mathrm{f}''(x)}{\mathrm{f}'(x)}<0$.

En effet, ne supposons, pour fixer les idées, que quatre variables x, y, z, t seulement, nous aurons d'abord, par l'équation de condition,

$$\mathrm{f}'(x)\mathrm{d}x+\mathrm{f}'(y)\mathrm{d}y+\mathrm{f}'(z)\mathrm{d}z+\mathrm{f}'(t)\mathrm{d}t=0\ ; \qquad (1)$$

posant ensuite

$$s=x+y+z+t\ ,$$

$$p=xyzt\ ;$$

nous aurons

$$\mathrm{d}s=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z+\mathrm{d}t\ , \qquad (2)$$

$$\mathrm{d}p=yzt\mathrm{d}x+ztx\mathrm{d}y+txy\mathrm{d}z+xyz\mathrm{d}t\ ; \qquad (3)$$

en mettant dans les équations (2, 3) la valeur de $\mathrm{d}t$ donnée par l'équation (1), elles deviendront

$$\mathrm{d}s=\left\{1-\frac{f'(x)}{f'(t)}\right\}\mathrm{d}x+\left\{1-\frac{f'(y)}{f'(t)}\right\}\mathrm{d}y+\left\{1-\frac{f'(z)}{f'(t)}\right\}\mathrm{d}z\ ;$$

$$\mathrm{d}p=yz\left\{t-x\frac{f'(x)}{f'(t)}\right\}\mathrm{d}x+zx\left\{t-y\frac{f'(y)}{f'(t)}\right\}\mathrm{d}y+xy\left\{t-z\frac{f'(z)}{f'(t)}\right\}\mathrm{d}z\ ;$$

on voit d'abord que, si l'on a $x=y=z=t$, il en résulte $\mathrm{d}s=0$; $\mathrm{d}p=0$, conditions communes au *maximum* et au *minimum*.

Par une nouvelle différentiation, on a, en considérant x, y, z, comme fonctions de t, et mettant toujours pour $\mathrm{d}t$ sa valeur donnée par l'équation (1)

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2s=&-\frac{f'^2(t)f''(x)+f'^2(x)f''(t)}{f'^3(t)}\mathrm{d}x^2-2\frac{f'(y)f'(z)f''(t)}{f'^3(t)}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&-\frac{f'^2(t)f''(y)+f'^2(y)f''(t)}{f'^3(t)}\mathrm{d}y^2-2\frac{f'(z)f'(x)f''(t)}{f'^3(t)}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\\
&-\frac{f'^2(t)f''(z)+f'^2(z)f''(t)}{f'^3(t)}\mathrm{d}z^2-2\frac{f'(x)f'(y)f''(t)}{f'^3(t)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2p=&-yz\left\{2\frac{f'(x)}{f'(t)}+x\frac{f'^2(t)f''(x)+f'^2(x)f''(t)}{f'^3(t)}\right\}\mathrm{d}x^2\\
&-zx\left\{2\frac{f'(y)}{f'(t)}+y\frac{f'^2(t)f''(y)+f'^2(y)f''(t)}{f'^3(t)}\right\}\mathrm{d}y^2\\
&-xy\left\{2\frac{f'(z)}{f'(t)}+z\frac{f'^2(t)f''(z)+f'^2(z)f''(t)}{f'^3(t)}\right\}\mathrm{d}z^2\\
&-2x\left\{yz\frac{f'(y)f'(z)f''(t)}{f'^3(t)}+\frac{yf'(y)+zf'(z)}{f'(t)}-t\right\}\mathrm{d}y\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

$$-2y\left\{zx\frac{f'(z)f'(x)f''(t)}{f'(\;)}+\frac{zf'(z)+xf'(x)}{f'(t)}-t\right\}dzdx$$

$$-2z\left\{xy\frac{f'(x)f'(y)f''(t)}{f'(t)}+\frac{xf'(x)+yf'(y)}{f'(t)}-\;\right\}dxdy\;.$$

Si nous faisons $x=y=z=t$, ces valeurs deviennent

$$d^2s=-2\frac{f''(t)}{f'(t)}(dx^2+dy^2+dz^2+dydz+dzdx+dxdy)\;;$$

$$d^2p=2-t^2\left[1+\frac{tf''(t)}{f'(t)}\right](dx^2+dy^2+dz^2+dydz+dzdx+dxdy)\;;$$

ou bien encore

$$d^2s=-\frac{f''(t)}{f'(t)}\{(dx^2+dy^2+dz^2)+(dx+dy+dz)^2\}\,,$$

$$d^2p=-t^2\left[1+t\frac{f''(t)}{f'(t)}\right]\{dx^2+dy^2+dz^2)+(dx+dy+dz)^2\}\;;$$

d'où l'on voit que s et p seront *maximums* ou *minimums*, suivant que $\frac{f''(t)}{f'(t)}$ et $1+t\frac{f''(t)}{f'(t)}$ seront *positives* ou *négatives*.

Genève, le 26 août 1821.

Démonstration du théorème de la page 279 du IX.e volume de ce recueil ;

Par M. VALLÈS, élève au collége royal de Montpellier.

APRÈS avoir démontré, en l'endroit cité, que si par les sommets A, B, C d'un triangle quelconque, et par un même point P, pris arbitrairement dans son intérieur, on mène trois droites rencontrant les directions des côtés opposés en A′, B′, C′, on doit avoir

$$\frac{PA'}{AA'}+\frac{PB'}{BB'}+\frac{PC'}{CC'}=1\,;$$

on a démontré, d'une manière analogue, que si, par les sommets A, B, C, D d'un tétraèdre quelconque, et par un même point P, pris arbitrairement dans son intérieur, on mène quatre droites, terminées aux faces opposées en A′, B′, C′, D′, on aura

$$\frac{PA'}{AA'}+\frac{PB'}{BB'}+\frac{PC'}{CC'}+\frac{PD'}{DD'}=1\,.$$

M. Vallès a trouvé moyen de déduire très-simplement le second théorème du premier. Pour cela, il conçoit, par le point P, deux plans passant, l'un par l'arète AB et l'autre par son opposée CD. Désignant alors par M le point où le premier de ces deux plans coupe l'arète CD, et par N celui où le second coupe l'arète AB, les deux triangles AMB, CND donneront, par le premier théorème,

$$\frac{PA'}{AA'}+\frac{PB'}{BB'}+\frac{PN}{MN}=1\,;$$

$$\frac{PC'}{CC'}+\frac{PD'}{DD'}+\frac{PM}{MN}=1\,;$$

d'où, en ajoutant, faisant attention que PM+PN=MN et réduisant

$$\frac{PA'}{AA'}+\frac{PB'}{BB'}+\frac{PC'}{CC'}+\frac{PD'}{DD'}=1\,.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

QUELLE est la surface enveloppe des différens points de l'espace que peut occuper le centre de gravite d'une chaînette uniformément pesante, dans toutes les situations et figures qu'elle peut prendre autour de ses points de suspension ?

I. Quel est le plus petit de tous ces cylindres à bases parallèles circonscrits à un même ellipsoïde ?

II. Quel est le plus petit de tous les cônes circonscrits à un même ellipsoïde ?

PROBABILITÉS.

Dissertation sur la recherche du milieu le plus probable, entre les résultats de plusieurs observations ou experiences;

Par un ABONNÉ.

PARMI les applications nombreuses et variées dont la doctrine des probabilités est susceptible, il en est peu sans doute qui puissent offrir autant d'intérêt et d'utilité que celle qui a pour objet la recherche de la moyenne la plus convenable entre les résultats de plusieurs expériences ou observations données. Mais, bien que beaucoup de gens paraissent se douter à peine qu'il puisse y avoir là la plus légère difficulté, en y regardant d'un peu près, on voit bientôt que le problème est un des plus délicats et des plus difficiles qu'on puisse se proposer.

Ce problème présente deux cas principaux, qu'il est quelquefois permis de confondre, mais que quelquefois aussi il faut soigneusement distinguer. Il peut se faire, en premier lieu, que les résultats entre lesquels il s'agit de prendre la moyenne soient de nature à pouvoir être à la fois exacts et inégaux; ou bien, il peut arriver que leur inégalité ait inévitablement sa source dans l'imperfection des instrumens et des procédés employes pour les obtenir, ou encore dans la maladresse ou la négligence de ceux qui ont mis ces instrumens et ces procédés en usage.

Que, par exemple, dans la vue de connaître la durée moyenne de la vie humaine, on examine quelle a été la durée de la vie d'un grand nombre d'individus, pris au hasard; on ne sera aucunement surpris d'y apercevoir une extrême variété; et, tandis qu'on trouvera beaucoup d'enfans morts le jour même de leur naissance, on rencontrera, de loin en loin, quelques vieillards qui auront prolongé leur carrière au-delà d'un siècle. Il en sera de même si, pour savoir quel prix on peut raisonnablement donner d'une propriété territoriale qu'on veut acquérir, on examine les produits qui en ont été obtenus pendant une longue suite d'années; on y verra régner, sans plus de surprise, la même variété; et tandis que, pour certaines années, la récolte aura été très-abondante, l'intempérie des saisons l'aura d'autres fois réduite à peu près à rien.

Mais il n'en ira plus de même si, par exemple, des observations solsticiales faites dans le même temps, par plusieurs astronomes, ne donnent pas à l'écliptique la même obliquité; ou si, pour prendre un exemple beaucoup plus simple, plusieurs mesures d'un même corps ou d'une même distance ne lui assignent pas le même poids ou la même longueur. Il est alors évident que le défaut de coïncidence rigoureuse dans les résultats ne permettra de supposer exact qu'un seul d'entre eux au plus, et les frappera tous de suspicion.

A ces deux cas, on pourrait, peut-être, en ajouter un troisième : ce serait celui où les résultats, étant de nature à pouvoir être inégaux, laisseraient en outre quelque doute sur leur exactitude. C'est, par exemple, ce qui arriverait si, voulant déterminer la durée moyenne de la vie humaine, on se contentait de consulter seulement les registres de décès, où l'âge des morts est souvent indiqué d'une manière très-inexacte; mais, comme cette sorte de cas mixte rentre plus ou moins dans l'un ou l'autre des deux premiers, nous en ferons constamment abstraction, dans tout ce qui va suivre. Nous aurons donc ainsi uniquement à considérer, 1.° des résultats de nature à être inégaux, mais supposés d'ailleurs être également exacts ; 2.° des résultats qui ne doivent leur inégalité qu'à leur inexactitude, sans laquelle il y aurait entre eux une parfaite coïncidence.

Il paraît raisonnable, dans le premier de ces deux cas, sinon de faire concourir tous les résultats donnés pour la même part dans la composition du résultat moyen, du moins de les prendre tous en considération, dans la recherche de ce résultat ; puisque enfin ce sont autant de faits certains que l'avenir peut amener encore ; mais il n'en est plus de même dans le second cas ; car, puisqu'alors on est contraint de suspecter les procédés par lesquels la plupart de ces résultats ont été obtenus, la suspicion, à l'égard de quelques-uns d'entre eux, peut bien aller, quelquefois, jusqu'à les faire considérer comme tout-à-fait non avenus.

On peut, au surplus, ici distinguer deux sortes de motifs de suspicion, que nous signalerons par les dénominations d'externes et d'internes. Nous entendons par *motifs* externes de suspicion, ceux qui se tirent des données que l'on peut avoir acquises sur le caractère et la capacité de ceux à qui on doit certains résultats et sur les procédés qu'ils ont mis en usage pour les obtenir. Les *motifs internes* de suspicion, au contraire, sont ceux que l'on peut tirer de la trop grande disparate entre certains résultats et le reste de ceux dout on est en possession. Des exemples simples vont achever d'éclaircir cette distinction.

Si, parmi les résultats entre lesquels il s'agit de prendre un milieu, il s'en trouve qui soient dus à des gens distraits, mal habiles, peu soigneux et consciencieux, capables d'abréger volontairement le travail, au prix de son exactitude, ou par des gens d'ailleurs doués d'autant d'adresse et de bonne foi qu'on voudra, mais qui ont appliqué leur talent et leur attention à des méthodes évidemment vicieuses ; voilà tout autant de motifs externes pour suspecter et même pour rejeter tout-à-fait ces résultats, en quelque nombre qu'ils soient d'ailleurs, et quel que puisse être leur accord soit entre eux, soit avec ceux qu'on est moins fondé à suspecter.

Que nous soyons, au contraire, en possession d'un certain nombre de résultats, sans savoir aucunement ni à qui ils sont dus, ni quelle méthode on a mis en usage pour les obtenir; ou bien que ces résultats soient dus à des hommes doués du même degré d'habileté et de bonne foi, appliquant ces qualités à des méthodes susceptibles d'un égal degré de précision; les motifs externes de suspicion cesseront d'exister; mais nous pourrons alors en trouver d'internes. Si, par exemple, la plupart de ces résultats ne présentent entre eux que des différences comprises dans les limites des erreurs dont les observations et les expériences, faites même avec le plus de soin, sont inévitablement susceptibles, et si en même temps les autres résultats, en beaucoup plus petit nombre, diffèrent d'une manière très-notable, tant entre eux que de ceux-là, ce sera, contre ces derniers, des motifs internes de suspicion assez graves pour les faire rejeter, sans aucune hésitation.

On peut remarquer, au surplus, que si de trop notables différences entre des résultats suffisent pour en motiver le rejet, une trop parfaite concordance entre ces mêmes résultats doit produire le même effet. Cette coïncidence absolue est effectivement à tel point hors de toute vraisemblance qu'on ne saurait raisonnablement se refuser à l'attribuer à une concertation entre ceux à qui ils sont dus; concertation qui, décélant chez eux un défaut de bonne foi, les rend tous dès-lors également suspects; et c'est ainsi, pour le dire en passant, que des motifs internes de suspicion peuvent quelquefois en faire naître d'externes.

Mais quelque peu de coïncidence que puissent offrir entre eux les résultats qu'on examine, quelle que soit l'étendue des limites entre lesquelles ils se trouvent renfermés, s'ils se trouvent à peu près uniformément réparties entre ces limites, si, par exemple, ils forment sensiblement une progression arithmétique, ou si, mieux encore, il s'en trouve un assez grand nombre qui diffèrent fort peu du plus grand d'entre eux, et un autre nombre, à peu près égal, qui diffère fort peu du plus petit ; si, par exemple, ils forment une suite comme celle-ci :

$$12 \,, \quad 13 \,, \quad 15 \,, \quad 18 \,, \quad 21 \,, \quad 23 \,, \quad 24 \,;$$

on pourra bien sans doute désirer des résultats moins discordans, et l'on fera fort bien de s'en procurer de tels, si on le peut ; mais on ne verra guère de motifs internes de préférer les uns aux autres, et il faudra conséquemment les faire tous entrer en considération dans la recherche du résultat moyen, si l'on n'est point en situation de s'en procurer d'autres plus satisfaisans.

La discussion des motifs externes de suspicion est sans doute très-importante ; mais elle est en même temps très-délicate et d'autant plus difficile qu'elle ne paraît guère de nature à être soumise à des règles plus précises que celles qu'on prescrit, en général, pour la critique ; et comme ces règles ne sont guère du domaine des sciences exactes, nous ne saurions nous y arrêter ici. Nous supposerons donc, dans tout ce qui va suivre, que les résultats sur lesquels on doit opérer sont ceux-là seulement qu'une saine critique a pu admettre ; nous supposerons même qu'ils ne présentent aucun motif interne de suspicion, de nature à en faire écarter quelques-uns de préférence aux autres ; de telle sorte qu'il paraisse raisonnable de les employer tous ; alors cette seconde question pourra être considérée comme rentrant dans la première, du moins quant au procédé à employer ; car il y aura toujours entre elles cette différence essentielle que, dans la première, l'inégalité des résultats ne saurait en faire suspecter aucun, tandis qu'ici tous sont suspects, tant qu'ils ne sont pas tous égaux.

Il y a long-temps sans doute que le problème de la moyenne entre plusieurs résultats inégaux s'est présenté aux hommes ; et il y a long-temps aussi que, soit par une sorte d'instinct, soit dans la vue d'éviter des calculs trop pénibles, on est convenu d'adopter comme tel le quotient de la division de la somme de ces résultats par leur nombre. Cette pratique a même été constamment suivie, sans aucun scrupule, jusqu'à l'époque où la théorie des probabilités a commencé à être cultivée avec quelque soin et quelque suite. Alors seulement on a commencé à concevoir des doutes sur la légitimité du procédé, et à soupçonner que la véritable moyenne entre plusieurs résultats inégaux ne devait peut-être pas se composer de la même manière de tous ces résultats ; et que chacun d'eux devait concourir pour plus ou moins dans la formation de cette moyenne, à proportion qu'il paraissait s'en rapprocher ou s'en écarter davantage. C'est cette maxime qui paraît avoir servi de base aux méthodes que Boschovith, Bernouilli, Lambert, Lagrange, Condorcet et d'autres ont tour à tour proposé de substituer à la méthode vulgaire. Cependant, dans ces derniers temps, celle-ci a semblé reprendre son ancienne faveur ; on l'a même signalée comme la plus conforme à la doctrine des probabilités ; et on a même été jusqu'à insinuer qu'elle était tout-à-fait indépendante de toute hypothèse sur la loi de facilité des erreurs. Le but que nous nous proposons ici, et que nous désirerions pouvoir remplir d'une manière moins imparfaite, est d'essayer de répandre quelque lumière nouvelle sur cette épineuse question. Quelque jugement que l'on porte d'ailleurs sur cet écrit, nous n'aurons pas à regretter de l'avoir rendu public, s'il peut appeler de nouveau l'attention des géomètres sur le sujet auquel il est relatif, et provoquer de leur part des discussions qui ne sauraient que tourner au profit de la science.

Une chose assez digne de remarque, c'est qu'on se soit beaucoup plus occupé de la recherche des méthodes propres à donner la moyenne la plus convenable entre les résultats de plusieurs observations ou expériences données qu'à bien préciser ce que c'était que cette moyenne que l'on poursuivait ; sans doute parce qu'on a tacitement supposé que tout le monde était à peu près d'accord sur ce point. Toutefois, comme il pourrait fort bien se faire qu'il n'en fût pas tout-à-fait ainsi, et comme c'est déjà faire un assez grand pas vers la solution d'une question que de la bien circonscrire; arrêtons-nous un moment à fixer nettement ce que l'on doit entendre par la moyenne entre plusieurs résultats donnés.

Lorsque ces résultats ne présentent entre eux des différences qu'à raison de l'imperfection des procédés par lesquels on les a obtenus, comme, par exemple, lorsqu'on a plusieurs mesures d'une même longueur, cela s'entend, pour ainsi dire, de soi-même. La moyenne cherchée est alors une combinaison de ces divers résultats, de laquelle on puisse présumer qu'elle différe moins du véritable et unique résultat que toute autre combinaison qu'on pourrait faire des mêmes données. Et encore faut-il remarquer qu'il ne s'agit pas ici d'une présomption absolue, mais d'une présomption tirée uniquement des données du problème. On conçoit, en effet, que, si les données diffèrent toutes dans le même sens et d'une quantité notable du véritable résultat, la moyenne la plus convenable ne sera point celle qui différera réellement le moins de ce résultat, mais bien celle qui, d'après les données, devra être présumée s'en approcher davantage.

Dans le cas où, au contraire, les résultats entre lesquels on cherche une moyenne sont de nature à être inégaux, bien qu'ils soient tous d'ailleurs également exacts, comme il arrive, par exemple, lorsqu'on veut assigner le produit moyen d'une propriété territoriale; la definition de la moyenne semble devoir nécessairement impliquer l'idée de l'infini. La moyenne rigoureuse serait alors, en effet, celle qu'on déduirait d'une infinité d'observations ou d'expériences, en prenant la somme de leurs résultats et en divisant cette somme par leur nombre; et le problème consiste alors à suppléer à des résultats en nombre infini, par des résultats en nombre fini; et à déduire de ces derniers un résultat moyen qui puisse être présumé différer le moins possible de celui qu'on aurait conclu des premiers, du moins d'après les seules lumières acquises par l'inspection des autres.

En résumé, on voit que, dans l'un et dans l'autre cas, on peut distinguer deux sortes de moyennes, savoir ; une *moyenne absolue*, qui est la véritable, et une *moyenne relative*, qui est celle que, d'aprés les données, on doit présumer s'écarter le moins de celle-là, et qui, quelque méthode qu'on emploie pour l'obtenir, ne saurait être rigoureusement égale à l'autre que dans des cas particuliers, et par l'effet d'un concours de circonstances favorables.

La moyenne absolue demeure toujours inconnue, de sorte qu'on ne saurait, en aucun cas, vérifier, *à posteriori*, la moyenne relative, en la confrontant avec celle-là. Mais, quand bien même la moyenne absolue pourrait être découverte après coup, ce serait une fort mauvaise manière de juger d'un procédé que de prendre pour mesure de sa précision le plus ou le moins de ressemblance de la moyenne relative qu'on en aurait déduite avec la moyenne absolue. Un trop grand écart de cette moyenne absolue pourrait au plus accuser les données, et par suite ceux qui les auraient fournies ; mais pour qui reçoit ces données d'ailleurs, sans avoir eu aucune part à leur détermination, le seul parti raisonnable à prendre est de suivre les indications qu'elles fournissent ; ainsi, par exemple, il ne devra jamais prendre la moyenne relative hors de leurs limites, quoique la moyenne absolue puisse fort bien n'y être point renfermée.

Ces principes ainsi posés, examinons, en premier lieu, la méthode vulgaire qui, comme nous l'avons déjà dit, consiste à prendre pour moyenne le quotient de la division de la somme des données par leur nombre ; on conçoit assez qu'on ait pu adopter cette méthode dans le cas où les données sont de nature à être inégales ; on a pu alors se dire, en effet, que, puisque toutes ces données étaient effectives, puisqu'elles étaient toutes fournies par des observations ou par des expériences à l'abri de tout reproche, il était naturel

naturel qu'elles concourussent toutes pour une égale part à la formation du résultat moyen.

Cependant, dans ce cas même, la méthode vulgaire n'a pas été généralement suivie ni pratiquée sans quelques restrictions. Il est, par exemple, certaines provinces de France où, pour déterminer le revenu moyen d'une propriété territoriale, il est d'usage de considérer ce revenu durant vingt années consécutives, d'en distraire le revenu le plus fort et le revenu le plus faible, et de prendre ensuite le dix-huitième de la somme des autres. Ceux qui ont imaginé cette méthode, ont sans doute considéré que des récoltes extrêmement abondantes et des récoltes extrêmement faibles devaient être considérées, en quelque sorte, comme des exceptions à la marche habituelle de la nature, et qu'en conséquence on ne devait en tenir aucun compte.

Mais des motifs à peu près semblables à ceux qui font ainsi rejeter le plus fort et le plus faible résultats, ne pourraient-ils pas tout aussi bien motiver l'exclusion des deux plus forts et des deux plus faibles, ou même d'un plus grand nombre des uns et des autres? et d'exclusion en exclusion n'arriverait-on pas enfin à ne conserver que le résultat du milieu, lorsque les données seraient en nombre impair? Qui sait même si quelqu'un, au lieu de rejeter les deux résultats extrêmes, ne jugerait pas à propos, au contraire, de ne conserver que ceux-là, et de prendre leur demi-somme pour le résultat moyen? On sent même qu'il ne serait pas difficile de trouver des motifs plausibles à l'appui de cette pratique. D'autres pourraient, tout aussi bien, employer les deux résultats les plus forts avec les deux plus faibles, ou combiner entre eux un plus grand nombre des résultats extrêmes. D'ailleurs, si l'on est fondé, soit à rejeter, soit à employer exclusivement les deux résultats extrêmes, lorsqu'on n'en considère que vingt seulement, ne faudra-t-il pas, si l'on veut être conséquent, rejeter ou employer exclusivement les deux plus forts et les deux plus faibles sur quarante, les trois plus forts et les trois plus faibles sur soixante, et ainsi de suite ? Mais, tandis que quelques-uns prendront le nombre vingt pour base des rejets ou des admissions exclusives, qui s'opposera à ce que d'autres ne s'accommodent mieux des nombres quinze ou vingt-quatre ? Nous nous trouverons donc jetés ainsi dans le champ de l'arbitraire; et le résultat moyen, qui, de sa nature devrait être unique, se trouvera, dans le fait, plus grand ou plus petit, suivant les diverses modifications qu'il aura plu à chacun d'introduire dans la méthode destinée à en donner la valeur.

Mais le système des rejets ou des emplois exclusifs, tolérable encore, jusqu'à un certain point, dans l'hypothèse suivant laquelle nous venons de raisonner, ne semble plus pouvoir être admis dans celle où les résultats ne diffèrent les uns des autres qu'à raison de l'imperfection des procédés d'observation ou d'expérience. Que l'on ait fait, par exemple, vingt pesées d'un même corps ; bien qu'il soit fort vraisemblable que ni la plus forte ni la plus faible, ni même aucune d'elles, ne représente exactement le poids de ce corps, cela pourrait pourtant arriver, en toute rigueur ; et cette considération suffit pour faire comprendre qu'il serait très-déraisonnable de ne les pas toutes prendre en considération.

Mais sera-t-il plus sensé de les faire toutes concourir pour la même part dans la composition du résultat moyen ? nous ne le pensons pas davantage. Nous avons remarqué plus haut que, parmi les données fournies par l'expérience, il peut s'en trouver une ou plusieurs qui s'écartent tellement des autres que l'on doive les rejeter sans aucune hésitation ; mais, jusqu'à quel point devront-elles s'en écarter pour qu'il puisse être permis de n'en tenir aucun compte ? c'est là, à ce qu'il nous paraît, une question qu'il ne serait pas facile de résoudre. Supposons-la cependant résolue ; supposons qu'on ait trouvé que, pour qu'une donnée soit dans le cas d'être rejetée, il faut qu'elle tombe en dehors des deux limites g, h ; quel parti faudra-t-il prendre alors, si une certaine donnée coïncide exactement avec l'une ou l'autre de ces deux limites ? et, en suivant la méthode vulgaire, ne se trouvera-t-on pas dans cette singulière situation de pouvoir, à son gré, et avec tout autant de fondement, ou réputer une donnée trop suspecte pour en faire usage, ou la faire concourir pour la même part que toutes les autres à la formation du résultat moyen ?

Avant de nous engager plus avant dans cette discussion, remarquons, en passant, qu'on ne voit pas d'abord trop bien pourquoi on a choisi la somme des données divisée par leur nombre, plutôt qu'une multitude d'autres fonctions de ces données, pour l'expression du résultat moyen. La seule condition de rigueur à laquelle on voie clairement, *à priori*, que ces sortes de fonctions doivent être assujetties, paraît être que, si les données sont au nombre de mn, égales m à m, la moyenne soit la même que si, les données étant au nombre de n seulement, il ne s'en trouvait qu'une de chaque sorte ; de manière que, par exemple, la moyenne de

$$a,\ a,\ a,\ b,\ b,\ b,\ c,\ c,\ c,\ d,\ d,\ d$$

soit la même que celle de

$$a,\ b,\ c,\ d\,;$$

or, en se renfermant même dans les fonctions purement algébriques, on peut trouver une multitude de fonctions qui remplissent cette condition. Qui empêcherait, par exemple, de prendre pour résultat moyen une racine du produit des données d'un degré égal à leur nombre ? ou bien, si l'on ne voulait pas sortir du cercle des fonctions rationnelles, ne pourrait-on pas prendre, en général,

$$\frac{(k+1)P_{k+1}}{(n-k)P_k}\ ?$$

formule dans laquelle n est le nombre des données, et où P_k, P_{k+1} expriment les sommes de produits de ces données k à k

et $k+1$ à $k+1$, k étant un nombre absolument arbitraire; ou bien, ne pourrait-on pas prendre encore la formule

$$\frac{S_{k+1}}{S_k},$$

où S_k, S_{k+1} expriment les sommes des k.$^{\text{mes}}$ et des $(k+1)^{\text{mes}}$ puissances de ces mêmes données? La formule ordinaire n'est, au surplus, qu'un cas particulier de ces deux-là : c'est celui qui répond à $k=0$. C'est sans doute l'hypothèse qu'on doit admettre, lorsqu'on aspire uniquement à la plus grande simplicité; mais la plus grande simplicité est-elle toujours compagne de la plus grande rigueur?

Soient donc a, b, c, d,....... des résultats donnés d'observations ou d'expériences, au nombre de n, entre lesquels il soit question d'assigner le résultat moyen le plus probable; et soit x ce résultat moyen inconnu; la méthode vulgaire donne

$$x=\frac{a+b+c+d+\ldots\ldots}{n}=\frac{pa+pb+pc+pd+\ldots\ldots}{p+p+p+p+\ldots\ldots};$$

quel que soit le nombre p. Or, suivant la doctrine des probabilités, si l'on connaissait les probabilités en faveur de a, b, c, d,......, en les représentant respectivement par α, β, γ, δ, ..., la moyenne rigoureuse ou absolue serait

$$x=\frac{\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d+\ldots\ldots}{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots\ldots};$$

donc, la méthode vulgaire revient à considérer tous les résultats obtenus comme ayant le même degré p de probabilité. Or, encore un coup, si ces résultats sont nombreux; si tous, excepté un seul, ne présentent entre eux que des différences très-légères; et si ce dernier diffère, au contraire, d'une manière notable de celui-là même des autres qui s'en trouve le plus voisin, peut-on dire, de bonne foi, qu'il soit aussi probable qu'eux ? et peut-on raisonnablement le faire figurer de la même manière que ceux-ci dans la formation du résultat moyen (*) ?

La formule

$$x=\frac{a+b+c+d+\ldots\ldots}{n}$$

devient, en chassant le dénominateur,

$$nx=a+b+c+d+\ldots\ldots$$

et peut ensuite être mise sous cette forme

$$(x-a)+(x-b)+(x-c)+(x-d)+\ldots\ldots\ldots=0\,;$$

or, si x était le résultat moyen absolu, $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$, …… seraient les erreurs qui affecteraient respectivement les résultats donnés, prises avec leurs signes ; donc la méthode vulgaire revient à supposer que la somme des erreurs est nulle, ou, ce qui revient au même, que la somme des erreurs par excès est égale à la somme des erreurs par défaut. Cette hypothèse paraît assez plausible, lorsque le nombre des erreurs dans un sens est à peu près égal au

---

(*) Ne serait-il pas possible que tout ce raisonnement ne fût au fond qu'une pure illusion ? Si tous les résultats donnés, excepté un seul, sont très-voisins les uns des autres, et si le dernier diffère d'eux d'une manière notable, il y aura sans doute grande apparence que la véritable moyenne doit être plus voisine des premiers que de celui-ci, et cela sera d'autant plus vraisemblable que ceux-là seront plus nombreux ; mais aussi, plus ils seront nombreux et moins l'emploi de la méthode vulgaire donnera d'influence à l'autre résultat ; d'où l'on voit que cette méthode n'est pas si contraire à ce que le bon sens indique qu'on voudrait ici l'insinuer.

J. D. G.

nombre des erreurs en sens contraire ; mais il paraît fort difficile de l'admettre dans le cas où, par exemple, il existe une erreur unique très-considérable, dans un sens et une multitude d'erreurs très-petites en sens contraire.

La dernière équation ci-dessus peut elle-même être mise sous cette autre forme

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}.(x-a)(x-b)(x-c)(x-d).....}{\mathrm{d}x^{n-1}}=0,$$

ou encore sous celle-ci

$$\frac{\mathrm{d}^{k-1}.\{(x-a)^k+(x-b)^k+(x-c)^k+(x-d)^k+.....\}}{\mathrm{d}x^{k-1}}=0;$$

donc la méthode vulgaire revient aussi à supposer nulles soit la $(n-1)^{me}$ dérivée du produit des erreurs, soit la $(k-1)^{me}$ dérivée de la somme de leurs $k.^{me}$ puissances, k étant un nombre entier positif quelconque.

Si, dans cette dernière formule, on suppose $k=2$, elle devient

$$\frac{\mathrm{d}\{(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2+(x-d)^2+.....\}}{\mathrm{d}x}=0,$$

ou, en d'autres termes,

$$(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2+(x-d)^2+\ldots.=minimum;$$

donc, la méthode vulgaire revient à supposer que la somme des quarrés des erreurs qui affectent les données est la moindre possible; c'est-à-dire que cette méthode n'est qu'une application très-particulière de la *Méthode des moindres quarrés*, publiée, pour la première fois, par M. Legendre, en 1805, et dont M. Gauss a déclaré, en 1809, être, de son côté, en possession depuis 1795. Cette méthode, que l'un et l'autre des deux géomètres que nous venons de citer n'avaient indiquée que comme paraissant réunir à une approximation communément suffisante une grande commodité d'application, a acquis postérieurement une insigne faveur ; et on est assez généralement porté aujourd'hui à l'envisager comme jouissant d'une perfection absolue, et donnant conséquemment, dans tous les cas, une moyenne rigoureusement conforme aux principes de la plus saine théorie.

Il arrive cependant, comme nous venons de le faire observer tout-à-l'heure, que cette méthode des moindres quarrés conduit à faire considérer la moyenne arithmétique, entre plusieurs résultats passibles d'erreur, comme le résultat exact le plus probable. Si donc, comme nous croyons l'avoir établi, il ne saurait en être ainsi, dans tous les cas, et si, comme on ne saurait le contester, il est permis de juger d'un principe par ses conséquences, et par les résultats qu'en entraîne l'application ; quel jugement devrons-nous porter de celui-ci ? Un célèbre géomètre a observé, quelque part, que la théorie des probabilités n'est, au fond, que le bon sens réduit en calcul ; or, la conséquence forcée de cette maxime, c'est que tout principe dont les conséquences ne sont pas constamment d'accord avec les aperçus du bon sens, ne saurait être rigoureusement conforme à la doctrine mathématique des probabilités.

On se tromperait étrangement, toutefois, si l'on nous supposait l'intention de faire ici le procès à la méthode des moindres quarrés ; et nous conviendrons volontiers qu'en même temps qu'elle est d'un service très-commode, elle doit être d'une suffisante exactitude, lorsque les erreurs des observations se trouvent renfermées entre des limites très-étroites ; mais il ne faut pas attendre d'elle au-delà de ce qu'elle peut donner ; et nous pensons que, dans tous les cas, le problème de la moyenne entre plusieurs résultats est une sorte de problème indéterminé ; parceque ce problème ne saurait être rendu tout-à fait indépendant de toute hypothèse sur la facilité des erreurs, et qu'il est, sur ce point, une infinité d'hypothèses que l'on peut justifier par des motifs à peu près également plausibles.

Après ces réflexions générales, revenons, en particulier, à la recherche de la moyenne entre les résultats de plusieurs expériences, supposés aussi différens les uns des autres qu'on le voudra ; et remarquons d'abord que, excepté certains cas, tels par exemple que ceux des erreurs d'un nombre rond de dizaines ou de centaines en comptant, on peut raisonnablement admettre qu'une erreur grave est généralement plus difficile à commettre qu'une erreur moins considérable, et qu'il est d'autant moins aisé de se garantir d'une erreur que cette erreur est plus petite.

Admettons donc, pour première hypothèse, que la probabilité des erreurs soit simplement en raison inverse de leur étendue ; cette raison inverse sera aussi la mesure du degré de confiance que chaque résultat en particulier devra inspirer ; et ce sera également en proportion de ce degré de confiance qu'il devra concourir à la formation du résultat moyen. Soient donc toujours a, b, c, d,...... les résultats donnés, au nombre de n, et x le résultat moyen cherché, on devra avoir

$$x=\frac{\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{x-b}+\dfrac{c}{x-c}+\dfrac{d}{x-d}+\ldots\ldots}{\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x-c}+\dfrac{1}{x-d}+\ldots\ldots}\,;$$

en chassant le dénominateur et transposant, cette formule devient

$$\frac{x-a}{x-a}+\frac{x-b}{x-b}+\frac{x-c}{x-c}+\frac{x-d}{x-d}+\ldots\ldots=0,$$

ou, en chassant de nouveau les dénominateurs,

$$n(x-a)(x-b)(x=c)(x-d)\ldots\ldots\ldots=0,$$

ou enfin, plus simplement,

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots\ldots=0\,;$$

équation

équation dont les racines a, b, c, d, ... pourraient conséquemment être indistinctement prises pour le résultat moyen cherché. Loin que cette conclusion ait rien de paradoxal, elle était au contraire très-facile à prévoir. Si, en effet, on admet que le résultat moyen cherché soit égal à l'un des résultats donnés, à a par exemple; l'erreur qui affectera celui-ci sera absolument nulle; il devra donc entrer pour une part infinie dans la composition de la valeur de x, tandis que les autres n'y entreront chacun que pour une part finie; on se trouvera donc dans le même cas que s'il y entrait seul; on devra donc avoir $x=a$. Toutefois, ce procédé ne saurait nous convenir, puisqu'il est de l'essence de notre problème de n'admettre qu'une solution unique.

Cependant, dans le cas où les données a, b, c, d, ... seraient comprises entre de très étroites limites, l'équation $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)......=0$, ayant ses racines sensiblement égales, les dérivées de cette équation auraient sensiblement lieu en même temps qu'elle; donc, en particulier, on pourrait sensiblement lui substituer sa $(n-1)^{me}$ dérivée, qui ne serait que du premier degré. Or, nous avons vu plus haut que c'est à cela que revient la méthode ordinaire; donc la méthode ordinaire n'est qu'une approximation de celle-ci, fondée sur l'hypothèse que les différences entre les données a, b, c, d,..... sont fort petites; d'où il paraît naturel de conclure qu'elle ne peut être employée avec sécurité que sous cette condition.

Il en irait à peu près de même, toutes les fois qu'on supposerait le degré de confiance dû à chaque résultat en raison inverse d'une puissance positive de l'erreur qui l'affecte. Si, par exemple, on supposait ce degré de confiance en raison inverse des quarrés des erreurs, on aurait, pour déterminer x, l'équation

$$x=\frac{\dfrac{a}{(x-a)^2}+\dfrac{b}{(x-b)^2}+\dfrac{c}{(x-c)^2}+\dfrac{d}{(x-d)^2}+\ldots\ldots}{\dfrac{1}{(x-a)^2}+\dfrac{1}{(x-b)^2}+\dfrac{1}{(x-c)^2}+\dfrac{1}{(x-d)^2}+\ldots\ldots},$$

ou, en chassant le dénominateur et transposant,

$$\frac{x-a}{(x-a)^2}+\frac{x-b}{(x-b)^2}+\frac{x-c}{(x-c)^2}+\frac{x-d}{(x-d)^2}+\dots=0.$$

Or, il est aisé de voir qu'en posant

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\dots\dots=X,$$

et représentant par X' la dérivée de ce produit, l'équation ci-dessus deviendra

$$XX'=0\ ;$$

nous retrouvons donc d'abord les mêmes valeurs de x que ci-dessus, et en outre celles au nombre de $n-1$, qui résultent de l'égalité à zéro de la dérivée du produit des erreurs.

Après y avoir bien réfléchi, il nous a paru que, pour n'avoir jamais qu'une solution unique, et conserver néanmoins l'esprit de la méthode qui vient de nous guider ci-dessus, on pouvait procéder par une suite d'approximations, ainsi que nous allons l'expliquer. Admettons la formule

$$x=\frac{a+b+c+d+\dots}{n},$$

non comme moyenne exacte, mais seulement comme moyenne approchée; en convenant de désigner généralement par P_k la somme des produits des données k à k cette formule deviendra

$$x=\frac{P_1}{n}. \qquad (1)$$

Admettons présentement que le degré de confiance dû à chaque donnée soit en raison inverse de sa différence avec ce premier résultat; nous aurons, pour seconde approximation,

$$x=\frac{\dfrac{a}{\dfrac{P_1}{n}-a}+\dfrac{b}{\dfrac{P_1}{n}-b}+\dfrac{c}{\dfrac{P_1}{n}-c}+\dfrac{d}{\dfrac{P_1}{n}-d}+\ldots}{\dfrac{1}{\dfrac{P_1}{n}-a}+\dfrac{1}{\dfrac{P_1}{n}-b}+\dfrac{1}{\dfrac{P_1}{n}-c}+\dfrac{1}{\dfrac{P_1}{n}-d}+\ldots}\,.$$

ou, plus simplement,

$$x=\frac{\dfrac{a}{P_1-na}+\dfrac{b}{P_1-nb}+\dfrac{c}{P_1-nc}+\dfrac{d}{P_1-nd}+\ldots}{\dfrac{1}{P_1-na}+\dfrac{1}{P_1-nb}+\dfrac{1}{P_1-nc}+\dfrac{1}{P_1-nd}+\ldots}\,.$$

On trouve facilement que cette formule revient à

$$x=\frac{P_1^n+nP_1^{n-2}(S_2-S_1P_1)+n^2P_1^{n-3}(S_3-S_2P_1+S_1P_2)+\ldots\ldots\pm n^nP_n}{nP_1^{n-1}-n(n-1)P_1P_1^{n-2}+n^2(n-2)P_2P_1^{n-3}-n^3(n-3)P_3P_1^{n-4}+\ldots\pm n^{n-1}P_{n-1}}\,;$$

S_k exprimant, en général, la somme des puissances k des données. Mais il est connu d'ailleurs que

$$S_2-S_1P_1=-2P_2\,,$$

$$S_3-S_2P_1+S_1P_2=+3P_3$$

$$S_4-S_3P_1+S_2P_2-S_1P_3=-4P_4\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,;$$

en substituant donc, il viendra, pour seconde moyenne approchée

$$x=\frac{P_1P_1^{n-1}-2nP_2P_1^{n-2}+3n^2P_3P_1^{n-3}-4n^3P_4P_1^{n-4}+\ldots\ldots\pm n\,n^{n-1}P_n}{nP_1^{n-1}-n(n-1)P_1P_1^{n-2}+n^2(n-2)P_2P_1^{n-3}-n^3(n-3)P_3P_1^{n-4}+\ldots\pm n^{n-1}P_{n-1}}\,. \qquad (2)$$

Or, de même que nous nous sommes servis de la première valeur approchée $\frac{P_1}{n}$ pour parvenir à celle-ci, nous pourrions pareillement employer cette dernière à la recherche d'une troisième, et procéder ainsi d'approximation en approximation, jusqu'à ce que nous soyons parvenus à deux valeurs successives, ne différant entre elles qu'entre les limites des erreurs qu'on peut tolérer. Mais, au lieu de rechercher péniblement des formules générales, qui deviendraient probablement de plus en plus compliquées, à mesure qu'on voudrait pousser les approximations plus avant, il sera plus commode et plus simple d'appliquer immédiatement le procédé aux données numériques; mais, avant d'en faire l'application à un exemple, nous placerons d'abord ici quelques remarques préliminaires.

Nous ferons d'abord observer, comme nous l'avons déjà dit plus haut, qu'au lieu de considérer le degré de confiance dû à chaque donnée comme simplement en raison inverse de sa différence avec le résultat moyen hypothétique sur lequel on opère, on peut faire ce degré de confiance inversement proportionnel à une puissance plus ou moins élevée de cette même différence. On sent même qu'il doit y avoir de l'avantage à choisir de préférence une puissance paire qui, étant toujours positive, quel que soit le signe de la différence, ne changera jamais le signe des données qu'elle multipliera. Afin donc de réunir la rigueur à la plus grande simplicité possible, nous admettrons constamment que le degré de confiance que chaque donnée mérite, dans une approximation quelconque, est, en raison inverse du quarré de sa distance à la moyenne obtenue par l'approximation précédente.

En second lieu, il n'est point indispensablement nécessaire de prendre, pour première approximation, la moyenne qui résulte de la méthode vulgaire; et on peut fort bien lui substituer tout autre nombre que l'inspection des données aura pu faire soupçonner devoir peu différer de la moyenne véritable.

Il faudra bien se garder toutefois de choisir pour cette moyenne arbitraire l'une des données elle-même; il est évident, en effet, par la nature du procédé, que, quand bien même cette donnée serait une des extrêmes, on retomberait perpétuellement sur elle, quelque loin qu'on prétendit pousser l'approximation. Il faudra donc éviter d'employer la méthode vulgaire, pour la première approximation, lorsque l'application de cette méthode fera tomber sur une des données.

Il pourrait se faire que les résultats des approximations successives ne fissent qu'osciller sans cesse autour d'une valeur moyenne, ou même fussent tout-à-fait divergens; et c'est, en particulier, ce qui arriverait fréquemment, en employant la raison inverse d'une puissance impaire de la distance; mais il n'y a pas d'apparence qu'on ait cet inconvénient à redouter, en employant la raison inverse du quarré de la distance, ainsi que nous l'avons conseillé plus haut. Au surplus, on pourra être assuré que le procédé marche bien, lorsque les différences consécutives des divers résultats approchés, quels qu'en soient d'ailleurs les signes, seront continuellement décroissantes.

Pour ne nous pas engager dans des calculs trop pénibles, nous bornerons nos applications à la seule question que voici : Une vigne a rapporté, durant quatre années consécutives, 3, 4, 5 et 12 muids de vin; à combien peut-on raisonnablement en évaluer le produit moyen?

S'il n'existait que les trois premières données, il serait naturel de prendre 4 pour la moyenne cherchée; et c'est aussi celle que donnerait alors la méthode ordinaire; mais, à raison de la quatrième donnée 12; cette méthode donne 6 pour la moyenne. Cependant, cette moyenne 6 ne saurait être raisonnablement admise; le cas où nous nous trouvons est, en effet, très-différent de celui où nos données seraient

$$3, 5, 7, 9,$$

et où le simple bon sens indiquarait 6 pour la moyenne; car la distance de la donnée 12 aux trois autres, et la grande proximité de celles-ci entre elles, indiquent assez que cette donnée 12 ne saurait être considérée que comme un cas extraordinaire, que comme une sorte d'exception, suffisante, à la vérité, pour rendre la moyenne plus grande que 4, mais pas assez cependant pour la rendre égale à 6; le bon sens indique donc ici la moyenne comme comprise entre 4 et 6; voyons ce que le calcul nous donnera.

En partant de 6, comme première approximation, la seconde valeur approchée de la moyenne sera

$$\frac{\frac{3}{(6-3)^2}+\frac{4}{(6-4)^2}+\frac{5}{(6-5)^2}+\frac{12}{(6-12)^2}}{\frac{1}{(6-3)^2}+\frac{1}{(6-4)^2}+\frac{1}{(6-5)^2}+\frac{1}{(6-12)^2}},$$

c'est-à-dire,

$$\frac{\frac{3}{9}+\frac{4}{4}+\frac{5}{1}+\frac{12}{36}}{\frac{1}{9}+\frac{1}{4}+\frac{1}{1}+\frac{1}{36}},$$

ou encore

$$\frac{12+36+180+12}{4+9+36+1}=\frac{240}{50}=\frac{24}{5}=4+\frac{4}{5}.$$

En prenant de même pour seconde approximation $\frac{24}{5}$, nous aurons, pour troisième valeur approchée,

$$\frac{\frac{3}{(\frac{24}{5}-3)^2}+\frac{4}{(\frac{24}{5}-4)^2}+\frac{5}{(\frac{24}{5}-5)^2}+\frac{12}{(\frac{24}{5}-12)^2}}{\frac{1}{(\frac{24}{5}-3)^2}+\frac{1}{(\frac{24}{5}-4)^2}+\frac{1}{(\frac{24}{5}-5)^2}+\frac{1}{(\frac{24}{5}-12)^2}},$$

c'est-à-dire,

$$\frac{\frac{3}{(24-15)^2}+\frac{4}{(24-20)^2}+\frac{5}{(24-25)^2}+\frac{12}{(24-60)^2}}{\frac{1}{(24-15)^2}+\frac{1}{(24-20)^2}+\frac{1}{(24-25)^2}+\frac{1}{(24-60)^2}},$$

ou encore

$$\frac{\frac{3}{81}+\frac{4}{16}+\frac{5}{1}+\frac{12}{1296}}{\frac{1}{81}+\frac{1}{16}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1296}},$$

ou enfin

$$\frac{48+324+6480+12}{16+\ 81+1296+\ 1}=\tfrac{6864}{1394}=\tfrac{3432}{697}=4+\tfrac{644}{697}.$$

Prenant donc $\frac{3432}{697}$ pour troisième approximation, nous aurons, pour quatrième valeur approchée,

$$\frac{\frac{3}{(\frac{3432}{697}-3)^2}+\frac{4}{(\frac{3432}{697}-4)^2}+\frac{5}{(\frac{3432}{697}-5)^2}+\frac{12}{(\frac{3432}{697}-12)^2}}{\frac{1}{(\frac{3432}{697}-3)^2}+\frac{1}{(\frac{3432}{697}-4)^2}+\frac{1}{(\frac{3432}{697}-5)^2}+\frac{1}{(\frac{3432}{697}-12)^2}},$$

c'est-à-dire,

$$\frac{\frac{3}{(3432-2091)^2}+\frac{4}{(3432-2788)^2}+\frac{5}{(3432-3485)^2}+\frac{12}{(3432-8364)^2}}{\frac{1}{(3432-2091)^2}+\frac{1}{(3432-2788)^2}+\frac{1}{(3432-3485)^2}+\frac{1}{(3432-8364)^2}}$$

ou encore

$$\frac{\frac{3}{457281}+\frac{4}{414736}+\frac{5}{2809}+\frac{12}{24324624}}{\frac{1}{457281}+\frac{1}{414736}+\frac{1}{2809}+\frac{1}{24324624}},$$

ce qui donne, toutes réductions faites,

$$\frac{35227473490956 70}{705821720852223}=4+\frac{699460465686778}{705821720852223}.$$

Nous ne pousserons pas plus loin ce calcul, qui se compliquerait de plus en plus, mais que pourtant on pourrait abréger un peu, comme tous les calculs approximatifs. Nous remarquerons seulement qu'en réduisant nos valeurs successives en décimales, et prenant leurs différences consécutives, on a

Première approximation	6,00000,	
		—1,20000,
Deuxième	4,80000,	
		+0,12396,
Troisième	4,92396,	
		+0,06703;
Quatrième	4,99099;	

d'où l'on voit que les différences décroissent assez rapidement; de sorte qu'il est probable que, si l'on pouvait poursuivre indéfiniment le calcul, on tomberait enfin sur une moyenne extrêmement voisine de 5, mais une peu inférieure à ce nombre; ce que le seul bon sens pouvait d'ailleurs indiquer (*).

Nous ne prétendons pas, au surplus, attacher à ce procédé plus d'importance qu'il n'en mérite; nous pensons même que, pour le cas d'un très-grand nombre de données, le seul pourtant où l'on puisse faire quelque fond sur le résultat moyen, il deviendrait bientôt impraticable, à raison de la complication des calculs qu'il exigerait; de sorte que, dans la pratique, on se trouvera contraint de lui préférer la méthode ordinaire; mais quelque jugement qu'on en porte d'ailleurs, les remarques dont nous avons fait précéder son exposition n'en subsisteront pas moins; et il restera toujours à justifier la méthode vulgaire, ou à lui substituer quelque autre méthode qui ne soit pas sujette aux mêmes objections.

Lyon, le 26 d'octobre 1821.

(*) Ce procédé nous paraît avoir une grande analogie avec la méthode de Newton pour l'approximation des racines incommensurables des équations numériques et nous pensons d'après cela qu'il en doit offrir toutes les vicissitudes. Ainsi, 1.° les diverses valeurs approchées de la moyenne doivent tendre sans cesse vers l'une des données, du moins tant que deux données ne sont pas très-voisines l'une de l'autre; 2.° suivant le choix du point de départ ou première valeur approchée, les approximations successives peuvent tendre indistinctement vers chacune des données, même vers une des données extrêmes; 3.° enfin, si l'on prend le point de départ ou première valeur approchée peu différent de deux données qui soient en même temps très-voisines l'une de l'autre et très-distantes des autres données, les approximations successives devront alternativement osciller vers l'une et vers l'autre de ces deux données. *J. D. G.*

ANALISE TRANSCENDANTE.

Recherches sur les intégrales définies ;

Par M. H. G. SCHMIDTEN.

TOUTE fonction se développant, en général, suivant les puissances de la variable indépendante, on peut toujours mettre une fonction quelconque $F(t)$ sous la forme $S.y_xt^x$, le signe S s'étendant à tous les nombres entiers, depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, et y_x étant indépendant de t.

Cela posé, le problème général de la sommation des suites revient à transformer la quantité $S.y_xt^x$ de la manière la plus propre à l'évaluation de la fonction $F(t)$; et les différentes méthodes qu'offre l'analise pour cet objet, soit par le calcul des différences finies, soit par les substitutions employées par Euler, se ramènent toutes aux *fonctions génératrices*.

Mais si, au lieu de transformer de diverses manières la série qui équivaut à la fonction $F(t)$, on se proposait d'en déduire de nouvelles, qui répondissent à certaines conditions, le problème serait essentiellement différent du premier ; et les différentes méthodes qui se présentent, dans cette partie de l'analise, se rattachent presque toutes à la théorie des *intégrales définies*, quoiqu'on voie difficilement la liaison qui existe entre elles. C'est pourquoi je me propose de présenter quelques recherches où elles sont comprises comme des conséquences d'un seul principe que je vais d'abord exposer dans toute sa généralité.

Soit ∇U une fonction quelconque linéaire de U, c'est-à-dire telle que $\nabla(U+V)=\nabla U+\nabla V$, et pouvant par conséquent renfermer un nombre quelconque de différentiation et d'intégrations par rapport à toutes les variables contenues dans U, on aura $\nabla\cdot\mathrm{F}(t)=\mathrm{S}.y_x\nabla.t^x$, en supposant que le signe ∇ se rapporte uniquement à la quantité t; faisant donc $\nabla t^x=z_x$, on aura $\nabla.\mathrm{F}(t)=\mathrm{S}.y_x z_x$. L'on voit ainsi que chaque forme différente de ∇ mène à une valeur différente de z_x, et par conséquent de $\mathrm{S}.y_x z_x$; mais, dans l'impossibilité de les parcourir toutes, il faut se borner à celles qui se présentent naturellement les premières, et qui peuvent servir de base à des recherches plus compliquées.

La forme la plus simple que l'on puisse donner à ∇, après celle d'un simple produit, est la forme différentielle. En supposant, pour plus de généralité, $t=U$, et de plus U et U_1 des fonctions quelconques de u, on aura

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}.U_1\mathrm{F}(U)=\mathrm{S}.y_x\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}.U_1U^x=\mathrm{S}\,y_xz_x\,.$$

Donnant, par exemple, à U et U_1 des formes de puissances ou d'exponentielles, on aura z_x de la forme $(n+mx)u^{n+mx-1}$, ou $(a+bx)e^{(c+bx)u}$; et l'on en peut déduire une infinité d'autres séries, en continuant les mêmes opérations si loin qu'on voudra. Si ∇ avait la forme d'une différence ou intégale aux différences finies, on ne trouverait facilement des résultats élégans que lorsque U et U_1 auraient la forme d'exponentiels; mais ces opérations n'ayant d'ailleurs aucune difficulté, je vais m'occuper du cas où ∇ a la forme d'une intégrale ordinaire; ce qui donne lieu à des conséquences très-variées et très-remarquables. Mais, pour ne pas être entraîné en des recherches trop compliquées, je me bornerai à la comparaison des séries à simple entrée, et c'est ce qu'on fait en admettant pour les quantités U_1 et U des formes qui ne soient pas plus générales que celle du binome, dont on sait que les fonctions exponentielles et circulaires ne sont que des cas particuliers.

Dans cette supposition, le principe qui sert de base aux recherches contenues dans ce mémoire se réduit au fond à celui que Euler a employé le premier pour représenter, par des intégrales définies, la série qui intègre une certaine espèce d'équations différentielles; mais, si on l'expose dans toute sa généralité, on voit s'y rattacher les résultats les plus généraux qu'on ait obtenu sur la théorie des intégrales définies. Parmi les résultats que présente cette théorie, il faut bien distinguer ceux qui comprennent une infinité de fonctions différentes, assujetties seulement à une propriété commune, de ceux qui, par leur nature, se bornent à une classe particulière de fonctions; et, quoique ceux-ci soient presque tous trouvés par des considérations particulières et par des artifices très-divers, il faut néanmoins qu'ils se déduisent, comme des corollaires, de ceux-là.

En effet, la méthode générale, dont nous allons exposer les conséquences, consiste à former l'équation

$$\int U_1 \mathrm{F}(U) du = \mathrm{S} y_x \int U_1 U^x du = \mathrm{S} y_x z_x ,$$

où il s'agit de déterminer z_x, pour les différentes formes de U_1 et de U, la variable u étant prise entre des limites convenables. D'abord, on peut laisser à $\mathrm{F}(U)$ et à y_x une forme quelconque, ce qui donne une grande généralité à celles qui en résultent. Ainsi, par exemple, si l'on substitue pour U_1 et U des exponentielles imaginaires, on en déduira, par des considérations très-simples que nous exposerons plus bas, le théorème de M. Fourier. Mais, la plupart des recherches qu'on a faites sur les intégrales définies dépendent de valeurs particulières de y_x, parmi lesquelles on s'est sur-tout attaché à discuter celles qui ramènent en même temps les deux séries $\mathrm{S}.y_x$ et $\mathrm{S}.y_x z_x$ à des fonctions qu'on a adoptées dans la langue analitique. C'est ainsi, par exemple, que la supposition

$y_x = \frac{(-a^x)^x}{1.2.3.....x}$ fait la première égale à Cos.a, et celle de $U = u^2$, $U_1 = e^{-u^x}$ fait la seconde égale à $\frac{\sqrt{\varpi}}{2}.e^{-\frac{u}{4}}$. Cependant, il faut encore, dans cette partie, remarquer des formes fondamentales, d'où dépendent un grand nombre de formes secondaires plus ou moins élégantes, telles sont, par exemple,

$$\int \frac{\mathrm{Cos}.mu}{n^2 + u^2} \mathrm{d}u, \quad \int u^a e^{-u} \mathrm{Cos}.mu.\mathrm{d}u, \quad \text{etc.}$$

qu'on a trouvées par la réduction à des équations différentielles, par le passage du réel à l'imaginaire, etc. Nous aurons soin de les exposer, comme des corollaires de la formule générale

$$\int U_1 \mathrm{F}(U) \mathrm{d}u = \mathrm{S} y_x \int U_1 U^x \mathrm{d}u;$$

et ne supposant pas U_1 et U des fonctions plus générales que le binome, nous rappellerons seulement la formule connue

$$\int u^{m-1} \mathrm{d}u (1 - au^n)^p = u^{m-n}(1 - au^n) + \frac{m-n}{a(m+np)} \int u^{m-n-1}(1 - au^n)^p \mathrm{d}u;$$

d'où on tire, en supposant n, p et $m - rn - 1$ positifs, et prenant l'intégrale depuis $u = 0$ jusqu'à $u = \sqrt[n]{\frac{1}{a}}$,

$$\int u^{m-1} \mathrm{d}u (1 - au^n)^p = \frac{(m-n)(m-2n) \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (m-rn)}{a^r(m+np)[m+n(p-1)]....[m+n(p-r+1)]} \int u^{m-rn-1}(1 - au^n)^p \mathrm{d}u$$

Faisant d'abord $U = u$ et $U_1 = (1 - au^n)^p$, on aura

$$\int u^x (1 - au^n)^p \mathrm{d}u = z_x;$$

mais il est facile de voir, par la formule précédente, que cette quantité doit, en général, dépendre d'un nombre n d'intégrales différentes. En effet, x étant un nombre entier, on peut toujours lui donner la forme d'un multiple de n plus un nombre entier moindre que n, en supposant ce dernier nombre également entier, ce qui donne les rélations suivantes :

$$\int u^{rn}(1-au^n)^p du = \frac{1(1+n)\ldots\ldots[1+(r-1)n]}{a^r[1+(p+1)n]\ldots[1+(p+r)n]}\int(1-au^n)^p du\ ,$$

$$\int u^{rn+1}(1-au^n)^p du = \frac{2(2+n)\ldots\ldots[2+(r-1)n]}{a^r[2+(p+1)n]\ldots[2+(p+r)n]}\int u(1-au^n)^p du\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$\int u^{rn+n-1}(1-au^n)^p du = \frac{n\,.\,2n\,.\,3n\ldots\ldots\ldots rn}{a^r(p+2)n\ldots(p+r+1)n}\int u^{n-1}(1-au^n)^p du\ ;$$

d'où l'on déduit

$$\int du(1-au^n)^p F(u) = \left\{y_0 + \frac{1}{a[1+(p+1)n]}y_n + \frac{1(1+n)}{a^2[1+(p+1)n][1+(p+2)n]}y_{2n} + \ldots\ldots\right\}\int(1-au^n)^p du$$

$$+\left\{y_1 + \frac{2}{a[2+(p+1)n]}y_{n+1} + \frac{2(2+n)}{a^2[2+(p+1)n][2+(p+2)n]}y_{2n+1} + \ldots\ldots\right\}\int(1-au^n)^p u du$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left\{y_{n-1} + \frac{1}{a(p+2)}y_{2n-1} + \frac{1\,.\,2}{a^2(p+2)(p+3)}y_{3n-1} + \ldots\ldots\right\}\int(1-au^n)^p u^{n-1} du\ ;$$

et, dans le cas particulier où $a = \frac{b}{p}$ et $p = \infty$, on aura

$$\int du.e^{-bu^n}.F(u) = \left\{y_0 + \frac{1}{bn}y_n + \frac{1(1+n)}{b^2.n^2}y_{2n} + \ldots\ldots\right\}\int e^{-bu^n} du$$

$$+\left\{y_1 + \frac{2}{bn}y_{n+1} + \frac{2(2+n)}{b^2.n^2}y_{2n+1} + \ldots\right\}\int ue^{-bu^n} du$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left\{y_{n-1} + \frac{1}{b}y_{2n-1} + \frac{1.2}{b^2}y_{3n-1} + \ldots\right\}\int u^{n-1}e^{-bu^n} du\ .$$

Ces n suites infinies se réduisent à une seule, dans le cas où la fonction $\mathrm{F}(t)$ ne contient que les puissances de t^n; car, en faisant $\mathrm{F}(t)=\mathrm{f}(t^n)=\mathrm{S}.\varphi_x t^{xn}$, on aura

$$\int(1-au^n)^p u^q \mathrm{f}(u^n)\mathrm{d}u=\mathrm{S}.\varphi_x\int(1-au^n)^p u^{q+nx}\mathrm{d}u$$

$$=\mathrm{S}.\varphi_x.\frac{q(q+n)\ldots\ldots[q+(x-1)n]}{a^x[q+(p+1)n]\ldots.[q+(p+x)n]}\int(1-au^n)^p u^q\mathrm{d}u\ .$$

Pouvant répéter ces opérations tant de fois qu'on voudra, on formera facilement l'équation

$$\frac{\int^n (1-au^{\varepsilon}_n)^{\frac{p_n}{\varepsilon}} u_n^{m_n-1}\ldots.(1-au^{\varepsilon}_2)^{\frac{p_2}{\varepsilon}} u_2^{m_2-1}(1-au^{\varepsilon}_1)^{\frac{p_1}{\varepsilon}} u_1^{m_1-1}\mathrm{f}(u^{\varepsilon}_n,u^{\varepsilon}_{n-1},\ldots.u^{\varepsilon}_1)\mathrm{d}u_n\ldots\mathrm{d}u_1}{T_n\ldots\ldots T_2.T_1}$$

$$=\mathrm{S}.\frac{m_1m_2\ldots.m_n.(m_n+\varepsilon)\ldots.(m_n+\varepsilon)\ldots[m_1+(x-1)\varepsilon]\ldots.[m_n+(x-1)\varepsilon]}{a^{nx}(m_1+p_1+\varepsilon)\ldots..(m_n+p_n+\varepsilon)\ldots..(m_1+p_1+x\varepsilon)\ldots..(m_n+p_n+x\varepsilon)}\varphi_x\ ;$$

Les qualités ε, m_1, m_2, ..., p_1, p_2, ... étant des constantes quelconques, assujetties à la seule condition de ne pas rendre les intégrales infinies entre les limites assignées ; et chacune des quantités T_1, T_2, ... ayant la forme

$$T_r=\int(1-au^{\varepsilon}_r)^{\frac{p_r}{\varepsilon}} u_r^{m_r-1}\mathrm{d}u_r\ ;$$

toutes ces intégrales étant prises d'ailleurs entre les limites o et $\sqrt[\varepsilon]{\frac{1}{a}}$.

On trouve facilement que cette formule donne, sous forme finie, l'intégrale de l'équation

$$\frac{A_0+B_0x^{\varepsilon}}{1}.\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}+\frac{A_1+B_1x^{\varepsilon}}{x}.\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\ldots.+\frac{A_n+B_nx^{\varepsilon}}{x^n}.y=\alpha x^{\beta}\ .$$

En effet, l'on trouve, par un procédé que j'ai exposé ailleurs (*Annales*, tom. XI) pour la valeur complète de y, un nombre $n+1$ de séries, dont chacune présente un nombre de constantes égal à celui des quantités m_1, m_2,....., p_1, p_2,..... Quant à la fonction $f(u^s)$, on trouve que, pour ce cas, elle prend la forme $\frac{1}{1-\delta u^s}$, les quantités φ_0, φ_1, φ_2,..... devant être de simples puissances d'une constante δ.

Nous avons uniquement considéré le cas où l'intégrale

$$\int(1-au^n)^p\mathrm{F}(u)\mathrm{d}u$$

se ramène à une seule série, pour des valeurs quelconques de n, et nous allons maintenant discuter les simplifications que comportent des valeurs particulières de cette quantité. D'abord, il est facile de voir que, lorsque $n=1$, on n'aura jamais qu'une seule série pour l'intégrale proposée; mais il est encore possible d'y ramener le cas où $n=2$. En effet, si l'on observe que l'intégrale

$$\int(1-au^2)^p u\mathrm{d}u\,,$$

prise depuis $u=-\sqrt{\frac{1}{a}}$ jusqu'à $u=+\sqrt{\frac{1}{a}}$ est $=0$, on verra que la valeur de

$$\int(1-au^2)^p\mathrm{F}(u)\mathrm{d}u$$

se réduit à la seule série

$$\left\{y_0+\frac{1}{a(3+2p)}y_2+\frac{1.3}{a^2(3+2p)(5+2p)}y_4+\ldots\right\}\int(1-au^2)^p\mathrm{d}u,\ \left\{\begin{matrix}u=-\sqrt{\frac{1}{a}}\\u=+\sqrt{\frac{1}{a}}\end{matrix}\right\}$$

Si l'on suppose $a=\frac{b}{p}$ et $p=\infty$, on a la formule par laquelle M. Laplace a présenté, sous forme finie, l'intégrale de l'équation

$\frac{dz}{dy}=\frac{d^2z}{dx^2}$. Pour les autres valeurs de n, il paraît, en général, impossible de ramener à une seule les n séries différentes ; c'est pourquoi nous nous bornerons, pour le moment, aux cas où $n=1$ ou 2.

Soit donc $U=u^\alpha(1-au)^\beta$ et $U_1=u^\gamma(1-au)^\delta$, on aura, en supposant α et γ des nombres entiers,

$$\int u^\gamma(1-au)^\delta \mathrm{F}[u^\alpha(1-au)^\beta]du=$$

$$S.y_x\frac{1.2.3\ldots\ldots(\gamma+\alpha x)}{(1+\delta+\beta x)\ldots\ldots[1+\delta+\gamma+(\beta+\alpha)x]a^{\gamma+\alpha x+1}}\;;\qquad\left\{\begin{matrix}u=0\\ u=\frac{1}{a}\end{matrix}\right\}$$

d'où

$$\int u^\gamma e^{-\delta u}\mathrm{F}(u^\alpha,\, e^{-\beta u})du=Sy_x\frac{1.2.3\ldots(\gamma+\alpha x)}{(\delta+\beta x)^{\gamma+\alpha x+1}}\,.\qquad\left\{\begin{matrix}u=0\\ u=\infty\end{matrix}\right\}$$

Si, par exemple, on a $\mathrm{F}(t)=e^t$, on aura

$$\frac{1}{\delta}+\frac{1}{(\delta+\beta)^2}+\frac{1}{(\delta+2\beta)^3}+\ldots\ldots=\int e^{-\delta u}.e^{ue^{-\beta u}}du\;;$$

et si l'on fait $\mathrm{F}(t)=\mathrm{Cos}.t$,

$$\frac{1}{\delta}-\frac{1}{(\delta+\beta)^3}+\frac{1}{(\delta+2\beta)^5}-\ldots\ldots=\int e^{-\delta u}.\mathrm{Cos}.ue^{-\beta u}.du\,,$$

et ainsi de suite.

Si γ n'était pas entier, il faudrait ramener l'intégrale $\int u^{\gamma+\alpha x}(1-au)^{\delta+\beta x}$ à celle-ci

$$\frac{(\gamma+\alpha x)\ldots\ldots(\gamma+1)}{a^{\alpha x}(\gamma+\alpha x+\delta+\beta x+1)\ldots\ldots(\gamma+\delta+\beta x+2)}\int u^\gamma(1-au)^{\delta+\beta x}du\;;$$

mais x étant différent pour les différens termes de la suite, il

faut

faut absolument supposer $\beta=0$, à moins que l'on ne veuille introduire une transcendante irréductible dans chaque terme.

Faisant, par exemple,

$$\gamma_x=\frac{(-c^2)^x}{1.2.3\ldots\ldots 2x};$$

on aura

$$\int u^\gamma(1-au)^\delta \text{Cos}.cu.\text{d}u=$$

$$\left\{1-\frac{(\gamma+1)(\gamma+2)c^2}{1.2a^2(\gamma+\delta+2)(\gamma+\delta+3)}+\frac{(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)c^4}{1\ldots 4a^4(\gamma+\delta+2)\ldots(\gamma+\delta+5)}-\ldots\right\}\int u^\gamma(1-au)^\delta\text{d}u$$

d'où

$$\int u^\gamma e^{-\delta u}\text{Cos}.cu.\text{d}u=$$

$$\left\{1-\frac{(\gamma+1)(\gamma+2)}{1.2\delta^2}c^2+\frac{(\gamma+1)\ldots(\gamma+4)}{1.2.3.4\delta^4}c^4-\ldots\right\}\int u^\gamma e^{-\delta u}\text{d}u$$

$$=\frac{\left(1-\frac{c}{\delta}\sqrt{-1}\right)^{-(\gamma+1)}+\left(1+\frac{c}{\delta}\sqrt{-1}\right)^{-(\gamma+1)}}{2}\int u^\gamma e^{-\delta u}\text{d}u\begin{pmatrix}u=0\\u=\infty\end{pmatrix}.$$

On fait aisément disparaître les imaginaires contenus dans cette dernière expression, en observant que

$$\text{Cos}.mx=\frac{(\text{Cos}.x)^{-m}}{2}\left\{\left(1+\sqrt{-1}\,\frac{\text{Sin}.x}{\text{Cos}.x}\right)^{-m}+\left(1-\sqrt{-1}\,\frac{\text{Sin}.x}{\text{Cos}.x}\right)^{-m}\right\};$$

et faisant $\text{Tang}.x=\frac{c}{\delta}$, d'où

$$\text{Cos}.x=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{c^2}{\delta^2}}};$$

on aura ainsi

$$\text{Cos.}\left[m\,\text{Arc.}\left(\text{Tang.}=\frac{c}{\delta}\right)\right]=\frac{\left(1+\frac{c^2}{\delta^2}\right)^{\frac{m}{2}}}{2}\times$$
$$\left\{\left(1+\sqrt{-1}\,\frac{c}{\delta}\right)^{-m}+\left(1-\sqrt{-1}\,\frac{c}{\delta}\right)^{-m}\right\};$$

d'où l'intégrale connue

$$\int u^\gamma e^{-\delta u}.\text{Cos.}cu.\mathrm{d}u=\frac{\text{Cos.}\left[(\gamma+1)\text{Arc.}\left(\text{Tang.}=\frac{c}{\delta}\right)\right]}{\left(1+\frac{c^2}{\delta^2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}}\int u^\gamma e^{-\delta u}\mathrm{d}u\ .$$

Si, au lieu de Cos.cu, on avait Sin.cu, on procéderait d'une manière analogue.

Faisant présentement $U=u^\alpha(1-au^2)^\beta$ et $U_1=u^\gamma(1-au^2)^\delta$, l'on aura

$$\int U_1\mathrm{F}(U)\mathrm{d}u=S.y_x\int u^{\gamma+\alpha x}(1-au^2)^{\delta+\beta x},$$

d'où

$$\int u^\gamma e^{-\quad}\mathrm{F}(u^\alpha,e^{-\beta u^2})\mathrm{d}u=S.y_x\int u^{\gamma+\alpha x}e^{-u^2(\delta+\beta x)}\mathrm{d}u\ . \qquad \begin{pmatrix}u=-\infty\\ u=+\infty\end{pmatrix}$$

Supposant $\alpha=2$ et $\gamma=2c$, on trouve, pour le second membre

$$S.y_x.\frac{1.3.5\ldots\ldots[2(c+x)-1]}{[2(\delta+\beta x)]^{c+x}(\delta+\beta x)^{\frac{1}{2}}}\int e^{-t^2}\mathrm{d}t\ . \qquad \begin{pmatrix}t=-\infty\\ t=+\infty\end{pmatrix}$$

Soient, par exemple, $\beta=0$, $\mathrm{F}(U)=\text{Cos.}u$; en observant que

$$\int e^{-t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\varpi},$$

on trouve facilement

$$\int e^{-\delta u^2}\text{Cos.}u.\,\mathrm{d}u=e^{-\frac{\delta}{4}}\sqrt{\frac{\varpi}{\delta}};$$

et, si les limites étaient o et ∞, cette dernière quantité se réduirait à la moitié de sa valeur.

Mais ces recherches se continuant sans difficulté, par le principe que nous avons posé, je passe aux fonctions circulaires; et, quoique ces dernières fonctions puissent être considérées comme cas particuliers de celles que nous venons de discuter, elles exigent néanmoins des modifications remarquables.

En effet, de la formule connue

$$\int u^{m-1}(1+bu)^p du=(1+bu)^{p+1}\left\{\frac{u^{m-1}}{b(m+p)}-\frac{(m-1)u^{m-2}}{b^2(m+p)(m+p-1)}\right\}$$

$$+\frac{(m-1)(m-2)}{b^2(m+p)(m+p-1)}\int u^{m-3}(1+bu)^p du\ ,$$

en faisant

$$\frac{(1+bu\sqrt{-1})^p+(1-bu\sqrt{-1})^p}{2}=\varphi(p\,,u)\,,$$

$$\frac{(1+bu\sqrt{-1})^p-(1-bu\sqrt{-1})^p}{2\sqrt{-1}}=\psi(p\,,u)\,,$$

on tire

$$\int u^{m-1}\varphi(p\,,u)du=\psi(p+1\,,u)\,\frac{u^{m-1}}{b(m+p)}+\frac{(m-1)u^{m-2}\varphi(p+1\,,u)}{b^2(m+p)(m+p-1)}$$

$$-\frac{(m-1)(m-2)}{b^2(m+p)(m+p-1)}\int u^{m-3}\varphi(p,u)du\,,$$

et, en continuant ces opérations jusqu'à ce que l'exposant de u soit devenu $=0$, on aura deux séries dont l'une contiendra la fonction φ et l'autre la fonction ψ; et les limites qui les rendent $=0$ étant différentes, il sera impossible d'assigner deux limites entre lesquelles tous les termes hors du signe d'intégration disparaissent. En conséquence, si l'on ne veut, dans le problème qui nous occupe, que des séries à simple entrée, il faudra faire $m=1$; c'est-à-dire, ne prendre pour U_1 et U que des valeurs de la forme $(1\pm bu\sqrt{-1})^p$; d'où l'on peut toujours former des quantités réelles, en réunissant deux séries où les signes soient différens.

Faisant

$$U_1=(1\pm bu\sqrt{-1})^\delta, \qquad U(1\pm bu\sqrt{-1})^\beta;$$

on aura

$$\tfrac{1}{2}\int\{(1+bu\sqrt{-1})^\delta F[(1+bu\sqrt{-1})^\beta]+(1-bu\sqrt{-1})^\delta F[(1-bu\sqrt{-1})^\beta]\}du=$$

$$S.y_x.\frac{(1+bu\sqrt{-1})^{\delta+\beta x+1}-(1-bu\sqrt{-1})^{\delta+\beta x+1}}{2b(\delta+\beta x+1)\sqrt{-1}}$$

entre des limites quelconques; et, à moins que celles-ci ne rendent des termes infinis, on peut étendre le signe S à tous les nombres entiers, soit positifs, soit négatifs. Il est facile d'ailleurs de ramener cette dernière expression à une forme réelle, comme nous l'avons déjà fait plus haut. Cependant, ces formes ne mènent à des résultats élégans que lorsque les puissances se changent en exponentiels; et, si l'on fait

$$U=e^{\pm u\sqrt{-1}}, \qquad U_1=e^{\mp nu\sqrt{-1}};$$

on aura

$$\tfrac{1}{2}\int[e^{-nu\sqrt{-1}}F(e^{+u\sqrt{-1}})+e^{+nu\sqrt{-1}}F(e^{-u\sqrt{-1}})]du=$$

$$S.y_x\int\frac{e^{(x-n)u\sqrt{-1}}+e^{(n-x)u\sqrt{-1}}}{2}du=S.y_x\int\mathrm{Cos.}(x-n)u.du.$$

En assignant à u les limites 0 et ϖ, on réduit la dernière expression à ϖy_n, si l'on suppose qu'aucune des valeurs de x, depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, ne rend y_x infini.

On a ainsi, pour la même quantité y_x deux transformations différentes, dont chacune a ses avantages ; nous allons présentement les discuter, en commençant par la première, où la valeur de y_n est exprimée par la fonction génératrice $F(t)$. Supposons celle-ci $= f(t, v)$; on aura, en développant suivant les puissances de t et v, la série à double entrée

$$\begin{array}{ll|l|l} a_{0,0}+ & a_{1,0} & v+\ a_{2,0} & v^2+\ldots \\ +t\,a_{0,1}+ & t\,a_{1,1} & +t\,a_{2,1} & +\ldots \\ +t^2a_{0,2}+ & t^2a_{1,2} & +t^2a_{2,2} & +\ldots \\ +\ldots\ldots+ & \ldots\ldots & +\ldots\ldots & +\ldots \end{array},$$

Maintenant, on peut faire v égal à une puissance quelconque entière de t ; et, quelle qu'elle soit, on est toujours en état d'exprimer, par une intégrale définie, le coefficient d'une puissance quelconque de t qui provienne de cette substitution pour v. Faisant, par exemple, $v=\frac{1}{t}$, d'où le coefficient de t^n devient

$$a_{n,0}+a_{n+1,1}+a_{n+2,2}+\ldots\ldots=\frac{1}{2\pi}\int[e^{-nu\sqrt{-1}}f(e^{+u\sqrt{-1}},e^{-u\sqrt{-1}})$$
$$+e^{+nu\sqrt{-1}}f(e^{-u\sqrt{-1}},e^{+u\sqrt{-1}})]du;$$

depuis $u=0$ jusqu'à $u=\pi$. Soit, par exemple, $f(t, v)=e^{te^v}$; on trouve, par cette formule, en faisant $n=0$, la série

$$1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{1^2}+\frac{3}{(1.2)^2}+\frac{4^2}{(1.2.3)^2}+\frac{5^3}{(1.2.3.4)^2}+\frac{6^4}{(1.2.3.4.5)^2}+\ldots$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int(e^{e^{+u\sqrt{-1}}+e^{-u\sqrt{-1}}}+e^{e^{-u\sqrt{-1}}+e^{+u\sqrt{-1}}})du:$$

L'introduction des imaginaires dans les intégrales comportant de grandes difficultés, relativement à l'évaluation ; il est intéressant de discuter le cas le plus étendu où il serait possible de les faire disparaître ; c'est-à-dire, où les exponentiels imaginaires pourraient se réduire en des cosinus ou sinus réels. On voit que cela ne peut avoir lieu que lorsque $\mathrm{f}(t, \nu)$ a la forme $\mathrm{f}(t+\nu)$ où $\nu=\frac{1}{t}$; et, dans ce cas, on trouve pour le coefficient de t^n

$$\frac{1}{2\varpi}\int(e^{+nu\sqrt{-1}}+e^{-nu\sqrt{-1}})\mathrm{f}(e^{+u\sqrt{-1}}+e^{-u\sqrt{-1}})du$$

$$=\frac{1}{\varpi}\int \mathrm{Cos}.nu.\mathrm{f}(2\mathrm{Cos}.u)du \;.$$

Soit, par exemple,

$$\mathrm{f}(t+\nu)=A_0+A_1(t+\nu)^m+A_2(t+\nu)^{2m}+\ldots\ldots ;$$

on aura, en multipliant par $(t+\nu)^n$, faisant $\nu=\frac{1}{t}$ et prenant la partie indépendante de t dans la supposition de m et n pairs, attendu que, pour qu'elle ne soit pas nulle, il faut qu'une partie des nombres n, $n+m$, $n+2m$, $n+3m$, ... soient pairs. On aura ainsi

$$\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{n}{2}}A_0+\frac{(n+m)\ldots\left(\frac{n+m}{2}+1\right)}{1\ldots\frac{n+m}{2}}A_1+$$

$$\frac{(n-2m)\ldots\left(\frac{n+2m}{2}+1\right)}{1\ldots\frac{n+2m}{2}}A_2+\ldots=\frac{1}{\varpi}\int \mathrm{Cos}\,nu\mathrm{f}(2\mathrm{Cos}.u)du \;.$$

Si l'on avait fait $m=1$ et $n=0$, on aurait eu

$$A_0+\frac{1}{1}A_2+\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}A_4+\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}A_6+\ldots\ldots=\frac{1}{\varpi}\int f(2\mathrm{Cos}.u)du\ .$$

Dans le cas particulier où la fonction $f(t, v)$, que nous avons considérée plus haut, a la forme $\psi(t)\times\varphi(u)$, en supposant

$$\psi(t)=\mathrm{S}.A_m t^m\ ,\qquad \varphi(v)=\mathrm{S}.B_m v^m\ ,$$

on aura

$$\mathrm{S}.A_m B_m \qquad \text{ou} \qquad A_0B_0+A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3+\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2\varpi}\int[\varphi(e^{+u\sqrt{-1}})\psi(e^{-u\sqrt{-1}})+\varphi(e^{-u\sqrt{-1}})\psi(e^{+u\sqrt{-1}})]du\ , \qquad (a)$$

c'est le théorème de Parseval.

Le cas le plus étendu où les imaginaires disparaissent étant déterminé par la condition $f(v, t)=f(v+t)$, on a ici la condition

$$f(v+t)=\varphi(v)+\psi(t)=\varphi(t)+\psi(v)\ ,$$

de laquelle on déduit facilement que les fonctions f, φ, ψ doivent avoir la forme exponentielle. En effet, on a, dans ce cas, la formule connue

$$\frac{1}{\varpi}\int e^{2\mathrm{Cos}.u}du=1+(\tfrac{1}{1})^2+(\tfrac{1}{1\cdot 2})^2+(\tfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3})^2+(\tfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4})^2+\ldots\ldots\ ,$$

que l'on pourrait aussi déduire de la formule (a) en y faisant $f(2\mathrm{Cos}.u)=e^{2\mathrm{Cos}.u}$.

Considérons présentement la seconde valeur de y_n, savoir

$$\frac{1}{\varpi}\,\mathrm{S}.y_x\int\mathrm{Cos}.(n-x)u\,du\ ,\qquad \left(\begin{matrix}u=0\\u=\varpi\end{matrix}\right)$$

le signe S s'étendant à tous les nombres entiers, depuis o jusqu'à ∞.

D'abord, on peut donner à cette quantité une forme beaucoup plus commode, en changeant les différences finies en des différentielles : c'est ce qu'on fait en supposant

$$x=\frac{x'}{\mathrm{d}x'}\,,\ n=\frac{n'}{\mathrm{d}x'}\,,\quad u=u'\mathrm{d}x'\,,\ y_x=\mathrm{f}(x')\,,\ y=\mathrm{f}(n')\,;$$

et effaçant ensuite les accens. On trouve ainsi

$$\mathrm{f}(n)=\frac{1}{\varpi}\int\mathrm{d}x\int\mathrm{d}u\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{Cos}.(n-x)u\,.\qquad\left(\begin{matrix}u=0\ ,\ x=0\\ u=\infty\ ,\ x=\infty\end{matrix}\right)$$

Observant de même que

$$0=\mathrm{S}.y_x\int\mathrm{Cos}.(n+x)u\,\mathrm{d}u\,;\qquad\left(\begin{matrix}u=0\\ u=\varpi\end{matrix}\right)$$

le signe S s'étendant depuis 0 jusqu'à ∞, d'où

$$0=\int\mathrm{d}x\int\mathrm{d}u\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{Cos}.(x+n)u\,,\qquad\left(\begin{matrix}u=0\ ,\ x=0\\ u=\infty\ ,\ x=\infty\end{matrix}\right)$$

on en tire les deux équations

$$\frac{\varpi}{2}\,\mathrm{f}(n)=\iint\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{Cos}.nu\,\mathrm{Cos}.xu\,,$$

$$\frac{\varpi}{2}\,\mathrm{f}(n)=\iint\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{Sin}.nu\,\mathrm{Sin}.xu\,,$$

qui sont dues à M. Fourier. Parmi un grand nombre de conséquences importantes qu'offre ce beau théorème, je vais rappeler quelques-unes des formules les plus simples et les plus remarquables de la théorie des intégrales définies, que les géomètres ont obtenues par d'autres voies.

Faisant, par exemple, $\mathrm{f}(x)=e^{-ax}$, on trouve

$\frac{\varpi}{2}$

$$\frac{\pi}{2}e^{-ax}=\int\frac{a\mathrm{d}u\mathrm{Cos}.nu}{a^2+u^2}=\int\frac{u\mathrm{d}u\mathrm{Sin}.nu}{a^2+u^2}; \qquad \left(\begin{matrix}u=0\\u=\infty\end{matrix}\right)$$

et l'on sait que ces formes servent de base à un grand nombre d'autres, plus ou moins élégantes, telles que

$$\int\frac{P\mathrm{Cos}.nu+Qu\mathrm{Sin}.nu}{M}\mathrm{d}u,$$

P, Q, M étant des fonctions quelconques rationnelles qui ne contiennent que des puissances paires de u, et M n'ayant aucun diviseur qui devienne zéro, pour des valeurs réelles positives de n.

De même, la fonction $\mathrm{F}(\mathrm{Cos}.u)$ étant développable, suivant des cosinus multiples, on fait dépendre de la même forme l'intégrale

$$\int\frac{\mathrm{F}(\mathrm{Cos}.u)\mathrm{d}u}{M};$$

et, dans le cas où $\mathrm{F}(\mathrm{Cos}.u)$ a la forme $\mathrm{Log}.(1+a\mathrm{Cos}.u)$, on sait que cette intégrale se ramène à une forme finie.

Soit encore

$$\mathrm{f}(x)=\int e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}\mathrm{d}t; \qquad \left(\begin{matrix}t=0\\t=\infty\end{matrix}\right)$$

dans ce cas, on aura

$$\frac{\pi}{2}\int e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}\mathrm{d}t=\int\int\int\mathrm{d}x\mathrm{d}u\mathrm{d}t\mathrm{Cos}.nu\mathrm{Cos}.xu.e.^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}$$

Intégrant par rapport à t, et faisant $t^2=v$, on aura

$$\frac{\sqrt{\pi}}{4}\int\int\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{Cos}.nu.e^{-v\left(\frac{u^2}{4}+1\right)}=\sqrt{\pi}\int\frac{\mathrm{d}u\mathrm{Cos}.nu}{4+u^2};$$

d'où, comme l'on sait,

$$\int e^{-t^2-\frac{n^2}{t^2}}dt=\frac{\sqrt{\varpi}}{2}e^{-2n}.$$

Mais, une des conséquences les plus générales du théoréme de M. Fourier, est celle par laquelle on fait dépendre une série $S.y_n F(x)$ d'une autre de la forme $S.y_x \genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Sin.}}{\text{Cos.}} nx$. En effet, si l'on fait

$$P=y_0+y_1\text{Cos.}u+y_2\text{Cos.}2u+\ldots..$$

on voit que

$$\frac{2}{\varpi}\iint F(x)\text{Cos.}xuP\,dx\,du=y_0F(0)+y_1F(1)+y_2F(2)+\ldots\ldots,$$

or, nous avons vu que, par le thorème de Parseval, on fait dépendre cette série des deux suivantes

$$y_0+y_1t+y_2t^2+y_3t^3+\ldots\ldots,$$

$$F(0)+F(1)t+F(2)t^2+\ldots\ldots;$$

mais l'introduction des imaginaires rend, en général, la première de ces deux méthodes préférable à la seconde, dans tous les cas où la quantité P en est débarrassée ; comme, par exemple, lorsque les quantités y_0, y_1, y_2, ... forment une suite de puissances.

Les recherches que je viens d'exposer me paraissent donner les développemens nécessaires au principe général que j'ai présenté au commencement de ce mémoire. On en déduit une infinité d'autres, en répétant et combinant les différentes opérations qu'on y trouve exposées, et sur-tout en différentiant et intégrant par rapport à de nouvelles variables.

GÉOMÉTRIE.

Démonstration géométrique de diverses propriétés de l'ellipse et de l'ellipsoïde ;

Par M. J. B. DURRANDE, professeur de physique au collége royal de Cahors.

THÉORÈME I. Parmi tous les quadrilatères inscrits à une même ellipse, le PARALLÉLOGRAMME CONJUGUÉ, *c'est-à dire, le quadrilatère inscrit dont les sommets sont aux extrémités de deux diamètres conjugués, est celui dont l'aire est un* maximum ; *et, parmi tous les quadrilatères circonscrits, le* PARALLÉLOGRAMME CONJUGUÉ, *c'est-à-dire, le quadrilatère dont les points de contact sont aux extrémités de deux diamètres conjugués, est celui dont l'aire est un* minimum.

Démonstration. Soit projetée orthogonalement l'ellipse, sur un plan parallèle à son petit axe, et tellement incliné, par rapport au sien, que les projections de ses deux axes soient de même longueur ; la projection sera dès-lors un cercle ; et la projection de tout quadrilatère inscrit ou circonscrit sera un quadrilatère inscrit ou circonscrit au cercle ; de plus, les aires de deux quadrilatères quelconques, inscrits ou circonscrits à l'ellipse seront entre elles dans le même rapport que celles de leurs projections. Donc, le plus grand quadrilatère inscrit et le plus petit quadrilatère circonscrit à l'ellipse seront ceux dont les projections seront le plus grand quadrilatère inscrit et le plus petit quadrilatère circonscrit au cercle ; or, il est connu, et il est d'ailleurs très-facile de démontrer que ces derniers sont des quarrés ; et comme d'ailleurs, dans le cas actuel, les parallélogrammes conjugués, inscrits et circonscrits, sont les seuls dont les projections puissent être telles ; il en résulte qu'eux seuls peuvent être *maximums* et *minimums*.

Corollaire. Il suit de là, entre autres conséquences, que, parmi toutes les ellipses circonscrites ou inscrites à un même parallélogramme, l'ellipse circonscrite de telle sorte qu'elle ait pour diamètres conjugués les deux diagonales du parallélogramme, et l'ellipse inscrite de manière qu'elle ait pour diamètres conjugués les droites qui joignent les milieux de ses côtés opposés sont, la première *minimum* et la seconde *maximum*.

*THÉORÈME II. Parmi tous les octaèdres hexagones inscrits à un même ellipsoïde, de telle sorte que leurs sommets soient les extrémités de trois diamètres de l'ellipsoïde, l'*OCTAÈDRE CONJUGUÉ*, c'est-à-dire, l'octaèdre inscrit dont les sommets sont les extrémités de trois diamètres conjugués, est celui dont le volume est un* maximum ; *et, parmi tous les hexaèdres octogones circonscrits, de telle sorte que leurs points de contact soient les extrémités de trois diamètres de l'ellipsoïde, l'*HEXAÈDRE CONJUGUÉ*, c'est-à-dire, l'hexaèdre circonscrit dont les points de contact sont les extrémités de trois diamètres conjugués, est celui dont le volume est un* minimum.

Démonstration. 1.° Si, parmi les octaèdres hexagones inscrits, dont les sommets sont les extrémités de trois diamètres de l'ellipsoïde, l'octaèdre conjugué n'était pas le plus grand, il faudrait que, dans l'octaèdre *maximum* inscrit, deux au moins des diagonales ne fussent pas conjuguées l'une à l'autre, et ne fussent pas conséquemment des diamètres conjugués de la section elliptique qui les contient. Or, le plan de cette section divise l'octaèdre en deux pyramides quadrangulaires de même hauteur, ayant base commune, laquelle ne serait pas (*Théorème I.*) le plus grand quadrilatère inscrit à l'ellipse; en lui substituant donc ce plus grand quadrilatère inscrit, et en conservant d'ailleurs les mêmes sommets, on obtiendrait un nouvel octaèdre inscrit, composé de deux pyramides de même hauteur que les premières, mais d'une plus grande base, et conséquemment d'un plus grand volume; cet octaèdre serait donc plus grand que le premier, qui par conséquent ne saurait être l'octaèdre *maximum*.

2.° Si, parmi les hexaèdres octogones circonscrits, dont les points de contact sont les extrémités de trois diamètres de l'ellipsoïde, l'hexaèdre conjugué n'était pas le plus petit, il faudrait que dans l'hexaèdre *minimum* circonscrit, deux au moins des droites qui joignent les points de contact opposés ne fussent pas conjuguées l'une à l'autre, et ne fussent pas conséquemment deux diamètres conjugués de la section elliptique qui les contient. Or, le plan de cette section divise l'hexaèdre total en deux hexaèdres partiels de même hauteur, ayant base commune, laquelle ne serait pas (*Théorème I*) le plus petit quadrilatère circonscrit à l'ellipse; en lui substituant donc ce plus petit quadrilatère circonscrit, et en conservant d'ailleurs les plans des deux faces de l'hexaèdre total qui lui sont parallèles, on obtiendrait un nouvel hexaèdre circonscrit, composé de deux hexaèdres partiels de même hauteur que les premiers, mais d'une moindre base, et conséquemment d'un moindre volume; cet hexaèdre serait donc moindre que le premier, qui par conséquent ne saurait être l'hexaèdre *minimum*.

Corollaire. Il résulte de là, 1.° qu'entre tous les ellipsoïdes circonscrits à un même hexaèdre octogone, dans lequel les trois diagonales se coupent au même point par leurs milieux, le plus petit est celui qui a ces trois diagonales pour diamètres conjugués; 2.° qu'entre tous les ellipsoïdes inscrits à un même hexaèdre octogone, à faces parallèles, le plus grand est celui qui a pour diamètres conjugués les droites qui joignent les centres des faces opposées de cet hexaèdre.

THÉORÈME III. Il y a toujours une infinité de triangles ; soit inscrits , soit circonscrits à une même ellipse , tous équivalens entre eux , tels que le centre de gravité de leur surface coïncide avec le centre de l'ellipse. Les inscrits sont maximums *et les circonscrits* minimums *; entre tous les triangles inscrits et circonscrits à cette même ellipse.*

Démonstration. Soit encore projetée orthogonalement l'ellipse, de telle sorte que sa projection soit un cercle ; le centre de ce cercle sera la projection de son centre ; et la projection de tout triangle inscrit ou circonscrit à l'ellipse sera un triangle inscrit ou circonscrit au cercle , en outre , le rapport des aires de deux triangles inscrits ou circonscrits à l'ellipse sera le même que celui des aires de leurs projections ; enfin , la projection du centre de gravité de l'aire de chacun de ces triangles sera le centre de gravité de l'aire de sa projection.

Cela posé, soient inscrits ou circonscrits au cercle, projection de l'ellipse, tant de triangles équilatéraux qu'on voudra, ils seront tous égaux , et auront tous pour centre commun de gravité le centre même de ce cercle ; les triangles inscrits ou circonscrits à l'ellipse dont ils seront la projection seront donc tous équivalens et auront aussi leur centre commun de gravité au centre même de cette ellipse ; ce qui démontre déjà la première partie du théorème. En outre , comme il est connu et d'ailleurs facile de démontrer que le triangle équilatéral est à la fois le plus grand de tous les triangles inscrits et le plus petit de tous les triangles circonscrits à un même cercle ; il s'ensuit que nos triangles inscrits et circonscrits à l'ellipse , dont ceux-ci seront les projections , seront les premiers *maximums* et les derniers *minimums*, entre tous les triangles inscrits ou circonscrits à la même courbe.

Corollaire. Il résulte de là que , parmi toutes les ellipses circonscrites et inscrites à un même triangle , celles dont le centre coïncide avec le centre de gravité de l'aire du triangle sont, les premières *minimums* et les dernières *maximums* (*).

Remarques I. Lorsqu'on veut construire un *triangle inscrit maximum*, on peut prendre un de ses sommets en un point quelconque de la courbe ; et alors il suffit de prendre, pour le côté opposé, la corde qui, coupant le diamètre qui part de ce sommet aux trois quarts de sa longueur, est parallèle au conjugué de ce diamètre ; d'où l'on voit que la tangente menée à la courbe par chacun des sommets d'un tel triangle est parallèle au côté opposé.

II. Lorsqu'on veut construire un *triangle circonscrit minimum*, on peut prendre pour direction de l'un des côtés une tangente quelconque à la courbe ; et alors il suffit de prendre pour sommet opposé l'extrémité du diamètre qui part du point de contact, prolongé hors de l'ellipse d'une quantité égale à la moitié de sa longueur ; d'où l'on voit que la corde de contact de l'un des angles d'un tel triangle est parallèle au côté qui lui est opposé.

III. Il résulte de là que si deux triangles sont, l'un inscrit et l'autre circonscrit à une même ellipse, de telle sorte que les sommets de l'inscrit soient les points de contact du circonscrit ; si l'inscrit est *maximum*, le circonscrit sera *minimum*, et réciproquement ; et les côtés de ces deux triangles seront parallèles chacun à chacun, de manière qu'ils seront semblables.

THÉORÈME IV. Il y a toujours une infinité de tétraèdres, soit inscrits, soit circonscrits à un même ellipsoïde, tous équivalens entre eux, tels que le centre de gravité de leur volume coïncide avec le centre de l'ellipsoïde. Les inscrits sont maximums *et les circonscrits* minimums, *entre tous les tétraèdres inscrits et circonscrits à ce même ellipsoïde.*

(*) Le *Théorème I* et celui-ci peuvent servir de complément au *Mémoire de M.* FERRIOT, inséré à la page 240 du II.e volume de ce recueil.

J. D. G.

Démonstration. 1.° Soit pris pour l'un des sommets d'un tétraèdre inscrit à l'ellipsoïde un quelconque des points de cette surface Soit déterminé le plan de la face opposée de telle sorte que, coupant le diamètre qui part de ce sommet aux deux tiers de sa longueur, il soit parallèle au plan conjugué à ce diamètre. Soit inscrit à la section elliptique déterminée par ce plan dans l'ellipsoïde un triangle tel que le centre de gravité de sa surface coïncide avec le centre de l'ellipse ; ce qui se pourra (*Théorème III*) d'une infinité de manières différentes ; en considérant ce triangle comme la face opposée du tétraèdre, il est visible que le centre de l'ellipsoïde se trouvera aux trois quarts de la droite menée d'un sommet de ce tétraèdre au centre de gravité de l'aire de la face opposée ; c'est-à-dire, au centre de gravité même du volume du tétraèdre ; et comme, dans cette construction, l'un des sommets est arbitraire, et qu'en outre le triangle qui forme la face opposée peut être construit d'une infinité de manières différentes ; il s'ensuit qu'en effet il existe une infinité de tétraèdres inscrits ; tels que le centre de gravité de leur volume coïncide avec le centre de l'ellipsoïde.

2.° Il est facile de se convaincre, en second lieu, que tous ces tétraèdres sont équivalens. En effet, si l'on en considère deux quelconques, ils auront ou n'auront pas un sommet commun. Dans le premier cas, leurs bases seront deux triangles inscrits à une même ellipse, ayant pour centre commun de gravité le centre même de cette courbe ; ces triangles seront donc équivalens (*Théor. III*) ; les deux tétraèdres auront donc même hauteur et bases équivalentes, et par conséquent ils seront eux-mêmes équivalens.

Si les deux tétraèdres n'ont aucun sommet commun, ils n'auront pas non plus deux faces situées dans un même plan, et conséquemment les plans des faces opposées à deux sommets quelconques se couperont ; les sections elliptiques déterminées par ces plans auront donc deux points communs ; on pourra donc prendre l'un de ces points pour sommet commun de deux triangles inscrits à ces ellipses de telle sorte que leurs centres de gravité respectifs coïncident avec les

les centres des deux courbes. Ces triangles étant (*Théorème I*) équivalens aux deux faces que nous considérions d'abord, ils pourront leur être substitués, sans qu'il en résulte aucun changement dans les volumes des deux tétraèdres ; mais les deux tétraèdres résultans, se trouvant alors avoir un sommet commun, à l'intersection des deux ellipses, devront, par ce qui précède, être équivalens ; d'où il suit que les premiers devaient l'être également.

3.° Enfin, chacun de ces tétraèdres est un *maximum*, entre tous ceux que l'on peut inscrire à l'ellipsoïde. Si, en effet, on prétendait nier cette proposition, il faudrait admettre que, dans le tétraèdre *maximum* il y a au moins un sommet tel que le plan tangent à l'ellipsoïde qu'on y fait passer n'est point parallèle à la face opposée ; or, dans ce cas, en menant à l'ellipsoïde un plan tangent parallèle à cette face, et en transportant à son point de contact le sommet du tétraèdre, on formerait un nouveau tétraèdre inscrit de même base que le premier, mais d'une plus grande hauteur, et par conséquent d'un plus grand volume ; celui-là ne saurait donc être le tétraèdre *maximum*, comme on le suppose.

4.° Voilà donc notre théorème complètement démontré, en ce qui concerne les tétraèdres inscrits ; et il nous sera facile de conclure de là ce qui est relatif aux tétraèdres circonscrits. Remarquons d'abord que du mode de construction du tétraèdre *maximum* inscrit, il résulte que le plan tangent à l'ellipsoïde, par chacun de ses sommets, est parallèle à la face opposée ; d'un autre côté, les plans tangens à l'ellipsoïde par ses quatre sommets forment un tétraèdre circonscrit à cet ellipsoïde ainsi qu'au tétraèdre inscrit ; or, il est connu que deux tétraèdres circonscrits l'un à l'autre, de telle sorte que les plans des faces correspondantes soient parallèles ont le centre de gravité de leur volume au même point ; puis donc que le centre de gravité de l'inscrit est au centre de l'ellipsoïde celui du circonscrit y sera aussi. Ainsi, la recherche du tétraèdre circonscrit qui ait son centre de gravité au centre de l'ellipsoïde, se réduit à construire un tétraèdre inscrit qui jouisse de cette propriété, et à prendre ensuite les sommets de celui-ci pour points de contact des faces de l'autre; et il est même aisé de voir que ces points de contact seront en même temps les centres de gravité respectifs des aires des faces auxquelles ils appartiendront. Or, comme le tétraèdre inscrit peut être construit d'une infinité de manières différentes, il doit en être de même du tétraèdre circonscrit.

5.° Il est connu que, lorsque deux tétraèdres sont circonscrits l'un à l'autre, de manière que les faces correspondantes soient parallèles, le volume du circonscrit est 27 fois plus grand que celui de l'inscrit; donc chacun des tétraèdres circonscrits à l'ellipsoïde de manière que leur centre de gravité coïncide avec le centre de cette surface, est 27 fois plus grand que l'inscrit qui lui correspond; puis donc que le volume de ce dernier est constant, le volume du premier doit l'être aussi.

6.° Il reste à prouver que le tétraèdre circonscrit dont le centre de gravité coïncide avec le centre de l'ellipsoïde ou, ce qui revient au même, qui touche l'ellipsoïde aux centres de gravité des aires de ses faces; est le tétraèdre *minimum*, parmi tous ceux qui peuvent être circonscrits à cet ellipsoïde. Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi; il faudra admettre que, dans le tétraèdre circonscrit *minimum*, une des faces, au moins, n'a pas son point de contact à son centre de gravité. Or, si l'on circonscrit à l'ellipsoïde une surface conique qui ait pour sommet le sommet opposé, la section de cette surface conique par le plan de la face dont il s'agit sera une ellipse à laquelle cette face sera circonscrite. Il faudra donc que cette même face soit le triangle *minimum* circonscrit à l'ellipse, puisque, dans le cas contraire, en lui substituant le triangle *minimun*, on formerait un nouveau tétraèdre circonscrit, de même hauteur que le premier, mais d'une base plus petite, et conséquemment d'un moindre volume. Il faut donc que le centre de gravité de l'aire du triangle coïncide avec le centre de l'ellipse, ce qui ne peut avoir lieu à moins que ce centre de gravité ne soit le point de contact du plan de ce même triangle avec l'ellipsoïde.

Corollaire. Il suit de là que, parmi tous les ellipsoïdes circonscrits et inscrits à un même tétraèdre, ceux dont le centre coïncide avec le centre de gravité du volume du tétraèdre sont, les premiers *minimums* et les derniers *maximums* (*).

Pour compléter cette théorie, il resterait à assigner, 1.° la plus grande ellipse circonscrite à un quadrilatère quelconque; 2.° le plus grand ellipsoïde inscrit à un hexaèdre octogone quelconque; 3.° le plus petit ellipsoïde circonscrit à un octaèdre hexagone quelconque. Si nous sommes assez heureux pour jamais parvenir à ces diverses déterminations, nous nous empresserons de faire connaître les résultats auxquels nous serons parvenus.

(*) Nous croyons devoir rappeler ici que les corollaires des théorèmes III et IV ont déjà été directement démontrés, par l'analise, dans un *Mémoire* de M. Bérard, inséré à la page 284 du IV.e volume de ce recueil.

J. D. G.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. Les directions de deux systèmes de diamètres conjugués d'une même ellispse étant donnés, assigner la direction et le rapport de grandeur de ses deux diamètres principaux ?

II. Quel est le lieu des centres des surfaces du second ordre qui passent par 7 ou 8 points donnés, ou bien qui touchent 7 ou 8 plans donnés?

Théorèmes de Géométrie.

I. La droite qui va du sommet de l'angle circonscrit à une section conique au centre de cette courbe divise la corde de contact en deux parties égales.

II. La droite qui va du sommet du cône circonscrit à une surface du second ordre au centre de cette surface, passe par le centre de la ligne de contact.

GÉOMÉTRIE DES COURBES.

Recherches diverses sur le lieu des centres des sections coniques, assujetties à moins de conditions que n'en exige leur détermination complète; renfermant, en particulier, la solution des deux problèmes de géométrie proposés à la page 372 du XI.e volume de ce recueil;

Par M. PONCELET, capitaine du génie, ancien élève de l'école polytechnique.

PROBLÈME. *Déterminer le lieu des centres de toutes les sections coniques qui, touchant à la fois deux droites données, passent en outre par deux points donnés?*

Solution. Concevons une droite, par les deux points dont il s'agit; sa direction indéfinie sera celle d'une sécante commune, à la fois, à toutes les sections coniques proposées; ainsi, nous pouvons poser la question d'une manière plus générale, comme il suit:

Quel est le lieu des centres de toutes les sections coniques qui, ayant une corde commune, toucheraient en outre deux droites données?

La corde commune donnée pouvant être aussi bien une *corde idéale* qu'une *corde réelle*, relativement à toutes les sections coniques dont il s'agit (*), et le système de ces dernières devant jouir des mêmes propriétés dans les deux cas; on peut, en général, considérer ce système comme la projection ou perspective d'un autre système composé de circonferences de cercles, pour lesquelles la corde ou sécante commune est passée toute entière à l'infini; mais, dans ce nouveau système, les centres des sections coniques seront évidemment représentés par les pôles de la droite qui, sur le plan des sections coniques, est elle-même à l'infini; car la polaire du centre d'une telle courbe est nécessairement à l'infini; donc, la question est definitivement ramenée à cette autre purement élémentaire :

Quel est le lieu des pôles d'une droite donnée, par rapport à une suite de cercles quelconques tangens, à la fois, à deux droites données sur un plan?

Or, ces cercles présentent deux séries bien distinctes; l'une qui appartient à l'angle même formé par les deux droites données, l'autre qui appartient au supplément de cet angle. Dans l'une et l'autre, les centres des cercles demeurent sur une droite partageant l'angle correspondant en deux parties égales, tandis que les cordes de contact avec les côtés de cet angle se meuvent parallèlement à elles-mêmes et à la ligne des centres de l'autre série, c'est-à-dire, concourent avec elle en un point de la sécante à l'infini, commun, à la fois, à tous les cercles; enfin, il est facile de prouver, soit géométriquement, soit analitiquement, que le lieu des pôles d'une droite quelconque, donnée sur le plan de ces cercles, est, pour chacune des séries dont ils se composent, une section conique passant par le sommet commun des angles que l'on considère, et touchant en ce point la droite des centres qui lui correspond. Si donc on se reporte à la figure primitive, où les

(*) Voyez, sur les *cordes idéales*, le rapport inséré à la page 69 du XI.e volume du présent recueil.

cercles sont remplacés par des sections coniques quelconques, ayant une sécante commune, on en conclura sans peine,

1.° Que ces sections coniques forment deux séries distinctes, dont les cordes de contact avec les deux droites données pivotent séparément sur deux points fixes placés sur la sécante qui leur est à la fois commune (*), et divisant *harmoniquement*, ou en segmens proportionnels, tant la corde correspondante que la portion de la sécante comprise entre les deux droites données.

2.° Que ces deux points fixes sont en outre tels que l'un quelconque d'entre eux est le pôle de la droite qui passe par l'autre et par le sommet de l'angle des droites, relativement à toutes les sections coniques proposées.

3.° Que le lieu des centres de l'une quelconque des séries formées par ces sections coniques est lui-même une autre section conique passant par le sommet de l'angle des deux droites données, et touchant en ce point la polaire du point sur lequel pivotent les cordes de contact appartenant à cette série.

La discussion apprend en outre,

4.° Que chacune des deux courbes des centres passe par le milieu de la distance qui sépare entre eux les deux points donnés et par le milieu de la partie interceptée par les droites données sur la direction de la sécante commune qui contient les deux mêmes points.

5.° Qu'enfin le centre commun des deux courbes dont il s'agit est au point milieu de la distance qui sépare le sommet de l'angle des deux droites données et le point milieu, déjà mentionné, de la distance qui sépare les deux points donnés.

D'après cela, on voit que les deux sections coniques, lieux des

(*) *Mémoire sur les lignes du second ordre*; par M. BRIANCHON, art. XV et XVI.

centres des proposées ne diffèrent entre elles que par la direction de la tangente au sommet de l'angle des deux droites données.

Comparons maintenant ces résultats avec ceux de la page 395 du XI.e volume de ce recueil.

Soient CX, CY (fig. 1) les deux droites données, prises respectivement, comme à l'endroit cité, pour axes des x et des y; nommons pareillement a, b, a', b' les coordonnées des points donnés A, A'.

Cela posé, on aura d'abord, pour l'équation de la droite AA',

$$y-b=\frac{b-b'}{a-a'}(x-a) .$$

Soient x', y' les coordonnées du milieu k de la partie XY de cette droite interceptée entre les axes; nous aurons

$$x'=-\tfrac{1}{2}\frac{ab'-ba'}{b-b'} , \quad y'=+\tfrac{1}{2}\frac{ab'-ba'}{a-a'} .$$

Soient de plus x'', y'' les coordonnées du milieu I de la distance AA'; nous aurons

$$x''=\frac{a+a'}{2}, \quad y''=\frac{b+b'}{2} .$$

Soient enfin x''', y''' les coordonnées du milieu O de la droite CI, nous aurons

$$x'''=\frac{a+a'}{4} , \quad y'''=\frac{b+b'}{4} .$$

Reste à déterminer la direction des droites CP, CQ, qui passent par l'origine C, et renferment les points P, Q sur lesquels pivotent les cordes de contact respectives appartenant aux deux séries de sections coniques proposées ; car, d'après ce qui précède, on aura tout ce qu'il faut pour déterminer complètement le lieu des centres de l'une et de l'autre séries.

Soient α, β les coordonnées de l'un P des deux points fixes dont il s'agit ; l'équation de la droite correspondante CP sera

$$y=\frac{\beta}{\alpha}x=\lambda x,$$

en faisant, pour abréger, $\beta=\lambda\alpha$; de sorte que tout consiste à déterminer λ.

On pourrait, à cet effet, employer le calcul algébrique ; mais il exigerait une suite d'opérations très-pénibles. On parviendra plus simplement au même but, en employant les relations obtenues par la géométrie. En effet, indépendamment de celles déjà signalées ci-dessus, et qui suffisent pour déterminer le point P que l'on considère en particulier, on a encore la suivante, qu'il serait, au surplus, facile d'en déduire, si déjà elle ne se trouvait toute établie,

$$\frac{\overline{PX}^2}{\overline{PY}^2}=\frac{AX}{AY}\cdot\frac{A'X}{A'Y}\ (*)\ ;$$

Mais, en abaissant de l'un quelconque A des deux points donnés, les coordonnées Aa, Ab, sur les axes CX, CY, on a, par les triangles semblables AaX, AbY, CXY,

$$\frac{AX}{Aa}=\frac{XY}{CY}, \qquad \frac{AY}{Ab}=\frac{XY}{CX};$$

d'où

$$\frac{AX}{AY}=\frac{CX}{CY}\cdot\frac{Aa}{Ab}=\frac{CX}{CY}\cdot\frac{b}{a}:$$

On aurait de même

(*) Voyez l'ouvrage déjà cité, art. XV.

$$\frac{A'X}{A'Y}=\frac{CX}{CY}\cdot\frac{b'}{a'};$$

et de plus

$$\frac{PX}{PY}=\frac{CX}{CY}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=\frac{CX}{CY}\cdot\lambda;$$

donc

$$\frac{AX}{AY}\cdot\frac{A'X}{A'Y}=\left(\frac{CX}{CY}\right)^2\cdot\frac{bb'}{aa'}=\left(\frac{CX}{CY}\right)^2\lambda^2,$$

et par conséquent

$$\lambda=\pm\sqrt{\frac{bb'}{aa'}}.$$

De ces deux valeurs, l'une appartient évidemment au point P que l'on considère et l'autre au point Q, puisque ces deux points doivent jouir des mêmes propriétés. D'après cela, on a tout ce qu'il faut pour déterminer tous les élémens de l'une et de l'autre courbes, lieux des centres des coniques proposées ; car, en ne considérant que l'une d'entre elles, puisqu'elle passe par l'origine, son équation sera de la forme

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2A'x+2B'y=0;$$

On exprimera qu'elle touche la droite CP (*) en écrivant

$$A'+\lambda B'=0;$$

devant ensuite passer par le point K, milieu de XY, et devant en outre avoir son centre au milieu O de CI, on aura encore

(*) *Annales*, tom. IX, pag. 131.

$$Ax'^2+By'^2+2cx'y'+2A'x'+2B'y'=0\ ,$$

$$Ax'''+Cy'''+A'=0\ ,\qquad By'''+Cx'''+B'=0\ .$$

Remplaçant donc x', y', x''', y''' par leurs valeurs trouvées ci-dessus, ces trois dernières équations deviendront

$$\left.\begin{array}{l}(a-a')^2(ab'-ba')A-4(b-b')(a-a')^2A'\\+(b-b')^2(ab'-ba')B+4(a-a')(b-b')^2B'\end{array}\right\}-2(a-a')(b-b')(ab'-ba')C=0\ ,$$

$$(a+a')A+(b+b')C+4A'=0\ ,$$

$$(b+b')B+(a+a')C+4B'=0\ ;$$

en y joignant donc l'équation $A'+\lambda B'=0$, on en tirera

$$B=\frac{(a-a')^2}{(b-b')^2}A\ ,$$

$$C=-\frac{(a+a')(b-b')^2+(b+b')(a-a')^2\lambda}{(b-b')^2[(b+b')+\lambda(a+a')]}A\ ;$$

$$A'=\frac{(a-a')^2(b+b')^2-(a+a')^2(b-b')^2}{4(b-b')^2[(b+b')+\lambda(a+a')]}\lambda A\ ,$$

$$B'=-\frac{(a-a')^2(b+b')^2-(a+a')^2(b-b')^2}{4(b-b')^2[(b+b')+\lambda(a+a')]}A\ ;$$

substituant donc ces valeurs dans l'équation

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2A'x+2B'y=0\ ,$$

divisant par A, remettant successivement pour λ ses deux valeurs $+\sqrt{\frac{bb'}{aa'}}$, $-\sqrt{\frac{bb'}{aa'}}$, et chassant les dénominateurs, on aura, pour les équations des deux courbes, lieux des centres,

$$4(b-b')^2\left\{(b+b')+(a+a')\sqrt{\frac{bb'}{aa'}}\right\}x^2+4(a-a')^2\left\{(b+b')+(a+a')\sqrt{\frac{bb'}{aa'}}\right\}y^2$$

$$-8\left\{(a+a')(b-b')^2+(b+b')(a-a')^2\sqrt{\frac{bb'}{aa'}}\right\}xy$$

$$+2\{(a-a')^2(b+b')^2-(a+a')^2(b-b')^2\}\sqrt{\frac{bb'}{aa'}}\,x-2\{(a-a')^2(b+b')^2-(a+a')^2(b-b')^2\}y=0\ ;$$

et

$$4(b-b')^2\left\{(b+b')-(a+a')\sqrt{\frac{bb'}{aa'}}\right\}x^2+4(a-a')^2\left\{(b+b')-(a+a')\sqrt{\frac{bb'}{aa'}}\right\}y^2$$

$$-8\left\{(a+a')(b-b')^2-(b+b')(a-a')^2\sqrt{\frac{bb'}{aa'}}\right\}xy$$

$$-2\{(a-a')^2(b+b')^2-(a+a')^2(b-b')^2\}\sqrt{\frac{bb'}{aa'}}\,x-2\{(a-a')^2(b+b')^2-(a+a')^2(b-b')^2\}y=0\ ;$$

Pour rapprocher ces résultats de ceux obtenus à l'endroit déjà cité, il ne s'agit plus que de multiplier entre elles les deux équations qui précèdent ; car, si tout est exact de part et d'autre, on devra obtenir une équation du quatrième degré qui ne pourra différer au plus que par un facteur fonction des données de celle à laquelle on est parvenu au même endroit. Cette opération est nécessairement très-longue et très-laborieuse ; néanmoins nous avons eu le courage de l'entreprendre, et le plaisir d'en voir ressortir une vérification complète des raisonnemens géométriques qui précèdent, et qui s'étendent, comme on le voit, au cas où les points donnés sont imaginaires, et où la droite XY, qui passe par ces points, est par conséquent une sécante idéale, commune à toutes les sections coniques proposées.

En multipliant, en effet, nos deux équations entre elles, développant et observant que les diverses fonctions

aa'

$$aa'(b+b')^2-bb'(a+a')^2\ ,$$

$$aa'(b-b')^2-bb'(a-a')^2\ ;$$

$$aa'(b^2+b'^2)-bb'(a^2+a'^2)\ ,$$

$$\frac{(a+a')^2(b-b')^2-(b+b')^2(a-a')^2}{4}\ ,$$

$$-(ab-a'b')(ab'-ba')\ ,$$

sont toutes équivalentes, on trouvera que tous les termes de l'équation produit sont exactement divisibles par la quantité constante

$$\frac{4\left\{(a+a')^2(b-b')^2-(b+b')^2(a-a')^2\right\}}{aa'}\ ;$$

en supprimant donc ce facteur, on parviendra à l'équation du quatrième degré

$$\left.\begin{array}{l}\begin{array}{l}(b-b')^4x^4-4(a+a')(b+b')^2(b-b')x^3y\\ +(a-a')^4y^4-4(a+a')(b+b')^2(a-a')xy^3\end{array}\ +\left\{3(a-a)^2(b-b')^2+8aa'(b-b')^2+8bb'(a-a')^2\right\}x^2y^2\\ +4(a+a')(b-b')^2x^3-4(a+a')\left\{2aa'(b-b')^2-bb'(a-a')^2\right\}xy^2+4bb'\left\{bb'(a-a')^2-aa'(b-b')^2\right\}x^2\\ +4(b+b')(a-a')^2y^3-4(b+b')\left\{2bb'(a-a')^2-aa'(b-b')^2\right\}x^2y+4aa'\left\{aa'(a-a')^2-bb'(b-b')^2\right\}y^2\end{array}\right\}=0;$$

or, c'est à cela que revient exactement l'équation de la page 393 du tom. XI.e, en la développant et l'ordonnant comme celle-ci; ainsi, cette équation est décomposable en deux facteurs représentant chacun une section conique, conformément à ce qui avait été annoncé.

Supposons qu'il s'agisse de rechercher, parmi toutes les sections coniques qui, passant par les points A, A', touchent les droites données CX, CY, celles d'entre elles qui sont en même temps des hyperboles équilatères; ces hyperboles pouvant faire partie de l'une ou de l'autre séries de sections coniques proposées. Supposons, pour plus de simplicité, qu'on ne considère que celles dont les cordes de contact avec la droite donnée passent toutes par le point fixe P. D'après ce qui précède, ces hyperboles devront avoir leur centre quelque part, sur une section conique, passant par C, I, K, ayant la droite CI pour diamètre et CQ pour tangente à l'extrémité C de ce diamètre ; de telle sorte que la parallèle IL à CQ est la tangente à l'autre extrémité I de ce diamètre. Pour résoudre entièrement la question, il ne s'agit donc plus que de trouver une autre ligne qui renferme également les centres des hyperboles équilatères ; car on aura tout ce qu'il faut pour les déterminer d'une manière complète (*).

Nous avons vu ci-dessus que la droite CQ n'était autre chose que la polaire du point P, par rapport à toutes les sections coniques passant par A, A′ et touchant les deux droites données ; donc elle est aussi la polaire de ce point par rapport à chacune des hyperboles que l'on cherche ; mais, d'un autre côté, I est le point milieu de la corde AA′, commune à ces hyperboles; donc

« Si, par chacun des points I, P, on mène une parallèle à
» la polaire ou à la corde qui passe par l'autre, le cercle qui
» passera par ces deux points et par celui où se coupent les pa-
» rallèles, passera aussi par le centre des hyperboles cherchées (**) »

Il résulte évidemment de là que le cercle qui passe par I et P et touche la parallèle IL à la polaire CQ de P doit renfermer les centres des hyperboles équilatères cherchées ; de sorte que ces centres doivent se trouver à l'intersection de ce cercle et de la section conique déjà construite, et qui a IL pour tangente commune avec lui au point I.

(*) Voyez le tome XI du présent recueil, page 212, Théorème VI.

(**) *Ibid.* pag. 208, Théor. III.

Le point I ne pouvant être évidemment le centre d'une hyperbole équilatère satisfaisant aux conditions du problème, il s'ensuit que, relativement à la série de sections coniques que l'on considère, et dont les cordes de contact passent par P, le problème ne peut avoir que deux solutions au plus, et par conséquent quatre solutions seulement, quand on le considère dans toute sa généralité. On peut d'ailleurs éviter entièrement le tracé de la section conique auxiliaire lieu des centres, en observant que tout consiste à rechercher les points d'intersection du cercle correspondant avec la sécante qui est commune à ce cercle et à la section conique auxiliaire.

Dans un ouvrage que nous ferons paraître incessamment, nous donnerons le moyen de construire directement la sécante commune au système de deux sections coniques qui se touchent sur un plan, sans recourir au tracé des deux courbes. Il serait trop long de développer ici le principe de cette construction ; c'est pourquoi nous nous contenterons d'indiquer la solution appliquée au cas particulier qui nous occupe ; on sait d'ailleurs construire les deux points P, Q : tout consiste, en effet (*), à faire passer un cercle quelconque par les points donnés A, A' ; menant ensuite des points X, Y deux paires de tangentes à ce cercle, et joignant deux à deux, par des droites, les points de contact qui n'appartiennent pas à une même paire de tangente ; ces quatre droites donneront évidemment, par leur croisement mutuel, les deux points P, Q dont il s'agit.

Cela posé, soit G le second point d'intersection de CI et du cercle qui renferme les centres des hyperboles équilatères que l'on considère en particulier, en menant PG, cette droite ira rencontrer la droite CK en un premier point x de la sécante commune ; menant ensuite la tangente au point G du cercle, cette dernière

---

(*) *Mémoire sur les lignes du second ordre ;* par M. BRIANCHON, pag. 21.

droite ira rencontrer CQ en un second point y de la sécante commune, qui se trouvera ainsi complètement déterminée, et coupera, en général, notre cercle en deux points qui seront les centres des hyperboles demandées.

On voit, d'après cela, en quoi consiste l'inadvertance commise dans l'énoncé du *Théorème X* de la page 218 du tome XI des *Annales*; on n'y a considéré qu'un seul cercle, au lieu de deux qu'il fallait envisager; et l'on a appliqué à ce cercle unique les propriétés qui lui appartenaient en commun avec l'autre. Voici donc le nouvel énoncé qu'il faut substituer au premier :

Les centres de toutes les hyperboles équilatères, au nombre de quatre au plus, tangentes à deux droites et passant par deux points donnés, sont situés sur deux circonférences de cercles distinctes, aux intersections respectives de ces circonférences et de deux droites faciles à déterminer.

D'après ce qui vient d'être dit sur le lieu des centres des sections coniques assujetties à passer par deux points et à toucher deux droites données, on pourrait penser que le lieu des centres des sections coniques assujetties à passer par trois points et à toucher une droite donnée, qui se présente, comme le premier, sous la forme d'une courbe du quatrième degré, doit aussi être le système de deux sections coniques, et que conséquemment le premier membre de l'équation du quatrième degré qui exprime ce lieu doit être décomposable en deux facteurs du second degré; mais si, considérant, comme ci-dessus, une des sécantes communes à toutes les sections coniques proposées qui renferment, deux à deux, les trois points donnés, on suit la figure en projection sur un nouveau plan, de manière que toutes ces sections coniques deviennent des cercles, les centres de ces sections coniques se trouvant toujours représentés, sur le nouveau plan, par les pôles d'une droite quelconque, relatifs aux cercles dont il s'agit, on aura à considérer, dans la projection « Quel est le lieu des pôles d'une droite » donnée, par rapport à une suite de cercles touchant une autre

» droite quelconque , et passant en outre
» aussi donné de position ».

Or, on voit que, tandis que, dans la pr
ci-dessus , la suite des centres des cercle
droites distinctes ; ici , au contraire , la suite
est sur une parabole ayant le point donné
tangente aux cercles pour directrice ; de so
ne forment qu'une seule et unique série ,
deux autres distinctes, une section conique c
considérée comme représentant le système
non séparables ; il est donc naturel de croire
du cercle variable que l'on considère parc
lieu des pôles de la droite donnée n'est pl
tème de deux sections coniques distinctes,
tiellement du quatrième degré.

Au reste, quand le point, par lequel p
est sur la tangente commune donnée , c'est
de la parabole est sur la directrice , cett
doublement avec son axe , et la question
« le lieu des pôles d'une droite donnée , s
» de cercles ayant un point de contact com
» ralement , ayant une sécante commune »
prouver , soit géométriquement , soit d'un
qu'alors le lieu des pôles est une section
a été établi, page 395 du volume déjà cité

Il résulte aussi de cette dernière remarqu
des sections coniques assujetties à passer p
sur un plan est également une autre sec
d'ailleurs par les points de concours des
directions des côtés opposés du quadrilatère
les quatre points dont il s'agit ; propositi
la page 219 du tome XI.e des *Annales*, e
ment à la page 396 du même volume.

En réunissant ces considérations sur le lieu des centres des sections coniques variables suivant certaines lois à celles relatives au cas particulier où les sections coniques touchent à la fois quatre droites données, ou n'en touchent que trois seulement, en passant d'ailleurs par un point donné ; lesquels ont été traités à la page 109 du présent volume, on aura, comme l'on voit, une solution complète, et purement géométrique, du problème proposé à la page 228 du tom. XI.e. Il serait d'ailleurs inutile d'examiner les moyens de construire les différens lieux des centres par la connaissance des points particuliers par où ils passent, cette tâche se trouvant déjà parfaitement remplie dans l'article déjà cité de la page 379 du XI.e volume. On voit, au surplus, que ces différentes questions, relatives au lieu des centres des sections coniques variables, assujetties à quatre conditions données, conduisent immédiatement, au moyen des principes de projection employés dans ce qui précède, à celles où, à la place du lieu des centres, on cherche le lieu des pôles d'une même droite donnée, sur le plan des sections coniques ; de sorte que les solutions doivent être les mêmes de part et d'autre, quant au degré du lieu que l'on considère. Enfin, au moyen de la *Théorie des pôles et polaires réciproques* (*), on est immédiatement conduit à la solution des questions analogues sur les lieux qu'enveloppent les polaires d'un point donné, sur le plan d'une suite de sections coniques, assujetties aux mêmes conditions de passer par des points donnés ou de toucher des droites données. Ainsi, par exemple, il en résulte que

Les polaires d'un point donné sur le plan d'une suite de sections coniques qui passent par les quatre mêmes points donnés vont toutes concourir en un point unique différent du premier, et qui jouit avec lui de la même propriété réciproque.

Pareillement :

(*) *Annales*, tom. VIII, pag. 201.

Les polaires d'un point donné sur le plan d'une suite de sections coniques tangentes à quatre droites données, enveloppent une autre section conique touchant à la fois les trois diagonales du quadrilatère complet formé par ces quatre droites.

Et ainsi du reste.

Il résulte encore des considérations qui précèdent une solution très-simple des deux problèmes de géométrie proposés à la page 372 du tome XI.e des *Annales*, et conçus en ces termes :

PROBLÈME I. Étant donnés, sur un plan, trois droites indéfinies et deux points, correspondant respectivement à deux d'entre elles ; sur quelle courbe doit être situé un troisième point pour que les trois points puissent être considérés respectivement comme les pôles des trois droites, par rapport à une même section conique ?

PROBLÈME II. Étant donnés, sur un plan, trois points et deux droites indéfinies, correspondant respectivement à deux d'entre eux ; à quelle courbe une troisième droite doit-elle toujours être tangente pour que les trois droites puissent être considérées respectivement comme les polaires des trois points, par rapport à une même section conique ?

Considérons, en effet, deux points donnés et les deux droites qui en doivent être les polaires respectives, par rapport à une même section conique ; en joignant ces deux points par une droite indéfinie, elle ira rencontrer leurs polaires en deux nouveaux points tels que la distance comprise entre chacun d'eux et celui des deux premiers qui lui correspond devra être divisée harmoniquement à la fois par toutes les sections coniques que l'on considère ; or, quand deux points inconnus P, Q, doivent diviser, à la fois, en segmens proportionnels, deux distances données XY, AA', situées sur la même droite, ces deux points sont, d'après ce qui a été dit plus haut, entièrement déterminés de situation, à l'égard des quatre autres, et, de plus, ils sont toujours uniques ; donc, toutes les sections coniques proposées passent à la fois par ces deux points ; d'un autre côté, les deux points donnés étant respectivement les pôles des deux droites données, la droite qui les renferme aura elle-même pour pôle le point d'intersection des deux droites dont il s'agit ; c'est-à-dire que les sections coniques proposées, en passant par les deux mêmes points trouvés ci-dessus, auront en outre mêmes tangentes en ces points, allant concourir à l'intersection des deux droites données. Ainsi, les deux questions proposées reviennent aux suivantes :

I. *Quel est le lieu des pôles d'une même droite, par rapport à une suite de sections coniques touchant toutes aux mêmes points les deux côtés d'un angle donné?*

I. *Quelle est l'enveloppe des polaires d'un même point, par rapport à une suite de sections coniques, touchant toutes aux mêmes points les deux côtés d'un angle donné?*

Ces questions ont évidemment leur réponse dans ce qui précède, ou, plus généralement, dans la théorie des pôles ; et il en résulte que, pour la première, le lieu demandé est une ligne droite qui passe par le sommet de l'angle donné et par le point qui est le quatrième harmonique des deux points de contact et du point où la droite donnée rencontre celle qui renferme ces mêmes points de contact.

Pour la seconde question, l'enveloppe des polaires du point donné est elle-même évidemment un point placé sur la droite indéfinie qui renferme les deux points de contact des sections coniques, et dont la position sur cette droite est telle qu'il divise la distance comprise entre ces points en deux segmens proportionnels à ceux qu'y détermine la droite qui contient le sommet de l'angle donné et le point des polaires duquel on recherche l'enveloppe (*).

(*) Dans la lettre d'envoi de l'article qu'on vient de lire, M. le capitaine Poncelet s'exprime ainsi :

« En vous adressant, Monsieur, ces recherches rédigées à la hâte, je n'ai » nullement la prétention de croire que, telles qu'elles sont, elles soient dignes

Réflexions

Réflexions sur le précédent article ;

Par M. GERGONNE.

On voit, par le précédent article, que c'est inconsidérément que nous avons affirmé, à la page 393 du XI.^{e} volume de ce recueil, que l'équation

$$\{(ay-bx)^2-(a'y-b'x)^2\}^2$$
$$=4\{(bx+ay-ab)-(b'x+a'y-a'b')\}\{(ay-bx)^2(b'x+a'y-a'b')-(a'y-b'x)^2(bx+ay-ab\},$$

» de figurer dans votre recueil ; je sens combien il leur manque, et regrette » vivement que mes occupations ne m'aient pas permis, dans le temps, de » les réunir à celles, sur le même sujet, que vous avez eu la bonté de publier » à la page 109 du présent volume, de manière à en former un tout qui » pût complètement faire le pendant de ce que vous avez vous-même donné » à la page 379 de votre XI.^{e} volume. La chose eût été facile, au moyen » du développement de quelques-unes des propositions concernant le cas par- » ticulier du cercle. Il faut dire aussi qu'il me repugnait de mettre en avant » des principes non encore connus des géomètres, et qui devaient, plus tard, faire » le fond d'un ouvrage que j'avais et que j'ai toujours l'intention de publier. Quoi- » que je sois toujours dans la même situation d'esprit, j'ai cru devoir cependant » vous faire part des moyens à l'aide desquels je suis parvenu depuis long- » temps aux résultats consignés à la fin de l'article sur l'hyperbole équilatère, » inséré à la page 205 de votre XI.^{e} volume ; d'autant que, ces résultats étant » fautifs quant à leur énoncé, qui est trop restreint, et différant d'ailleurs en » quelques points de ceux auxquels vous avez été conduit par l'analise algé- » brique, il etait instant de vous mettre à même de rectifier les uns et de » faire quadrer les vôtres avec les autres. Je vous abandonne donc ces re- » cherches, Monsieur, en vous laissant le soin d'en tirer le parti le plus » convenable ».

Etc., etc., etc.

J. D. G.

n'était point décomposable en deux facteurs du second degré ; et que conséquemment le lieu cherché n'était ni une section conique, ni le système de deux sections coniques. La vérité est que nous nous étions bien assurés que le premier membre de cette équation n'était point décomposable en facteurs proprement rationnels ; mais nous aurions dû songer que, lorsqu'une équation à deux variables n'est point décomposable en facteurs rationnels, elle n'en exprime pas moins le système de plusieurs courbes, toutes les fois que les radicaux de ses facteurs ne portent point sur les variables x, y, mais seulement sur des quantités constantes.

C'est précisément le cas où on se trouve ici. En multipliant l'équation dont il s'agit par la quantité constante

$$(a+a')^2(b+b')^2\{bb'(a+a')^2-aa'(b+b')^2\},$$

et posant, pour abréger,

$$(ab'-ba')(ab-a'b')=M,$$

on parvient facilement à lui donner cette forme

$$bb'(b+b')^2\{(a-a')^2[(b+b')x-(a+a')y]^2-2Mx[2x-(a+a')]\}^2$$

$$=aa'(a+a')^2\{(b-b')^2[(b+b')x-(a+a')y]^2+2My[2y-(b+b')]\}^2;$$

d'où on tire, en extrayant les racines, cette double équation du second degré,

$$(b+b')\{(a-a')^2[(b+b')x-(a+a')y]^2-2Mx[2x-(a+a')]\}\sqrt{bb'}$$

$$=\pm(a+a')\{(b-b')^2[(b+b')x-(a+a')y]^2+2My[2y-(b+b')]\}\sqrt{aa'},$$

appartenant conséquemment au système de deux sections coniques.

Par la seule inspection de cette double équation, on aperçoit, 1.° Qu'elle est satisfaite en posant, à la fois, $x=0$, $y=0$; d'où il suit que les deux courbes passent également par l'origine ou sommet de l'angle des deux tangentes données.

2.° Qu'elle est encore satisfaite en posant, à la fois, $x=\frac{1}{2}(a+a')$, $y=\frac{1}{2}(b+b')$; ce qui nous apprend que les deux courbes passent encore par le milieu de l'intervalle qui sépare les deux points donnés.

3.° Enfin qu'elle est également satisfaite en posant à la fois

$$x=-\frac{ab'-ba'}{2(b-b')}\,, \quad y=+\frac{ab'-ba'}{2(a-a')}\,;$$

ce qui montre que les deux courbes passent aussi par le milieu du segment de la droite qui passe par les points donnés intercepté entre les deux droites données.

4.° Si, dans la vue de déterminer la situation des centres des deux courbes, on égale successivement à zéro les dérivées de leur double équation, prises par rapport à x et y, il viendra

$$(b+b')\{2(a-a')^2(b+b')[(b+b')x-(a+a')y]-2M[4x-(a+a')]\}\sqrt{bb'}$$

$$=\pm2(a+a')(b+b'(b-b')^2[(b+b')x-(a+a')y\sqrt{aa'}\,,$$

$$\pm(a+a')\{2(b-b')^2(a+a')[(b+b')x-(a+a')y]-2M[4y-(b+b')]\}\sqrt{aa'}$$

$$=2(a+a')(b+b')(b-b')^2[(b+b')x-(a+a')y]\sqrt{bb'}\,;$$

Or, ces deux équations sont évidemment satisfaites en posant, à la fois,

$$x=\tfrac{1}{4}(a+a')\,, \qquad y=\tfrac{1}{4}(b+b')\,;$$

donc nos deux courbes ont pour centre commun le milieu de la droite qui joint l'intersection des deux droites données au milieu de l'intervalle entre les deux points donnés.

5.° En posant, pour abréger,

$$(b+b')(a-a')^2\sqrt{bb'}\mp(a+a')(b-b')^2\sqrt{aa'}=N\,,$$

on tire encore de notre double équation, par différentiation,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(b+b')\{N[(b+b')x-(a+a')y]-M[4x-(a+a')]\sqrt{bb'}\}}{(a+a')\{N[(b+b')x-(a+a')y]\pm M[4x-(b+b')]\sqrt{aa'}\}}\,;$$

valeur qui devient à l'origine

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\pm\frac{\sqrt{bb'}}{\sqrt{aa'}}\,,$$

l'équation commune des tangentes aux deux courbes par l'origine est donc

$$\frac{y}{\sqrt{bb'}}=\pm\frac{x}{\sqrt{aa'}}\,.$$

Il est aisé de voir, d'après cela, que si, ayant pris sur les deux droites données, à partir de leurs points d'intersection, et de part et d'autre de ce point, des parties respectivement égales à $\sqrt{aa'}$, $\sqrt{bb'}$, on considère les quatre points déterminés par cette construction comme les quatre sommets d'un parallélogramme ayant conséquemment ces deux droites pour diagonales, les droites qui, dans ce parallélogramme, joindront les milieux des côtés opposés seront les tangentes aux deux courbes par l'origine.

Si l'on demande présentement à quels caractères on peut reconnaître qu'une équation donnée du quatrième degré en x et y

appartient au système de deux lignes du second ordre, la réponse à cette question sera facile. En divisant, en effet, tous les termes de cette équation par son terme tout connu, elle aura alors 14 coefficiens. On égalera alors son premier membre au produit de deux facteurs du second degré en x et y, ayant aussi l'unité pour leur terme tout connu et ayant leurs cinq autres coefficiens indéterminés. En exprimant que ce produit est identiquement égal au polynome proposé, on parviendra à 14 équations entre les 10 coefficiens indéterminés. Eliminant donc ces 10 coeffieiens entre elles, on aura 4 équations de condition qui devront se vérifier d'elles-mêmes, si la décomposition est possible; et, chemin faisant, on obtiendra, en outre, les valeurs des coefficiens des deux facteurs.

C'est par un tel procédé qu'on pourra se convaincre que l'équation de la page 394 du XI.e volume n'exprime pas le système de deux sections coniques.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Note sur les équations différentielles partielles et sur les intégrales définies;

Par M. Frédéric Sarrus, docteur ès sciences, professeur de mathématiques au collége de Pezenas.

L'on a beaucoup multiplié, dans ces derniers temps, l'application des intégrales définies à l'intégration des équations différentielles partielles; mais personne, du moins que je sache, ne paraît avoir songé à renverser la question, je veux dire, à appliquer l'intégration des équations différentielles partielles à la recherche des intégrales définies. Cette manière de procéder peut pourtant conduire souvent au but d'une manière fort simple; et c'est ce que je me propose de faire voir ici, par un exemple.

Soit la formule

$$y=\int e^{-bx}X\mathrm{d}x.\mathrm{Cos}.ax\ ,$$

où X désigne une fonction quelconque de x, sans a ni b, et où les limites de l'intégrale, indépendantes des mêmes quantités, sont d'ailleurs supposées quelconques. En différentiant deux fois successivement par rapport à a et b, il viendra

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a}=-\int e^{-bx}Xx\mathrm{d}x.\mathrm{Sin}.ax\,,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}b}=-\int e^{-bx}Xx\mathrm{d}x\mathrm{Cos}.ax\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}a^2}=-\int e^{-bx}Xx^2\mathrm{d}x.\mathrm{Cos}\,ax\,,\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}b^2}=+\int e^{-bx}Xx^2\mathrm{d}x\mathrm{Cos}.ax\,;$$

d'où

$$\frac{d^2y}{da^2}+\frac{d^2y}{db^2}=0\,;$$

équation dont l'intégrale est, en général,

$$y=\varphi(b+a\sqrt{-1})+\psi(b-a\sqrt{-1})\ ,$$

ainsi qu'on peut s'en convaincre par la différentiation et l'élimination des fonctions arbitraires. De là on tire

$$\frac{dy}{da}=\{\varphi'(b+a\sqrt{-1})-\psi'(b-a\sqrt{-1})\}\sqrt{-1}\ ;$$

valeur qui se réduit à

$$\{\varphi'(b)-\psi'(b)\}\sqrt{-1}\ ,$$

lorsqu'on suppose $a=0$; mais la valeur de $\frac{dy}{da}$ déterminée ci dessus prouve que, dans la même circonstance, ce coefficient différentiel doit s'évanouir; donc

$$\varphi'(b)=\psi'(b)\ ,\qquad \text{d'où}\qquad \varphi(b)=\psi(b)\ ,$$

et, par suite,

$$y=\varphi(b+a\sqrt{-1})+\varphi(b-a\sqrt{-1})\ .$$

En posant ici $a=0$, il vient

$$y=2\varphi(b)\ ;$$

et, d'un autre côté, on doit avoir, dans le même cas,

$$y=\int e^{-bx}X\mathrm{d}x\ ;$$

de sorte que, toutes les fois que l'on saura trouver cette dernière intégrale, on en déduira facilement la valeur complète de y.

Si, par exemple, on prend

$$X=x^{n-1}\ ,$$

on aura

$$y=\int e^{-bx}x^{n-1}\mathrm{d}x\ ,$$

dont l'intégrale entre $x=0$ et $x=\infty$ est

$$\frac{1}{b^n}\int e^{-x}x^{n-1}\mathrm{d}x\ ;$$

donc

$$2\varphi(b)=\frac{1}{b^n}\int e^{-x}x^{n-1}\mathrm{d}x\ , \quad \text{d'où} \quad \varphi(b)=\tfrac{1}{2}b^{-n}\int e^{-x}x^{n-1}\mathrm{d}x\ ;$$

et par conséquent

$$y=\{\tfrac{1}{2}(b+a\sqrt{-1})^{-n}+\tfrac{1}{2}(b-a\sqrt{-1})^{-n}\}\int e^{-x}x^{n-1}\mathrm{d}x\ .$$

Si l'on fait ensuite

$$b=k\mathrm{Cos}.t\ , \qquad a=k\mathrm{Sin}.t\ ,$$

on aura

$$y=\int e^{-bx}x^{n-1}\mathrm{d}x\mathrm{Cos}.ax=\frac{\mathrm{Cos}.nt}{k^n}\int e^{-x}x^{n-1}\mathrm{d}x\ . \qquad \left\{\begin{matrix} x=0 \\ x=\infty \end{matrix}\right\}$$

on trouverait semblablement

$$y=\int e^{-bx}x^{n-1}\mathrm{d}x\mathrm{Sin}.ax=\frac{\mathrm{Sin}.nt}{k^n}\int e^{-x}x^{n-1}\mathrm{d}x\ ; \qquad \left\{\begin{matrix} x=0 \\ x=\infty \end{matrix}\right\}$$

k et t conservant les mêmes valeurs que dans la formule précédente.

La même marche peut conduire à un résultat que je me crois fondé à regarder comme intéressant. Soit

$\int e$

$$\int\varphi(x,\,b)\,\mathrm{d}x=\psi(b)\ , \qquad (1)$$

et

$$\int\{\varphi(x\,,\,b+a\sqrt{-1})+\varphi(x\,,\,b-a\sqrt{-1})\}\,\mathrm{d}x=y\ ,$$

l'on en conclura, en général, comme ci-dessus,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}a^2}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}b^2}=0\ ; \qquad (2)$$

et par conséquent

$$y=\mathrm{F}(b+a\sqrt{-1})+\Phi(b-a\sqrt{-1})\ ,$$

F et Φ désignant des fonctions arbitraires quelconques ; mais, si l'on fait $a=0$, on devra avoir, en vertu de l'équation (1)

$$\mathrm{F}(b)+\Phi(b)=2\psi(b)\ ;$$

d'où, en observant que a et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a}$ doivent être nuls en même temps, on conclura

$$\mathrm{F}(b)=\Phi(b)=\psi(b)\ ,$$

et par conséquent

$$y=\psi(b+a\sqrt{-1})+\psi(b-a\sqrt{-1})\ .$$

On trouverait de même que, sous la même condition,

$$\int\frac{\varphi(x\,,\,b+a\sqrt{-1})-\varphi(x\,,\,b-a\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}\,\mathrm{d}x=y,$$

donne

$$y=\frac{\psi(b+a\sqrt{-1})-\psi(b-a\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}\ ;$$

ce qui fait voir que l'emploi du passage du réel à l'imaginaire est permis, toutes les fois qu'il est permis de différentier sous le signe $\int$ des fonctions que ce signe affecte, par rapport aux constantes que ces fonctions peuvent renfermer.

Les diverses formules qu'on avait obtenues, au moyen de ce passage, se trouvent, par ce qui précède, rigoureusement démontrées, et ce même passage cesse dès-lors d'être regardé comme le résultat d'une simple induction.

Pezenas, le 8 janvier 1822.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Réflexions sur le premier des problèmes proposés à la page 180 de ce volume;

Par un ABONNÉ.

Au Rédacteur des *Annales*;

MONSIEUR,

DANS votre numéro de novembre dernier, vous avez proposé de déterminer la surface enveloppe de tous les points de l'espace que peut occuper le centre de gravité d'une chaîne uniformément pesante, dans toutes les situations et figures qu'elle peut prendre autour de ses points de suspension.

Mon dessein ici n'est point de résoudre proprement ce problème, qui paraît offrir des difficultés d'analise assez sérieuses ; je veux seulement montrer à quel autre probléme il peut être réduit.

I. Il est d'abord évident que toutes les circonstances sont les mêmes autour de la droite indéfinie qui joint les points de suspension ; d'où il suit que la surface cherchée doit être une surface de révolution, ayant cette droite pour axe ; et, comme tout est aussi égal de part et d'autre du plan mené perpendiculairement à la droite qui joint les points de suspension, par le milieu de l'intervalle qui les sépare ; on voit de plus que cette surface de révolution a un centre situé en ce milieu.

II. Tout se réduit donc à trouver la ligne génératrice de la surface dont il s'agit, ou, ce qui revient au même, l'intersection de cette surface par un plan quelconque passant par les deux points de suspension. On peut donc, sans rien ôter à le généralité du problème, assujettir les mouvemens de la chaîne à n'avoir lieu que dans un tel plan, ce qui réduit la question à un problème de géometrie plane.

III. Concevons que la pesanteur agisse dans le sens de ce plan; et que la chaîne soit abandonnée à sa seule action; elle prendra une courbure déterminée qui sera celle de la *chaînette*. Si la direction de la pesanteur change sans cesse d'agir dans le même plan, la chaîne prendra une nouvelle courbure déterminée, différente de la première, mais qui sera toujours une chaînette; et si l'on fait ainsi varier d'une infinité de manières la direction de la pesanteur, dans le plan dont il s'agit, on obtiendra sur ce plan une infinité de chaînettes différentes, dont chacune aura son centre de gravité particulier; or, je dis que le lieu des centres de gravité de toutes ces courbes sera précisément la courbe demandée.

En effet, il est d'abord évident, par la nature du problème, qu'aucun des points de la courbe demandée ne saurait être intérieur à celle-là, puisqu'alors il se trouverait telle situation de la chaîne où le lieu de son centre de gravité ne se trouverait pas enveloppé par cette courbe; tout se réduit donc à prouver qu'aucun point de la courbe demandée ne peut être extérieur à la même courbe.

Or, soient A, B (fig. 2) les points de suspension de la chaîne et aGb le lieu des centres de gravité des chaînettes. Si l'un M des points de la courbe cherchée pouvait se trouver hors de aGb, on pourrait toujours assigner une direction de la pesanteur telle que le centre G de gravité de la chaînette répondant à cette direction et le point M se trouvassent dans une même verticale; il arriverait donc alors qu'il y aurait une figure à donner à la chaîne, par suite de laquelle son centre M de gravité se trouverait plus bas que le centre G de gravité de la chaînette correspondante, tandis qu'au contraire il est connu que le centre de gravité de cette dernière est le plus bas possible.

Ainsi, notre problème se trouve ramené à celui-ci : *Une chaîne uniformément pesante étant fixée par ses deux extrémités à deux* *points d'un plan mobile, mais assujetti dans son mouvement à être constamment vertical; déterminer sur ce plan le lieu du centre de gravité de cette chaîne, dans toutes les situatians du même plan.*

IV. Ce dernier problème se réduit à lui-même à *trouver le centre de gravité d'une chaînette uniformément pesante dont la longueur et les points de suspension sont donnés?* Si, en effet, après avoir trouvé ce centre de gravité, on en rapporte la situation à la droite qui joint les points de suspension et à la perpendiculaire sur son milieu, prises pour axes; en éliminant entre ses deux coordonnées l'angle que fait la verticale avec la droite qui joint les points de suspension, l'équation résultante, en x et y, sera celle de la courbe cherchée.

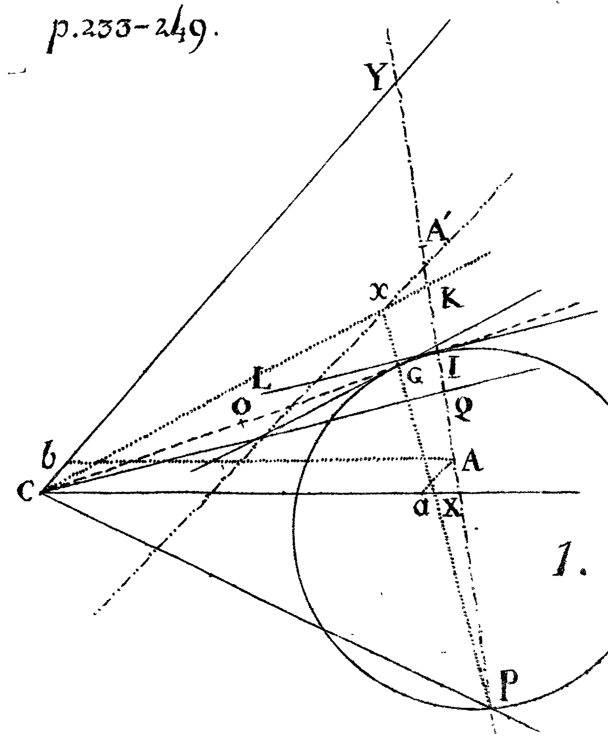
Agréez, etc.

QUESTIONS PROPOSÉES.

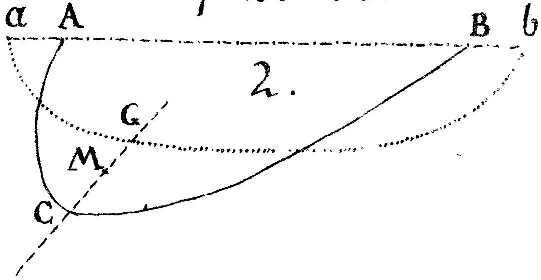
Théorème de Géométrie.

Si l'on coupe arbitrairement une surface du second ordre par deux plans, 1.° en considérant les contours des deux sections comme les lignes de contact de deux surfaces coniques circonscrites; ces deux dernières surfaces se couperont suivant une courbe plane dont le plan contiendra l'intersection des deux plans coupant; 2.° si l'on considère les contours des deux sections comme appartenant à une même surface développable, cette surface sera une surface conique dont le sommet sera en ligne droite avec les sommets des deux surfaces coniques circonscrites; 3.° enfin, ce sommet sera le pôle du plan d'intersection des deux surfaces coniques circonscrites.

p. 233-249.



p. 258-261.



J. D. G. fecit.

STATIQUE.

Démonstration analitique du parallélogramme des forces ;

Par M. B. D. C.

Soient X , Y deux forces appliquées , dans des directions perpendiculaires l'une à l'autre , à un même point fixe. On démontre , sans difficulté , que ces deux forces ont une résultante , déterminée de direction et d'intensité , appliquée au même point , comprise dans leur plan , et dirigée dans l'intérieur de l'angle qu'elles comprennent.

Soit Z cette résultante , et soit z l'angle que fait sa direction avec celle de l'une des composantes , celle de X , par exemple ; elle fera conséquemment , avec la direction de Y , un angle $\frac{\varpi}{2}-z$. Si donc X et Y sont données , il devra être possible d'en conclure Z et z ; de sorte qu'il doit exister deux équations de relation entre ces quatre quantités.

Supposons ces deux équations de relation connues ; on pourra alors renverser le problème et demander de déterminer X , Y en fonction de Z , z. Or , on sait que , si l'intensité des forces X , Y croît ou décroît proportionnellement , l'intensité de la force Z croît ou décroît dans le même rapport , sans que sa direction éprouve aucun changement ; d'où il suit que $\frac{X}{Z}$ et $\frac{Y}{Z}$ doivent être de simples fonctions de l'angle donné z ; on doit donc avoir

$$X=Z\psi(z) \ , \qquad (1)$$

et l'on aura, par conséquent,

$$Y=Z\psi\left(\frac{\varpi}{2}-z\right) \ ; \qquad (2)$$

ψ étant une fonction dont il s'agira d'assigner la forme.

Observons, avant d'aller plus loin, que si l'on avait $Y=0$, on devrait avoir $Z=X$ et $z=0$; et que si, au contraire, on avait $X=0$, on devrait avoir $Z=Y$ et $z=\frac{\varpi}{2}$; d'où il suit qu'on doit avoir

$$\psi(0)=1 \ , \quad \psi\left(\frac{\varpi}{2}\right)=0 \, .$$

Cela posé, imaginons, par le point d'application des forces X, Y deux droites indéfinies, perpendiculaires entre elles, mais d'ailleurs d'une direction tout-à-fait arbitraire. Supposons seulement, pour fixer les idées, que l'une d'elles passe entre Z et Y, et désignons par v l'angle qu'elle fait avec la direction de X. Nous pourrons concevoir chacune de nos forces X, Y décomposées suivant ces deux droites ; les composans de X seront, par ce qui précède,

$$X\psi(v) \ , \quad X\psi\left(\frac{\varpi}{2}-v\right) \, ,$$

et celles de Y

$$Y\psi\left(\frac{\varpi}{2}-v\right) \ , \qquad -Y\psi(v) \ ;$$

en désignant donc par V la somme des composantes suivant la première direction, et par U la somme des composantes suivant la seconde, nous aurons

$$V=X\psi(\varphi)+Y\psi\left(\frac{\varpi}{2}-\varphi\right),$$

$$U=X\psi\left(\frac{\varpi}{2}-\varphi\right)-Y\psi(\varphi);$$

mais, en décomposant immédiatement la résultante Z suivant les deux mêmes directions, on doit parvenir aux mêmes résultats; de sorte qu'on doit avoir aussi

$$V=Z\psi(\varphi-z),\quad U=Z\psi\left[\frac{\varpi}{2}-(\varphi-z)\right];$$

égalant donc ces valeurs de V et U aux précédentes, nous aurons

$$Z\psi(\varphi-z)=X\psi(\varphi)+Y\psi\left(\frac{\varpi}{2}-\varphi\right),$$

$$Z\psi\left[\frac{\varpi}{2}-(\varphi-z)\right]=X\psi\left(\frac{\varpi}{2}-\varphi\right)-Y\psi(\varphi);$$

ou, en mettant pour X, Y leurs valeurs (1, 2) et divisant par Z,

$$\psi(\varphi-z)=\psi(\varphi)\psi(z)+\psi\left(\frac{\varpi}{2}-\varphi\right)\psi\left(\frac{\varpi}{2}-z\right), \tag{3}$$

$$\psi\left[\frac{\varpi}{2}-(\varphi-z)\right]=\psi(z)\psi\left(\frac{\varpi}{2}-\varphi\right)-\psi(\varphi)\psi\left(\frac{\varpi}{2}-z\right). \tag{4}$$

Ces équations doivent se vérifier pour toutes les valeurs de l'angle z, qui est tout-à-fait arbitraire; faisant donc dans la première $\varphi=z$, on aura

$$\psi(0) \text{ ou } 1=\{\psi(z)\}^2+\left\{\psi\left(\frac{\varpi}{2}-z\right)\right\}^2 ; \qquad (5)$$

prenant ensuite la somme des quarrés des équations (1, 2) et ayant égard à celle-ci, il vient

$$X^2+Y^2=Z^2 \qquad \text{ou} \qquad Z=\sqrt{X^2+Y^2} ;$$

c'est-à-dire que *la résultante de deux forces perpendiculaires l'une à l'autre est représentée en intensité par la diagonale du rectangle dans lequel deux côtés d'un même angle représentent les intensités des composantes* (*).

(*) On parvient aussi assez simplement à cette première relation ainsi qu'il suit : soient décomposées X, Y chacune en deux forces, l'une suivant Z et l'autre perpendiculaire à sa direction ; soient x, y les composantes respectives de X, Y suivant Z, et soient x', y' leurs composantes perpendiculaires à sa direction ; les trois systèmes

$$X , Y , Z ,$$

$$x , x' , X ,$$

$$y' , y , Y ,$$

sont évidemment des systèmes semblables, dans lesquels conséquemment les puissances homologues, qui sont ici celles de même rang, doivent être proportionnelles. On a donc

$$\frac{x'}{Y}=\frac{X}{Z} , \qquad \frac{y'}{X}=\frac{Y}{Z} ,$$

$$\frac{x}{X}=\frac{X}{Z} , \qquad \frac{y}{Y}=\frac{Y}{Z} ;$$

c'est-à-dire,

Si, dans l'équation (4), on change v en $\frac{\varpi}{2}-v$ elle devient

$$\psi(v+z)=\psi(v)\psi(z)-\psi\left(\frac{\varpi}{2}-v\right)\psi\left(\frac{\varpi}{2}-z\right). \qquad (6)$$

Si, dans l'équation (3), on change respectivement v et z en $v+i$ et $z+i$, son premier membre ne devra en éprouver aucun changement, et conséquemment son second membre devra demeurer le même, et il en sera de même dans la seconde, si l'on change à la fois v et z en $v+i$ et $z-i$; il faudra donc que, dans le

---

$$x'=\frac{XY}{Z}, \qquad y'=\frac{XY}{Z},$$

$$x=\frac{X^2}{Z}; \qquad y=\frac{Y^2}{Z}.$$

Les deux composantes x', y' sont donc égales; et, comme elles sont directement opposées, elles doivent se détruire, comme on pouvait bien d'ailleurs le prévoir, puisque les quatre composantes x, y, x', y' doivent finalement se réduire à la force unique Z, et que déjà les deux premières agissent suivant sa direction.

On doit donc avoir, d'après cela,

$$Z=x+y=\frac{X^2}{Z}+\frac{Y^2}{Z},$$

et conséquemment

$$Z^2=X^2+Y^2.$$

C'est à cela finalement que se réduit le raisonnement de M. Laplace.

En mettant, dans cette équation, pour X, Y leurs valeurs (1, 2) et divisant par Z^2, on retombe sur l'équation (5).

J. D. G.

développement de leurs seconds membres, les coefficiens des diverses puissances de i soient séparément nuls ; ou, en d'autres termes, il faut que la somme des dérivées partielles du second membre de l'équation (3), et que la différence de celles du second membre de l'équation (6), prises par rapport à v et z, soient égales à zéro ; ce qui donne

$$\psi(v)\psi'(z)+\psi(z)\psi'(v)-\psi\left(\frac{\varpi}{2}-v\right)\psi'\left(\frac{\varpi}{2}-z\right)-\psi\left(\frac{\varpi}{2}-z\right)\psi'\left(\frac{\varpi}{2}-v\right)=0;$$

$$\psi(v)\psi'(z)-\psi(z)\psi'(v)+\psi\left(\frac{\varpi}{2}-v\right)\psi'\left(\frac{\varpi}{2}-z\right)-\psi\left(\frac{\varpi}{2}-z\right)\psi'\left(\frac{\varpi}{2}-v\right)=0,$$

d'où, en prenant la demi-somme,

$$\psi(v)\psi'(z)-\psi\left(\frac{\pi}{2}-z\right)\psi'\left(\frac{\pi}{2}-v\right)=0.\ (*)$$

ou bien

$$\frac{\psi'(z)}{\psi\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}=\frac{\psi'\left(\frac{\pi}{2}-v\right)}{\psi(v)}.$$

(*) Si, dans cette équation, on fait $v=z$, elle devient

$$\psi(z)\psi'(z)-\psi\left(\frac{\pi}{2}-z\right)\psi'\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=0.$$

qui donne

$$[\psi(z)]^2+\left[\psi\left(\frac{\pi}{2}-z\right)\right]^2=k.$$

On trouve ensuite $k=1$, ce qui ramène encore à l'équation (5).

A cause de l'indépendance de z et v, chacun des deux membres de cette dernière équation devra être égal à une constante que nous pourrons désigner par $-A$, en sorte que nous aurons

$$\frac{\psi'(z)}{\psi\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}=-A\ ;$$

mais l'équation (5) donne

$$\psi\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\sqrt{1-[\psi(z)]^2}\ ;$$

donc

$$-\frac{\psi'(z)}{\sqrt{1-[\psi(z)]^2}}=A\ ;$$

ce qui donne, en intégrant

$$\psi(z)=\mathrm{Cos.}(Az+B)\ ;$$

or, on a

$$\psi(0)=1 \quad \text{et} \quad \psi\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

donc

$$A=1\,, \qquad B=0\ ;$$

donc, on doit avoir simplement

$$\psi(z)=\mathrm{Cos.}z\ ;$$

et par conséquent (1)

$$\mathrm{Cos.}z=\frac{X}{Z}\ ;$$

c'est-à-dire que *la diagonale du rectangle construit sur les droites qui représentent en intensité deux forces perpendiculaires l'une à* *l'autre, et que nous avons déjà vue représenter leur résultante en intensité, représente également cette résultante en direction.*

Il est d'ailleurs connu que le théorème une fois démontré pour deux composantes rectangulaires, rien n'est plus facile que de l'étendre à deux composantes formant entre elles un angle quelconque.

Au lieu de considérer à la fois les deux fonctions $\psi(v+z)$ et $\psi(v-z)$, on peut n'en considérer qu'une seule, en égalant à zéro soit la somme, soit la différence des dérivées, prises successivement par rapport à z et v, du second membre de l'une ou de l'autre des équations (3, 6), suivant celle qu'on voudra employer; chassant alors $\psi'(v)$ et $\psi'\left(\frac{\varpi}{2}-z\right)$ de l'équation résultante, au moyen des dérivées des deux équations

$$[\psi(z)]^2+\left[\psi\left(\frac{\pi}{2}-z\right)\right]^2=1\;;\quad [\psi(v)]^2+\left[\psi\left(\frac{\pi}{2}-v\right)\right]^2=1\,,$$

on obtiendra, comme ci-dessus,

$$\frac{\psi'(z)}{\psi\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}=\frac{\psi'\left(\frac{\pi}{2}-v\right)}{\psi(v)}\,.$$

Si l'on ajoute membre à membre les deux équations (3, 6), il viendra

$$\psi(v+z)+\psi(v-z)=2\psi(v)\psi(z)\,.$$

Développant le premier membre suivant les puissances de z, et divisant par $2\psi(z)$, on trouvera pour résultat final, sans le secours de l'intégration, et par un calcul très-simple que l'on peut voir à la page 14 du 1.er volume de la *Mécanique* de M. Poisson, $\psi(z)=\text{Cos.}z$.

TRIGONOMÉTRIE

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

Recherches sur les quadrilatères, tant rectilignes que sphériques, inscrits au cercle;

Par M. Guéneau d'Aumont, professeur, secrétaire et conservateur de l'observatoire de la faculté des sciences de Dijon.

§. I. *Quadrilatère rectiligne.*

Soient a, b, c, d les côtés consécutifs d'un quadrilatère rectiligne inscrit au cercle; soient x, y les deux diagonales, la première se terminant aux sommets des angles (a, b), (c, d), et l'autre aux sommets des angles (b, c), (a, d).

Par la nature du quadrilatère inscrit, on aura

$$\text{Cos.}(a, d) = -\text{Cos.}(b, c) = \frac{a^2+d^2-x^2}{2ad} = -\frac{b^2+c^2-x^2}{2bc},$$

$$\text{Cos.}(a, b) = -\text{Cos.}(c, d) = \frac{a^2+b^2-y^2}{2ab} = -\frac{c^2+d^2-y^2}{2cd};$$

donc

$$\frac{a^2+d^2-x^2}{ad} + \frac{b^2+c^2-x^2}{bc} = 0,$$

$$\frac{a^2+b^2-y^2}{ab} + \frac{c^2+d^2-y^2}{cd} = 0;$$

équations d'où on tire

$$\left.\begin{aligned} x^2&=\frac{bc(a^2+d^2)+ad(b^2+c^2)}{bc+ad}=\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{bc+ad}\,, \\ y^2&=\frac{ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)}{ab+cd}=\frac{(ac+bd)(bc+ad)}{ab+cd}\,; \end{aligned}\right\}\quad(1)$$

et par suite

$$xy=ac+bd\,,\qquad \frac{x}{y}=\frac{ab+cd}{bc+ad}\,.\qquad(2)$$

Si, dans l'expression

$$\mathrm{Cos.}(a\,,\,d)=\frac{a^2+d^2-x^2}{2ad}\,,$$

on met pour x^2 la valeur que nous venons d'obtenir, il viendra, toutes réductions faites,

$$\mathrm{Cos.}(a\,,\,d)=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(bc+ad)}\,;$$

or, on a

$$2\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(a\,,\,d)=1-\mathrm{Cos.}(a\,,\,d)\,,\quad 2\mathrm{Cos.}^2\tfrac{1}{2}(a\,,\,d)=1+\mathrm{Cos.}(a\,,\,d)\,;$$

donc, en substituant et divisant par 2,

$$\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(a\,,\,d)=\frac{(b+c)^2-(a-d)^2}{4(bc+ad)}=\frac{(b+c+d-a)(a+b+c-d)}{4(bc+ad)}\,,$$

$$\mathrm{Cos.}^2\tfrac{1}{2}(a\,,\,d)=\frac{(a+d)^2-(b-c)^2}{4(bc+ad)}=\frac{(a+c+d-b)(d+a+b-c)}{4(bc+ad)}\,;$$

mais on a d'ailleurs

$$\mathrm{Sin.}(a\,,\,d)=2\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}(a\,,\,d)\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}(a\,,\,d)\,;$$

substituant donc et posant, pour abréger,

$$b+c+d-a=A\ ,$$

$$c+d+a-b=B\ ,$$

$$d+a+b-c=C\ ,$$

$$a+b+c-d=D\ ,$$

il viendra finalement

$$\text{Sin.}(a\,,d)=\text{Sin.}(b\,,c)=\frac{\sqrt{ABCD}}{2(bc+ad)}\ . \qquad (3)$$

L'aire du quadrilatère dont il s'agit étant la somme des aires de deux triangles, dont l'un a pour ses trois côtés a, d, x, et l'autre pour les siens b, c, x; en représentant ce quadrilatère par Q, on aura

$$Q=\tfrac{1}{2}bc\text{Sin.}(b\,,c)+\tfrac{1}{2}ad\text{Sin.}(a\,,d)=\tfrac{1}{2}(bc+ad)\text{Sin.}(a\,,d)\ ;$$

c'est-à-dire, en substituant,

$$Q=\tfrac{1}{4}\sqrt{ABCD}\ . \qquad (4)$$

Si, dans cette expression, on suppose $d=0$, elle devient

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}\ ,$$

qui est précisément celle de l'aire d'un triangle, en fonction de ses trois côtés (*).

(*) Sans connaître encore l'expression de l'aire d'un triangle en fonction de ses trois côtés, on peut prononcer, à l'avance, qu'elle en est une fonction symétrique; attendu qu'avec les trois mêmes côtés donnés, on ne saurait former qu'un triangle donné. Mais, bien qu'avec les quatre mêmes côtés

Le cercle auquel est inscrit le quadrilatère dont il s'agit se trouvant en même temps circonscrit au triangle dont les trois côtés sont a, d, x; en représentant par R le rayon de ce cercle, il est aisé de voir qu'on aura

$$R=\frac{x}{2\mathrm{Sin}.(a,d)};$$

mettant donc pour x et $\mathrm{Sin}.(a,d)$ les valeurs déterminées ci-dessus, et posant, pour abréger,

$$(ab+cd)(ac+bd)(bc+ad)=K,$$

il viendra

$$R=\sqrt{\frac{K}{ABCD}}=\frac{\sqrt{K}}{4Q}.\ (*) \qquad (5)$$

Si ensuite, dans cette formule, on suppose $d=0$, on retombe

---

donnés on puisse former trois quadrilatères inscriptibles au cercle, non superposables, on peut néanmoins reconnaître, à l'avance, que l'expression de l'aire du quadrilatère inscrit, comme celle de l'aire du triangle est une fonction symétrique de ses côtés; attendu que les trois quadrilatères résultant de la permutation des quatre mêmes côtés donnés, bien que non superposables, en général, sont néanmoins équivalens. Cela est d'abord évident pour le cas où l'on échange entre eux deux côtés consécutifs, puisqu'alors un des deux triangles dont se compose le quadrilatère reste le même, tandis que l'autre est seulement tourné en sens inverse; et, quant à l'échange de deux côtés opposés, il doit encore en être de même, puisqu'on peut y parvenir par une suite d'échanges de deux côtés consécutifs. Ces mêmes considérations prouvent, en outre, que les trois quadrilatères sont tous inscriptibles à un même cercle.

J. D. G.

(*) Daprès ce qui vient d'être dit, dans la précédente note, on ne doit pas être surpris de voir ici reparaître, de nouveau, une fonction symétrique des quatre côtés du quadrilatère.

J. D. G.

sur l'expression connue du rayon du cercle circonscrit à un triangle en fonction de ses trois côtés.

La plupart des résultats auxquels nous venons de parvenir sont connus depuis long-temps. Si donc nous les reproduisons ici, c'est uniquement dans la vue d'en déduire et de leur comparer ceux qui vont faire présentement le sujet de nos recherches.

§. II. *Quadrilatère sphérique.*

Soient a, b, c, d les côtés consécutifs d'un quadrilatère sphérique, inscrit à un cercle de la sphère; soient x, y les deux diagonales de ce quadrilatère; la première étant celle qui se termine aux sommets des angles (a, b), (c, d); et la seconde celle qui se termine aux sommets des angles (b, c), (a, d).

Les cordes de ces quatre côtés et de ces deux diagonales, qui sont

$$2\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}a,\ 2\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}b,\ 2\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}c,\ 2\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}d,\ 2\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}x,\ 2\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}y,$$

sont les quatre côtés et les deux diagonales d'un quadrilatère rectiligne inscrit au même cercle; d'où il suit qu'on pourra les substituer à la place de a, b, c, d, x, y, respectivement, dans les formules (1) précédemment obtenues. On aura ainsi, toutes réductions faites,

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}x &= \frac{(\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}a\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}b\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}d)(\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}a\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}b+\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}c\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}d)}{\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}b\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}a\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}d},\\
\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}y &= \frac{(\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}a\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}b\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}d)(\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}b\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}a\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}d)}{\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}a\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}b+\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}c\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}d};
\end{aligned}\right\}\ \text{(I)}$$

d'où ensuite

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}x\,\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}y=\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}d\,,\\&\frac{\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}x}{\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}y}=\frac{\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}a\,\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}b\,\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}c\,\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}d}{\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}b\,\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}c\,\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}a\,\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}d}\,,\end{aligned}\right\}\ \text{(II)}$$

Dans le triangle sphérique dont les trois côtés sont a, d, x, on a

$$\mathrm{Cos.}(a,d)=\frac{\mathrm{Cos.}x-\mathrm{Cos.}a\,\mathrm{Cos.}d}{\mathrm{Sin.}a\,\mathrm{Sin.}d}\,,$$

d'où

$$2\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(a,d)=1-\mathrm{Cos.}(a,d)=\frac{\mathrm{Cos.}(a-d)-\mathrm{Cos.}x}{\mathrm{Sin.}a\,\mathrm{Sin.}d}\,,$$

$$2\mathrm{Cos.}^2\tfrac{1}{2}(a,d)=1+\mathrm{Cos.}(a,d)=\frac{\mathrm{Cos.}x-\mathrm{Cos.}(a+d)}{\mathrm{Sin.}a\,\mathrm{Sin.}d}\,;$$

mais, on a généralement

$$\mathrm{Cos.}k=1-2\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}k\,;$$

donc

$$\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(a,d)=\frac{\mathrm{Sin.}^2\frac{1}{2}x-\mathrm{Sin.}^2\frac{1}{2}(a-d)}{\mathrm{Sin.}a\,\mathrm{Sin.}d}\,,$$

$$\mathrm{Cos.}^2\tfrac{1}{2}(a,d)=\frac{\mathrm{Sin.}^2\frac{1}{2}(a+d)-\mathrm{Sin.}^2\frac{1}{2}x}{\mathrm{Sin.}a\,\mathrm{Sin.}d}\,.$$

En mettant, dans ces deux formules, pour $\mathrm{Sin.}^2\frac{1}{2}x$, la valeur (I) que nous avons trouvée tout à l'heure, elles deviennent, en rassemblant d'une part tous les termes multipliés par $\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}b\,\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}c$, et de l'autre tous les termes multipliés par $\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}a\,\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}d$,

$$\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(a,d)=\frac{\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}a\,\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}d\left\{\mathrm{Sin.}^2\frac{1}{2}b+\mathrm{Sin.}^2\frac{1}{2}c-\mathrm{Sin.}^2\frac{1}{2}(a-d)\right\}+\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}b\,\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}c\left\{\mathrm{Sin.}^2\frac{1}{2}a+\mathrm{Sin.}^2\frac{1}{2}d-\mathrm{Sin.}^2\frac{1}{2}(a-d)\right\}}{(\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}b\,\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}c+\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}a\,\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}d)\mathrm{Sin.}a\,\mathrm{Sin.}d}\,,$$

$$\mathrm{Cos.}^2\tfrac{1}{2}(a,d)=\frac{\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}a\,\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}d\left\{\mathrm{Sin.}^2\frac{1}{2}(a+d)-\mathrm{Sin.}^2\frac{1}{2}b-\mathrm{Sin.}^2\frac{1}{2}c\right\}+\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}b\,\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}c\left\{\mathrm{Sin.}^2\frac{1}{2}(a+d)-\mathrm{Sin.}^2\frac{1}{2}a-\mathrm{Sin.}^2\frac{1}{2}d\right\}}{(\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}b\,\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}c+\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}a\,\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}d)\mathrm{Sin.}a\,\mathrm{Sin.}d}\,;$$

mais on trouve facilement

$$\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}a+\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}d-\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}(a-d)=2\text{Sin}.\tfrac{1}{2}a\text{Sin}.\tfrac{1}{2}d\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(a-d)\ ,$$

$$\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}(a+d)-\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}a-\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}d=2\text{Sin}.\tfrac{1}{2}a\text{Sin}.\tfrac{1}{2}d\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(a+d)\ ;$$

en substituant donc, mettant dans les dénominateurs pour $\text{Sin}\,a$ et $\text{Sin}.d$, $2\text{Sin}.\tfrac{1}{2}a\text{Cos}.\tfrac{1}{2}a$ et $2\text{Sin}.\tfrac{1}{2}d\text{Cos}.\tfrac{1}{2}d$ et supprimant, haut et bas, le facteur $\text{Sin}.\tfrac{1}{2}a\text{Sin}.\tfrac{1}{2}d$, il viendra

$$\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}(a,d)=\frac{\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}b+\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}c-\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}(a-d)+2\text{Sin}.\tfrac{1}{2}b\text{Sin}.\tfrac{1}{2}c\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(a-d)}{4(\text{Sin}.\tfrac{1}{2}b\text{Sin}.\tfrac{1}{2}c+\text{Sin}.\tfrac{1}{2}a\text{Sin}.\tfrac{1}{2}d)\text{Cos}.\tfrac{1}{2}a\text{Cos}.\tfrac{1}{2}d}\ ,$$

$$\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}(a,d)=\frac{\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}(a+d)-\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}b-\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}c+2\text{Sin}.\tfrac{1}{2}b\text{Sin}.\tfrac{1}{2}c\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(a+d)}{4(\text{Sin}.\tfrac{1}{2}b\text{Sin}.\tfrac{1}{2}c+\text{Sin}.\tfrac{1}{2}a\text{Sin}.\tfrac{1}{2}d)\text{Cos}.\tfrac{1}{2}a\text{Cos}.\tfrac{1}{2}d}\ ;$$

ou, en changeant respectivement, dans les numérateurs, $\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}(a-d)$ et $\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}(a+d)$ en $1-\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}(a-d)$ et $1-\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}(a+d)$,

$$\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}(a,d)=\frac{\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}(a-d)+2\text{Sin}.\tfrac{1}{2}b\text{Sin}.\tfrac{1}{2}c\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(a-d)-(1-\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}b-\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}c)}{4(\text{Sin}.\tfrac{1}{2}b\text{Sin}.\tfrac{1}{2}c+\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}a\text{Sin}.\tfrac{1}{2}d)\text{Cos}.\tfrac{1}{2}a\text{Cos}.\tfrac{1}{2}d}\ ,$$

$$\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}(a,d)=\frac{(1-\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}b-\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}c)-\{\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}(a+d)-2\text{Sin}.\tfrac{1}{2}b\text{Sin}.\tfrac{1}{2}c\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(a+d)\}}{4(\text{Sin}.\tfrac{1}{2}b\text{Sin}.\tfrac{1}{2}c+\text{Sin}.\tfrac{1}{2}a\text{Sin}.\tfrac{1}{2}d)\text{Cos}.\tfrac{1}{2}a\text{Cos}.\tfrac{1}{2}d}\ ;$$

mais

$$1-\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}b-\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}c=(1-\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}b)(1-\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}b)-\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}b\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}c$$

$$=\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}b\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}c-\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}b\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}c\ ;$$

donc, en substituant

$$\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}(a,d)=\frac{\{\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(a-d)+\text{Sin}.\tfrac{1}{2}b\text{Sin}.\tfrac{1}{2}c\}^2-\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}b\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}c}{4(\text{Sin}.\tfrac{1}{2}b\text{Sin}.\tfrac{1}{2}c+\text{Sin}.\tfrac{1}{2}a\text{Sin}.\tfrac{1}{2}d)\text{Cos}.\tfrac{1}{2}a\text{Cos}.\tfrac{1}{2}d}\ ,$$

$$\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}(a,d)=\frac{\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}b\,\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}c-\{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a+d)-\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c\}^2}{4(\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}d)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}d}\,.$$

Le numérateur de la première fraction se décompose en ces deux facteurs

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a-d)+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c=\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a-d)+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b+c)\,,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a-d)-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c=\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a-d)-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b+c)\,,$$

et le numérateur de la seconde en ces deux-ci :

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c-\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a+d)=\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b+c)+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a+d)\,,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a+d)=\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b-c)-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a+d)\,;$$

de sorte qu'on a

$$\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(a,d)=\frac{\{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a-d)+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b-c)\}\{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a-d)-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b+c)\}}{4(\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}d)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}d}\,,$$

$$\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}(a,d)=\frac{\{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b+c)+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a+d)\}\{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b-c)-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a+d)\}}{4(\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}d)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\,\text{Cos.}d}\,;$$

or, on a

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a-d)+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b-c)=2\text{Cos.}\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\text{Cos.}\tfrac{1}{4}(a+c-b-d)\,,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a-d)-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b+c)=2\text{Sin.}\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\text{Sin.}\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)\,,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b+c)+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a+d)=2\text{Cos.}\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\text{Cos.}\tfrac{1}{4}(b+c-a-d)\,,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b-c)-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a+d)=2\text{Sin.}\tfrac{1}{4}(d+a+b-c)\,\text{Sin.}\tfrac{1}{4}(c+d+a-b)\,;$$

donc finalement

Sin.²

$$\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(a,d)=\frac{\text{Cos.}\frac{1}{4}(a+b+c+d)\text{Cos.}\frac{1}{4}(a+c-b-d)\text{Sin.}\frac{1}{4}(a+b+c-d)\text{Sin.}\frac{1}{4}(b+c+d-a)}{(\text{Sin.}\frac{1}{2}b\text{Sin.}\frac{1}{2}c+\text{Sin.}\frac{1}{2}a\text{Sin.}\frac{1}{2}d)\text{Cos.}\frac{1}{2}a\text{Cos.}\frac{1}{2}d}\;;$$

$$\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}(a,d)=\frac{\text{Cos.}\frac{1}{4}(a+b-c-d)\text{Cos.}\frac{1}{4}(b+c-a-d)\text{Sin.}\frac{1}{4}(d+a+b-c)\text{Sin.}\frac{1}{4}(c+d+a-b)}{(\text{Sin.}\frac{1}{2}b\text{Sin.}\frac{1}{2}c+\text{Sin.}\frac{1}{2}a\text{Sin.}\frac{1}{2}d)\text{Cos.}\frac{1}{2}a\text{Cos.}\frac{1}{2}d}\;.$$

En faisant, pour abréger,

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\text{Cos.}\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\text{Cos.}\tfrac{1}{4}(a+c-b-d)\text{Cos.}\tfrac{1}{4}(b+c-a-d)=M\;;$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)\text{Sin.}\tfrac{1}{4}(c+d+a-b)\text{Sin.}\tfrac{1}{4}(d+a+b-c)\text{Sin.}\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)=N\;;$$

auquel cas M et N seront des fonctions symétriques des quatre côtés a, b, c, d, et en se rappelant que

$$\text{Sin.}(a\,,\,d)=2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a\,,\,d)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a\,,\,d)\;,$$

on aura

$$\text{Sin.}(a,d)=\frac{2\sqrt{MN}}{(\text{Sin.}\frac{1}{2}b\text{Sin.}\frac{1}{2}c+\text{Sin.}\frac{1}{2}a\text{Sin.}\frac{1}{2}d)\text{Cos.}\frac{1}{2}a\text{Cos.}\frac{1}{2}d}\;; \qquad \text{(III)}$$

d'où l'on voit qu'ici les angles opposés ne sont pas supplément l'un de l'autre, comme dans le quadrilatère rectiligne inscrit.

En changeant respectivement a, b, c, d en c, d, a, b, il vient

$$\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(b,c)=\frac{\text{Cos.}\frac{1}{4}(a+b-c-d)\text{Cos.}\frac{1}{4}(a+c-b-d)\text{Sin.}\frac{1}{4}(c+d+a-b)\text{Sin.}\frac{1}{4}(d+a+b-c)}{(\text{Sin.}\frac{1}{2}b\text{Sin.}\frac{1}{2}c+\text{Sin.}\frac{1}{2}a\text{Sin.}\frac{1}{2}d)\text{Cos.}\frac{1}{2}b\text{Cos.}\frac{1}{2}c}\;,$$

$$\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}(b,c)=\frac{\text{Cos.}\frac{1}{4}(a+b+c+d)\text{Cos.}\frac{1}{4}(b+c-a-d)\text{Sin.}\frac{1}{4}(b+c+d-a)\text{Sin.}\frac{1}{4}(a+b+c-d)}{(\text{Sin.}\frac{1}{2}b\text{Sin.}\frac{1}{2}c+\text{Sin.}\frac{1}{2}a\text{Sin.}\frac{1}{2}d)\text{Cos.}\frac{1}{2}b\text{Cos.}\frac{1}{2}c}\;;$$

mais on a

$$\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\{(a\,,\,d)+(b\,,\,c)\}=\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a\,,d)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b\,,\,c)+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a\,,d)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(b,c)\,,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\{(a\,,d)+(b\,,c)\}=\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a\,,d)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b\,,c)-\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a\,,d)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(b\,,c)\,;$$

en substituant donc, et posant, pour abréger,

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c\text{Cos.}\tfrac{1}{2}d=P\,,$$

il viendra

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\{(a,d)+(b,c)\}=\frac{\text{Sin.}\frac{1}{4}(b+c+d-a)\text{Sin.}\frac{1}{4}(a+b+c-d)+\text{Sin.}\frac{1}{4}(c+d-a-b)\text{Sin.}\frac{1}{4}(d+a+b-c)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}b\text{Sin.}\frac{1}{2}c+\text{Sin.}\frac{1}{2}a\text{Sin.}\frac{1}{2}d}\sqrt{\frac{M}{P}}\,,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\{(a,d)+(b,c)\}=\frac{\text{Cos.}\frac{1}{4}(a+b+c+d)\text{Cos.}\frac{1}{4}(b+c-a-d)-\text{Cos.}\frac{1}{4}(a+b-c-d)\text{Cos.}\frac{1}{4}(a+c-b-d)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}b\text{Sin.}\frac{1}{2}c+\text{Sin.}\frac{1}{2}a\text{Sin.}\frac{1}{2}d}\sqrt{\frac{N}{P}}\,;$$

cela revient à

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\{(a,d)+(b,c)\}=\frac{\{\text{Cos.}\frac{1}{2}(a-d)-\text{Cos.}\frac{1}{2}(b+c)\}+\{\text{Cos.}\frac{1}{2}(b-c)-\text{Cos.}\frac{1}{2}(a+d)\}}{2(\text{Sin.}\frac{1}{2}b\text{Sin.}\frac{1}{2}c+\text{Sin.}\frac{1}{2}a\text{Sin.}\frac{1}{2}d)}\sqrt{\frac{M}{P}}\,,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\{(a,d)+(b,c)\}=\frac{\{\text{Cos.}\frac{1}{2}(a+d)+\text{Cos.}\frac{1}{2}(b+c)\}-\{\text{Cos.}\frac{1}{2}(a-d)+\text{Cos}\frac{1}{2}(b-c)\}}{2(\text{Sin.}\frac{1}{2}b\text{Sin.}\frac{1}{2}c+\text{Sin.}\frac{1}{2}a\text{Sin.}\frac{1}{2}d)}\sqrt{\frac{N}{R}}\,;$$

d'où, par un développement ultérieur,

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\{(a\,,\,d)+(b\,,\,c)\}=+\sqrt{\frac{M}{P}}\,,\quad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}\{(a,d)+(b,c)\}=-\sqrt{\frac{N}{P}}\,.$$

Ces deux fonctions étant symétriques, il en résulte que

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\{(a\,,\,d)+(b\,,\,c)\}=\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\{(a\,,\,b)+(c\,,\,d)\}=+\sqrt{\frac{M}{P}}\,,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\{(a,d)+(b,c))\}=\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\{(a,b)+(c,d)\}=-\sqrt{\frac{N}{P}}\,;$$

et, par conséquent

$$(a,d)+(b,c)=(a,b)+(c,d)\;;$$

c'est-à-dire que, *dans tout quadrilatère sphérique inscrit, la somme de deux angles opposés est égale à la somme des deux autres angles*; propriété que le quadrilatère rectiligne inscrit partage, au surplus, avec le quadrilatère sphérique, avec cette différence seulement que, dans le premier, ces deux sommes sont constantes, tandis que, dans ce dernier, au contraire, elles sont variables.

Si l'on désigne par Q l'aire du quadrilatère, l'aire du triangle sphérique trirectangle étant prise pour unité, on aura, comme l'on sait,

$$Q=(a,b)+(b,c)+(c,d)+(a,d)-2\varpi\,,$$

ou bien, par ce qui vient d'être dit,

$$Q=2\{(a,d)+(b,c)-\varpi\}\;;$$

donc

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{4}Q=-\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\{(a,d)+(b,c)\}=\sqrt{\frac{N}{P}}\,,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{4}Q=+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\{(a,d)+(b,c)\}=\sqrt{\frac{M}{P}}\,,$$

et de là encore

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}Q=2\text{Sin.}\tfrac{1}{4}Q\text{Cos.}\tfrac{1}{4}Q=\frac{2\sqrt{MN}}{P}\,,$$

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{4}Q=\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{4}Q}{\text{Cos}\tfrac{1}{4}Q}=\sqrt{\frac{N}{M}}\,;\qquad\text{(IV)}$$

fonctions qui sont toutes symétriques.

Si l'on suppose $d=0$, le quadrilatère devient un triangle; de sorte qu'en représentant par T l'aire du triangle sphérique dont les trois côtés sont a, b, c, on a

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{4}T=\sqrt{\frac{\text{Sin.}\frac{1}{4}(a+b+c)\text{Sin.}\frac{1}{4}(b+c-a)\text{Sin.}\frac{1}{4}(c+a-b)\text{Sin.}\frac{1}{4}(a+b-c)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}a\text{Cos.}\frac{1}{2}b\text{Cos.}\frac{1}{2}c}}\ ,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{4}T=\sqrt{\frac{\text{Cos.}\frac{1}{4}(a+b+c)\text{Cos.}\frac{1}{4}(b+c-a)\text{Cos.}\frac{1}{4}(c+a-b)\text{Cos.}\frac{1}{4}(a+b-c)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}a\text{Cos.}\frac{1}{2}b\,\text{Cos.}\frac{1}{2}c}}\ ,$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}T=\sqrt{\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b+c)\text{Sin.}\frac{1}{2}(b+c-a)\text{Sin.}\frac{1}{2}(c+a-b)\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b-c)}{2\text{Cos.}\frac{1}{2}a\text{Cos.}\frac{1}{2}b\text{Cos.}\frac{1}{2}c}}\ ,$$

$$\text{Tang}\tfrac{1}{4}T=\sqrt{\text{Tang}\tfrac{1}{4}(a+b+c)\text{Tang}\tfrac{1}{4}(b+c-a)\text{Tang.}\tfrac{1}{4}(c+a-b)\text{Tang.}\tfrac{1}{4}(a+b-c)}\ ;$$

formules connues, dont la dernière est due à M. Lhuilier, de Genève.

Si nous désignons par R l'arc de grand cercle qui joint le pôle du cercle auquel notre quadrilatère est inscrit à l'un quelconque des points de sa circonférence, cet arc aura pour sinus le rayon même de ce cercle, de sorte que, pour obtenir $\text{Sin.}R$, il ne s'agira que de changer, dans la formule (5) précédemment obtenue,

$$a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ d\ ,\ R$$

respectivement en

$$2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\ ,\ 2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\ ,\ 2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c\ ,\ 2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}d\ ,\ \text{Sin.}R\ .$$

Posant donc, pour abréger,

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}d-\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a=\text{Sin.}A\ ,$$
$$\text{Sin}\tfrac{1}{2}c+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}d+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a-\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b=\text{Sin.}B\ ,$$
$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}d+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b-\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c=\text{Sin.}C\ ,$$
$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c-\text{Sin.}\tfrac{1}{2}d=\text{Sin.}D\ ;$$

$$(\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c\text{Sin.}\tfrac{1}{2}d)(\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}d)(\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}d)=\text{Sin.}K\ ,$$

il viendra

$$\text{Sin.}R=2\sqrt{\frac{\text{Sin.}K}{\text{Sin.}A\,\text{Sin.}B\,\text{Sin.}C\,\text{Sin.}D}}\ . \qquad \text{(V)}$$

Il est presque superflu d'observer que les résultats que nous venons d'obtenir, en dernier lieu, s'appliquent littéralement à l'angle tétraèdre inscrit au cône droit.

Dijon, le 20 décembre 1821.

ANALISE ÉLÉMENTAIRE.

De l'élimination dans les équations du premier degré ;

Par M. GERGONNE.

SOIT l'équation du premier degré à une seule inconnue

$$ax+b=0\,, \qquad (1)$$

on en tire évidemment

$$x=-\frac{b}{a}\,;$$

Si l'on avait une seconde équation

$$a'x+b'=0\,, \qquad (2)$$

le problème se trouverait plus que déterminé, et ne pourrait être résolu qu'autant que la valeur de x, déduite de la première équation, satisferait à la seconde, c'est-à-dire, qu'autant qu'on aurait

$$-a'\frac{b}{a}+b'=0\,;$$

c'est-à-dire,

$$a'b-ab'=0\,: \qquad (3)$$

Telle est donc l'équation de condition nécessaire pour que les deux équations (1, 2) puissent avoir lieu en même temps.

Soient présentement les deux équations

$$\left.\begin{aligned} ax+by+c&=0\,,\\ a'x+b'y+c'&=0\,, \end{aligned}\right\}\ (1')$$

Si l'on nous donnait la valeur de y, dès-lors $by+c$, $b'y+c'$ deviendraient des termes connus, et la recherche de x rentrerait dans le problème plus que déterminé à une inconnue qui vient de nous occuper; la valeur donnée pour y devrait donc être telle qu'on eût (3)

$$a(b'y+c')-a'(by+c)=0\ ;$$

mais, si y n'est pas encore déterminée, on se trouvera à temps de faire en sorte que cette dernière équation soit satisfaite; et il ne s'agira pour cela que de prendre y égale à la valeur qu'elle donne pour cette inconnue, c'est-à-dire;

$$y=-\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'},$$

d'où on déduit, par une simple permutation de lettres

$$x=-\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}\ ;$$

et telles sont, conséquemment, les valeurs de x, y déduites des équations (1').

Si, outre ces deux équations, on avait encore

$$a''a+b''y+c''=0\ , \qquad (2')$$

le problème se trouverait plus que déterminé, et ne pourrait être résolu qu'autant que les valeurs de x et y déduites des équations (1') satisferaient à cette dernière, c'est-à-dire, qu'autant qu'on aurait

$$-a''.\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}-b''.\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}+c''=0\ ,$$

c'est-à-dire,

$$(a'b''-b'a'')c+(a''b-b''a)c'+(ab'-ba')c''=0. \qquad (3')$$

Telle est donc l'équation de condition nécessaire pour que les trois équations (1', 2') puissent avoir lieu en même temps.

Soient, en troisième lieu, les équations

$$\left.\begin{array}{l} a\,x+b\,y+c\,z+d=0\,, \\ a'x+b'y+c'z+d'=0\,, \\ a''x+b''y+c''z+d''=0\,. \end{array}\right\} \quad (1'')$$

Si l'on nous donnait la valeur de z, dès-lors $cz+d$, $c'z+d'$, $c''z+d''$ deviendraient des termes connus, et la recherche de x et y rentrerait dans le problème plus que déterminé à deux inconnues qui vient en dernier lieu de nous occuper; la valeur donnée pour z devrait donc être telle qu'on eut (3')

$$(a'b''-b'a'')(cz+d)+(a''b-b''a)(c'z+d')+(ab'-ba')(c''z+d'')=0$$

mais, si z n'est pas encore déterminé, on se trouvera à temps de faire en sorte que cette dernière équation soit satisfaite; et il ne s'agira que de prendre z égal à la valeur qu'elle donne pour cette inconnue, c'est-à-dire,

$$z=-\frac{(a'b''-b'a'')d+(a''b-b''a)d'+(ab'-ba')d''}{(a'b''-b'a'')c+(a''b-b''a)c'+(ab'-ba')c''}\,;$$

d'où on déduit, par une simple permutation de lettres

$$x=-\frac{(b'c''-c'b'')d+(b''c-c''b)d'+(bc'-cb')d''}{(b'c''-c'b'')a+(b''c-c''b)a'+(bc'-cb')a''}\,,$$

$$y=-\frac{(c'a''-a'c'')d+(c''a-a''c)d'+(ca'-ac')d''}{(c'a''-a'c'')b+(c''a-a''c)b'+(ca'-ac')b''}\,;$$

et telles sont, conséquemment, les valeurs de x, y, z déduites des équations (1''); valeurs dans lesquelles la différence des dénominateurs n'est qu'apparente, comme il est aisé de l'apercevoir.

Si, outre ces trois équations, on avait encore

$$a'''x+b'''y+c'''z+d'''=0\,, \qquad (2'')$$

le problème se trouverait plus que déterminé, et ne pourrait être résolu qu'autant que les valeurs de x, y, z, déduites des équations (1''), satisferaient à l'équation (2''), c'est-à-dire, qu'autant qu'on aurait

$$\left.\begin{array}{l}
-a'''.\dfrac{(b'c''-c'b'')d+(b''c-c''b)d'+(bc'-cb')d''}{(b'c''-c'b'')a+(b''c-c''b)a'+(bc'-cb')a''}\\[2ex]
-b'''.\dfrac{(c'a''-a'c'')d+(c''a-a''c)d'+(ca'-ac')d''}{(c'a''-a'c'')b+(c''a-a''c)b'+(ca'-ac')b''}\\[2ex]
-c'''.\dfrac{(a'b''-b'a'')d+(a''b-b''a)d'+(ab'-ba')d''}{(a'b''-b'a'')c+(a''b-b''a)c'+(ab'-ba')c''}\\[2ex]
+d'''
\end{array}\right\}=0\,;$$

c'est-à-dire,

$$\left.\begin{array}{l}
(a'b''c'''-a'c''b'''+c'a''b'''-b'a''c'''+b'c''a'''-c'b''a''')d\\
+(a''b'''c-a''c'''b+c''a'''b-b''a'''c+b''c'''a-c''b'''a)d'\\
+(a'''bc'-a'''cb'+c'''ab'-b'''ac'+b'''ca'-c'''ba')d''\\
+(ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a'')d'''
\end{array}\right\}=0.\quad(3'')$$

Telle est donc l'équation de condition nécessaire pour que les quatre équations $(1'', 2'')$ puissent avoir lieu en même temps.

Nous voilà donc parvenus, sans calcul, et en n'ayant absolument que la simple peine d'écrire, à la construction des formules générales qui résolvent les problèmes déterminés du premier degré à une, deux et trois inconnues; et on voit qu'il ne nous en coûterait que la même peine pour aller plus avant. Nous avons en outre obtenu, chemin faisant, l'équation de condition qui doit avoir lieu, dans chaque cas, lorsque le nombre des équations surpasse d'une unité celui des inconnues, pour que le problème soit possible.

Cette méthode nous paraît plus briève encore que celle des multiplicateurs indéterminés; même en la présentant comme nous l'avons fait à la page 47 du II.e volume de ce recueil; et nous ne lui préférons que la théorie de M. Laplace que nous avons développée à la page 148 du IV.e volume; mais cette théorie pouvant paraître un peu trop au-dessus de la portée des commençans, nous avons pensé qu'il pourrait n'être pas inutile pour eux de la remplacer d'abord par ce qui précède.

QUESTIONS

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du dernier des cinq problèmes de géométrie proposés à la page 108 de ce volume ;

Par M. Tédenat, ancien recteur, correspondant de l'académie royale des sciences.

Problème. On demande l'équation la plus générale de la courbe qui jouit de cette propriété que si, par chacun de ses points, on lui mène une normale, terminée à l'axe des abscisses, cette normale ait même longueur que l'ordonnée qui a son pied au même point de cet axe ?

Solution. Il est aisé de voir, par la nature du problème, que l'axe des x doit être un diamètre de la courbe demandée, dont l'équation ne doit conséquemment renfermer que des puissances paires de y. En conséquence, nous prendrons, pour cette équation

$$y^2=2\varphi(x) \; ; \qquad (1)$$

de sorte que toute la question se réduira à assigner la forme de la fonction φ.

En différentiant cette équation, il vient

$$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi'(x)\ ,$$

φ' étant, à l'ordinaire, la dérivée de φ. Or, $y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ est, comme l'on sait l'expression de la sousnormale, de sorte que l'abscisse du pied de la normale est $x+y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x+\varphi'(x)$; et, quant à la longueur de la normale, elle est, comme l'on sait,

$$y\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}=\sqrt{y^2+\left(y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}=\sqrt{2\varphi(x)+[\varphi'(x)]^2}\ ;$$

et puisque l'ordonnée qui répond à l'abscisse $x+\varphi'(x)$ doit être égale à cette normale, il faudra que les valeurs de l'une et l'autre résolvent l'équation (1); c'est-à-dire qu'on devra avoir

$$2\varphi(x)+[\varphi'(x)]^2=2\varphi[x+\varphi'(x)]\ . \qquad (2)$$

Lors donc qu'on voudra savoir si une courbe, dont l'équation ne renferme que des puissances paires de y, jouit de la propriété dont il s'agit, on résoudra cette équation par rapport à y^2, dont on prendra la valeur pour $2\varphi(x)$; ce qui donnera aussi $\varphi(x)$, d'où on conclura $\varphi'(x)$. Substituant alors les valeurs de $\varphi(x)$ et de $\varphi'(x)$ dans l'équation (2), il faudra que ces valeurs la rendent identique.

Si l'équation proposée ne satisfesait pas généralement à cette condition, mais qu'elle contînt d'ailleurs des coefficiens indéterminés, on pourrait profiter de leur indétermination pour rendre l'équation (2) identique.

Pour appliquer ceci à un exemple, proposons-nous de chercher si, dans les deux premiers degrés, quelques courbes jouissent de la propriété dont il s'agit. Soit pour cela

$$\varphi(x)=A+Bx+Cx^2\ ,$$

dans laquelle A, B, C sont supposés indéterminés. On en conclura

$$\varphi'(x)=B+2Cx\ ,$$

d'où

$$x+\varphi'(x)=B+(1+2C)x$$

et, par suite,

$$\varphi[x+\varphi'(x)]=A+B[B+(1+2C)x]+C[B+(1+2C)x]^2\ ;$$

d'où, en substituant dans l'équation (2)

$$2(A+Bx+Cx^2)+(B+2Cx)^2$$

$$=2\{A+B[B+(1+2C)x]+C[B+(1+2C)x]^2\}\ :$$

En développant, transposant, ordonnant et réduisant, cette équation deviendra

$$(1+2C)[B^2+4C(B+C)x^2]=0\ ;$$

d'où l'on voit que A demeure tout-à-fait indéterminé.

Or, il n'y a que deux moyens de rendre cette équation identique ; le premier est de rendre, à la fois, B et C nuls ; le second est de faire $C=-\frac{1}{2}$, quel que soit B ; donc les deux seules fonctions qui résolvent le problème, dans les deux premiers degrés, sont

$$\varphi(x)=A\ , \qquad \varphi(x)=A+Bx-\tfrac{1}{2}x^2\ ;$$

ce qui donne les deux équations

$$y^2=2A\,,\qquad y^2=2A+2Bx-x^2\,,$$

donc la première appartient au système de deux parallèles à l'axe des x, situées à une même distance quelconque au dessus et au-dessous de cet axe, et dont l'autre est celle d'un cercle de rayon arbitraire, ayant son centre en un point quelconque du même axe. Il est évident, en effet, que ces deux lignes resolvent également le problème (*).

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de Géométrie.

DÉTERMINER en fonction des quatre côtés d'un quadrilatère soit rectiligne, soit sphérique inscrit au cercle, 1.° l'angle de deux côtés opposés; 2.° l'angle des deux diagonales?

(*) Ce curieux et difficile problème, qui dépend évidemment des équations aux *différences mêlées*, et qui est dû à Euler, a été traité par M. Babbage qui lui a appliqué une analise qui lui est propre, dans un *Mémoire sur le calcul fonctionnel*, qui fait partie des *Transactions philosophiques* pour l'année 1816. MM. Biot et Poisson s'en sont aussi occupés. Ceux qui voudront de plus amples détails sur ce sujet peuvent consulter le III.e volume du *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* de M. LACROIX, nouvelle édition, page 591.

J. D. G.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Essai sur le développement des fonctions en séries;

Par M. Frédéric Sarrus, docteur ès sciences, professeur de mathématiques au collége de Pezenas.

L'essai que l'on va lire a pour but la recherche d'un procédé simple, direct, uniforme et à l'abri de toute objection, pour parvenir aux diverses formules de développement que l'on a obtenues jusqu'ici, soit par la méthode de la séparation des échelles, soit par la théorie des fonctions génératrices, ainsi qu'à une infinité d'autres formules auxquelles l'application de l'un ou de l'autre procédé ne saurait conduire. Pour atteindre ce but, je partirai des principes développés dans un mémoire sur le même sujet présenté, il y a quelques années, par M. Servois, à la classe des sciences physiques et mathématiques de l'institut, dont il obtint l'approbation, et qui a paru postérieurement dans le V.e volume du présent recueil. Je rappellerai d'abord brièvement ceux des principes consignés dans ce mémoire qui peuvent être nécessaires pour l'intelligence de mes recherches, en empruntant, le plus souvent, les expressions même de l'auteur. D'autres fois, au contraire, je me permettrai de signaler, sans détour, les distractions, en petit nombre d'ailleurs, qui me paraîtront avoir échappé à cet estimable géomètre. Je procéderai ensuite à la recherche de ma formule fondamentale, dont je ferai deux applications seulement, en me bornant, pour abréger, à en indiquer plusieurs autres.

En désignant par u une fonction déterminée quelconque d'une ou de plusieurs variables indépendantes, convenons d'exprimer une dérivée déterminée de cette fonction, en écrivant, avant la lettre qui la représente, une caractéristique destinée à rappeler la liaison qui existe entre cette dérivée et la fonction primitive u. Ainsi, ∇ étant une pareille caractéristique, ∇u représentera une dérivée de u qui sera entièrement connue, lorsqu'on aura déterminé quelle est la liaison que la caractéristique ∇ indique devoir exister entre la dérivée ∇u et sa primitive u.

Nous dirons alors que u est le *sujet* de ce mode de dérivation ; et que ∇u en est le *résultat*.

Que, par exemple, on ait $u=\frac{1-x^2}{1+x^2}$; x étant une variable indépendante ; et que le mode de dérivation désigné par ∇ consiste à changer x en $\frac{a}{x}$; on aura alors $\nabla u=\dfrac{1-\frac{a^2}{x^2}}{1+\frac{a^2}{x^2}}=\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}$.

Lorsque le sujet sera une fonction déterminée ou indéterminée de plusieurs autres fonctions, nous renfermerons ce sujet entre deux parenthèses, afin d'avertir que la caractéristique ∇ porte sur sa totalité. Ainsi, $\nabla(t+u)$ exprimera la dérivée ∇ de la somme des deux fonctions t, u ; de même $\nabla(pq)$ exprimera la dérivée ∇ du produit des deux fonctions p, q ; en général $\nabla[\psi(r,s)]$ exprimera la dérivée ∇ de la fonction ψ des fonctions r, s.

Qu'on ait, par exemple, $y=\text{Log.}(1-x^2)$, $z=\text{Cos.}(1+x^2)$, et que le mode de dérivation désigné par ∇ consiste à changer x en $1-x$; on aura dans ce cas $\nabla\left(\frac{y}{z}\right)=\frac{\text{Log.}(2x-x^2)}{\text{Cos.}(2-2x+x^2)}$.

∇u, quoique résultat d'une dérivation, peut, à son tour, devenir le sujet d'une dérivation nouvelle. Soit Γ la caractéristique de cette seconde dérivation, nous représenterons son résultat par $\Gamma\nabla u$. Cette dernière dérivée peut pareillement devenir le sujet d'une troisième dérivation ; et si Λ en est la caractéristique, le symbole de son résultat sera $\Lambda\Gamma\nabla u$; et ainsi de suite, quel que soit le nombre des dérivations successives, semblables ou dissemblables, que l'on se propose d'effectuer sur la fonction u.

Que, par exemple, pour nous borner au cas le plus simple, on ait $u=\frac{a-x}{a+x}$, que le mode de dérivation désigné par ∇ consiste à changer x en $x+a$, et que le mode de dérivation désigné par Γ consiste à changer x en $\frac{x^2}{a}$; nous aurons d'abord $\nabla u=-\frac{x}{2a+x}$, et ensuite $\Gamma\nabla u=-\frac{x^2}{2a^2+x^2}$. Dans la même hypothèse, on trouverait $\nabla\Gamma u=-\frac{2ax+x^2}{2a^2+2ax+x^2}$.

On voit, d'après cela, qu'on peut souvent être conduit à des expressions de la forme

$$\nabla\nabla u\,,\quad \nabla\nabla\nabla u\,,\quad \nabla\nabla\nabla\nabla u\,,\ldots\ldots\ldots$$

et alors nous convenons, pour abréger, de considérer comme leur étant équivalentes les expressions

$$\nabla^2 u\,,\quad \nabla^3 u\,,\quad \nabla^4 u\,,\ldots\ldots\ldots$$

De même, si nous rencontrons des expressions de cette forme

$$\Gamma\nabla\Gamma\nabla u\,,\quad \Gamma\nabla\Gamma\nabla\Gamma\nabla u\,,\quad \Gamma\nabla\Gamma\nabla\Gamma\Delta\Gamma\nabla u\,,\ldots\ldots$$

nous les remplacerons par

$$(\Gamma\nabla)^2 u\,,\quad (\Gamma\nabla)^3 u\,,\quad (\Gamma\nabla)^4 u\,,\ldots\ldots\ldots$$

nous remplacerions de même les expressions

$$\Lambda\Gamma\nabla\Lambda\Gamma\nabla u\,,\quad \Lambda\Gamma\nabla\Lambda\Gamma\nabla\Lambda\Gamma\Delta u\,,$$

par

$$(\Lambda\Gamma\nabla)^2u\,,\quad(\Lambda\Gamma\nabla)^3u\,,\ldots\ldots\ldots$$

et ainsi de suite, quel que pût être d'ailleurs le nombre des caractéristiques périodiquement entremêlées.

Nous admettrons encore des symboles de dérivées de la forme

$$\nabla^{-1}u\,,\quad\nabla^{-2}u\,,\quad\nabla^{-3}u\,,\quad\nabla^{-4}u\,,\ldots\ldots$$

dont la définition générale est donnée par l'équation

$$\nabla^n\nabla^{-n}u=u\,.$$

Ce sont des dérivées *inverses* ou d'*ordre négatif*.

Si, par exemple, le mode de dérivation désigné par la caractéristique ∇ consiste à changer x en Log.x, le mode de dérivation désigné par la caractéristique ∇^{-1} devra consister à changer x en e^x; car on a Log.$e^x=x$. Pareillement, si le mode de dérivation désigné par la caractéristique ∇ consiste à changer x en Tang.x, le mode de dérivation désigné par la caractéristique ∇^{-1} devra consister à changer x en Arc(Tang.$=x$), puisque Tang.Arc(Tang $=x$)$=x$; et ainsi de suite.

Si le mode de dérivation, désigné par la caractéristique ∇, est tel qu'un même résultat $\nabla^n u$ ne puisse être dérivé que d'une seule fonction primitive u, on devra alors avoir évidemment

$$\nabla^{-n}\nabla^n u=u\;;$$

mais il n'en serait plus de même si plusieurs sujets différens pouvaient conduire à un seul et même résultat. Dans ce cas, u serait bien une valeur particulière de la fonction $\nabla^{-n}\nabla^n u$; mais elle n'en serait qu'une valeur particulière.

Que, par exemple, le mode de dérivation, désigné par la caractéristique ∇, consiste à changer d'abord x en x^{n+1}, et à diviser ensuite le résultat par la fonction primitive, si l'on a $u=ax$, on aura $\nabla u=\frac{ax^{n+1}}{ax}=x^n$. Or, comme, par l'effet de ce mode de dérivation, le coefficient a disparaît, il s'ensuit que ∇u demeurerait toujours le même quand bien même u deviendrait bx, cx, dx, ... ; lors donc qu'on demandera $\nabla^{-1}\nabla u$, on pourra dire indifféremment que c'est au, bu, cu, ... (*).

De même encore, si le mode de dérivation désigné par la caractéristique ∇, consiste à prendre le cosinus de la fonction u et qu'on ait $u=2a\varpi+x$, on aura $\nabla u=\text{Cos}.x$, résultat dans lequel la constante a ne paraît plus ; de sorte que $\nabla^{-1}\nabla u$ peut être indistinctement égal à $2a\varpi+x$, $2b\varpi+x$, $2c\varpi+x$;...... pourvu toutefois que a, b, c, ... soient des nombres entiers.

Lorsque deux caractéristiques de dérivation ∇, Γ seront telles que l'on aura identiquement

$$\nabla\Gamma u=\Gamma\nabla u\,,$$

quelle que soit d'ailleurs la fonction u ; nous dirons que ces caractéristiques sont *commutatives entre elles.* C'est, par exemple, ce qui arriverait, si le mode de dérivation désigné par ∇ consistait à changer x en x^m, et que le mode de dérivation désigné par Γ consistât à changer x en x^n, puisque $(x^m)^n=(x^n)^m=x^{mn}$.

Mais il n'en serait plus de même si, par exemple, le premier mode de dérivation, consistant toujours à changer x en x^m, le second consistait à changer x en $x+a$; puisque $(x+a)^m$ et x^m+a sont deux quantités généralement inégales.

(*) C'est cette considération qui nous a déterminés à ne point admettre, comme l'a fait M. Servois, dans le mémoire cité, pour la définition des dérivées d'ordre négatif, la double équation

$$\nabla^{-n}\nabla^{n}u=\nabla^{n}\nabla^{-n}u=u\,.$$

De même si, a étant un facteur constant, on avait

$$\nabla au = a\nabla u\,,$$

nous dirions que la caractéristique ∇ est commutative avec ce facteur. C'est, par exemple, ce qui arrivera, si le mode de dérivation désigné par ∇ consiste à substituer pour x dans u une fonction quelconque de x.

Mais si, au contraire, le mode de dérivation consistait, par exemple, à prendre le logarithme, le facteur et la caractéristique cesseraient dès-lors d'être commutatifs entre eux, puisque $a\mathrm{Log.}u$ et $\mathrm{Log.}au$ ne sont point la même chose.

Si trois caractéristiques Λ, Γ, ∇ sont commutatives deux à deux, c'est-à-dire, si l'on a

$$\Lambda\Gamma u = \Gamma\Lambda u\,,\quad \Lambda\nabla u = \nabla\Lambda u\,,\quad \Gamma\nabla u = \nabla\Gamma u\;;$$

ces trois caractéristiques seront aussi commutatives entre elles; c'est-à-dire qu'on aura

$$\Lambda\Gamma\nabla u = \Lambda\nabla\Gamma u = \Gamma\Lambda\nabla u = \Gamma\nabla\Lambda u = \nabla\Gamma\Lambda u = \nabla\Lambda\Gamma u\,.$$

Cela se prouve en changeant u en ∇u, dans la première des trois équations de départ, en Γu dans la seconde, en Λu dans la troisième; puis en prenant les dérivées Δ, Γ, Λ, respectivement, des deux membres des trois mêmes équations, et comparant ensuite les résultats. On a, pour la première transformation,

$$\Lambda\Gamma\nabla u = \Gamma\Lambda\nabla u\,,\quad \Lambda\nabla\Gamma u = \nabla\Lambda\Gamma u\,,\quad \Gamma\nabla\Lambda u = \nabla\Gamma\Lambda u\;;$$

et par la seconde

$$\nabla\Lambda\Gamma u = \nabla\Gamma\Lambda u\,,\quad \Gamma\Lambda\nabla u = \Gamma\nabla\Lambda u\,,\quad \Lambda\Gamma\nabla u = \Lambda\nabla\Lambda u\;;$$

ce qui établit complètement la proposition annoncée.

Si l'on avait un plus grand nombre de caractéristiques qui fussent pareillement commutatives deux à deux, on arriverait à leur égard, par des moyens analogues, à une conclusion semblable. Il en serait encore de même pour ces caractéristiques combinées avec un ou plusieurs facteurs constans, si ces caractéristiques étaient commutatives deux à deux, non seulement entre elles, mais encore avec chacun des facteurs constans.

Quelles que soient les caractéristiques Γ, ∇, l'on a identiquement

$$\Gamma u=\Gamma\nabla\nabla^{-1}u\ ;$$

si donc ces caractéristiques sont commutatives entre elles, on aura

$$\Gamma u=\nabla\Gamma\nabla^{-1}u\ ,$$

d'où l'on conclura

$$\Delta^{-1}\Gamma u=\nabla^{-1}\nabla\Gamma\nabla^{-1}u\ ;$$

d'où l'on voit, en se rappelant ce qui a été observé ci-dessus, que ce n'est qu'avec des restrictions qu'on peut admettre l'équation

$$\nabla^{-1}\Gamma u=\Gamma\nabla^{-1}u\ .\ (*)$$

Les mêmes considérations conduisent aussi à n'admettre qu'avec des restrictions l'équation

$$\nabla^{-1}\Gamma^{-1}u=\Gamma^{-1}\nabla^{-1}u\ ;$$

lorsque les caractéristiques ∇, Γ sont commutatives entre elles.

(*) Voyez, sur ce sujet, la précédente note ; nous n'ajoutons pas d'exemple, parce que nous rencontrerons plus loin un cas où cette équation ne saurait être admise.

Lorsque la caractéristique de derivation ∇ sera de telle nature qu'on aura identiquement

$$\nabla(t+u)=\nabla t+\nabla u\ ,$$

nous dirons que cette caractéristique est de nature *distributive*. C'est, par exemple, ce qui arrivera si le mode de dérivation désigné par ∇ consistait à multiplier la fonction par un multiplicateur constant, puisqu'on a $a(t+u)=at+au$. Mais il n'en serait plus de même si ce mode de dérivation consistait à élever la fonction à une puissance, puisque $(t+u)^m$ n'est pas la même chose que t^m+u^m. Nous ne considérerons désormais que des fonctions de nature distributive.

D'après cette définition, on aura

$$\nabla(p+q+r)=\nabla(p+q)+\nabla r=\nabla p+\nabla q+\nabla r\ ,$$

et, en général,

$$\nabla(p+q+r+s+\ldots\ldots)=\nabla p+\nabla q+\nabla r+\nabla s+\ldots\ldots\ldots$$

quels que soient le nombre et les signes des fonctions p, q, r, s,....

Nous disons, quels que soient les signes de ces fonctions; car, soit $\nabla(p-q)$, en posant $p-q=t$; d'où $\nabla(p-q)=\nabla t$, nous aurons $p=q+t$; d'où $\nabla p=\nabla(q+t)=\nabla q+\nabla t$; ce qui donne $\nabla t=\nabla p-\nabla q$, et par conséquent $\nabla(p-q)=\nabla p-\nabla q$.

Si, dans cette équation, on suppose $p=0$, il viendra $\nabla(-q)=-\nabla q$; d'où l'on voit que le coefficient -1 est commutatif avec toute caractéristique de nature distributive.

Dans la même hypothèse, on aura

$$\nabla^2(t+u)=\nabla(\nabla t+\nabla u)=\nabla^2 t+\nabla^2 u\ ,$$

$$\nabla^3(t+u)=\nabla(\nabla^2 t+\nabla^2 u)=\nabla^3 t+\nabla^3 u\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ;$$

d'où

d'où on conclura que la caractéristique ∇ étant de nature distributive, la caractéristique ∇^n, où l'on suppose n un nombre entier positif, jouit de la même propriété ; mais en serait-il de même de la caractéristique ∇^{-n} ? et, dans le cas où ce ne pourrait être qu'avec des restrictions, en quoi ces restrictions pourraient-elles consister ?

Avant de répondre à cette question, nous devons d'abord résoudre celle-ci : quelles sont les diverses valeurs de la dérivée d'ordre négatif $\nabla^{-1}p$?

Soit u une valeur particulière de cette dérivée et soit $u+t$ une autre valeur quelconque de la même dérivée, on aura, d'après l'énoncé du problème,

$$\nabla(u+t)=\nabla u=p\ ;$$

mais, en vertu de la nature distributive de la caractéristique ∇, on a

$$\nabla(u+t)=\nabla u+\nabla t\ ;$$

d'où l'on voit qu'il faut, de toute nécessité, que l'on ait

$$\nabla t=0\ ;$$

de sorte que tout se réduit à trouver les diverses valeurs de t qui satisfont à cette condition ; après quoi on aura

$$\nabla^{-1}p=u+t\ .$$

Nous appellerons *fonctions complémentaires* celles qui, comme devront être ajoutées à une valeur particulière d'une dérivée d'ordre négatif, pour en déduire les autres valeurs de la même dérivée.

Soit maintenant

$$\nabla^{-1}p+\nabla^{-1}q=u\ ;$$

prenant la dérivée ∇ des deux membres, on aura

$$p+q=\nabla u\ ,$$

d'où l'on tirera

$$\nabla^{-1}(p+q)=u+t=\nabla^{-1}p+\nabla^{-1}q+t\ ;$$

t étant une fonction complémentaire qu'il faudra déterminer de manière que cette équation ait lieu. Au reste, quelque dérivée particulière que l'on veuille choisir pour $\nabla^{-1}(p+q)$, et pour l'une des dérivées $\nabla^{-1}p$, $\nabla^{-1}q$, il sera toujours possible de prendre celle de l'autre, de telle sorte qu'il faille poser $t=0$, et que par conséquent on ait

$$\nabla^{-1}(p+q)=\nabla^{-1}p+\Delta^{-1}q\ ;$$

de sorte qu'au moyen de cette restriction on pourra regarder les caractéristiques ∇^{-1}, ∇^{-2}, ... comme étant de nature distributive; du moins si, comme nous le supposons ici, la caractéristique ∇ l'est elle même ; ce qui résout la question que nous nous étions proposée.

Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons constamment que les fonctions complémentaires sont prises de manière que les caractéristiques de dérivation inverse soient distributives.

Nous remarquerons enfin sur ce sujet que si ∇, Γ, Λ, ... sont des caractéristiques de nature distributive, on aura

$$\nabla(t+u)=\Delta t+\nabla u\ ,$$

$$\Gamma\nabla(t+u)=\Gamma(\nabla t+\nabla u)=\Gamma\nabla t+\Gamma\nabla u\ ,$$

$$\Lambda\Gamma\nabla(t+u)=\Lambda(\Gamma\nabla t+\Gamma\nabla u)=\Lambda\Gamma\nabla t+\Lambda\Gamma\nabla u\ ,$$

et ainsi de suite, quels que soient d'ailleurs la nature des fonctions t, u, et le nombre des caractéristiques ∇, Γ, Λ, ...

Ces notions préliminaires ainsi posées, soient ∇, ∇_1, ∇_2, ... Γ, Γ_1, Γ_2, ... des caractéristiques quelconques de nature distributive, et u, u_1, u_2, ...p, p_1, p_2, ... des fonctions d'une ou de plusieurs variables indépendantes, liées entre elles par les équations

$$\nabla u = p + \Gamma u_1 ,$$

$$\nabla_1 u_1 = p_1 + \Gamma_1 u_2 ,$$

$$\nabla_2 u_2 = p_2 + \Gamma_2 u_3 ,$$

et, en général,

$$\nabla_i u_i = p_i + \Gamma_i u_{i+1} ;$$

on en conclura

$$\left.\begin{aligned} u &= \nabla^{-1} p + \nabla^{-1} \Gamma u_1 , \\ u_1 &= \nabla_1^{-1} p_1 + \nabla_1^{-1} \Gamma_1 u^2 , \\ u_2 &= \nabla_2^{-1} p_2 + \nabla_2^{-1} \Gamma_2 u_3 , \\ &\text{et, en général,} \\ u_1 &= \nabla_i^{-1} p_i + \nabla_i^{-1} \Gamma_i u_{i+1} . \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

pourvu que l'on prenne d'une manière convenable les dérivées négatives de leurs seconds membres.

Si l'on substitue dans la première de ces équations pour u_1 sa valeur donnée par la seconde, on aura

$$u = \nabla^{-1} p + \nabla^{-1} \Gamma \nabla_1^{-1} p^1 + \nabla^{-1} \Gamma \nabla_1^{-1} \Gamma_1 u_2 ;$$

Mettant de même dans celle-ci pour u_2 sa valeur donnée par la troisième, il viendra

$$u = \nabla^{-1} p + \nabla^{-1} \Gamma \nabla_1^{-1} p_1 + \nabla^{-1} \Gamma \nabla_1^{-1} \Gamma_1 \nabla_2^{-1} \Gamma_2 p_2$$
$$+ \nabla^{-1} \Gamma \nabla_1^{-1} \Gamma_1 \nabla_2^{-1} \Gamma_2 u_3 .$$

En poursuivant de la même manière, on arrivera finalement à l'équation

$$\left.\begin{aligned}u=&\nabla^{-1}p\\&+\nabla^{-1}\Gamma\nabla_1^{-1}p_1\\&+\nabla^{-1}\Gamma\nabla_1^{-1}\Gamma_1\nabla_2^{-1}p_2\\&+\nabla^{-1}\Gamma\nabla_1^{-1}\Gamma_1\nabla_2^{-1}\Gamma_2\nabla_3^{-1}p_3\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+\nabla^{-1}\Gamma\nabla_1^{-1}\Gamma_1\nabla_2^{-1}\Gamma_2\ldots\ldots\Gamma_{i-1}\nabla_i^{-1}p_i\\&+\nabla^{-1}\Gamma\nabla_1^{-1}\Gamma_1\nabla_2^{-1}\Gamma_2\ldots\ldots\Gamma_{i-1}\nabla_i^{-1}\Gamma_i u_{i+1}\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

laquelle aura lieu quel que soit le nombre entier i. Telle est notre formule fondamentale qui, comme on le voit, est de la plus grande généralité.

Si on la suppose prolongée à l'infini, elle donnera u par une série qui ne dépendra plus que des fonctions p, p_1, p_2, ... Il est de plus évident qu'en choisissant ces fonctions, ainsi que les caractéristiques ∇, ∇_1, ∇_2, ..., Γ, Γ_1, Γ_2, ... d'une manière convenable, cette série pourra toujours être rendue aussi convergente qu'on voudra. On voit enfin que cette série peut être arrêtée à volonté; ce qui serait d'un avantage inappréciable si, dans tous les cas, il était possible d'assigner des limites aussi rapprochées qu'on le désirerait, entre lesquelles tombât la valeur de

$$\nabla^{-1}\Gamma\nabla_1^{-1}\Gamma_1\ldots\ldots\ldots\nabla_i^{-1}\Gamma_i u_{i+1}:$$

Malheureusement la détermination de ces limites paraît offrir d'assez grandes difficultés, et ne se montre d'un abord facile que dans un nombre de cas très-limités, parmi lesquels on doit comprendre celui de la série de Taylor. Mais comme la solution du problème relative à cette série est déjà connue, nous ne nous y arrêterons pas. Nous donnerons seulement une expression assez simple de cette fonction pour la formule ordinaire d'interpolation, par les différences finies; c'est tout ce qu'il nous est possible de faire pour le présent.

Si, dans la formule (2), on suppose que les caractéristiques ∇, ∇_1, ∇_2,...... sont identiquement les mêmes, que l'on fasse la même supposition pour les caractéristiques Γ, Γ_1, Γ_2,......; et qu'on suppose en outre que les fonctions u, u_1, u_2,..... sont égales, et qu'il en est de même des fonctions p, p_1, p_2,......, il viendra, suivant les notations que nous avons adoptées,

$$\left.\begin{aligned} u=\nabla^{-1}p+(\nabla^{-1}\Gamma)\nabla^{-1}p+(\nabla^{-1}\Gamma)^2\nabla^{-1}p+(\nabla^{-1}\Gamma)^3\nabla^{-1}+\ldots\ldots \\ +\ldots\ldots(\nabla^{-1}\Gamma)^{i-1}\nabla^{-1}p+(\nabla^{-1}\Gamma)^i u \;, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

formule qui, bien que moins générale que la précédente, l'est pourtant encore beaucoup, puisque la forme de la fonction p et la nature des caractéristiques ∇, Γ demeurent tout-à-fait indéterminées.

Pour indiquer une application très-intéressante de la théorie précédente, soit

$$\psi(u)=p\;,$$

une équation du premier degré aux différences ou aux différentielles totales ou partielles, ou même aux différenees mêlées, de laquelle il soit question de tirer la valeur de u; en supposant d'ailleurs que ψ soit une caractéristique de fonction de nature distributive. Soit ∇ une autre caractéristique de même genre, on aura l'identité

$$\nabla u=p+\nabla u-\psi u\;;$$

donc, en posant

$$\nabla u - \psi u = \Gamma u \ ,$$

on aura

$$\nabla u = p + \Gamma u \ ,$$

où Γ sera aussi une caractéristique de fonction distributive. On pourra donc obtenir u par la formule (3).

Comme la caractéristique ∇ est entièrement arbitraire, il faudra la choisir de telle sorte que non seulement on sache trouver la dérivée inverse $\nabla^{-1}p$, quelle que soit la composition de p en variables indépendantes, mais en outre de manière que la série (3) soit convergente.

Dans tout ce qui précède, nous avons tacitement supposé que, dans les fonctions affectées des diverses caractéristiques, toutes les variables étaient considérées comme telles; mais on conçoit que l'on peut fort bien ne faire porter la dérivation que sur une ou plusieurs d'entre elles, en considérant les autres comme constantes. Pour indiquer cette circonstance, nous écrirons, à l'exemple de M. Servois, la variable que nous considérons seule comme telle au-dessous de la caractéristique de dérivation; de sorte que, par exemple, si u est fonction des variables indépendantes x, y, nous indiquerons ses dérivées partielles relatives à x et y par les symboles $\frac{\nabla}{x}u$, $\frac{\nabla}{y}u$.

Cela posé, proposons-nous de déterminer la nature des caractéristiques $\frac{\mathrm{E}}{x}$, $\frac{\mathrm{E}}{y}$, $\frac{\Delta}{x}$, $\frac{\Delta}{y}$ définies par les équations suivantes

$$\frac{\mathrm{E}}{x}u = \psi(x+1\,,\,y)\ , \qquad \frac{\Delta}{x}u = \frac{\mathrm{E}}{x}u - u\ ,$$

$$\frac{\mathrm{E}}{y}u = \psi(x\,,\,y+1)\ , \qquad \frac{\Delta}{y}u = \frac{\mathrm{E}}{y}u - u\ ,$$

dans lesquelles nous supposons $u = \psi(x\,,\,y)$.

Il est d'abord aisé de voir qu'elles sont toutes commutatives, tant entre elles qu'avec le facteur constant; et il n'est pas plus difficile d'apercevoir que $\frac{\text{E}}{y}$, $\frac{\Delta}{y}$ sont commutatives avec toute fonction de x sans y, tandis que $\frac{\text{E}}{x}$, $\frac{\Delta}{x}$ le sont avec toute fonction de y sans x; enfin, il n'est pas moins évident qu'elles sont toutes distributives.

En représentant donc par p une fonction quelconque de y et de constantes, nous aurons

$$\frac{\text{E}}{x}(up)=p\frac{\text{E}}{x}u, \qquad \frac{\Delta}{x}(up)=p\frac{\Delta}{x}u,$$

$$\frac{\text{E}}{x}p=p; \qquad \frac{\Delta}{y}p=0.$$

Si, au contraire, p était supposé fonction de x et de constantes, nous aurions

$$\frac{\text{E}}{y}(up)=p\frac{\text{E}}{y}u, \qquad \frac{\Delta}{y}(up)=p\frac{\Delta}{y}u,$$

$$\frac{\text{E}}{y}p=p, \qquad \frac{\Delta}{y}p=0.$$

On voit, d'après cela, qu'il est toujours possible de prendre les dérivées $\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{-1}u$, $\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}u$ de manière qu'elles s'évanouissent, la première en même temps que x, et la seconde en même temps que y; et c'est ce que nous supposerons désormais.

Dans ce cas, $\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{-1}$ est commutative avec $\frac{\text{E}}{y}$, $\frac{\Delta}{y}$, $\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}$ et avec toute fonction qui ne renferme pas x; de même

$\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}$ est commutative avec $\frac{E}{x}$, $\frac{\Delta}{x}$, $\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{-1}$, et avec toute fonction qui ne renferme pas y; mais on ne saurait avoir, en général,

$$\frac{E}{y}\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}u=\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}u,\quad \frac{E}{x}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{-1}u=\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{-1}\frac{E}{x}u;$$

car, supposons $u=1$, nous aurons $\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}1=y$, et par conséquent $\frac{E}{y}\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}1=y+1$; tandis que l'on a $\frac{E}{y}1=1$, et conséquemment $\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}\frac{E}{y}1=y$. Il en serait de même pour $\frac{E}{x}$, $\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{-1}$.

Enfin, nous trouverons que $\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{-1}$, $\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}$ sont de nature distributive, tout aussi bien que $\frac{E}{x}$, $\frac{\Delta}{x}$, $\frac{E}{y}$, $\frac{\Delta}{y}$.

Supposant maintenant que u est une fonction $x+y$, on aura

$$\frac{\Delta}{y}u=\frac{\Delta}{x}u;$$

d'où on conclura, en représentant par u_0 ce que devient u lorsqu'on y fait $y=0$,

$$u=u_0+\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}\frac{\Delta}{x}u,$$

et par suite, en observant la même marche qui nous a conduit à l'équation (3),

$u=u_0$

$$u=u_0+\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}\frac{\Delta}{x}u_0+\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-2}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^2u_0+\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-3}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^3u_0+\ldots$$

$$+\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-(n-1)}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{n-1}u_0+\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-n}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^n u\,;$$

ou encore, en effectuant les opérations qui ne sont qu'indiquées;

$$u=u_0+\frac{y}{1}\,\frac{\Delta}{x}u_0+\frac{y}{1}\cdot\frac{y-1}{2}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^2u_0+\frac{y}{1}\cdot\frac{y-1}{2}\cdot\frac{y-2}{3}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^3u_0+\ldots$$

$$\ldots+\frac{y}{1}\cdot\frac{y-1}{2}\ldots\ldots\frac{y-n+2}{n-1}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{n-1}u_0+\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-n}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^n u\,,$$

dont le dernier terme $\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-n}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^n u$ pourrait se mettre sous une forme plus traitable au moyen de l'intégration par parties ; mais voici, pour le même objet, une méthode moins laborieuse.

Soit

$$\frac{\Delta}{y}z+az=\left(\frac{\Delta}{x}\right)^n u\,; \qquad (g)$$

et soit z_0 ce qui devient z lorsqu'on y fait $y=0$; on aura, par les méthodes connues,

$$z=z_0(1-a)^y+(1-a)^{y-1}\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}(1-a)^{-y}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^n u\,,$$

ou encore

$$z=z_0(1-a)^y+\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}(1-a)^{-(y-k)}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^n u\,; \qquad (h)$$

pourvu qu'après l'intégration on fasse $k=y-1$.

D'un autre côté, notre formule (3), appliquée à l'intégration de l'équation (g), donne, en posant $\nabla z=\frac{\Delta}{y}z$, $\Gamma z=-az$,

$$z=z_0\left[1-a\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}1+a^2\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-2}1-a^3\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-3}1+\ldots\ldots\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^n u-a\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-2}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^n u+a^2\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-3}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^n u-\ldots\right];$$

d'où, en comparant avec le développement de l'équation (h), ordonné suivant les puissances de a, on conclura

$$(-1)^{n-1}\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-n}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^n u=\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}\left\{\frac{y-k}{1}\cdot\frac{y-k+1}{2}\ldots\ldots\frac{y-k+n-2}{n-1}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^n u\right\};$$

d'où, enfin,

$$u=u_0+\frac{y}{1}\,\frac{\Delta}{x}\,u_0+\frac{y}{1}\cdot\frac{y-1}{2}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^2u_0+\frac{y}{1}\cdot\frac{y-1}{2}\cdot\frac{y-2}{3}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^3u_0+\ldots\ldots$$

$$+\frac{y}{1}\cdot\frac{y-1}{2}\ldots\ldots\frac{y-n+2}{n-1}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{n-1}u_0+\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}\left\{\frac{y-k}{1}\cdot\frac{y-k+1}{2}\ldots\ldots\frac{y-k+n-2}{n-1}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^n u\right\}(-1)^{n-1}$$

ce qui achève de compléter l'analogie qu'on avait déjà remarquée entre la formule ordinaire d'interpolation et le théorème de Taylor.

Reprenons l'équation

$$u=u_0+\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}\frac{\Delta}{x}\,u\,;$$

l'on en déduira

$$\left(\frac{\mathrm{E}}{y}\right)^r\left(\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^{-r}u=\left(\frac{\mathrm{E}}{y}\right)^r\left(\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^{-r}u_0+\left(\frac{\mathrm{E}}{y}\right)^{-r}\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}\frac{\Delta}{x}\left(\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^{-r}u\,;$$

ou encore, en observant que, dans le cas actuel, on a $\left(\frac{\mathrm{E}}{y}\right)^r\left(\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^{-r}u=u$ et $\left(\frac{\mathrm{E}}{y}\right)^r\left(\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^{-r}u_0=\left(\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^{-r}u_0$,

$$u=\left(\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^{-r}u_0+\left(\frac{\mathrm{E}}{y}\right)^{r}\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}\frac{\Delta}{x}\left(\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^{-r}u.$$

On trouverait absolument de la même manière

$$u=\left(\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^{-r'}u_0+\left(\frac{\mathrm{E}}{y}\right)^{r'}\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}\frac{\Delta}{x}\left(\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^{-r'}u,$$

$$u=\left(\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^{-r''}u_0+\left(\frac{\mathrm{E}}{y}\right)^{r''}\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}\frac{\Delta}{x}\left(\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^{-r''}u,$$

. . . .

En suivant donc la marche qui, des équations (1), nous a déjà conduit à la formule (2), nous déduirons de celles-ci

$$u=\left(\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^{-r}u_0+\left(\frac{\mathrm{E}}{y}\right)^{r}\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}\frac{\Delta}{x}\left(\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^{-(r+r')}u$$

$$+\left(\frac{\mathrm{E}}{y}\right)^{r}\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}\left(\frac{\mathrm{E}}{y}\right)^{r'}\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{2}\left(\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^{-(r+r'+r'')}u+\ldots\,;$$

en ayant du moins égard aux propriétés commentatives des caractéristiques qu'elles renferment.

En donnant à r, r', r'',..... des valeurs particulières, on parviendrait à une infinité de formules différentes qui, combinées entre elles, conduiraient à une infinité d'autres, dont quelques-unes se trouvent déjà dans les divers traités de calcul aux différences finies.

En général, u étant toujours une fonction de $x+y$, si l'on fait

$$\nabla u=au+a_1\frac{\mathrm{E}}{y}u+a_2\left(\frac{\mathrm{E}}{y}\right)^2u+\ldots\ldots+a_m\left(\frac{\mathrm{E}}{y}\right)^m u,$$

$$\Gamma u = au + a_1 \frac{E}{x} u + a_2 \left(\frac{E}{x}\right)^2 u + \ldots\ldots + a_m \left(\frac{E}{x}\right)^m u\ ;$$

on aura

$$\nabla u = \Gamma u\ ;$$

et, comme les caractéristiques ∇, Γ sont alors de nature distributive, l'on en déduirait un développement de u.

L'on aurait encore

$$\nabla u = \Gamma u\ ,$$

et l'on arriverait à un autre développement de la même fonction, en posant

$$\nabla u = au + a_1 \frac{du}{dy} + a_2 \frac{d^2u}{dy^2} + \ldots\ldots + a_m \frac{d^mu}{dy^m}\ ,$$

$$\Gamma u = au + a_1 \frac{du}{dx} + a_2 \frac{d^2u}{dx^2} + \ldots\ldots + a_m \frac{d^mu}{dx^m}\ .$$

L'on parviendrait encore à un nouveau développement, en posant

$$\begin{aligned}
\nabla u = {} & au + a_1 \frac{E}{y} u + a_2 \left(\frac{E}{y}\right)^2 u + \ldots\ldots + a_m \left(\frac{E}{y}\right)^m u \\
& + b \frac{du}{dy} + b_1 \frac{E}{y} \frac{du}{dy} + b_2 \left(\frac{E}{y}\right)^2 \frac{du}{dy} + \ldots\ldots + b_m \left(\frac{E}{y}\right)^m \frac{du}{dy} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + p \frac{d^nu}{dy^n} + p_1 \frac{E}{y} \frac{d^nu}{dy^n} + p_2 \left(\frac{E}{y}\right)^2 \frac{d^nu}{dy^n} + \ldots\ldots + p_m \left(\frac{E}{y}\right)^m \frac{d^nu}{dy^n}\ ,
\end{aligned}$$

$$\Gamma u=au+a_1\frac{\mathrm{E}}{x}u+a_2\left(\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^2u+\ldots\ldots+a_m\left(\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^mu$$

$$+b\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+b_1\frac{\mathrm{E}}{x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+b_2\left(\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\ldots\ldots+b_m\left(\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+p\frac{\mathrm{d}^nu}{\mathrm{d}x^n}+p_1\frac{\mathrm{E}}{x}\frac{\mathrm{d}^nu}{\mathrm{d}x^n}+p_2\left(\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^2\frac{\mathrm{d}^nu}{\mathrm{d}x^n}+\ldots\ldots+p_m\left(\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^m\frac{\mathrm{d}^nu}{\mathrm{d}x}\,;$$

Il est d'ailleurs évident que, dans ces diverses formules, il sera permis de prendre pour a, a_1, a_2, ... b, b_1, b_2, ... p, p_1, p_2, ... des fonctions quelconques de x, y.

On sent que nous n'en finirions jamais, si nous voulions indiquer toutes les applications que l'on peut faire de la théorie que nous avons exposée dans le présent mémoire; et c'est ce qui nous détermine à terminer ici.

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

De la recherche des facteurs rationnels des polynomes;

Par M. GERGONNE.

Soit l'équation générale du cinquième degré

$$ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0\,, \qquad (1)$$

dans laquelle il nous est permis de supposer tous les coefficiens entiers. Si, après avoir changé les signes, on divise continuellement par x en transposant le terme sans x après chaque division, il viendra successivement

$$-ax^4-bx^3-cx^2-dx=e+\frac{f}{x}=E\ ,$$

$$-ax^3-bx^2-cx=d+\frac{E}{x}=D\ ,$$

$$-ax^2-bx=c+\frac{D}{x}=C\ ,$$

$$-ax=b+\frac{C}{x}=B\ ,$$

$$o=a+\frac{B}{x}\ ;$$

de sorte qu'au lieu de la proposée, on aura cette suite d'équations

$$\left.\begin{array}{l}\frac{f}{x}+e=E\ ,\\[2mm] \frac{E}{x}+d=D\ ,\\[2mm] \frac{D}{x}+c=C\ ,\\[2mm] \frac{C}{x}+b=B\ ,\\[2mm] \frac{B}{x}+a=o\ ;\end{array}\right\}(2)$$

et la proposée pourra être considérée comme résultant de l'élimination de B, C, D, E entre elles. Si, en effet, on prend la somme des produits respectifs des équations (2) par x, x^2, x^3, x^4, on retombera, toutes réductions faites, sur l'équation (1).

Il suit de là que toutes les valeurs et les seules valeurs de x qui vérifieront les équations (2) vérifieront aussi l'équation (1), et réciproquement ; ce qui offre un moyen assez commode de découvrir si un nombre donné est ou n'est pas valeur de l'inconnue.

Si l'on a $a=1$, et que, comme nous l'avons supposé, les coefficiens b, c, d, e, f soient entiers ; et l'on sait qu'on peut toujours transformer l'équation de manière à les faire devenir tels ; il est connu qu'alors toute valeur rationnelle de x devra être entière ; et il est visible que, dans ce cas, E, D, C, B devront également être entiers ; d'où il suit, en particulier, que, dans le même cas, x ne pourra être qu'un des diviseurs du dernier terme f (*). La recherche des racines rationnelles de la proposée se réduira donc ainsi à chercher d'abord tous ceux des diviseurs, tant positifs que négatifs, de son dernier terme qui n'excéderont pas les limites extrêmes de ses racines, et à examiner ensuite quels sont ceux de ces diviseurs qui vérifient les équations (2), en discontinuant d'ailleurs la vérification pour tous ceux d'entre eux qui feraient prendre une valeur fractionnaire à quelqu'un des nombres E, D, C, B.

Cette méthode, qui s'applique évidemment aux équations littérales comme aux équations numériques, est, pour le fond, celle que Bezout a cru devoir substituer à celle de Newton ; mais il a

(*) Quelques auteurs en donnent pour raison que le dernier terme est le produit de toutes les racines ; mais cette raison ne pourrait être admise que dans le seul cas où toutes les racines de la proposée seraient réelles et rationnelles. Dans le cas contraire, en effet, ne pourrait-on pas supposer, par exemple, que, 7 étant une des racines réelles, et 28 étant le produit de toutes les racines de cette sorte, le produit de toutes les racines tant incommensurables qu'imaginaires soit $\frac{9}{7}$, auquel cas le dernier terme, abstraction faite de son signe, se trouverait être $28\times\frac{9}{7}$ ou 36 qui ne serait point divisible par 7.

Au surplus, puisqu'il est d'ailleurs prouvé que toute racine entière d'une équation, conditionnée comme nous l'avons dit, est diviseur de son dernier terme, il nous est permis d'en conclure, *à posteriori*, que *lorsque le premier terme d'une équation est sans coefficient, et que les autres sont sans dénominateurs, le produit de ses racines tant incommensurables qu'imaginaires est nécessairement un nombre entier.*

négligé de justifier cette substitution, en prouvant que sa méthode a le double avantage d'être à la fois directe et exclusive; et les auteurs d'élémens qui ont écrit après lui n'ont peut-être pas assez insisté sur ce point. Voilà sans doute pourquoi, aujourd'hui même, quelques géomètres tiennent encore à la méthode de Newton, qui n'est pourtant qu'un mauvais crible qui, s'il ne laisse passer aucun des nombres qu'il doit retenir, en retient souvent beaucoup de ceux qu'il devrait laisser passer; de sorte qu'après l'opération terminée, on se trouve contraint de vérifier les résultats obtenus, par leur substitution dans le premier membre de la proposée. En un mot, la méthode de Newton n'est qu'un moyen, d'ailleurs assez laborieux, d'élaguer un nombre plus ou moins considérable de ceux d'entre les diviseurs du dernier terme parmi lesquels doivent seulement se trouver les racines commensurables de la proposée.

Il serait donc fort à désirer que l'on eût, pour la recherche des facteurs rationnels des degrés supérieurs, une méthode aussi parfaite que l'est celle de Bezout pour ceux du premier degré; mais, passé le second degré, pour lequel nous avons la ressource, souvent d'ailleurs très-pénible, du développement des racines en fractions continues (*), nous sommes trop heureux encore, dans notre indigence, de recourir au mauvais crible de Newton. Mais, pour bien faire comprendre que son usage s'étend à la recherche des facteurs rationnels de tous les degrés, il faudrait, à ce qu'il nous paraît, présenter la méthode d'une manière un peu plus large qu'on n'a coutume de le faire dans les traités élémentaires, et voici à peu près comment on pourrait l'exposer.

Soit l'équation donnée de degré quelconque

(*) Les racines, développées en fractions continues, doivent sans doute avoir, pour chaque degré, un caractère particulier : dans le premier degré, la fraction continue se termine : dans le second, elle se présente sous forme périodique; mais à quel caractère reconnaîtra-t-on qu'une fraction continue proposée est racine d'une équation d'un degré supérieur? c'est là, à ce qu'il nous paraît, une question tout-à-fait digne de l'attention des géomètres.

$$x^m+ax^{m-1}+bx^{m-2}+\dots\dots+gx+h=0\;; \qquad (1)$$

et, pour fixer les idées, supposons que s'étant assuré qu'elle n'a de diviseurs rationnels ni du premier ni du second degré, on veuille savoir si elle n'en a pas quelqu'un du troisième. Représentons ce diviseur, s'il existe, par

$$x^3+Ax^2+Bx+C\;; \qquad (2)$$

dans lequel il s'agira, s'il est possible, de déterminer les nombres A, B, C, lesquels doivent évidemment être entiers.

Pour y parvenir, remarquons d'abord que, si (2) divise (1), il devra le diviser, quelque valeur particulière qu'on donne à x. Mettons donc pour x, dans l'un et dans l'autre, les termes k, $k+l$, $k+2l$, $z+3l$ d'une progression quelconque par différences; représentons par H, H', H'', H''' les valeurs numériques que prend le premier membre de (1), par l'effet de cette substitution. Quant à (2), il deviendra successivement

$$k^3+Ak^2+Bk+C\;,$$
$$(k+l)^3+A(k+l)^2+B(k+l)+C\;,$$
$$(k+2l)^3+A(k+2l)^2+B(k+2l)+C\;,$$
$$(k+3l)^3+A(k+3l)^2+B(k+3l)+C\;;$$

dont les premières différences seront

$$l\{(3k^2+3kl+l^2)+A(2k+l)+B\}\;,$$
$$l\{(3k^2+9kl+7l^2)+A(2k+3l)+B\}\;,$$
$$l\{(3k^2+15kl+19l^2)+A(2k+5l)+B\}\;;$$

les secondes,

$$1.2l^2\{3(k+l)+A\}\;;$$
$$1.2l^2\{3(k+2l)+A\}\;;$$

et enfin la troisième

$$1.2.3l^3$$

Cela posé, soient cherchés successivement tous les diviseurs de H, H', H'', H'''; supposons que ceux de H soient au nombre de n, ceux de H' au nombre de n', ceux de H'' au nombre de n''; et enfin ceux de H''' au nombre de n'''; le nombre des épreuves à faire sera $nn'n''n'''$, et voici en quoi elles consisteront.

Soient p un diviseur de H, p' un diviseur de H', p'' un diviseur de H'', et p''' un diviseur de H'''; pour savoir si ces diviseurs ne seraient pas ce que devient le facteur cherché, du troisième degré, lorsqu'à la place de x on y met successivement k, $k+l$, $k+2l$, $k+3l$, on en prendra successivement les premières, secondes et troisièmes différences, ainsi qu'il suit :

$$\begin{array}{llll}
p\,, & & & \\
 & p'-p\,, & & \\
p'\,, & & p''-2p'+p\,, & \\
 & p''-p'\,, & & p'''-3p''+3p'-p\,. \\
p''\,, & & p'''-2p''+p'\,, & \\
 & p'''-p'' & & \\
p'''\,, & & &
\end{array}$$

Si $p'''-3p''+3p'-p$ n'est pas égal à $6l^3$, on en conclura que, si (1) a un diviseur rationnel du troisième degré, p, p', p'', p''' ne sauraient être les diverses valeurs de ce diviseur qui répondent aux substitutions de k, $k+l$, $k+2l$, $k+3l$ à la place de x, et on passera à l'épreuve d'une autre combinaison de diviseurs de H, H', H'', H'''.

Si, au contraire, on a

$$p'''-3p''+3p'-p=6l^3\,,$$

on en conclura que, si (1) a un facteur rationnel du troisième degré, et, si p, p', p'', p''' sont ce que devient ce facteur par la substitution de k, $k+l$, $k+2l$, $k+3l$ à la place de x, on doit avoir

$$2l^2\{3(k+l)+A\}=p''-2p'+p\ ,$$
$$l\{(3k^2+3kl+l^2)+(2k+l)A+B\}=p'=p\ ,$$
$$k^3+Ak^2+Bk+C=p\ ;$$

d'où

$$A=\frac{p''-2p'+p}{3l^2}-3(k+l)\ ,$$
$$B=\frac{p'-p}{l}-(2k+l)A-(3k^2+3kl+l^2)\ ,$$
$$C=p-k^3-k^2A-kB\ .$$

Ayant ainsi les valeurs de A, B, C, on aura une valeur présumée du facteur (2); et l'on vérifiera ensuite, par la division, si ce facteur existe en effet dans (1). Si donc, après les $nn'n''n'''$ épreuves sur les diverses combinaisons des diviseurs de H, H', H'', H''', on ne rencontre aucune combinaison qui satisfasse à la condition

$$p'''-3p''+3p'-p=6l^3\ ,$$

ou, si cette condition se trouvant remplie par une ou plusieurs de ces mêmes combinaisons, aucun des facteurs présumés qui en seront résultés ne divise (1), on en pourra conclure, avec certitude, que (1) n'admet aucun diviseur rationnel du troisième degré.

Quoique nous ayons tacitement supposé que (1) était une équation numérique, on sent fort bien que le procédé est également applicable aux équations littérales.

Ce que nous venons de dire de la recherche d'un facteur rationnel du troisième degré peut être facilement étendu à celle d'un facteur rationnel d'un degré supérieur ; mais il est aisé de voir que, pour une équation donnée, la recherche doit s'arrêter au facteur d'un degré moitié du sien si ce degré est pair, ou du degré le plus approchant de cette moitié en dessous, si son degré est impair.

Il est presque superflu d'observer que la progression k, $k+l$, $k+2l$, $k+3l$ étant tout-à-fait arbitraire, ce qu'il y a de plus simple à faire est de choisir pour elle des nombres consécutifs de la suite naturelle les plus petits possibles, abstraction faite de leurs signes, c'est-à-dire, les plus voisins de zéro. Si cependant les termes d'une autre progression donnaient à H, H', H'', H''' un plus petit nombre de diviseurs, cette progression devrait être préférée, attendu qu'il en résulterait une réduction dans le nombre $nn'n''n'''$ des épreuves à tenter.

Au surplus, en admettant un plus grand nombre de termes dans la progression, et conséquemment une plus grande quantité des nombres H, H', H'',...... on aura la ressource de mettre au rebut toutes les combinaisons de diviseurs de ces nombres dont les troisièmes différences ne seraient pas constantes et égales à $6l^3$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème d'analise élémentaire.

Il a fallu n vis d'Archimède pour évacuer, dans le temps t, l'eau d'un bassin, dont la surface était a, dans lequel la pluie tombait, et qui était en outre alimenté par une source.

Il a fallu n' vis d'Archimède pour évacuer, dans le temps t', l'eau d'un second bassin, dont la surface était a', dans lequel la pluie tombait, et qui était en outre alimenté par une source.

Il a fallu enfin n'' vis d'Archimède, pour évacuer, dans le temps t'', l'eau d'un troisième bassin, dont la surface était a'', dans lequel la pluie tombait, et qui etait en outre alimenté par une source.

On demande, d'après cela, quel sera le nombre N de vis d'Archimède nécessaires pour evacuer, dans le temps T l'eau d'un bassin dont la surface est A, dans lequel la pluie tombe, et qui est en en outre alimenté par une source?

On suppose d'ailleurs que l'eau est à la même hauteur dans les quatre bassins, au moment où l'operation commence, que la pluie y tombe avec une égale intensité, que les sources y fournissent une égale quantité d'eau dans le même temps, et qu'enfin les vis d'Archimède ont toutes une même capacité d'évacuation.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du problème proposé dans la note de la page 231 du I.er volume de ce recueil;

Par un ABONNÉ.

PROBLÈME. Par deux points donnés, sur un plan, faire passer une courbe telle que la portion de ce plan comprise entre cette courbe, les ordonnées des deux points donnés et l'axe des abscisses, soit équivalente à un quarré donné?

Solution. Avant de nous occuper de cette question en particulier, occupons-nous d'une question plus générale. Soit V une fonction donnée quelconque de la variable indépendante x, de sa fonction y et des coefficiens différentiels de cette dernière. Supposons que la relation entre x et y ne soit pas déterminée, et proposons-nous de trouver quelle devrait être cette relation, pour que l'intégrale $\int V\mathrm{d}x$ prise entre deux limites données a et g fût égale à une quantité donnée k^2.

Soit X une fonction de x dont la valeur, prise entre les limites a et g, soit égale à k^2, c'est-à-dire, telle qu'en représentant respectivement par A et G ce qu'elle devient lorsqu'on y fait successivement $x=a$, $x=g$, on ait $A-G=k^2$; en posant

$$V=\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\,, \qquad (1)$$

on aura

$$\int V\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}X=X+\text{Const.}$$

qui prise, en effet, entre a et g devient égale à k^2, comme l'exige le problème. Or, l'équation (1) est une équation, différentielle ou non, qui établit entre x et y la relation demandée.

Le problème se réduit donc à assigner la forme de la fonction X; or, il est aisé de voir que cette fonction satisfera généralement aux conditions auxquelles elle doit être assujettie, en posant

$$X=\frac{k^2\mathrm{F}(x)}{\mathrm{F}(a)-\mathrm{F}(g)}\,; \qquad (2)$$

F désignant une fonction tout-à-fait arbitraire, et même discontinue si l'on veut. On conclut de là, en effet,

$$A=\frac{k^2\mathrm{F}(a)}{\mathrm{F}(a)-\mathrm{F}(g)}\,, \qquad G=\frac{k^2\mathrm{F}(g)}{\mathrm{F}(a)-\mathrm{F}(g)}\,,$$

d'où

$$A-G=k^2\,,$$

ainsi qu'il était demandé.

On aura donc ainsi

$$V=\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}=\frac{k^2\mathrm{F}'(x)}{\mathrm{F}(a)-\mathrm{F}(g)}\,; \qquad (3)$$

F′ désignant, suivant l'usage, la dérivée de F; il ne s'agira donc que d'intégrer cette dernière, si toutefois elle est différentielle, pour obtenir la relation cherchée.

Pour appliquer présentement ces principes à la résolution de la question proposée, soient (a, b), (g, h) les deux points donnés, par lesquels doit passer la courbe cherchée, et soit k^2 le quarré auquel doit être équivalent l'espace compris entre cette courbe, les ordonnées des deux points donnés et l'axe des x. Supposons, en premier lieu, qu'on n'exige pas que la courbe passe par ces deux points, mais seulement qu'elle se termine à leurs ordonnées, considérées comme des droites indéfinies; la question se trouvera donc ainsi réduite à trouver la relation entre x et y qui rend égale à k^2 l'intégrale $\int y\mathrm{d}x$, prise entre les limites a et g; or, on a ici $V=y$; l'équation de la courbe cherchée sera donc, par la formule (3),

$$y=\frac{k^2\mathrm{F}'(x)}{\mathrm{F}(a)-\mathrm{F}(g)}\,. \qquad (4)$$

Il ne s'agit plus présentement que de profiter de l'indétermination de la fonction F pour assujettir la courbe à passer par les points (a, b), (g, h). Pour le faire de la manière la plus générale, soit posé

$$\mathrm{F}(x)=M\varphi(x)+N\psi(x)+P\chi(x)\,,$$

M, N et P étant des constantes arbitraires; on aura ainsi

$$\mathrm{F}'(x)=M\varphi'(x)+N\psi'(x)+P\chi'(x)\,,$$

$$\mathrm{F}(a)=M\varphi(a)+N\psi(a)+P\chi(a)\,,$$

$$\mathrm{F}(g)=M\varphi(g)+N\psi(g)+P\chi(g)\,,$$

d'où

$$\mathrm{F}(a)-\mathrm{F}(g)=M[\varphi(a)-\varphi(g)]+N[\psi(a)-\psi(g)]+P[\chi(a)-\chi(g)]\,;$$

mettant donc toutes ces valeurs dans la formule (4), chassant le dénominateur, transposant et ordonnant par rapport aux constantes, il viendra

$$\left.\begin{array}{l} M\{[\varphi(a)-\varphi(g)]y-k^2\varphi'(x)\} \\ +N\{[\psi(a)-\psi(g)]y-k^2\psi'(x)\} \\ +P\{[\chi(a)-\chi(g)]y-k^2\chi'(x)\} \end{array}\right\}=0\,;$$

exprimant ensuite que les coordonnées des deux points $(a\,,\,b)$, $(g\,,\,h)$ satisfont à cette dernière équation, il viendra

$$\left.\begin{array}{l} M\{[\varphi(a)-\varphi(g)]b-k^2\varphi'(a)\} \\ +N\{[\psi(a)-\psi(g)]b-k^2\psi'(a)\} \\ +P\{[\chi(a)-\chi(g)]b-k^2\chi'(a)\} \end{array}\right\}=0\,,$$

$$\left.\begin{array}{l} M\{[\varphi(a)-\varphi(g)]h-k^2\varphi'(g)\} \\ +N\{[\psi(a)-\psi(g)]h-k^2\psi'(g)\} \\ +P\{[\chi(a)-\chi(g)]h-k^2\chi'(g)\} \end{array}\right\}=0\,;$$

éliminant donc, entre ces deux dernières et la précédente, deux quelconques des trois constantes M, N, P, la troisième disparaîtra d'elle-même, et il viendra, pour l'équation de la courbe cherchée,

$$\{(\varphi a-\varphi g)(\psi'a.\chi'g-\psi'g.\chi'a)+(\psi a-\psi g)(\chi'a.\varphi'g-\chi'g.\varphi'a)+(\chi a-\chi g))\varphi'a.\psi'g-\varphi'g.\psi'a)\}y$$

$$=\{k^2(\psi'a.\chi'g-\psi'g.\chi')+(\psi a-\psi g)(h\chi'a-b\chi'ag)+(\chi a-\chi g)(b\psi'g-h\psi'a)\}\varphi'x$$

$$+\{k^2(\chi'a.\varphi'g-\chi'g.\varphi'a)+(\chi a-\chi g)(h\varphi'a-b\varphi'g)+(\varphi a-\varphi g)(b\chi'g-h\chi'a)\}\psi'x$$

$$+\{k^2(\varphi'a.\psi'g-\varphi'g.\psi'a)+(\varphi a-\varphi g)(h\psi'a-b\psi'g)+(\psi a-\psi g)(b\varphi'g-h\varphi'a)\}\chi'x\,;$$

équation qui, aux notations près, est exactement la même que celle de l'endroit cité.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème d'analise.

On demande la somme finie de la suite infinie

$$1+\frac{a\mathrm{Cos}.\theta}{1}+\frac{a^2\mathrm{Cos}.2\theta}{1.2}+\frac{a^3\mathrm{Cos}.3\theta}{1.2.3}+\frac{a^4\mathrm{Cos}.4\theta}{1.2.3.4}+\ldots\ldots?$$

Théorème de Géométrie.

La circonférence qui passe par les centres de trois quelconques des quatre cercles qui touchent à la fois les trois côtés d'un triangle quelconque est double de celle qui passe par les trois sommets de ce triangle.

Problème de Géométrie.

On demande l'équation d'une courbe telle que, si de l'origine on mène un rayon vecteur quelconque et une perpendiculaire à la tangente à son extrémité, 1.° le cube construit sur le rayon vecteur soit double en volume du cube construit sur la perpendiculaire à la tangente ; 2.° que la perpendiculaire à la tangente partage au tiers de sa grandeur l'angle formé par le rayon vecteur avec l'axe des x?

PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

Dissertation sur la langue des sciences en général, et en particulier sur la langue des mathématiques;

Par un ABONNÉ.

SANS admettre, avec Condillac, que toute science se réduise uniquement à une langue bien faite, on ne saurait pourtant, sans fermer les yeux à l'évidence la plus manifeste, méconnaître la toute-puissante influence des signes sur les idées, des langues sur les opérations de l'intelligence; et même, si quelque chose a lieu de surprendre, c'est que cette influence ait été si long-temps inaperçue; c'est que l'on ait tant tardé à découvrir que le langage n'est pas moins l'instrument que le signe de la pensée; c'est, en un mot, qu'une vérité de cet ordre, dont les preuves se manifestent sans cesse en mille façons diverses à l'esprit le moins attentif, et dont les conséquences sont si nombreuses et si importantes, ait pourtant échappé, pendant deux mille ans, à la sagacité de tant d'hommes voués par goût ou par état à l'étude des langues et de la métaphysique; de telle sorte que ce soit là, pour ainsi dire, une découverte faite sous nos yeux.

Tant que les langues n'ont été envisagées que comme un moyen de communication ou de rappel de nos pensées et de celles d'autrui; aussi long-temps qu'on a pu méconnaître le service le plus signalé peut-être de tous ceux que nous en retirons, on a pu croire que le choix des signes de nos idées était une chose d'elle-même assez indifférente; mais du moment que, pour me servir de l'ingénieuse expression d'Euler, on eut reconnu que l'*usage des langues facilite notre adresse à penser*, on dut songer dès-lors qu'il devait en être à peu près ici comme dans les arts mécaniques, où l'excellence des outils contribue puissamment à la prompte exécution et à la perfection de l'ouvrage.

La conséquence toute naturelle de cette considération semblerait avoir dû être une refonte générale de nos systèmes de signes; et il en aurait sans doute été ainsi, sans l'attachement que nous conservons tous pour des habitudes depuis long-temps enracinées, et cette répugnance, aussi peu fondée, peut-être qu'elle est invincible, qui nous porte à repousser tous les signes absolument nouveaux, et à ne tolérer la mise en circulation que de ceux-là seulement qui se rattachent par des analogies plus ou moins prochaines, plus ou moins étroites, à d'autres signes universellement employés; en quoi nous ne ressemblons pas mal à un homme qui s'obstinerait à ne vouloir employer que de vieux matériaux dans des constructions nouvelles : moyen certain de n'obtenir que des résultats défectueux. Aussi, si l'on en excepte peut-être la langue de la chimie qui, depuis trente ans qu'on y travaille, est pourtant loin encore d'être à l'abri de toute critique, nos langues sont demeurées, du moins quant au matériel, à peu près ce qu'elles étaient, dans le temps où on ne les considérait simplement que comme moyen de rappeler et de communiquer la pensée; et Condillac lui-même, bien qu'il se soit peut-être exagéré l'importance des langues, s'est presque uniquement borné à fixer et à circonscrire, autrement qu'on ne l'avait fait avant lui, la signification de certains mots, sans songer, en aucune sorte, à introduire ou même à proposer le changement le plus léger dans les élémens radicaux dont ces mots se composent; soit qu'il ne pensât pas qu'un tel changement pût être de quelque utilité, soit plutôt qu'il sentît que des réformes de cette nature rencontreraient des adversaires trop nombreux et trop puissans.

Il y a déjà plusieurs années que la première de nos sociétés savantes a cherché à fixer plus particulièrement l'attention des philosophes sur l'influence que peuvent exercer les signes sur les idées, en faisant de l'examen de cette influence le sujet d'un concours public. Je n'ai jamais eu l'occasion de lire le mémoire couronné, qui paraît être devenu postérieurement un ouvrage fort étendu ; mais j'ai toujours été surpris qu'aucun géomètre ne soit entré en lice ; parce que je conçois difficilement que tout autre qu'un géomètre puisse traiter un semblable sujet avec toute la profondeur, toute l'étendue et toute la précision qu'il comporte. Quelle autre langue, en effet, peut mettre mieux en évidence toute l'action des signes sur la pensée que celle que l'illustre Lagrange et ceux qui l'ont suivi dans la carrière ont si singulièrement perfectionnée ? et quelle langue approche plus que celle-là des conditions que devrait réunir une langue tout-à-fait parfaite ?

Je ne pense pas toutefois que cette langue elle-même soit absolument exempte de reproches ; et chaque progrès nouveau de l'analise mathématique semble même en décéler l'imperfection. Chaque jour la voit s'enrichir de nouveaux signes et de notations nouvelles, amenées par le besoin d'exprimer de nouvelles idées ; mais le choix de ces signes et de ces notations, comme celui des signes et des notations plus anciennement connus, n'étant point subordonnés à des règles et à un système général, arrêté à l'avance ; et le plus grand nombre d'entre eux s'introduisant sans aucune sorte de contrôle, et par une pure tolérance de la part de ceux qui les reçoivent ; il peut en résulter, à la longue, beaucoup de désordre et de confusion ; et la langue mathématique peut perdre ainsi, après un temps plus ou moins long, sa supériorité sur nos langues vulgaires, peut-être originairement non moins parfaites qu'elle, mais qui se seront dégradées peu à peu par des causes à peu près semblables.

Dans un tel état de choses, il peut n'être pas sans quelque utilité et quelque intérêt de poser des maximes générales sur le choix des signes ; d'éclaircir ces maximes par des exemples simples, et d'en faire une application spéciale à la langue des sciences exactes; et tel est le cadre que je me suis tracé pour l'essai que l'on va lire. Je sens fort bien qu'un tel cadre ne saurait être dignement rempli que par un esprit très-supérieur; et je dois à l'avance prier le lecteur d'excuser la témérité d'une entreprise que l'exécution sera sans doute fort loin de justifier; mais, pourvu que, dans ce qu'on va lire, il se trouve, ça et là, quelques vues dont on puisse tirer un utile parti, ou qui en puisse faire naître de plus saines; je dirai plus, pourvu seulement que ceci puisse éveiller l'attention des géomètres philosophes sur un sujet que je ne saurais me refuser à croire d'une haute importance, je n'aurai pas tout-à-fait perdu mes soins; et la critique même, quelque amère qu'elle puisse être d'ailleurs, en me prouvant qu'on n'a pas dédaigné de réfléchir sur ce sujet, ne pourra m'être que très-agréable.

Je m'empresse, au surplus, de déclarer, avant d'entrer en matière, que je suis loin de considérer comme possibles ou nécessaires, ou même seulement comme très-désirables, la plupart des innovations que je hasarderai de proposer. Je ne pense pas que beaucoup de personnes soient disposées aujourd'hui, ni même à quelque époque que ce soit, à refaire de toutes pièces la langue d'aucune science; mais je pense en même temps qu'en toutes choses, sans se flatter de parvenir jamais à la perfection absolue, il faut néanmoins l'avoir toujours devant les yeux, comme une limite vers laquelle on doit tendre sans cesse. Je pourrais toutefois ajouter qu'à diverses époques les hommes se sont prêtés à recevoir des systèmes entiers de notations tout-à-fait nouvelles, soit pour exprimer un ensemble d'idées auxquelles, jusque-là, on n'avait encore affecté aucun signe, soit même pour remplacer d'autres systèmes de notations trouvés enfin trop défectueux. Je pourrais observer que, sans l'heureuse témérité de quelques hommes et la docile complaisance de tous les autres, nous n'aurions encore aujourd'hui ni notre écriture alphabétique, ni nos notations musicales, ni notre système arithmétique, ni notre calcul algébrique; inventions qui toutes, à leur origine, ont dû rencontrer un très-grand nombre d'opposans et des résistances plus ou moins vives. Je pourrais observer enfin que souvent il faut montrer bien des fois aux hommes la nécessité de certaines réformes, avant de les déterminer à les adopter ; et qu'alors même c'est hâter l'époque de leur adoption que de leur mettre une fois de plus cette nécessité sous les yeux ; mais, je le répète, je n'ai pas plus la prétention que l'espoir d'opérer une révolution, ni même d'en préparer une dans l'avenir ; et je m'estimerai même fort heureux, si le peu que j'ose hasarder, sur le sujet qui m'occupe, n'indispose pas une multitude de gens contre moi.

Mais les contrariétés même que je pourrai éprouver, les répugnances qui me seront opposées, ne seront peut-être pas sans quelque utile résultat. Il n'arrive que trop souvent, en effet, que, lorsque la langue d'une science nous est devenue tout-à-fait familière, et que nous avons entièrement perdu de vue ce qui nous en a coûté de peine pour la bien connaître, nous sommes disposés à prendre de l'humeur contre ceux qui étudient cette langue, et à accuser leur intelligence, lorsqu'ils rencontrent quelques difficultés dans leurs études. Mais, en considérant combien nous aurions nous-mêmes de peine à nous familiariser avec l'usage de quelques signes nouveaux, choisis d'ailleurs de la manière la plus naturelle, nous nous sentirons portés à plus d'indulgence envers des jeunes-gens pour qui les notations qu'un long usage nous a rendues familières sont tout aussi nouvelles, sans qu'elles leur présentent un ensemble aussi méthodique; et cette bienveillante indulgence est une disposition de l'âme qu'en particulier ceux qui se dévouent à l'enseignement ne sauraient trop s'appliquer à acquérir.

Les *langues*, considérées sous le point de vue le plus général, sont l'ensemble des signes dont nous faisons usage, soit pour conserver en dépôt nos propres pensées et celles d'autrui, soit pour les communiquer à nos semblables, soit enfin pour nous aider nous-mêmes à penser.

Ces signes peuvent être *permanens* ou *fugitifs*. Les signes de la première sorte constituent la *langue écrite* dont les principaux usages sont de conserver invariablement la pensée pendant un temps indéfini, et de la transmettre, sans altération, à des distances illimitées. Ceux de la seconde sorte appartiennent à la *langue parlée* dont l'usage est pour ainsi dire instantané, et qui ne peut transmettre la pensée qu'à des distances très-bornées. A celle-ci doit se rapporter la langue d'action ainsi que le langage inarticulé. L'usage de la langue écrite paraît être exclusif à l'homme ; tandis qu'il partage avec tous les autres animaux, mais dans un degré évident de supériorité, l'usage de la langue parlée.

Les signes de l'une et de l'autre langue peuvent être ou *naturels* ou *conventionnels* ; ceux de cette dernière sorte sont aussi appelés *signes d'institution*. Les premiers jouissent du privilége de l'universalité, mais le nombre en est nécessairement peu étendu ; les derniers peuvent être, au contraire, indéfiniment multipliés par le jeu des combinaisons ; mais ils varient de peuple à peuple, de siècle à siècle, et sont tout-à-fait inintelligibles pour qui n'est pas au courant des conventions qui ont présidé à leur création. Ceux-ci paraissent être exclusivement à l'usage de l'homme : il partage l'usage des autres avec tous les animaux.

En considérant donc les signes de nos pensées sous ce double point de vue, nous sommes tout naturellement conduits à les ranger sous les quatre chefs principaux que voici, savoir :

1.° Les signes *fugitifs et naturels* : tels sont les cris, le rire, les pleurs, les gestes, etc. Ils constituent presque à eux seuls la langue des animaux.

2.° Les signes *permanens et naturels* : tels sont les étalages de nos marchands au-devant de leurs boutiques, le dessin, la peinture, etc ; telle était probablement l'écriture hiéroglyphique dans sa première simplicité.

3.° Les signes *fugitifs et conventionnels* : tels sont les signaux en mer, les coups de canon dans une fête publique, le pas de charge à la guerre, et presque tous les mots de nos langues articulées.

4.° Enfin, les signes *permanens et conventionnels* : tels sont les marques distinctives des grades dans l'armee, les costumes de nos fonctionnaires, les armoiries qui décorent les équipages de nos grands seigneurs et tous les mots de nos langues alphabétiques écrites.

Mais il est d'abord essentiel d'observer qu'il en est de cette classification comme de toutes les autres qui, si elles offrent à notre esprit des points de repos qui ménagent utilement ses forces, ne lui présentent, d'un autre côté, qu'une sorte de fiction assez peu conforme à l'état réel des choses. Ainsi on conçoit qu'il peut y avoir une infinité de nuances, soit entre le signe le plus naturel et celui qui l'est moins; soit entre le signe le plus durable et le signe le plus éphémère. Il y a donc de signes plus ou moins naturels, plus ou moins conventionnels, plus ou moins fugitifs, plus ou moins permanens; et c'est une observation que je prie le lecteur de ne point perdre de vue dans tout ce qui va suivre.

Si dans nos langues, soit parlée, soit écrite, on avait pu se borner à l'emploi des signes tout-à-fait naturels, les hommes, sans aucune étude préalable, s'entendraient facilement d'un pôle à l'autre, nous ne nous trouverions pas dans la déplorable nécessité de consommer les plus belles années de notre vie à nous rendre familières les langues des différens peuples avec qui nous devons correspondre, et des divers écrivains que nous voulons consulter; et nous ne serions pas obligés, à notre grand préjudice, de sacrifier, pour ainsi dire, l'étude des choses à celle des mots. C'est, par exemple, parce que les horloges parlent une langue fort naturelle, que celles de Berlin sont aussi bien comprises par un espagnol que le sont celles de Madrid par un prussien; et c'est encore parce que le dessin et la peinture sont des écritures naturelles que nos badauds de Paris ne s'arrêtent pas avec moins de complaisance devant les caricatures de Londres que ne le font ceux de Londres devant les caricatures de Paris.

Mais les nuances de nos idées sont si nombreuses et si fugitives que, même dans l'état de civilisation le moins avancé, les signes naturels ne pourraient suffire à les exprimer toutes sans confusion ; et d'ailleurs comment exprimer autrement que par des signes artificiels tant d'idées dont l'objet ne donne aucune prise aux sens et ne peut être offert à aucun d'eux. Toutefois, il est probable que l'usage des signes naturels a précédé celui de tous les autres. On peut conjecturer, avec vraisemblance, que, soit par la négligence de ceux qui les employaient, soit par le désir de rendre la langue plus concise, ces signes se seront graduellement altérés ; qu'en voyant que les altérations qu'ils avaient subi n'empêchaient pourtant pas d'en retirer les mêmes services, on aura conçu l'idée d'employer, concurremment avec eux, d'autres signes de pure institution; et voilà comment, sans recourir à aucune ressource surhumaine, on peut concevoir la formation et le perfectionnement progressif de toutes nos langues. Il est même quelques érudits qui pensent qu'il n'est aucun de nos signes qui soit de pure institution, et qui ont même essayé d'expliquer la génération de la plupart d'entre eux, par une suite d'altérations qu'ont subi des signes tout-à-fait naturels (*). Quoi qu'il en soit, les signes de nos langues sont présentement, presque en totalité, des signes de pure convention.

Si les conventions qui ont donné naissance à ces sortes de signes avaient pu être à la fois universelles et durables, une seule langue nous suffirait aujourd'hui pour nous mettre en relation non seulement avec nos contemporains, mais même avec ceux qui ont écrit dans les temps les plus éloignés de nous; mais, d'une part, l'isolément où ont vécu long-temps les uns des autres les différens peuples de la terre et la diversité de leurs mœurs, et d'une autre les altérations progressives que ces signes ont éprouvées, n'ont pas permis qu'il en

---

(*) Voyez, en particulier, le *Monde primitif* de COURT DE GÉBELIN.

J. D. G.

fût ainsi ; et telle est la cause de la diversité presque infinie des langues tant anciennes que modernes. C'est un grand mal sans doute ; mais c'est un mal qui ne saurait être réparé que par l'institution d'une langue philosophique, très-difficile à créer, et plus difficile encore à faire universellement admettre, quelque simple et quelque parfaite qu'on voulût d'ailleurs la supposer. Laissons donc là les langues vulgaires ; mais, puisque chaque jour voit introduire de nouveaux signes dans la langue des diverses sciences, examinons quelles sont les maximes qui doivent présider à l'institution de ces signes, et jusqu'à quel point les signes déjà institués s'approchent ou s'éloignent des conditions qui, en conséquence de ces mêmes maximes, en auraient dû régler le choix.

I. Il est d'abord évident que plus un signe d'institution approchera d'être naturel et moins aussi l'esprit aura d'effort à faire pour en découvrir et pour en retenir la signification. Ainsi, par exemple, le boulanger qui étale des pains sur le devant de sa maison, pour annoncer aux passans qu'il en fait le commerce, se fait comprendre des étrangers comme des nationaux, tandis qu'un étranger peut fort bien ne pas comprendre ce que signifie le rameau vert qui sert d'enseigne à nos cabaretiers, parce qu'ici le signe n'a plus aucune analogie avec la chose signifiée. Un pampre remplirait cette destination d'une manière moins imparfaite.

II. Lorsqu'un signe est purement conventionnel, il serait fort à désirer que la convention qui en règle l'usage fût aussi universelle qu'il se pourrait. C'est, en particulier, ce qu'on s'est proposé en France dans l'institution des mesures métriques. C'est aussi parce que les symboles algébriques ont été généralement adoptés par tous les géomètres de l'Europe, qu'il est si facile d'entendre des traités d'analise écrits dans une langue qu'on ne possède qu'imparfaitement, et dans lesquels le progrès du calcul aide si puissamment à l'intelligence du texte. La même considération ne pourrait également que rendre fort désirable l'adoption, proposée par Volney, d'un alphabet commun à toutes les langues de la terre. Il est même telles circonstances où des conventions trop circonscrites peuvent entraîner de graves accidens, et compromettre la vie même des individus. Je ne sais, par exemple, jusqu'où s'étend l'usage de la *croix de funeste présage* dont parle Boileau dans sa VI.e satire ; mais, comme c'est ici un signe éminemment conventionnel, il est clair que cette croix peut fort bien n'être, pour un étranger, d'aucune garantie contre le risque auquel l'exposent des couvreurs qui,

> Grimpés au toit d'une maison,
> En font pleuvoir l'ardoise et la tuile à foison.

Suivant cette maxime, on doit trouver fort heureux que les géomètres, sans aucune convention formelle, se soient accordés à attacher constamment certains signes aux mêmes idées, et soient dans l'usage, par exemple, de désigner toujours le rapport du diamètre à la circonférence par ϖ, la base des logarithmes naturels par e, la gravité g, et ainsi du reste. Ce n'est point, en effet, une petite affaire que d'avoir constamment présente à la pensée, dans tout le cours d'une longue question, la signification de tous les symboles qu'on y considère, sur-tout lorsque ces symboles sont fort nombreux. Plus donc ces sortes de conventions seront multipliées et plus aussi l'esprit s'en trouvera soulagé.

III. Quoiqu'il n'y ait, au fond, aucun inconvénient grave à attacher plusieurs signes à une même idée ; cependant, comme un surcroît de signes est toujours une charge pour la mémoire, il est beaucoup plus convenable de s'abstenir de ces sortes de doubles emplois, qui ne sauraient offrir le plus léger dédommagement de la peine qu'ils procurent. Ainsi, par exemple, puisque la notation des proportions peut être remplacée par celle des équations, et que celle-ci ne peut à l'inverse être complètement suppléée par l'autre ; ne serait-il pas convenable de ne plus employer que cette dernière, qu'on est toujours obligé de connaître et que l'autre ne saurait dispenser d'apprendre. On a bien, à la vérité des synonymes dans les langues vulgaires, mais ils n'y sont utiles que par cela même qu'étant des synonymes imparfaits, ils permettent d'exprimer toutes les nuances d'idées avec une exacte précision.

IV. Toutefois, il n'y a, dans l'affectation de plusieurs signes à une même idée qu'une embarrassante superfluité; mais, ce qui ne devrait jamais être toléré, et ce qui pourtant n'est malheureusemeut que trop ordinaire, c'est l'affectation d'un même signe à des idées différentes. Voilà, par exemple, comment nous avons, en arithmétique, des *diviseurs* qui divisent et des *diviseurs* qui ne divisent pas; et voilà encore comment, en géométrie, les mots *axe* et *pôle* s'emploient aujourd'hui sous une multitude d'acceptions diverses (*). Ce vice de nos langues scientifiques tient principalement à cette répugnance que nous avons tous pour l'introduction des mots nouveaux; répugnance qu'on ne saurait raisonnablement justifier, et par suite de laquelle nous ne pouvons nous garantir des continuelles méprises qu'entraînerait inévitablement l'acception multiple des mots, que par l'attention la plus soutenue dans la construction de nos phrases.

V. Non seulement on ne doit pas affecter à une idée un signe déjà destiné à en représenter un autre; mais il est même souvent très-bon que le signe dont on fait choix n'ait absolument aucun autre sens, soit dans la langue où on l'adopte, soit dans tout autre, que celui pour lequel on le destine. Ainsi, par exemple, Lavoisier, trompé par une fausse induction, a donné à une certaine substance le nom d'*oxigène*, parce qu'il a cru apercevoir en elle le générateur universel des acides; mais, aujourd'hui qu'on sait qu'il en est au-

---

(*) C'est encore ainsi qu'en astronomie ce qu'on appelle *longitude* et *latitude* dans le ciel, n'est pas la même chose que ce à quoi on donne les mêmes dénominations sur la terre.

J. D. G.

trement,

trement, il est évident que cette dénomination peut tromper ceux qui savent un peu plus de grec que de chimie.

Il est donc très-bon qu'un signe nouveau que l'on introduit dans la langue d'une science ne préjuge rien sur la nature et les propriétés de l'objet qu'il est destiné à représenter; et on voit par là combien est grande l'erreur de ceux qui veulent que les mots soient en quelque sorte des définitions abrégées, et qui ne permettent l'introduction d'un mot nouveau qu'autant qu'on leur fait voir qu'il est dérivé de quelque autre mot connu; ils devraient bien nous expliquer enfin quels précieux avantages peuvent résulter de cette pratique?

VI. Une attention qui n'est pas moins utile dans le choix des signes, c'est qu'ils ne deviennent pas une sorte de barrière qui vienne s'opposer à un développement ultérieur des idées, ou du moins le rendre plus lent ou plus difficile. C'est, par exemple, l'inconvénient qu'auraient eu les notations fluxionnelles de Newton, si elles avaient prévalu sur les notations différentielles de Leibnitz. Il est clair, en effet, qu'aussi long-temps qu'on aurait écrit $\dot{y}$, $\ddot{y}$, etc., au lieu de dy, d^2y,....., on n'aurait jamais songé à l'expression d^ny, sur-tout dans le cas où n serait supposé fractionnaire ou négatif.

VII. Mais une attention extrêmement recommandable dans le choix des signes, parce que c'est une de celles qui peuvent le plus contribuer à rendre l'étude des sciences facile et à en reculer les limites; c'est d'établir entre ces signes des relations qui soient la peinture fidèle de celles qui existent entre les objets qu'ils sont destinés à représenter; de telle sorte que les conventions à établir sur l'acception de ces signes se trouvent, pour ainsi dire, réduites à leur plus simple expression. C'est, par exemple, un but qui a été très-heureusement atteint dans la nomenclature des mesures métriques. Dans l'ancien système, en effet, les noms des mesures de chaque série avaient des dénominations propres et indépendantes les unes des autres, qui ne laissaient pas même soupçonner leur rapport de grandeur; de telle sorte que chaque dénomination ne s'appliquait à son objet qu'en vertu d'une convention expresse; et, cette convention connue pour les dénominations des mesures d'une série, on n'en était pas plus avancé pour celles des mesures de toute autre série. Dans le système métrique, au contraire, dès que l'on sait quelle acception on doit attacher aux mots *Mètre*, *Are*, *Stère*, *Litre* et *Gramme*, et à ceux-ci, *Myria*, *Kilo*, *Hecto*, *Déca*, *Déci*, *Centi*, *Milli*, on est en état de nommer, sans hésitation et sans méprise, et de distinguer parfaitement les unes des autres quarante unités de mesures différentes.

Ce n'est donc pas parce que les mots *Myria*, *Kilo*, *Hecto*, *Déca* sont tirés du grec; ce n'est pas parce que les mots *Déci*, *Centi*, *Milli* sont tirés du latin; ce n'est pas enfin parce que les mots *Mètre*, *Are*, *Stère*, *Litre*, *Gramme* sont dérivés d'autres mots antérieurement employés, que la langue des mesures métriques est une langue bien faite; ce choix n'offre que l'avantage très-léger de rendre l'intelligence de cette langue un peu plus facilement accessible au plus petit nombre de ceux qui sont dans le cas d'en faire usage. Ce qui rend la langue des mesures métriques une langue bien faite, c'est uniquement que le nom de chaque unité de mesure fait toujours nettement connaître et à quelle série appartient cette unité et quel rang elle occupe dans cette série; c'est que les mots de cette langue peuvent être régulièrement distribués dans les cases d'une table à double entrée, dont il suffit de voir la première bande horizontale et la première colonne verticale, pour en connaître complètement toute l'organisation intérieure (*).

(*) Une question qui nous paraît assez piquante, mais que néanmoins nous n'entreprendrons pas de résoudre, est celle de savoir s'il y a plus d'avantage que d'inconvénient à ce que les signes, soit vocaux, soit écrits, se ressemblent d'autant plus que les idées qu'ils expriment sont moins dissemblables. Nous voyons, par exemple, que dans leur prononciation les mots *bain* et *pain* se ressemblent beaucoup, bien qu'ils expriment des idées fort différentes; tandis qu'au contraire les mots *pain* et *gâteau*, qui expriment des idées très-voisines, Il est pourtant permis de douter que cette langue eût été reçue par les savans, sans l'attention qu'ont eu les inventeurs d'en faire dériver les mots d'autres mots pris dans les langues anciennes ; en quoi, au surplus, ils se seraient montrés beaucoup moins raisonnables que la multitude qui a accepté ces mêmes mots sans s'informer aucunement de leur origine, et qui même a pu croire qu'ils avaient été formés de toutes pièces.

VIII. Lorsqu'on trouve ainsi un avantage évident à former des mots ou des signes composés, on peut alors en tolérer la longueur et la complication ; mais, dans le cas contraire, on ne devrait jamais souffrir dans les signes de nos idées que la complication strictement nécessaire pour en varier les formes autant que leur nombre peut l'exiger. C'est même là un des principaux avantages de la langue algebrique. Sa concision permet de saisir d'une seule vue toutes les diverses parties d'une formule, et d'y apercevoir facilement des rapports qu'une langue moins briève ne laisserait que difficilement découvrir. On peut en dire autant de la langue

forment des sons très-différens. De même, dans l'écriture, les mots *un* et *nu* se confondent presque à la vue, quoiqu'ils aient un sens très-différens, tandis que les mots *un* et *le*, qu'on ne saurait prendre l'un pour l'autre, n'expriment que deux nuances d'une même idée.

On peut observer, en faveur de l'une des deux opinions, que si les signes de deux idées peu différentes sont eux-mêmes presque semblables, on y trouvera cet avantage que, si, dans un discours ou dans une écriture rapide, on substitue l'un à l'autre, il en résultera la moindre altération possible dans le sens de la phrase ; mais nous sentons fort bien qu'on peut objecter que par là même que cette altération sera peu considérable, il en deviendra d'autant plus difficile de l'apercevoir ; tandis qu'il n'en serait pas ainsi, si une légère altération dans le signe lui faisait tout-à-coup représenter une idée si totalement différente de la première, que la substitution de celle-ci à l'autre dût rendre le discours tout-à-fait insignifiant.

J. D. G.

des nombres ; et il suffirait pour s'en convaincre de tenter le moindre calcul sur des nombres écrits dans nos langues vulgaires (*).

IX. Si la brièveté du langage et de l'écriture est d'un si grand avantage, à plus forte raison, doit-on ne point être obligé de recourir à des périphrases pour désigner des objets qui sont de nature à être fréquemment indiqués à ceux à qui l'on parle ou pour qui l'on écrit. N'a-t-on pas lieu d'être surpris que, par exemple, tandis que nous avons des mots pour exprimer, soit la double ordonnée qui passe par le foyer d'une section conique, soit la droite menée du foyer à l'un quelconque des points de la courbe, soit encore la distance de ce foyer au centre, nous n'en ayons aucun pour désigner soit la perpendiculaire sur le milieu d'une droite, soit la droite qui divise un angle en deux parties égales ? et doit-on être surpris, d'après cela, que tant de théorèmes dont l'énoncé pourrait être très-court, ne puissent être exprimés qu'en beaucoup de mots ; ce qui les rend nécessairement moins intelligibles et plus difficiles à retenir. Le mot *projection* peut être d'un emploi très-utile dans la langue des élémens de la géométrie ; et cependant, avant M. Francœur, personne n'avait songé à l'y introduire. Il importe d'ailleurs d'autant plus d'imposer des noms à chacun des objets sur lesquels on peut être appelé à diriger sa pensée, que souvent, à défaut de dénomination, on les perd totalement de vue, à peu près comme on oublie dans un coin de bibliothèque un livre dont le dos ne porte aucune indication. Par

---

(*) L'inventeur de la *Sténographie* remarque, dans la préface de son ouvrage, que ceux qui se sont rendu bien familière cette écriture abrégée, éprouvent un plaisir tout particulier à lire des livres et manuscrits où elle est employée, et cela est très-facile à croire et à comprendre. On éprouverait une semblable jouissance à entendre un orateur s'exprimant dans une langue qui lui permettrait d'exprimer clairement, en quelques minutes, ce que nos langues ne permettent de rendre que dans l'intervalle de plusieurs heures.

J. D. G.

exemple, on a trouvé remarquable la droite qui, dans un polygone, joint deux sommets non consécutifs, et on l'a appelé *diagonale*; mais le point où concourent les directions de deux côtés non consécutifs du polygone n'est-il pas également digne de remarque, et ne mériterait-il pas, comme la diagonale, d'être désigné par un mot particulier? qui sait combien de théorèmes ne pourraient pas résulter de la combinaison de ces sortes de points, soit entre eux, soit avec les diagonales elles-mêmes? Ici encore, comme dans tant d'autres circonstances, on reconnaît un des fâcheux effets de notre obstination à repousser toute dénomination qui n'entre pas dans le cercle de nos habitudes (*).

(*) On a tout aussi souvent besoin d'exprimer qu'un nombre peut se diviser par un autre que d'exprimer que l'autre est divisible par celui-là; puis donc qu'on exprime cette dernière circonstance en disant que l'un des nombres est *diviseur* de l'autre, pourquoi n'exprimerait-on pas la première en disant que celui-ci est *dividende* du premier? et pourquoi l'expression de *dividende commun* ne serait-elle pas aussi bien admise que celle de *diviseur commun*? Quant à celle de *plus grand diviseur commun*, c'est déjà une périphrase assez longue, qu'il serait fort convenable de remplacer par un mot unique; mais, en se résignant à la conserver, il faudrait au moins consacrer l'expression inverse de *plus petit dividende commun*, au défaut de laquelle on est contraint d'employer celle-ci: *plus petit nombre exactement divisible par des nombres donnés*, qui est évidemment beaucoup trop longue.

Dans une traduction des *Disquisitiones arithmeticæ* de M. GAUSS, que nous avions entreprise, et que la publication de celle de M. Delille nous a fait discontinuer, nous avions hasardé les expressions *diviseur maxime* et *dividende minime*, en remplacement de celles-ci: *plus grand diviseur commun* et *plus petit dividende commun*.

Nous signalerons encore, comme ayant grandement besoin de réforme, la langue des angles polyèdres et celle des polyèdres. Sans avoir, en effet, la ridicule délicatesse d'oreille de l'Araminte de Molière, on peut ne pas trouver d'un très-agréable et très-commode emploi ces locutions: *les angles plans et les angles dièdres d'un angle polyèdre*, *les angles polyèdres d'un polyèdre*, et quelques autres que sans doute MM. les professeurs n'emploient qu'avec beau-

X. Je ne pense pas toutefois que l'on doive tomber dans l'excès contraire à celui que je viens d'indiquer. On conçoit, en effet, qu'il est à peu près superflu de remplacer par un mot unique une périphrase qui ne se présente que fort rarement dans le langage; puisqu'en agissant ainsi on finirait par surcharger et fatiguer extrêment la mémoire, sans abréger sensiblement le discours.

Après avoir ainsi posé les préceptes généraux que la raison semble indiquer comme devant présider à la formation de la langue des diverses sciences, nous allons en faire l'application à quelques langues particulières. Nous commencerons par la langue des sons, ou la langue musicale, qui semble être une des plus éminemment susceptibles de régularité et de précision.

On peut distinguer dans un son trois choses principales, par lesquelles seulement il se distingue de tout autre son; savoir : 1.° ce qu'on est convenu d'appeler *ton* ou *intonation*, et qui consiste dans une plus ou moins grande *gravité* ou *acuïté*; 2.° sa *durée* ou le temps plus ou moins long durant lequel il se fait entendre; 3.° enfin, son *intensité* ou l'impression plus ou moins énergique qu'il produit sur l'organe auditif. On pourrait encore y distinguer ce qu'on appelle le *timbre* ou la *qualité du son*; mais, quelque fondée que soit cette distinction, elle paraît si difficile à bien ca-

---

coup de répugnance. Qui empêcherait, par exemple, d'appeler simplement *trièdre* ce qu'on appelle vulgairement *angle trièdre*, d'y remplacer respectivement les dénominations d'*angle plan* et d'*angles dièdres* par les simples dénominations de *faces* et d'*angles*. On dirait ainsi : *Dans tout trièdre, la somme des trois faces est moindre que quatre angles droits, et la somme des trois angles est comprise entre deux et six angles droits*; ce qui ne présenterait plus rien de désagréable à l'oreille. On peut dire, avec plus de vérité encore, de la langue des sciences exactes, ce que Voltaire a dit de la langue vulgaire, que c'est *une gueuse fière, à laquelle il faut faire l'aumône malgré elle.*

J. D. G.

ractériser que personne n'a encore songé à la représenter par des signes ; et en conséquence j'en ferai abstraction dans tout ce qui va suivre.

Supposons donc, en premier lieu, que l'on ait à noter une suite de sons dont la durée et l'intensité doivent être les mêmes, et qui ne diffèrent les uns des autres que du grave à l'aigu. C'est sans doute, une idée très-heureuse et très-ingénieuse que celle qu'on a eu d'employer un caractère unique, placé plus haut ou plus bas, sur une suite de lignes horizontales, suivant que les sons que ce caractère désigne doivent être plus ou moins aigus. A la vérité, ce ne peut être qu'en vertu d'une convention que ce caractère désignera un son ; mais cette convention est inévitable, puisqu'aucune perception de l'œil ne saurait être le signe naturel d'une perception de l'oreille. C'est encore par l'effet d'une convention que les sons les plus graves sont placés sur les lignes les plus basses et les plus aigus sur les lignes les plus élevées de la portée ; car, à proprement parler, il ne saurait y avoir ni haut ni bas dans les sons ; mais cette convention est parfaitement conforme à celle en vertu de laquelle on dit, dans la langue vulgaire, le *bas* et le *haut* de la voix, pour distinguer les sons *graves* des sons *aigus*. Aussi ne saurait-on douter que beaucoup de gens n'aient deviné cette convention avant même qu'elle leur ait été expliquée.

Toute ingénieuse que soit cette idée, la manière dont on a coutume de la mettre en œuvre n'est pas néanmoins à l'abri de toute critique. Dès qu'on est convenu, en effet, d'indiquer le plus ou le moins d'acuïté des sons par le plus ou le moins d'élévation, sur la portée, des caractères qui les désignent, il faudrait, pour être conséquent, que d'égales augmentations dans l'élévation de ces caractères répondissent constamment à d'égaux accroissemens dans l'acuïté des sons qu'ils désignent ; or, quoique le *fa* ne soit plus aigu que le *mi*, et le *ut* plus aigu que le *si*, que d'environ la moitié de la quantité dont chacun des autres sons de l'échelle diatonique est plus aigu que celui qui le précède immédiatement, les artistes ne tiennent aucun compte de cette différence, dans l'écriture musicale; de sorte que pour que, sur ce point, l'organe de l'ouïe ne soit pas induit en erreur par celui de la vue, il faut qu'on soit prévenu que leur convention fondamentale ne doit point être prise en toute rigueur. Si donc il n'en devait pas résulter une trop grande complication, il paraîtrait convenable de faire les portées de treize lignes au moins; et de convenir que l'intervalle d'un entre-ligne au suivant ne répondrait constamment qu'à un intervalle d'un semi-ton. Il arriverait ainsi que l'écriture musicale prendrait plus de netteté, et qu'en même temps on se trouverait dispensé de l'emploi des dièses et bémols.

Je n'ignore pas, au surplus, que, théoriquement parlant, les semi-tons dont se compose l'échelle chromatique ne sont pas tous rigoureusement égaux; mais je crois aussi que l'oreille est beaucoup plus tolérante qu'on ne se le figure communément; et je pense qu'avec un bon système de tempérament, on pourrait, dans la pratique, ne tenir aucun compte de cette inégalité.

Les musiciens ont été beaucoup moins heureux dans l'art de noter la durée des sons que dans celui d'indiquer leur place dans l'échelle musicale. Ils ont imaginé d'indiquer cette durée par la figure des notes; mais, outre que cette figure est beaucoup trop compliquée, pour quelques-unes, il arrive que les notes destinées à désigner les sons de moindre durée sont précisément les plus apparentes, ce qui forme un véritable contre-sens. Ainsi, par exemple, tandis que, quelquefois, une ronde s'aperçoit à peine, une triple croche au contraire s'aperçoit de très-loin; de sorte qu'il serait fort difficile, pour qui ne serait point au courant de nos conventions à cet égard, de deviner que le dernier de ces caractères exprime un son dont la durée doit être trente-deux fois moindre que celle du son exprimé par le premier.

La manière la plus naturelle de noter la durée des sons me paraîtrait être celle-ci : d'abord toutes les barres transversales qui divisent en mesures les portées d'un morceau de musique devraient être également espacées,

espacées, puisqu'elles comprennent entre elles des intervalles de temps égaux ; on pourrait faire ces barres un peu larges, afin de les rendre plus apparentes ; chaque mesure serait divisée en temps par des barres un peu moins fortes, et toujours également espacées ; ces temps seraient à leur tour subdivisés par des barres moins apparentes encore, et ainsi successivement, jusqu'à ce qu'on serait parvenu à des divisions répondant à la durée de la note la plus briève de la mesure ; toutes les notes seraient des rectangles d'une même hauteur, égale à la distance entre deux lignes consécutives de la portée, que je suppose toujours avoir treize lignes au moins ; elles seraient toutes entièrement noires et formées du plein de la plume entre ces deux lignes, à peu près comme les notes du plain-chant, ne différant ainsi les unes des autres que par leur situation sur la portée, et par leur longueur dans le sens horizontal, qui serait toujours exactement proportionnelle à la durée des sons qu'elles seraient destinées à représenter.

Un des principaux agrémens du chant mesuré consiste dans un heureux mélange de sons et de *silences* plus ou moins prolongés ; aussi, dans l'écriture musicale, a-t-on consacré des signes à exprimer ces silences ; mais on a commis ici un contre-sens à peu près pareil à celui que j'ai relevé tout-à-l'heure relativement au choix des notes, c'est-à-dire, qu'aux silences les plus courts ont été affectés les signes les plus apparens. Il me semble que, puisque, pendant la durée d'un silence, la voix ne doit former aucun son, ce silence ne saurait mieux être représenté que par un espace vide de note, dont l'étendue, dans le sens horizontal, serait exactement proportionnelle à la durée de ce silence (*).

(*) Le même contre-sens que l'auteur vient de signaler se fait remarquer dans la ponctuation de nos langues vulgaires ; le point, qui marque le plus long silence, est beaucoup moins apparent que le point et virgule, et même que la simple virgule. *J. D. G.*

Mais il ne suffit pas de caractériser par des signes l'intonation et la durée des sons, il est nécessaire en outre d'en indiquer l'intensité. Nous n'avons pour cela, dans l'écriture musicale, que les caractères F, P, FF, PP, >, < écrits au-dessus de la portée ; mais, outre que ces signes rentrent en partie dans l'écriture vulgaire et encombrent d'une manière désagréable l'intervalle qui sépare les portées les unes des autres, il s'en faut qu'ils aient assez de précision, et qu'ils puissent exprimer nettement toutes les nuances d'intensité. Ce qu'il y aurait à faire de plus parfait pour atteindre ce but serait sans doute de varier la teinte des notes, de telle sorte que le noir le plus intense répondît au son le plus énergique, et qu'un son qui doit à peine se faire entendre fût représenté par une note qu'on pût à peine distinguer du blanc du papier ; mais, comme cette pratique entraînerait trop de difficultés d'exécution, on pourrait y suppléer en variant la largeur des notes de manière que le son le plus plein serait représenté par une note qui remplirait exactement l'intervalle entre deux lignes consécutives de la portée, tandis qu'un son très-faible serait représenté par un trait aussi délié qu'on pourrait le faire sans qu'il cessât d'être visible, et qu'on tracerait au milieu de l'intervalle entre ces mêmes lignes.

Voilà par quelles attentions on pourrait amener notre écriture musicale à reposer sur le plus petit nombre de conventions possible; à être, pour ainsi dire, devinée par tout le monde, sans le secours des gens de l'art, et à être presque exactement pour les yeux ce que serait pour l'oreille le chant qu'elle représenterait. Qui sait ce que la pratique de ce système pourrait exercer d'influence sur l'art? toujours paraît-il assez probable qu'on s'accoutumerait à juger à la simple vue de la beauté d'une mélodie, et à reconnaître le même trait de chant partout où il se rencontrerait, par la seule courbe que formerait sur la portée la série des notes qui le caractériserait; courbe qui serait partout semblable à elle-même (*).

(*) On prétend que notre illustre Lagrange n'a pas dédaigné de diriger quel-

Je n'ai encore considéré jusqu'ici que la musique écrite ; mai je vais, avant de quitter ce sujet, dire deux mots de la musique parlée. Il est d'abord clair que, pour qui ne connaît point l'Hymne de St Jean-Baptiste, les noms des notes de notre échelle diatonique ne sauraient se lier aux sons qu'ils désignent qu'en vertu d'autant de conventions distinctes : j'aimerais donc beaucoup mieux, pour cette raison, qu'à l'exemple de J. J. Rousseau, on remplaçât ces dénominations par les noms des nombres naturels, qui sont plus universellement connus ; ou que, comme les Allemands le pratiquent, on leur substituât les noms des lettres de notre alphabet, dont l'ordre successif, bien qu'arbitraire, n'est pas moins généralement connu. Mais, afin de ne point faire prendre le change, et de ne point faire présumer égaux des intervalles qui ne le sont pas ; afin que les commençans pussent retenir plus facilement la place qu'occupent les semi-tons dans l'échelle, je proposerais de représenter les sept notes de l'échelle diatonique, de l'*ut* au *si*, ou par

$$1\,,\,3\,,\,5\,,\,6\,,\,8\,,\,10\,,\,12\,,$$

ou par

$$\mathrm{A}\,,\,\mathrm{C}\,,\,\mathrm{E}\,,\,\mathrm{F}\,,\,\mathrm{H}\,,\,\mathrm{K}\,,\,\mathrm{M}\,;$$

alors les nombres

$$2\,,\,4\,,\,7\,,\,9\,,\,11\,,$$

ou les lettres

$$\mathrm{B}\,,\,\mathrm{D}\,,\,\mathrm{G}\,,\,\mathrm{I}\,,\,\mathrm{L}\,,$$

seraient réservés pour désigner les notes affectées de dièses ou de bémols. Je préférerais toutefois les lettres aux nombres, dont l'aspect pourrait fausser les idées sur les rapports des différens sons entre eux. On pourrait même employer des lettres sans accens, pour désigner les touches du milieu du clavier général, et désigner ensuite les notes des octaves plus aigus ou plus graves par les mêmes

---

quefois ses méditations sur la manière de perfectionner l'écriture musicale ; il serait curieux de savoir à quel point ses idées sur ce sujet pouvaient différer de celles de l'auteur de cet écrit. *J. D. G.*

lettres affectées d'un ou de plusieurs accens, en haut ou en bas, ce qui reviendrait à peu près à ce qu'Euler a pratiqué, dans ses divers écrits sur la musique.

J'ai signalé tout-à-l'heure, dans la figure qu'on donne aux notes, pour indiquer la durée des sons qu'elles représentent, un contre-sens qui consiste à rendre les plus apparentes les notes qui représentent les sons de la moindre durée. Les noms qu'on a donné à ces notes semblent conspirer avec leur figure pour tromper ceux à qui l'écriture musicale ne serait pas familière. Qui, en effet, ne serait pas tenté de croire, par exemple, s'il n'était formellement averti du contraire, que la triple croche a une durée triple ou tout au moins une rapidité triple de celle de la croche, et pourtant ces deux conjectures seraient également fausses. D'après la manière dont j'ai proposé d'écrire les notes, on pourrait appeler *pleines* ce qu'on appelle aujourd'hui *rondes* et donner ensuite aux autres notes, en partant de celle-là, les dénominations successives de *demi-pleines*, *quarts de pleines*, et ainsi de suite.

Les musiciens ont été un peu plus avisés dans le choix des noms qu'ils ont donnés aux silences que dans le choix de ceux qu'ils ont affectés aux notes, et la plupart de ces noms expriment bien le véritable rapport des durées. Cependant, pour mettre plus d'analogie et d'uniformité dans les dénominations, et réduire toujours les conventions au plus petit nombre possible, je proposerais d'appeler *pause* le silence d'une durée égale à celle de la note que je viens d'appeler pleine; et de désigner successivement les silences d'une durée inférieure par les dénominations de *demi-pause*, *quart de pause*, et ainsi des autres.

Il y aurait encore beaucoup à dire, si je voulais parler de tous les autres signes et de toutes les autres dénominations employés dans la musique, des renvois, des reprises, du mouvement des différens airs, etc.; mais je n'ai pas entrepris d'écrire un traité complet sur la langue et l'écriture musicales. Je me hâte donc de passer à la langue des nombres et à celle du calcul, qui doivent être le principal objet de cet écrit.

Si l'on n'avait uniquement en vue que de choisir les signes les plus naturels, et de réduire les conventions au plus petit nombre possible, la manière la plus convenable d'écrire et de nommer les nombres serait sans doute la suivante : on choisirait un caractère d'écriture le plus aisé à former, le caractère 1, par exemple, comme le symbole de l'unité ; on donnerait à ce caractère un nom très-court, le nom *un*, par exemple, que l'on conviendrait être le nom de l'unité ; et, lorsqu'on voudrait écrire ou nommer un nombre entier quelconque, on écrirait ou l'on prononcerait le caractère ou le mot représentant l'unité autant de fois qu'il y aurait d'unités dans le nombre proposé. C'est à ce système de numération que reviennent les *tailles* employées par beaucoup de gens en guise de compte ouvert vis-à-vis leurs boulangers, et c'est encore suivant ce système que nos *horloges* à sonnerie accusent les heures.

Mais, indépendamment de l'espace et du temps nécessaires pour écrire et énoncer dans ce système des nombres tant soit peu considérables, des nombres ainsi écrits et énoncés n'offriraient à l'esprit qu'une idée très-confuse de leur grandeur, tellement qu'il serait à peu près impossible de discerner l'un de l'autre deux nombres peu différens et tant soit peu considérables. Voilà sans doute ce qui aura conduit à créer des caractères et des mots pour désigner, en particulier, chacun des premiers nombres de la suite naturelle, et à combiner ensuite ces caractères et ces mots entre eux de manière à former cet ingénieux système arithmétique que nous devons aux Arabes.

Mais les caractères de cette arithmétique n'ont été assujettis, quant à leur figure, à aucune méthode régulière, tellement que chacun d'eux ne remplit sa destination qu'en vertu d'une convention formelle, et que ces caractères sont des signes d'institution dans toute l'étendue de la signification de ce mot. Si cependant la base de notre arithmétique avait été plus petite, on aurait pu choisir les chiffres de manière à en faire des signes presque naturels ; il eût suffi pour cela de convenir que tout chiffre serait formé d'une barre verticale, traversée par autant de petites barres horizontales que ce chiffre aurait dû exprimer d'unités. Dans ce système, notre chiffre 1 aurait été le zéro, puisqu'il ne se serait trouvé traversé par aucune barre horizontale. Des chiffres ainsi choisis se seraient fait en quelque sorte deviner d'eux-mêmes; mais, dans notre arithmetique décimale, la multiplicité des barres aurait été une source de confusion.

Il se présentait aussi de choisir, pour représenter les petits nombres, les premières lettres de notre alphabet, prises dans leur ordre; de cette sorte, l'étude des lettres et l'étude des chiffres n'auraient été qu'une seule et même étude. Il est pourtant heureux qu'on n'ait pas pris ce parti, qui n'aurait plus permis d'employer les lettres de la manière qu'on le fait en algèbre.

Quant aux noms des nombres, il aurait été assez difficile qu'ils ne fussent pas purement conventionnels; mais on aurait pu les faire commencer successivement par les neuf premières lettres de l'alphabet, afin d'enchaîner l'ordre numéral à l'ordre alphabétique. On a choisi des mots très-courts, et on a bien fait; il eut seulement été à désirer qu'on substituât aux mots *zéro* et *quatre* des mots d'une syllabe comme les autres.

Les caractères une fois admis tels qu'ils sont, et la convention sur la valeur de situation des chiffres établie, notre numération écrite est tout-à-fait irréprochable; mais il n'en est pas tout-à-fait de même de la numération parlée, et on ne voit pas sans quelque regret qu'on se soit plût, en quelque sorte, à en gâter l'uniformité.

1.° Puisqu'on dit *dix-sept*, *dix-huit*, *dix-neuf*, pourquoi ne dirait-on pas *dix-un*, *dix-deux*, *dix trois*, etc., au lieu de ces dénominations sauvages *onze*, *douze*, *treize*, etc., dont le sens a besoin d'être expliqué, tandis que celui des autres se présente de lui-même.

2.° On dit *deux cens*, *trois cens*, *quatre cens*, etc., *deux mille*; *trois mille*, *quatre mille*, etc.; pourquoi donc ne dirait-on pas également *deux dix*, *trois dix*, *quatre dix*, etc.? Un enfant ne demande jamais ce que valent ensemble *deux cent cinq* et *trois cent quatre*, parce qu'il voit de lui-même que cela fait *cinq cent neuf*, tandis qu'il peut être fondé à demander ce que valent ensemble *vingt-cinq* et *trente-quatre*, dont la somme ne se présente pas aussi naturellement.

Si du moins notre mode d'énonciation des collections de dizaines était uniforme ; mais quelle analogie y a-t-il, par exemple, entre les mots *dix*, *vingt*, *trente ?* et qui pourrait jamais, si on ne l'en instruisait, soupçonner la signification de ces mots. Qu'est-ce ensuite que ces mots *soixante et dix*, *quatre-vingts*, *quatre-vingt-dix* ? qu'ont donc de si désagréable pour l'oreille les mots *septante*, *huitante* et *nonante*, généralement admis dans nos départemens méridionaux ? Si l'on voulait absolument des mots en *ante*, je voudrais qu'on employât simplement les mots *un-ante*, *deux-ante*, *trois-ante*, etc ; mais je préférerais de beaucoup, comme je l'ai dit plus haut, les mots *dix*, *deux dix*, *trois dix*, etc.

3.° Dans notre manière de couper les grands nombres en tranches, nous sommes obligés d'imposer des noms à ces tranches ; mais du moins faudrait-il que le nom d'une tranche en indiquât le rang, et c'est malheureusement ce qui n'arrive pas. Qui ne serait tenté de croire, par exemple, s'il n'était averti du contraire, que les mots *billion*, *trillion*, *quatrillion*, etc, sont les noms des *deuxième*, *troisième*, *quatrième*, etc. tranches, et ne semble-t-il pas qu'on ait cherché à dessein de brouiller toutes les idées ? et doit-on être surpris d'après cela que tant de jeunes-gens se dégoûtent de l'étude des sciences exactes où ils ne trouvent, dès l'abord, que désordre et confusion.

Avant de terminer sur ce sujet, je remarquerai encore qu'on pourrait, sans confusion, représenter tous les nombres, dans notre système de numération ou dans tout autre, avec un caractère unique, le zéro par exemple. Il ne s'agirait pour cela que d'avoir, pour écrire les nombres, du papier réglé comme le papier de musique, mais dont il serait bon que les portées eussent dix lignes au lieu de cinq. On conviendrait que le caractère o vaudrait *zéro*, *un*, *deux*, *trois*, etc, suivant qu'il se trouverait écrit sur la *première*, la *seconde*, la *troisième*, la *quatrième*, etc. ligne ; la portée serait divisée, par des barres transversales équidistantes, en mesures dont la première serait destinée à recevoir les *unités*, la seconde les *dixaines*, la troisième les *centaines*, etc. ; mais ce serait là faire le contraire de ce qu'a fait J. J. Rousseau, qui a cherché, à l'inverse, à nous dispenser d'un papier particulier pour écrire la musique.

Une nomenclature qu'on peut regarder comme bien faite, et d'autant mieux faite qu'elle est toute française, c'est celle des unités fractionnaires des divers ordres ; et encore faut-il qu'on en ait, dès l'origine, gâté l'uniformité. Puisqu'on dit *un cinquième*, *un sixième*, *un septième*, etc. d'unité ; pourquoi, au lieu de dire *un demi*, *un tiers*, *un quart*, ne dirait-on pas également *un deuxième*, *un troisième* et *un quatrième* ? Que si l'on objecte que cela pourrait se confondre avec la dénomination des nombres ordinaux, je répondrai que cette confusion serait également à craindre pour les dénominations usitées, au-delà de la fraction un quart, et que pourtant jamais personne ne s'en est plaint.

Je passerai présentement aux noms imposés aux opérations de calcul, et aux divers élémens qu'on y considère. Il y a entre ces opérations des analogies très-importantes et très-dignes de remarque ; analogies qui, plutôt et mieux observées, auraient obtenu, à d'autres qu'à Néper, et bien long-temps avant lui, la gloire de la découverte de l'ingénieuse et utile invention des logarithmes. Mais comment ces analogies auraient-elles pu être remarquées, lorsque rien dans le langage ne les laissait soupçonner ?

Dans toute opération de calcul, on ne devrait jamais considérer plus de deux nombres donnés servant à en déterminer un troisième ; et c'est fort mal à propos qu'on définit l'addition l'art de trouver un nombre égal à la réunion de plusieurs autres. Quelle que soit la multitude des nombres à ajouter, on peut toujours parvenir à leur somme par une suite d'additions de deux nombres, tout comme on détermine le produit de la multiplication d'un nombre quelconque de facteurs par une suite de multiplications de deux facteurs. A la vérité, l'extrême simplicité de l'addition a pu permettre de déterminer d'un seul coup la somme de plus de deux nombres, mais le procédé qu'on emploie alors doit être uniquement considéré comme une abréviation accidentelle, particulière à l'addition qui doit invariablement demeurer l'opération par laquelle on détermine la somme de deux nombres. Car, sans doute, si quelqu'un découvrait un procédé propre à faire trouver d'un seul coup le produit de plus de deux facteurs, on ne se croirait pas fondé pour cela à changer la définition de la multiplication.

N'admettant donc ainsi que deux données dans chaque opération, on doit distinguer entre elles l'*élément passif* et l'*élément actif*; le nombre *sur lequel* on opère et celui *avec lequel* on opère, la *matière* et l'*instrument* de l'opération. A la vérité, cette distinction pourrait paraître superflue dans l'addition où les deux élémens jouent exactement le même rôle, sous tous les rapports, mais elle est toujours bonne à conserver, là comme ailleurs, à cause de l'analogie; c'est encore là une circonstance purement accidentelle, à peu près semblable à celle d'un morceau de sucre que l'on rappe contre un autre, et où le rappant est aussi le rappé. On pourrait dire aussi que, dans la multiplication, on peut intervertir l'ordre des facteurs; mais ce serait avec moins de fondement encore, puisque là il y a bien évidemment un nombre répété et un nombre qui répète; et que ce n'est que sous le point de vue abstrait que la permutation peut être permise. Ainsi, tout le monde conçoit clairement ce que c'est que la multiplication d'une longueur par un nombre abstrait, tandis que la multiplication d'un nombre abstrait par une longueur est un véritable non sens.

Dans les quatre dernières opérations, on a différencié par des dénominations particulières les deux élémens et le résultat; dans les deux premières, au contraire, on a laissé ces élémens sans dénominations propres; et de là, en particulier, l'incommodité des circonlocutions de *nombre dont on retranche* et de *nombre qu'on retranche*, auxquelles il faut sans cesse recourir dans l'exposition des règles de la soustraction; car les dénominations de *plus grand* et de plus *petit nombre*, outre qu'elles seraient impropres dans le cas où les deux nombres seraient égaux, deviendraient, pour l'algèbre, le germe d'une idée fausse; et les dénominations de *nombre d'en haut* et de *nombre d'en bas* ou de *nombre supérieur* et de *nombre inférieur*, sans être plus courtes, seraient tout-à-fait ridicules.

Les géomètres de Genève ont admis le mot *addendes* comme dénomination commune des nombres sur lesquels on opère dans l'addition, et je l'accepterais volontiers comme l'analogue du mot *facteurs* dans la multiplication, si le mot *parties* n'était tout aussi court et plus français; mais il n'en faudrait pas moins des dénominations pour désigner chacun de ces nombres en particulier. Les mêmes géomètres ont inventé, pour la soustraction, les mots *substrahende* et *minuande*; mais il ne paraît pas que ces dénominations aient pris faveur; c'est sans doute en partie à cause de la dureté de la première; mais c'est peut-être aussi à raison de leur défaut d'analogie avec celles qui ont été adoptées pour la multiplication et la division; c'est que leur terminaison commune en *ande* semblerait donner à croire que, dans la soustraction, il y a deux élémens passifs et point d'élémens actifs.

Puis donc que, dans la multiplication et dans la division, les noms des deux élémens se déduisent du nom même de l'opération en y changeant la terminaison *ion* en *ande* pour l'élément passif, et *eur* pour l'élément actif, il se présentait assez naturellement d'employer les mots *additande* et *additeur* pour l'addition, et les mots *soustractande* et *soustracteur* pour la soustraction.

Mais, outre qu'il serait assez difficile d'étendre cette règle à la formation des puissances et à l'extraction des racines, dont le nom n'est qu'une périphrase, il est désirable, pour la plus grande perfection de la langue du calcul, que le nom du résultat soit aussi déduit d'une manière uniforme du nom de l'opération ; et c'est ce qui n'arrive pas dans notre manière de nous exprimer, où les mots *somme*, *reste*, *produit* et *quotient* n'ont aucune analogie avec les mots *addition*, *soustraction*, *multiplication* et *division*. En outre, comme chaque opération a son inverse, on pourrait désirer encore que le langage fît sentir que la soustraction est l'inverse de l'addition, la division l'inverse de la multiplication, et l'extraction des racines l'inverse de la formation des puissances.

Un homme qui, avec tout ce qu'il fallait pour se faire un nom dans les sciences exactes, n'a finalement acquis qu'une honteuse célébrité, avait proposé les mots *sommation*, *réproduction*, *graduation* pour désigner les opérations qui composent les nombres ; en substituant aux deux derniers les mots *production* et *gradation*, qui sont un peu plus simples, on pourrait employer les mots *désommation*, *déproduction* et *dégradation*, pour désigner les opérations de retour ; et alors il serait possible d'établir une langue du calcul tout-à-fait régulière, ainsi qu'on le voit par le tableau suivant, qui n'a pas besoin de commentaire.

Somm—*ation*,	Prod—*ation*,	Grad—*ation*,
Somm—*er*,	Prod—*er*,	Grad—*er*,
Somm—*ande*,	Prod—*ande*,	Grad—*ande*,
Somm—*eur*,	Prod—*eur*,	Grad—*eur*,
Somm—*e*,	Prod—*e*,	Grad—*e*.
Dessomm—*ation*,	Déprod—*ation*,	Dégrad—*ation*,
Dessomm—*er*,	Déprod—*er*,	Dégrad—*er*,
Dessomm—*ande*,	Déprod—*ande*,	Dégrad—*ande*,
Dessomm—*eur*,	Déprod—*eur*,	Dégrad—*eur*,
Dessomm—*e*,	Déprod—*e*,	Dégrad—*e*.

Cependant cette nomenclature, toute complète et régulière qu'elle est, ne réunit pas toutes les conditions qu'on pourrait exiger d'elle. Les opérations du calcul ne sont point indépendantes les unes des autres, et suivent, dans leur génération progressive, un ordre qui tient de leur nature ; or, les radicaux que je viens de proposer n'indiquent aucunement l'ordre que les opérations doivent garder entre elles. Je pense donc que, par ce motif, il vaudrait peut-être mieux leur substituer des radicaux purement ordinaux ; les noms des six opérations seraient ainsi :

Prim—*ation*,	Déprim—*ation*,
Du — *ation*,	Dédu — *ation*,
Tri — *ation*,	Détri — *ation* ;

d'où on formerait les noms des élémens et du résultat, comme dans le cas précédent. On trouverait cet avantage à l'adoption de ce dernier système qu'il ne statuerait rien de définitif sur le nombre des degrés ou ordres d'opérations du calcul ; de sorte que si des réflexions nouvelles en amenaient d'un ou de plusieurs ordres supérieurs, telles que les *Lamed* de M. Wronski, la langue de ces nouvelles opérations deviendrait très-facile à faire (*).

(*) L'auteur ne compte ici que six opérations de calcul ; mais il nous paraît qu'on en doit compter sept et même huit. Il est d'abord incontestable que le problème de la formation des puissances donne lieu à ces deux problèmes inverses essentiellement distincts ; 1.° *Étant donnés la puissance et l'exposant, trouver la racine ?* 2.° *Étant donnés la puissance et la racine, trouver l'exposant ?* Pareillement, le problème de la multiplication donne lieu à ces deux problèmes inverses, 1.° *Etant donnés le produit et le multiplicande, déterminer le multiplicateur ?* 2.° *Etant donnés le produit et le multiplicateur, déterminer le multiplicande ?* Remarquons bien, en effet, que, bien que ces deux questions rentrent numériquement l'une dans l'autre, lorsqu'il s'agit de la multiplication de

Je

Je ne doute pas, au surplus, que ces nouvelles dénominations n'excitent le rire de beaucoup de gens, et peut-être même la colère de quelques-uns; mais je ne donne ni l'ordre, ni même le conseil de les adopter, et tout mon but est seulement de faire comprendre ce que j'entends par une langue bien faite. Ne s'est-on pas d'ailleurs moqué également et de tous les projets de réforme de notre ortographe, et de la nouvelle nomenclature chimique, et des noms des départemens, et de ceux des mois et des jours du calendrier de la république, et de ceux des mesures métriques ? On aurait trop à faire, si l'on voulait s'inquiéter des propos des mauvais plaisans et des sots.

Des gens plus sensés objecteront que les avantages réels que peut offrir l'emploi d'une langue mieux organisée, ne sauraient compenser le désagrément qn'on éprouve à renoncer à des habitudes anciennes et profondément invétérées; et je l'accorderai volontiers lorsqu'il ne s'agira que de la langue vulgaire; mais il n'en est pas de même de la langue des sciences; ceux qui les étudient n'ont encore aucune habitude formée; il leur importe assez peu que tel objet qu'on offre pour la première fois à leur attention soit nommé de telle manière plutôt que de telle autre; mais ce qui leur importerait beaucoup, ce qui faciliterait singulièrement leurs études, ce serait qu'en apprenant des mots, ils trouvassent dans ces mots le tableau fidelle des rapports entre les idées qu'ils sont destinés à exprimer.

Je passe présentement à l'examen des signes, soit de ceux qui

---

deux facteurs numériques abstraits; c'est toute autre chose lorsque, par exemple, il s'agit de la multiplication d'une longueur par un nombre abstrait. Quant à l'addition, il est patent qu'elle ne donne naissance qu'à une seule question inverse.

J. D. G.

expriment les rapports que les grandeurs ont entre elles, soit de ceux qui indiquent les opérations qu'on doit leur faire subir. Les premiers sont les signes $>$, $=$, $<$, dont je ne ferai mention que pour reconnaître qu'ils ont été bien choisis; ce sont, en effet, des signes presque naturels; aussi en devine-t-on pour ainsi dire l'usage, ou du moins ne l'oublie-t-on jamais dès qu'une fois on l'a connu.

Mais ce sont malheureusement les seuls qui jouissent de cet avantage, et ceux qu'on destine à indiquer les opérations auraient besoin d'une réforme totale; mettons en effet ces signes en regard les uns des autres ainsi qu'il suit :

$$a+b\,, \qquad a-b\,,$$

$$a\times b\,, \qquad \frac{a}{b}\,,$$

$$a^b\,, \qquad \sqrt[b]{a}\,;$$

et demandons-nous si, à part nos habitudes, nous pourrions seulement soupçonner que les signes de la première colonne désignent des opérations de composition d'un ordre de plus en plus élevé et dérivant toutes les unes des autres, et que ceux de la seconde colonne indiquent des opérations inverses de celles-là ? Pour l'addition et la multiplication, c'est le même signe, tourné dans différens sens; et ayant à sa droite et à sa gauche les deux élémens de l'opération ; pour la soustraction et la division, c'est aussi un signe commun; mais il est ici tourné dans le même sens pour l'une et pour l'autre, et c'est la situation des élémens par rapport au signe qui change de l'une à l'autre; enfin, la formation d'une puissance est indiquée sans signe, et seulement par la situation respective des deux élémens, tandis qu'on rencontre pour l'extraction des racines un signe tout-à-fait nouveau, n'ayant aucun rapport avec les autres. Et remarquons bien encore qu'en algèbre on n'emploie aucun signe pour la multiplication, de manière que, par un contre-sens assez singulier, c'est l'addition, c'est-à-dire, l'opération la plus usuelle, qui se trouve indiquée par un des signes les plus composés. Certes, si nous n'avions encore aujourd'hui aucun signe d'opérations, et que quelqu'un vînt nous proposer ceux-là, on peut bien affirmer, sans trop hasarder, qu'il ne parviendrait pas à les faire recevoir; et il suffit de les considérer avec quelque attention pour reconnaître que le calcul n'a pas été inventé d'un seul jet.

Mais quels autres signes, dira-t-on, pourraient leur être substitués avec avantage? La réponse à cette question n'est pas, j'en conviens, extrêmement facile; et peut-être peut-elle d'ailleurs être résolue de diverses manières qui offriraient des avantages à peu près égaux. Il est du moins facile de voir à quelles conditions ces nouveaux signes devraient satisfaire. On sent, en effet, qu'ils devraient montrer clairement que la multiplication dérive de l'addition, la formation des puissances de la multiplication, et que les trois autres opérations sont les inverses de celles-là. Il faudrait d'ailleurs que ces signes fussent choisis de manière à ne pas rendre les formules algébriques trop incommodes à écrire et à déchiffrer.

J'avoue franchement que, bien que j'y aie assez souvent réfléchi, je n'ai rien rencontré encore dans ce genre dont j'aie lieu d'être pleinement satisfait. Ce n'est donc que pour donner une idée de la manière dont je conçois la chose que je vais hasarder un système de notation que je confesse à l'avance être beaucoup trop compliqué pour mériter l'adoption. Peut-être d'autres, sous ce rapport, seront-ils plus heureux que moi.

Le résultat de toute opération de calcul est une fonction des deux élémens qui concourent à la formation de ce résultat, et nous avons déjà une notation admise pour les fonctions. A la vérité, cette notation est réputée propre à désigner des fonctions quelconques; mais on pourrait fort bien adopter un signe fonctionnel exclusivement destiné à représenter une opération de calcul faite sur deux nombres. Il serait peut-être bon que ce signe ne fût pas une lettre, afin de ne point détourner une lettre de plus de sa destination comme symbole de quantité; mais supposons, pour ne point créer de signe nouveau, que cette lettre soit Λ, on pourrait admettre que ce signe, ainsi écrit, serait le symbole de l'addition, que le signe $\overline{\Lambda}$ serait celui de la multiplication, et enfin le signe $\overline{\overline{\Lambda}}$ celui de la formation des puissances. Quant à la soustraction, la division et l'extraction des racines, elles auraient pour signes respectifs Λ, $\underline{\mathrm{V}}$, $\underline{\underline{\mathrm{V}}}$. Les élémens du calcul seraient d'aillenrs renfermés entre deux parenthèses à la suite du signe, l'élément passif étant constamment écrit le dernier; et comme la multiplication ne s'indiquerait plus dès-lors en plaçant ses deux facteurs l'un à la suite de l'autre sans aucun signe, il ne serait pas nécessaire de séparer les deux elémens l'un de l'autre par une virgule.

En comparant donc cette notation à la notation vulgaire, on obtiendrait le tableau suivant:

$$\Lambda(ab)=a+b\,, \qquad \Lambda(ab)=a-b\,,$$

$$\overline{\Lambda}(ab)=ab\,, \qquad \mathrm{V}(ab)=\frac{a}{b}\,,$$

$$\overline{\overline{\Lambda}}(ab)=a^b\,; \qquad \underline{\underline{\mathrm{V}}}(ab)=\sqrt[b]{a}\,.$$

Afin de ne pas confondre les parenthèses qui enferment les élémens de l'opération avec celles dont on fait usage pour isoler les quantités les unes des autres, on pourrait remplacer celles-ci par des crochets [ ].

On voit, d'après cela, qu'on aurait, en comparant les deux notations

$$\Lambda(\Lambda(\Lambda(ab)c)d)=[[a+b]+c]+d=a+b+c+d\,,$$

$$\overline{\Lambda}(\overline{\Lambda}(\overline{\Lambda}(ab)c)d)=[[ab]c]d=abcd\,;$$

mais, une fois qu'il serait établi que la somme ou le produit de plusieurs nombres se compose symétriquement de ces nombres, on pourrait aux expressions

$$\Lambda(\Lambda(\Lambda(ab)c)d)\ , \qquad \overline{\Lambda}(\overline{\Lambda}(\overline{\Lambda}(ab)c)d)\ ,$$

substituer, par abréviation, les suivantes,

$$\Lambda(abcd)\ , \qquad \overline{\Lambda}(abcd)\ .$$

On pourrait même convenir que, lorsqu'un signe fonctionnel affecterait ainsi une suite d'élémens, le dernier serait toujours supposé actif par rapport à tous ceux qui le précéderaient, dont le dernier serait lui-même actif par rapport à ceux qui seraient à sa gauche; et ainsi de suite. Au moyen de cette convention, les expressions

$$\Lambda(abcd)\ , \qquad \overline{\Lambda}(abcd)\ , \qquad \overline{\overline{\Lambda}}(abcd)\ ,$$

équivaudraient, dans l'ancien système, aux suivantes

$$a+b+c+d\ ; \qquad abcd\ ; \qquad a^{b^{c^d}}\ ,$$

et celles-ci

$$\mathrm{V}(abcd)\ , \qquad \underline{\mathrm{V}}(abcd)\ , \qquad \underline{\underline{\mathrm{V}}}(abcd)\ ;$$

aux suivantes

$$a-b-c-d\ , \qquad \frac{a}{bcd}\ ; \qquad \sqrt[bcd]{a}\ ,$$

On voit par là que le polynome que nous écrivons

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\ldots\ldots\ldots$$

serait exprimé ainsi

$$\Lambda(A\overline{\Lambda}(Bx)\overline{\Lambda}(C\overline{\overline{\Lambda}}(x2))\Lambda(D\overline{\overline{\Lambda}}(x3))\overline{\Lambda}(E\overline{\overline{\Lambda}}(x4))\ldots\ldots)\ .$$

Dans le même système, le théorème

$$(1+z)^m=1+\frac{m}{1}z+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}z^2+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}z^3+\ldots\ldots$$

s'écrirait ainsi

$$\overline{\overline{\Lambda}}(\Lambda(1z)m)=\Lambda(1\overline{\Lambda}(zm)\overline{\Lambda}(\overline{\overline{\Lambda}}(z2)\underline{V}(V(m1)2)m)\ldots\ldots\ldots)\ ,$$

Je n'ai rien dit de la notation des quantités négatives ; parce qu'elle résulte évidemment de ce qui précède. Il est clair, en effet, que les grandeurs $+a$ et $-a$ pourront respectivement être notées ainsi

$$\Lambda(0a)\ , \qquad\qquad V(0a)\ ,$$

tout comme les quantités a et $\frac{1}{a}$ pourraient l'être de cette manière

$$\overline{\Lambda}(1a)\ , \qquad\qquad \underline{V}(1a)\ .$$

et ainsi des autres.

Mais en voilà bien assez, et peut-être même beaucoup trop, sur ce sujet, et je terminerai en revenant de nouveau sur une réflexion que j'ai déjà faite en commençant, mais dont on sentira bien mieux ici l'application. Tout le monde conviendra certainement que ce ne serait pas sans beaucoup de peine et de fréquentes méprises que les gens même les plus habiles parviendraient à se familiariser avec les quelques locutions et notations nouvelles que j'ai hasardé de proposer, ou avec toutes autres du même genre. Cependant, que sont, pour les commençans, les locutions et notations vulgaires, sinon des locutions et notations tout aussi nouvelles pour eux que celles-là peuvent l'être pour nous, avec cette double différence pourtant que nos locutions et notations vulgaires ont été créées sur un plan tout-à-fait défecteux, ou plutôt sans aucun plan, et que les commençans ne sont pas familiarisés comme nous le sommes avec l'idée des diverses combinaisons dont les grandeurs peuvent être susceptibles. Combien donc ne sommes-nous pas déraisonnables d'exiger d'eux que, dans l'intervalle de quelques jours, ils emploient ces mots et ces signes avec la même habileté et la même justesse que nous le faisons nous-mêmes, et de nous fâcher contre eux lorsque, dans la combinaison qu'ils en font, il leur échappe, çà et là, quelques légères inadvertances? Quand la lecture de cet écrit n'aurait d'autre résultat que de nous rendre un peu plus patiens et indulgens à leur égard, je n'aurais point de regrets de l'avoir entrepris.

Lyon, le 20 mars 1822.

ARITHMÉTIQUE.

Sur la formation des puissances et l'extraction des racines des nombres;

Par M. QUERRET, chef d'institution.

SOIENT posés successivement les équations

$$\frac{m}{1}a+b=A_1\,,$$

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^2+bA_1=A_2\,,$$

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}a^3+bA_2=A_3\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\,,$$

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}a^{m-3}+bA_{m-4}=A_{m-3}\ ;$$

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^{m-2}+bA_{m-3}=A_{m-2}\ ,$$

$$+\frac{m}{1}a^{m-1}+bA_{m-2}=A_{m-1}\ ,$$

$$a^m+bA_{m-1}=A_m\ .$$

En prenant la somme de leurs produits respectifs par b^{m-1}, b^{m-2}, b^{m-3} ,...... b^3, b^2, b, 1, il vient, en réduisant,

$$A_m=a^m+\frac{m}{1}a^{m-1}b+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^{m-2}b+\ldots+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^2b^{m-2}+\frac{m}{1}ab^{m-1}+b^m$$

c'est-à-dire,

$$A_m=(a+b)^m\ .$$

Si, par exemple, on avait $m=5$, en posant successivement

$$5a+b\quad=A_1\ ;$$

$$10a^2+bA_1=A_2\ ;$$

$$10a^3+bA_2=A_3\ ,$$

$$5a^4+bA_3=A_4\ ,$$

$$a^5+bA_4=A_5\ ,$$

on aurait

$$A_5=(a+b)^5\ ,$$

Voilà donc un moyen assez commode de former une puissance d'un nombre composé de dizaines et d'unités. Soit, par exemple, le nombre 47 dont il soit question de former la cinquième puissance; en le considérant comme $40+7$, prenant 40 pour a et 7 pour b, on écrira d'abord les cinq premières puissances de 40 en cette manière

40 , 1600 , 64000 , 2560000 , 102400000 ,

et au-dessous les coefficiens de la cinquième puissance d'un binome, à partir du second terme, en cette manière,

5 , 10 , 10 , 5 , 1 .

En

En prenant les produits des termes correspondans des deux suites, on en formera une troisième qui sera

200 , 16000 , 640000 , 12800000 , 102400000 .

On formera enfin une quatrième suite dont le premier terme soit le premier terme de la troisième, augmenté de 7, et dont chacun des autres termes soit le produit du précédent par 7, augmenté du terme qui correspond à ce précédent dans la troisième, en cette manière

207 , 17449 , 762143 , 18135001 , 229345007 ,

et le dernier terme de cette suite sera la puissance cherchée.

Si l'on voulait former une puissance d'un nombre de trois chiffres, tel, par exemple, que 473, on prendrait 470 pour a et 3 pour b; on formerait donc, comme ci-dessus, la première suite des puissances successives de 470, ce qui se réduirait, sauf les zéros à écrire à droite, à faire les puissances successives de 47, à la formation desquelles on pourrait procéder comme nous l'avons fait, dans l'exemple précédent, pour la cinquième. Cette première suite ainsi formée, on en déduirait les autres comme ci-dessus, en employant le chiffre 3 comme nous avions employé le chiffre 7. On se conduirait d'une manière analogue pour la formation d'une puissance d'un nombre de plus de trois chiffres.

Supposons présentement qu'on ait à extraire une racine d'un nombre, la racine cinquième de 229345007, par exemple. Après avoir déterminé la racine cinquième 4 de sa dernière tranche à gauche 2293, et en avoir retranché sa cinquième puissance 1024, on aura pour reste 1269 à côté duquel abaissant la tranche suivante et séparant par une virgule les quatre derniers chiffres à droite, ce qui donnera 12694,5007, il faudra, pour avoir le second chiffre de la racine, diviser la partie 12694 à gauche de la virgule par cinq fois la quatrième puissance de 4, c'est-à-dire, par 1280. Cela donnerait immédiatement 9 pour quotient; et, pour le vérifier, il faudrait former la cinquième puissance de 49 et essayer de la retrancher du nombre proposé; or, nous en avons déjà retranché la cinquième puissance de 40, ce qui nous a donné pour reste 126945007 ; d'un autre côté, notre équation $a^5+bA_4=A_5$, qui revient à $a^5+bA_4=(a+b)^5$ donne $(a+b)^5-a^5=bA_4$; il nous suffira donc de faire pour 49 les quatre suites que nous avons formées tout-à-l'heure pour 47, en les bornant aux quatre premiers termes seulement ; alors, pour que le 9 puisse être admis, il faudra que 9 fois le quatrième terme de la dernière puisse être retranché de 126945007 ; et, comme il ne pourra l'être, on passera au 8 qui ne pourra l'être davantage, et enfin au 7 qu'on trouvera être le véritable.

En particulier, ce procédé, appliqué à l'extraction de la racine cubique, simplifie singulièrement l'opération.

Saint-Malo, le 19 mars 1822.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Sur l'équivalence des tétraèdres de même base et de même hauteur ;

Par M. Gergonne.

Il n'est pas étonnant que, lorsqu'on rencontre en géométrie des incommensurables et des lignes et surfaces courbes dont nous n'avons proprement qu'une idée négative, on soit contraint, pour en démontrer les propriétés, de recourir à la réduction à l'absurde ; mais celui qui étudie la géométrie en philosophe a lieu d'être assez surpris qu'on n'ait d'autre ressource que cette forme de raisonnement, soit pour démontrer l'équivalence des tétraèdres de même base et de même hauteur, soit pour obtenir directement l'expression du volume d'un tétraèdre, sur-tout lorsqu'il voit avec quelle facilité on démontre, dans la géométrie plane, la propriété analogue pour le triangle.

M. Legendre, en suivant le mode de décomposition indiqué par Euclide, est parvenu directement, d'une manière fort élégante, à l'expression du volume du tétraèdre, de laquelle il a pu conclure ensuite que les tétraèdres de même base ou seulement de bases équivalentes et de même hauteur sont équivalens ; mais comme, dans la géométrie plane, on s'occupe de la comparaison des surfaces avant de chercher à en déterminer l'étendue ; il m'a semblé un peu plus méthodique de suivre une marche analogue dans la géométrie des corps. Voici, en conséquence, de quelle manière je démontre depuis long-temps, dans mes cours, que deux tétraèdres de bases équivalentes et de même hauteur sont équivalens.

Soient M, N les deux tétraèdres dont il s'agit. Si l'on nie qu'ils soient équivalens, il faudra nécessairement admettre qu'il y en a un qui est plus grand que l'autre ; supposons donc qu'on admette que ce soit M, de telle sorte qu'on ait

$$M>N\,, \qquad (1)$$

on pourra toujours admettre que, parmi tous les tétraèdres semblables à N et plus grands que lui, il y en a un équivalent à M, soit N' ce tétraèdre, de manière qu'on ait

$$M=N'\,; \qquad (2)$$

N et N' seront donc deux tétraèdres semblables, que l'on pourra faire coïncider par le sommet et les trois arêtes de l'un de angles trièdres de leurs bases, auquel cas, leurs faces opposées à ces angles se trouveront parallèles.

Soit divisée la hauteur de N en un assez grand nombre de parties égales pour qu'en menant, par les points de division, des plans parallèles à la base et construisant, sur les sections resultantes comme bases, une suite de prismes triangulaires circonscrits, à la manière de M. Lacroix, ces prismes soient tous renfermés dans N', ce qui est toujours possible ; et soit P la somme de ces prismes ; nous aurons donc

$$P<N'\,, \qquad (3)$$

Soient circonscrits à M un pareil nombre de prismes triangulaires de même hauteur ; il est aisé de voir que chaque prisme circonscrit à M sera équivalent au prisme de même rang circonscrit à N ; d'où il suit que la somme des prismes circonscrits à M sera équivalente à la somme des prismes circonscrits à N, et pourra comme elle être représentée par P.

Mais, parce qu'ils sont circonscrits à M, on devrait avoir

$$M<P\,, \qquad (4)$$

qui, combinée avec (3), donnerait, à plus forte raison,

$$M<N' \qquad (5)$$

ce qui contredit l'hypothèse (2) ; cette hypothèse est donc absurde; deux tétraèdres de bases équivalentes et de même hauteur sont donc équivalens.

Je n'aurais point parlé de cette démonstration, à laquelle je n'ai jamais songé à attacher aucune sorte d'importance, si je n'avais eu à mentionner une autre démonstration de la même proposition qui m'a été récemment adressée par M. Querret, chef d'institution à Saint-Malo. Voici comment procède M. Querret :

Soit toujours supposé, comme ci-dessus,

$$M>N\,; \qquad (1)$$

leur différence, si petite qu'on la suppose, pourra toujours être considérée comme équivalente à un certain prisme triangulaire ayant même base que M et une hauteur convenable.

Soit divisée la hauteur commune des deux tétraèdres en parties égales plus petites que la hautenr de ce prisme triangulaire ; soient conduits, par les points de division, des plans parallèles aux bases et soient construits entre ces plans des prismes triangulaires circonscrits à M dont nous désignerons la somme par P, et des prismes inscrits à N dont nous désignerons la somme par Q; nous aurons conséquemment

$$P>M\,, \qquad (2) \qquad\qquad Q<N\,; \qquad (3)$$

d'où

$$P-Q>M-N\;; \qquad (4)$$

or, il est connu que $P-Q$ est équivalent au premier des prismes circonscrits à M, lequel a été pris plus petit que $M-N$; de sorte qu'on devrait avoir, d'un autre côté,

$$P-Q<M-N\;; \qquad (5)$$

ce qui contredit l'inégalité (4), et prouve ainsi que l'inégalité (1) ne saurait être admise.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Note à l'appui d'une réflexion de M. Plana, dans l'article inséré à la page 145 de ce volume;

Par un Abonné.

En parlant des résultats qu'on obtient en prenant l'intégrale qui exprime l'aire d'une courbe au-delà de ses limites physiques et réelles, M. Plana s'exprime ainsi (pag. 148) : « Plusieurs exemples » démontrent que, en pareil cas, il suffit de supprimer la partie » imaginaire du résultat ainsi trouvé, pour obtenir l'intégrale arith- » métique; mais je n'ose croire qu'un tel moyen puisse, dans tous » les cas, être employé avec sureté ».

Il est aisé de justifier, par un exemple, le scrupule que manifeste M. Plana en cet endroit. Soit considérée, en effet, une lemniscate dont l'équation polaire soit

$$r^2=a^2\text{Cos}.2\theta\,,$$

laquelle ne donne des valeurs réelles pour le rayon vecteur r qu'autant que l'angle θ n'excède pas 45°. Puisqu'en général l'aire d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires est $\int\frac{r^2d\theta}{2}$, on aura celle du quart de la lemniscate dont il s'agit, en prenant l'intégrale $\int\frac{a^2}{2}\text{Cos}.2\theta.d\theta$ depuis $\theta=0$ jusqu'à $\theta=45°$; ce qui donne exactement $\frac{a^2}{4}$. Mais si, ne faisant pas attention à ce que la courbe ne s'étend pas au-delà de $\theta=45°$, on cherche l'aire entre l'axe et sa perpendiculaire par le centre de la courbe, c'est-à-dire depuis $\theta=0°$ jusqu'à $\theta=90°$; on pourrait présumer que l'analise avertirait de cette méprise, en donnant un résultat, partie réel et partie imaginaire, dont la partie réelle serait l'aire cherchée du quart de la courbe, tandis que la partie imaginaire répondrait à l'aire comprise dans l'angle demi-droit où la courbe n'existe plus. Mais il n'en est pas ainsi; car la valeur de l'intégrale, prise depuis $\theta=0$ jusqu'à $\theta=90°$, est égale à zéro. Cela montre qu'on doit toujours s'assurer qu'une intégrale est réelle dans toute l'étendue de l'intégration, avant de se fier au résultat que donne l'application des règles ordinaires.

Paris, le 6 mai 1822.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution des deux derniers problemes de géométrie énoncés à la page 180 du présent volume;

Par M. J. B. Durrande, licencié ès sciences, professeur de physique au collége royal de Cahors.

THÉORÈME I. *Tous les cylindres circonscrits à une même ellipsoïde, dans lesquels les plans des deux bases sont parallèles à celui de la ligne de contact de l'ellipsoïde avec la surface convexe du cylindre sont égaux en volume ; et ce volume est plus petit que celui de tous les autres cylindres que l'on pourrait circonscrire à cette ellipsoïde.*

Démonstration. Soit un cylindre circonscrit à l'ellipsoïde, suivant les conditions requises dans l'énoncé; à l'ellipse, base du cylindre, circonscrivons un parallélogramme conjugué quelconque, dont nous ferons la base d'un parallélipipède circonscrit à ce cylindre; il est aisé de voir qu'il le sera également à l'ellipsoïde, et en sera un parallélipipède conjugué. Le parallélipipède et le cylindre, ayant même hauteur, auront leurs volumes dans le rapport des aires de leurs bases, que l'on sait être celui de 4 à ϖ et conséquemment dans un rapport constant; puis donc que le volume du parallélipipède conjugué circonscrit est constant (pag. 224 de ce volume), il s'ensuit que le volume du cylindre circonscrit l'est aussi.

Il n'est pas bien difficile maintenant de prouver que le volume de ce cylindre est *minimum*. Le volume de tout autre cylindre circonscrit serait en effet à celui du parallélipipède circonscrit correspondant, formé, comme nous l'avons dit ci-dessus, dans le rapport de ϖ à 4; mais le volume du parallélipède conjugué circonscrit est *minimum*, parmi les volumes de tous les parallélipipèdes circonscrits (pag. 224 de ce volume); il s'ensuit que le volume du cylindre circonscrit correspondant l'est aussi.

THÉORÈME II. *Tous les cônes circonscrits à une même ellipsoïde, dans lesquels le plan de la base est parallèle à celui de la ligne de contact de l'ellipsoïde avec la surface convexe du cône, sont égaux en volume; et ce volume est plus petit que celui de tous les autres cônes que l'on pourrait circonscrire à cette ellipsoïde.*

Démonstration. Soit un cône circonscrit à l'ellipsoïde, suivant les conditions requises dans l'énoncé; à l'ellipse, base du cône, circonscrivons (pag. 226 du présent volume) un triangle *minimum* quelconque, dont nous ferons la base d'un tétraèdre circonscrit à l'ellipsoïde, de même sommet que le cône; il est aisé de voir que ce tétraèdre sera (pag. 227 du présent volume), un tétraèdre *minimum* circonscrit. Le tétraèdre et le cône, ayant même hauteur, auront leurs volumes dans un rapport constant, qui sera celui des aires de leurs bases ; puis donc que le volume du tétraèdre est constant, il s'ensuit que le volume du cône circonscrit le sera aussi.

Il n'est pas bien difficile maintenant de prouver que le volume de ce cône est *minimum*. Le volume de tout autre cône circonscrit serait en effet à celui du tétraèdre circonscrit correspondant dans le rapport constant des aires de leurs bases ; puis donc qu'alors le tétraèdre circonscrit ne serait pas le tétraèdre *minimum*, le cône circonscrit ne pourrait l'être non plus.

Remarque. On démontrera, par un raisonnement tout-à-fait analogue, que les cylindres et cônes *maximums* inscrits à une même ellipsoïde, sont ceux qui sont circonscrits au parallélipipède et au tétraèdre *maximums* inscrits à cette ellipsoïde.

Démonstration des deux théorèmes de géométrie énoncés à la page 232 de ce volume ;

Par M. Frédéric Sarrus, docteur ès sciences, professeur de mathématiques au collége de Pezenas.

THÉORÈME I. *La droite qui va du sommet de l'angle circonscrit à une section conique au centre de la courbe divise la corde de contact en deux parties égales.*

Démonstration. Supposons, en premier lieu, que la courbe soit une ellipse, et projetons la figure orthogonalement de telle sorte que la projection de l'ellipse soit un cercle ; on aura ainsi un angle circonscrit au cercle avec sa corde de contact, et il est connu qu'alors le centre, le milieu de la corde et le sommet de l'angle, lesquels

lesquels sont ici les projections des points correspondans de la figure primitive, seront en ligne droite ; d'où il suit que les points dont ceux-là sont les projections y seront aussi.

Voilà donc la proposition démontrée pour l'ellipse ; et on voit en outre que, comme dans le cercle , la distance du centre au point où la droite qui va de ce centre au sommet de l'angle circonscrit coupe la courbe , est moyenne proportionnelle entre les distances de ce centre à ce sommet et au milieu de la corde de contact , il en doit être de même pour l'ellipse ; propriété qu'on n'avait démontrée jusqu'ici que pour le seul cas où le sommet de l'angle est sur l'un des diamètres principaux.

Ces propriétés étant tout-à-fait indépendantes des valeurs qu'on voudra donner aux deux diamètres principaux de l'ellipse , elles devront encore avoir lieu lorsque l'un d'eux sera infini ou imaginaire ; c'est-à-dire, lorsque l'ellipse deviendra une parabole ou une hyperbole. Toutefois, ceux qui ne trouveraient pas ces propriétés suffisamment demontrées , pour ces deux dernières courbes , par ce qui précède , pourront recourir à la démonstration analitique que voici (*).

Soit

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2A'x+2B'y+C'=0\ , \qquad (1)$$

(*) M. Durrande , qui s'est aussi occupé de la même question , démontre la proposition, pour une section conique quelconque, en considérant que si l'on prend pour axes des coordonnées deux diamètres conjugués dont l'un soit parallèle à la corde de contact, les deux extrémités de cette corde auront une abscisse commune; d'où il suit que les soustangentes de ces deux points seront égales , et qu'ainsi les deux tangentes iront concourir en un même point de la droite qui joint le centre au milieu de la corde de contact.

On parviendrait encore au but en observant , 1.° que la proposition est évidente lorsque le sommet de l'angle circonscrit est sur l'un des diamètres principaux ; 2.° qu'on peut toujours, par une projection orthogonale convenable, ramener les autres cas à celui-là.

J. D. G.

l'équation d'une section conique quelconque rapportée à deux axes quelconques, son centre sera donné par le système des deux équations

$$Ax+Cy+A'=0\ , \qquad By+Cx+C'=0\ . \qquad (2)$$

Si l'on suppose que l'équation de la droite menée de l'origine à ce centre soit $y=mx$; en éliminant x et y entre cette équation et les équations (2), on trouvera

$$m=\frac{AB'-CA'}{BA'-CB'}\ ,$$

de sorte que l'équation de la droite menée de l'origine au centre sera réellement

$$(BA'-CB')y=(AB'-CA')x\ : \qquad (3)$$

Cela posé, supposons que les axes des coordonnées soient les côtés de l'angle circonscrit lui-même, et désignons par a et b les distances de son sommet aux points où il touche la courbe; la distance a étant prise sur l'axe des x, et la distance b sur celui des y. Il faudra qu'en faisant $y=0$ dans (1) elle devienne, à un multiplicateur près, le quarré de $x-a$; et qu'en y faisant $x=0$, elle devienne, aussi à un multiplicateur près, le quarré de $y-b$; on devra donc avoir les deux équations identiques

$$Ax^2+2A'x+C'=A(x-a)^2\ , \quad By^2+2B'y+C'=B(y-b)^2\ ;$$

ou, en développant et réduisant,

$$2(A'+Aa)x+(C'-Aa^2)=0\ , \quad 2(B'+Bb)y+(C'-Bb^2)=0\ .$$

Cela donnera

$$A'+Aa=0\ ; \qquad B'+Bb=0\ ,$$

$$Aa^2=C'\ , \qquad Bb^2=C'\ .$$

les équations de la première ligne donnent

$$a=-\frac{A'}{A}\ , \qquad b=-\frac{B'}{B}\ ; \qquad (4)$$

qui, substituées dans celles de la seconde, donnent les deux équations de condition

$$A'^2-AC'=0\ , \qquad B'^2-BC'=0\ ; \qquad (5)$$

qui expriment que les axes des coordonnées sont tangens à la courbe, il en résulte

$$A=\frac{A'^2}{C'}\ ; \qquad B=\frac{B'^2}{C'}\ ;$$

qui, substitués dans les valeurs (4) des distances de l'origine aux points de contact, les changent en celles-ci,

$$a=-\frac{C'}{A'}\ , \qquad b=-\frac{C'}{B'}\ ; \qquad (6)$$

d'après quoi les équations du milieu de la corde de contact seront

$$x=-\frac{C'}{2A'}\ , \qquad y=-\frac{C'}{2B'}\ . \qquad (7)$$

Les mêmes valeurs de A et B, substituées dans l'équation (3) de la droite qui joint le centre au sommet de l'angle circonscrit, la changent en celle-ci

$$B'(A'B'-cc')y=A'(A'B'-cc')x \ ;$$

ou simplement

$$B'y=A'x \ ; \qquad (8)$$

or, cette équation est satisfaite par les valeurs (7) ; donc, la droite qui joint le centre avec le sommet de l'angle circonscrit passe par le milieu de la corde de contact.

En mettant dans l'équation (1) les valeurs de A et B, elle devient

$$A'^2x^2+B'^2y^2+2CC'xy+2A'C'x+2B'C'y+C'^2=0 \ ;$$

qui, combinée avec (8), donne pour l'abscisse de l'intersection de la courbe avec la droite qui va du centre au sommet de l'angle inscrit.

$$x=C'.\frac{-2A'B'\pm\sqrt{2A'B'(A'B'-CC')}}{2A'(A'B'+CC')} \ ;$$

ces mêmes valeurs de A et B, mises dans les équations (2), donnent, pour l'abscisse du centre,

$$x=-\frac{B'C'}{A'B'+CC'} \ ;$$

enfin, nous avons trouvé pour l'abscisse du milieu de la corde de contact

$$x=-\frac{C'}{2A'} \ ;$$

En conséquence, les projections sur l'axe des x des distances du centre, 1.° au milieu de la corde ; 2.° au point d'intersection avec la courbe ; 3.° au sommet de l'angle, seront respectivement

$$\frac{C'(A'B'-CC')}{2A'(A'B'+CC')}\,,\qquad \frac{C'\sqrt{2A'B'(A'B'-CC')}}{2A'(A'B'+CC')}\,,\qquad \frac{B'C'}{A'B'+CC'}\,;$$

or, la seconde est moyenne proportionnelle entre les deux autres ; donc la même relation doit avoir lieu entre les distances dont elles sont les projections.

THÉORÈME II. La droite qui va du sommet du cône circonscrit à une surface du second ordre au centre de cette surface passe par le centre de la ligne de contact.

Démonstration. Ce théorème est une conséquence presque évidente du précédent. Concevons en effet un plan quelconque passant par la droite qui joint le sommet du cône au centre de la surface dont il s'agit ; ce plan coupera le cône et la surface à laquelle il est circonscrit suivant un angle circonscrit à une section conique qui aura même centre que cette surface ; d'où il suit, par le précédent théorème, que le point où la droite qui joint le sommet du cône au centre de la surface perce le plan de la ligne de contact, sera le milieu de la corde de contact ; mais cette corde est aussi une corde de la ligne de contact menée par ce même point ; donc le point dont il s'agit est tel que toutes les cordes de la ligne de contact qui y passent y ont leur milieu ; c'est donc en effet le centre de cette ligne.

Il est aisé de voir de plus qu'ici encore la distance du centre au point où notre droite perce la surface est moyenne proportionnelle entre les distances du même centre au sommet du cône et au centre de la ligne de contact (*).

(*) M. Durrande a également démontré ce dernier théorème.

J. D. G.

Solution du premier des deux problèmes de géométrie proposés à la page 232 de ce volume;

Par M. Gergonne.

Problème. Les directions de deux systèmes de diamètres conjugués d'une même ellipse étant données; assigner les directions et le rapport de grandeur de ses deux diamètres principaux?

Solution. Par le centre de l'ellipse, soit menée une droite arbitraire, et soit désigné par z l'angle inconnu qu'elle fait avec l'un des diamètres principaux. Représentons par $2x$ la longueur de ce diamètre, et par $2y$ la longueur de l'autre. Soient enfin α, β les angles connus que forment avec la droite indéfinie les deux diamètres du premier système, et α', β' les angles que forment avec elle les deux diamètres du second; ces mêmes diamètres formeront, avec le diamètre principal dont nous avons représenté la longueur par $2x$ des angles qui seront respectivement

$$z+\alpha\,, \qquad z+\alpha'\,,$$

$$z+\beta\,; \qquad z+\beta'\,;$$

et, par une propriété connue de l'ellipse, on devra avoir les deux équations

$$\left.\begin{array}{l} y^2+x^2\text{Tang.}(z+\alpha)\text{Tang.}(z+\beta)=0\ , \\ y^2+x^2\text{Tang.}(z+\alpha')\text{Tang.}(z+\beta')=0\ ; \end{array}\right\}(1)$$

desquelles il s'agit présentement de tirer la valeur de z et le rapport de x à y.

En faisant, pour abréger, $\text{Tang.}z=v$, et posant en outre

$$\text{Tang.}\alpha=m\ , \qquad \text{Tang.}\alpha'=m'\ ,$$

$$\text{Tang.}\beta=n\ , \qquad \text{Tang.}\beta'=n'\ ,$$

il vient

$$\text{Tang.}(z+\alpha)=\frac{\text{Tang.}z+\text{Tang.}\alpha}{1-\text{Tang.}\alpha\text{Tang.}z}=\frac{v+m}{1-mv}\ ,$$

$$\text{Tang.}(z+\beta)=\frac{\text{Tang.}z+\text{Tang.}\beta}{1-\text{Tang.}\beta\text{Tang.}z}=\frac{v+n}{1-nv}\ ;$$

$$\text{Tang.}(z+\alpha')=\frac{\text{Tang.}z+\text{Tang.}\alpha'}{1-\text{Tang.}\alpha'\text{Tang.}z}=\frac{v+m'}{1-m'v}\ ,$$

$$\text{Tang.}(z+\beta')=\frac{\text{Tang.}z+\text{Tang.}\beta'}{1-\text{Tang.}\beta'\text{Tang.}z}=\frac{v+n'}{1-n'v}\ ;$$

substituant ces valeurs dans les équations du problème, et chassant les dénominateurs, elles deviendront

$$\left.\begin{array}{l} (1-mv)(1-nv)y^2+(v+m)(v+n)x^2=0\ , \\ (1-m'v)(1-n'v)y^2+(v+m')(v+n')x^2=0\ . \end{array}\right\}(2)$$

En éliminant l'une des deux inconnues x et y entre ces deux équations, l'autre disparaîtra aussi, et il viendra

$$(v+m)(v+n)(m'v-1)(n'v-1)-(v+m')(v+n')(mv-1)(nv-1(=0;$$

ou, en développant et ordonnant,

$$(mn-m'n')v^4+\left.\begin{array}{r}(m'+n')(1+mn)\\-(m+n)(1+m'n')\end{array}\right|v^3+\left.\begin{array}{r}(m'+n')(1+mn)\\-(m+n)(1+m'n')\end{array}\right|v-(mn-mn')=0$$

ou encore

$$(mn-m'n')(v^4-1)+\{(m'+n')(1+mn)-(m+n)(1+m'n')\}v(v^2+1)=0;$$

supprimant donc le facteur v^2+1, qui ne saurait être nul, on parviendra à cette équation du second degré

$$(mn-m'n')v^2+\{(m'+n')(1+mn)-(m+n)(1+m'n')\}v-(mn-m'n')=0,$$

qu'on peut encore mettre sous cette forme

$$\frac{2v}{1-v^2}=\frac{2(mn-m'n')}{(m'+n')(1+mn)-(m+n)(1+m'n')};$$

mais

$$\frac{2v}{1-v^2}=\frac{2\mathrm{Tang}.z}{1-\mathrm{Tang}.^2z}=\mathrm{Tang}.2z;$$

donc finalement

$$\mathrm{Tang}.2z=\frac{2(mn-m'n')}{(m'+n')(1+mn)-(m+n)(1+m'n')};$$

Or, on a

$$mn-m'n'=\text{Tang.}\alpha\text{Tang}\beta-\text{Tang.}\alpha'\text{Tang.}\beta'=\frac{\text{Sin.}\alpha\text{Sin}\beta\text{Cos.}\alpha'\text{Cos.}\beta'-\text{Cos.}\alpha\text{Cos}\beta\text{Sin.}\alpha'\text{Sin.}\beta'}{\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\alpha'\text{Cos.}\beta'}$$

$$m+n=\text{Tang.}\alpha+\text{Tang.}\beta=\frac{\text{Sin.}(\alpha+\beta)}{\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta}\,,$$

$$m'+n'=\text{Tang.}\alpha'+\text{Tang.}\beta'=\frac{\text{Sin.}(\alpha'+\beta')}{\text{Cos.}\alpha'\text{Cos.}\beta'}\,,$$

$$1+mn=1+\text{Tang.}\alpha\text{Tang.}\beta=\frac{\text{Cos.}(\alpha-\beta)}{\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta}\,,$$

$$1+m'n'=1+\text{Tang.}\alpha'\text{Tang.}\beta'=\frac{\text{Cos.}(\alpha'-\beta')}{\text{Cos.}\alpha'\text{Cos.}\beta'}\,;$$

il viendra donc, en substituant,

$$\text{Tang.}2z=\frac{2(\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\beta\text{Cos.}\alpha'\text{Cos.}\beta'-\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\text{Sin.}\alpha'\text{Sin.}\beta')}{\text{Cos.}(\alpha-\beta)\text{Sin.}(\alpha'+\beta')-\text{Cos.}(\alpha'-\beta')\text{Sin.}(\alpha+\beta)}\,;$$

formule que l'on pourra encore écrire ainsi

$$\text{Tang.}2z=\frac{\text{Cos.}(\alpha'+\beta')\text{Cos.}(\alpha-\beta)-\text{Cos.}(\alpha+\beta)\text{Cos.}(\alpha'-\beta')}{\text{Sin.}(\alpha'+\beta')\text{Cos.}(\alpha-\beta)-\text{Sin.}(\alpha+\beta)\text{Cos.}(\alpha'-\beta')}\,.$$

L'angle z, que fait l'un des diamètres principaux avec notre droite indéfinie, étant connu par cette formule, le rapport de grandeur $\frac{y}{x}$ des deux diamètres principaux sera donné par l'une ou l'autre des équations (1), d'où l'on tire

$$\frac{y}{x}=\sqrt{-\text{Tang.}(z+\alpha)\text{Tang.}(z+\beta)}=\sqrt{-\text{Tang.}(z+\alpha')\text{Tang.}(z+\beta')}\,.$$

Tout ce qui précède s'applique au surplus littéralement à l'hyperbole, pourvu que, dans les dernières formules, on change le signe $-$ en $+$ sous les radicaux.

Addition à la solution insérée à la page 285 de ce volume ;

Par M. Tédenat, ancien recteur, correspondant de l'académie royale des sciences.

Le problème qu'il s'agissait de résoudre en cet endroit était le suivant : *Quelle est l'équation la plus générale des courbes qui jouissent de cette propriété que si, par chacun de leurs points, on leur mène une normale, terminée à l'axe des abscisses, cette normale a même longueur que l'ordonnée qui a son pied au même point de cet axe ?*

Nous avons prouvé, en l'endroit cité, que l'équation générale de ces courbes avait pour équation

$$y^2=2\varphi(x)\ ; \qquad (1)$$

pourvu que la fonction φ fût de nature à satisfaire à l'équation

$$2\varphi(x)+[\varphi'(x)]^2=2\varphi[x+\varphi'(x)]\ , \qquad (2)$$

où φ' désigne, comme à l'ordinaire, la fonction dérivée de φ.

En différentiant cette dernière, il vient

$$2\varphi'(x)+2\varphi'(x)\varphi''(x)=2[1+\varphi''(x)]\varphi'[x+\varphi'(x)]\ ,$$

ou, en transposant et décomposant,

$$[1+\varphi''(x)]\{\varphi'(x)-\varphi'[x+\varphi'(x)]\}=0\ ;$$

équation qui se décompose en ces deux-ci :

$$\varphi''(x)=-1\ , \qquad (3)$$

$$\varphi'(x)=\varphi'[x+\varphi'(x)] \qquad (4)$$

L'équation (3) donne, en intégrant,

$$\varphi(x)=A+Bx-\tfrac{1}{2}x^2\ ;$$

ce qui donne, pour l'équation de la courbe cherchée,

$$y^2=2A+2Bx-x^2\ ,$$

équation d'un cercle d'un rayon quelconque, ayant son centre en l'un quelconque des points de l'axe des x.

Quant à l'équation (4), elle donne évidemment $\varphi'(x)=0$, d'où

$$\varphi(x)=A\ ,$$

ce qui donne, pour l'équation de la courbe cherchée ;

$$y^2=2A\ ,$$

équation de deux parallèles à l'axe des x, également distantes de part et d'autre de cet axe.

Nous avions déjà prouvé, *à posteriori*, que ce cercle et ces parallèles, qui d'ailleurs résolvent évidemment le problème, satisfaisaient aux équations (1, 2) ; mais nous n'avions pas su alors en déduire directement les équations de ces deux lignes.

La question serait présentement de savoir si une équation de la forme

$$\psi(x)=\psi[x+\psi(x)]$$

peut admettre d'autres solutions que la solution $\psi(x)=0$; et, au cas qu'elle en admît d'autres, quelles pourraient être ces solutions ? mais c'est une question que nous livrons à la sagacité du lecteur.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. TROIS points étant donnés hors d'un plan indéfini, et d'un même côté de ce plan; trouver sur ce même plan un point dont la somme des distances aux trois points donnés soit la moindre possible?

Ou, en d'autres termes,

La base d'un tétraèdre étant donnée; en quel point d'un plan indéfini faut-il placer le sommet de ce tétraèdre, pour que la somme de ces trois arêtes latérales soit un *minimum*?

II. Evaluer l'angle au sommet d'un cône oblique quelconque; c'est-à-dire, donner le rapport entre le triangle sphérique trirectangle et la portion de la sphère qui serait interceptée par la surface convexe de ce cône, si l'on transportait son sommet au centre de cette sphère?

III. Assigner l'arc de courbe le moins long entre tous ceux qui ayant pour corde commune la base d'un triangle isocèle donné et étant tangens aux extrémités des deux autres côtés divisent l'aire du triangle en deux parties équivalentes?

IV. Assigner la surface courbe de moindre étendue, entre toutes celles qui, se terminant à la circonférence de la base d'un cône droit, et ayant cette circonférence pour ligne de contact avec la surface convexe du cône, partage son volume en deux parties équivalentes?

FIN DU DOUZIÈME VOLUME.

TABLE

Des matières contenues dans le XII.e volume des Annales.

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

ANALISE ALGEBRIQUE.

ANALISE ÉLÉMENTAIRE.

ANALISE TRANSCENDANTE.

ARITHMETIQUE.

GÉOMÉTRIE.

GÉOMETRIE ANALITIQUE.

GÉOMÉTRIE DES COURBES.

GÉOMÉTRIE ELEMENTAIRE.

GÉOMETRIE DE LA RÈGLE.

GEOMETRIE TRANSCENDANTE.

OPTIQUE.

PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

PROBABILITÉS.

STATIQUE.

TRIGONOMETRIE.

CORRESPONDANCE

Entre les questions proposées *et les* questions résolues.

Tom. I, pag. 231	Problèmes.	Résolu tome XII,	pag. 317—321.
Tom. IX, pag. 279	Théorème.		178—180.
Tome XI, pag. 268	Problèmes I, II.		—
Pag. 316	Problème.		—
Pag. 344	Problèmes I, II.		142—144.
Pag. 372	Problèmes I, II.		247—249.
Pag. 400	Problème.		—
Tom. XII, pag. 40	Problèmes I, II.		—
Pag. 72	Problèmes I, II.		168—178.
Pag. 108	Problèmes I, III.		303—204.
	Problèmes II, IV.		204—205.
	Problème V.		285—288.
Pag. 144	Problèmes I, II.		—
Pag. 180	Problème I.		258—260.
	Problèmes II, III.		366—368.
Pag. 232	Problème I.		374—378.
	Problème II.		—
	Théorème I.		368—373.
	Théorème II.		373—374.

ERRATA

Pour le douzième volume des Annales.

PAGE 180, ligne 4, en remontant, — ces cylindres ; *lisez :* les cylindres.

Page 231, ligne dernière, avant la note, — auxquels nous serons parvenus; *lisez :* que nous aurons obtenus.

Page 356, ligne 17, — Λ ; *lisez* : v.

Ligne 18, — v ; *lisez :* $\underline{v}$.

*Supplément à l'*Errata *du XI.e volume.*

Pag. 1000, ligne 13, — *X*; *lisez* : *X'*.