ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

FRÉDÉRIC SARRUS

Solution du premier des deux problèmes de combinaisions proposés à la page 204 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 11 (1820-1821), p. 369-372
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1820-1821__11__369_0>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1820-1821, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Solution du premier des deux problèmes de combinaisons proposés à la page 204 de ce volume;

Par M. Frédéric Sarrus, docteur ès sciences.

PROBLÈME. *De combien de manières peut-on choisir* n *lettres parmi* m *lettres, desquelles il s'en trouve un nombre* α *égales à* a, *un nombre* β *égales à* b, *un nombre* γ *égales à* c, *et ainsi de suite? ou, en d'autres termes, combien le monome* $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, *dans lequel* $\alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots=m$, *admet-il de diviseurs de* n *dimensions?*

Solution. On sait que tous les termes et les seuls termes du produit.

$$(1+a+a^2+\ldots+a^\alpha)(1+b+b^2+\ldots+b^\beta)(1+c+c^2+\ldots+c^\gamma)\ldots$$

sont les diviseurs du monome $a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots$, lesquels ne s'y trouvent chacun qu'une seule fois; d'où il résulte que les diviseurs de n dimensions de ce monome sont les termes de n dimensions du produit dont il s'agit.

Or, si l'on pose $a=b=c=\ldots\ldots=x$, auquel cas ce même produit deviendra

$$(1+x+x^2+\ldots+x^\alpha)(1+x+x^2+\ldots+x^\beta)(1+x+x^2+\ldots+x^\gamma)\ldots$$

ou encore

$$\frac{1-x^{\alpha+1}}{1-x}\cdot\frac{1-x^{\beta+1}}{1-x}\cdot\frac{1-x^{\gamma+1}}{1-x}\ldots\ldots;$$

le nombre de ses termes de n dimensions ni le nombre des dimensions de ces termes ne changera pas ; et il arrivera seulement que chacun d'eux se réduira à x^n, d'où il résulte qu'ils se réduiront tous à ce terme affecté d'un coefficient égal au nombre cherché.

Le nombre cherché est donc le coefficient numérique de x^n dans le développement du produit

$$(1+x+x^2+\ldots+x^\alpha)(1+x+x^2+\ldots+x^\beta)(1+x+x^2+\ldots+x^\gamma)\ldots$$

Qu'on demande, par exemple, le nombre des diviseurs de trois dimensions du produit a^3b^2c ; on développera le produit

$$(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2)(1+x),$$

ce qui donnera

$$1+3x+5x^2+6x^3+5x^4+3x^5+x^6;$$

et le coefficient 6 de x^3, dans le développement, sera le nombre des diviseurs de trois dimensions de a^3b^2c : ces diviseurs sont, en effet,

$$a^3,\quad a^2b,\quad ab^2,\quad abc,\quad a^2c,\quad b^2c.$$

Comme il y a autant de manières de choisir $m-n$ facteurs parmi m que d'en laisser n, on voit que le produit $a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots$ aura toujours autant de diviseurs de $m-n$ dimensions qu'il en aura de n dimensions. Dans le développement du produit de nos polynomes en x, il arrivera donc que les termes également distans des extrêmes auront constamment des coefficiens égaux ; cela résulte d'ailleurs de la nature même de l'opération.

Si le nombre n n'était supérieur à aucun des exposans α, β, γ, ...; il est aisé de voir qu'on pourrait supposer ces exposans plus grands qu'ils ne le sont en effet sans rien changer au résultat final ; il serait donc permis aussi de les supposer infinis ; auquel cas, en désignant par m le nombre des lettres a, b, c, ... le produit à développer deviendrait

$$(1+x+x^2+x^3+\ldots\ldots\ldots)^m,$$

ou

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^m \text{ ou enfin } (1-x)^{-m};$$

or, le développement de cette puissance est

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}x^2+\ldots\ldots+\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\ldots\ldots\frac{m+n-1}{n}x^n+\ldots\ldots;$$

donc, le nombre des diviseurs de n dimensions du monome $a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots\ldots$ dans lequel il y a m lettres et où α, β, γ, ... sont des exposans quelconques $>n$ est

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\ldots\ldots\frac{m+n-1}{n}.$$

Or, si l'on demandait le nombre des termes du polynome complet et homogène de n dimensions qu'on peut former avec m sortes de lettres en nombre indéfini de chaque sorte, le problème reviendrait évidemment à celui-ci ; donc le nombre de ces termes est

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\ldots\ldots\frac{m+n-1}{n}=\frac{(m-n+1)!}{(m-1)!\,n!}.$$

Soit présentement une équation complète du $n.^{me}$ degré entre m inconnues x, y, z, ... dont on demande le nombre des termes ; en introduisant dans chacun de ses termes une puissance d'une $(m+1)^{me}$ inconnue t du degré nécessaire pour les rendre tous homogènes et de n dimensions, son premier membre deviendra un polynome homogène de n dimensions, formé avec $m+1$ sortes de lettres ; le nombre des termes de la proposée est donc ce que devient la formule ci-dessus, en y changeant m en $m+1$ ou $m-1$ en m ; c'est-à-dire que *le nombre des termes d'une équation complète de* n.^{me} *degré entre* m *inconnues, comme aussi le nombre de ceux d'une équation complète du* m.^{me} *degré entre* n *inconnues est*

$$\frac{(m+n)!}{m!n!}.$$

Cette démonstration d'un théorème d'ailleurs assez important nous paraît beaucoup plus courte et plus claire que celle de M. G. Fornier, rapportée par M. Gergonne, à la page 115 du IV.^{e} volume de ce recueil.