ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

VECTEN

Démonstration des deux théorèmes de géométrie énoncés à la page 132 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 11 (1820-1821), p. 364-367
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1820-1821__11__364_0>

Démonstration des deux théorèmes de géométrie énoncés à la page 132 de ce volume;

Par M. VECTEN, licencié ès sciences,
Et par M. J. B. DURRANDE, professeur de mathématiques au collége royal de Cahors.

THÉORÈME I. *Si, considérant successivement deux à deux trois cercles tracés sur un même plan, on détermine, pour chaque système de deux cercles, les centres de similitude, tant interne qu'externe, et que, dans chaque système, on fasse de la distance entre ces deux centres le diamètre d'un nouveau cercle; les trois cercles obtenus par cette construction se couperont deux à deux aux deux mêmes points, et auront conséquemment une corde commune et leurs centres sur une même perpendiculaire à cette corde.*

Démonstration. Soient généralement trois points C, C$'$, C$''$ donnés sur un plan, et supposons qu'on se propose de trouver, sur ce plan, un point X dont les distances respectives x, x', x'' à ces trois points soient proportionnelles à trois longueurs données R, R', R''.

Il est clair que, si l'on construit séparément le lieu L de tous les points dont les distances aux points C$'$, C$''$ sont dans le rapport de R' à R'', et le lieu L$'$ de tous les points dont les distances aux points C$''$, C sont dans le rapport de R'' à R, chacune des intersections de ces deux lieux pourra être prise pour le point cherché X ; en effet, en représentant par x, x', x'', les distances de cette intersection aux points C, C', C'', on aura

Parce que X est sur L .... $\dfrac{x'}{R'}=\dfrac{x''}{R''}$,

Parce que X est sur L' .... $\dfrac{x}{R}=\dfrac{x''}{R''}$,

on aura donc aussi $\dfrac{x}{R}=\dfrac{x'}{R'}$. Donc, si l'on construit le lieu L'' de tous les points dont les distances aux points C, C' sont dans le rapport de R à R', ce lieu devra passer par tous les points X, c'est-à-dire, par tous les points d'intersection des deux lieux L, L', de sorte que les trois lieux L, L', L'' doivent se couper aux mêmes points.

Or, il est connu que le lieu de tous les points d'un plan dont les distances à deux points fixes pris sur ce plan sont dans un rapport donné est une circonférence qui a son centre sur la droite qui joint ces deux points ; donc les trois lieux L, L', L'' sont des cercles qui ont respectivement leurs centres sur C'C'', C''C, CC' ; ces trois cercles se coupent donc aux deux mêmes points ; ils ont donc une corde commune ; et par conséquent leurs centres sont sur une même perpendiculaire au milieu de cette corde.

Si présentement on suppose que les points C, C', C'' sont les centres de trois cercles et que les longueurs R, R', R'' en sont les rayons, on tombera exactement sur le théorème qu'il s'agissait de démontrer.

Si deux des trois cercles L, L', L'' sont tangens l'un à l'autre, il est clair qu'ils devront aussi être tangens au troisième ; de sorte qu'alors les trois cercles n'auront qu'un seul point commun.

Si deux des cercles ne se rencontraient pas, il est clair qu'ils ne devraient pas non plus rencontrer le troisième ; mais on voit, par le principe de continuité de M. Poncelet, qu'ils devraient avoir alors un axe radical commun.

THÉORÈME II. Si, considérant successivement deux à deux quatre sphères situées d'une manière quelconque dans l'espace, on détermine, pour chaque système de deux sphères, les centres de similitude, tant interne qu'externe, et que, dans chaque système, on fasse de la distance entre ces deux centres le diamètre d'une nouvelle sphère; les six sphères obtenues par cette construction passeront par les deux mêmes points, et auront ainsi une corde commune et leurs centres dans un même plan perpendiculaire sur le milieu de cette corde.

Démonstration. Ce théorème se démontre exactement comme le précédent. Soient en effet C, C$'$, C$''$, C$'''$ les centres des quatre sphères données, et R, R', R'', R''' leurs rayons. Représentons de plus par (CC$'$), (CC$''$), (C$'$C$''$), (CC$'''$), (C$'$C$'''$), (C$''$C$'''$) les six sphères qui résultent de la construction indiquée. Chacune d'elles sera le lieu de tous les points de l'espace dont les distances aux deux points qui la désignent seront proportionnelles aux rayons des cercles dont ces points sont les centres.

Les intersections des trois lieux (CC$'$), (CC$''$), (CC$'''$) seront donc deux points dont les distances aux points C, C$'$, C$''$, C$'''$ seront proportionnelles à R, R', R'', R'''; d'où il suit que les lieux (C$'$C$''$), (C$'$C$'''$), (C$''$C$'''$) devront passer par ces deux mêmes points; c'est-à-dire que nos six sphères doivent se couper en deux points, suivant quatre cercles seulement, et avoir conséquemment leurs centres sur quatre droites situées dans un même plan.

Si deux des six sphères ne font que se toucher, les quatre autres les toucheront aussi à leurs points de contact, de sorte que les six centres seront sur une même droite.

Si deux des six sphères ne se rencontrent pas, les autres ne les rencontreront pas non plus; mais elles auront alors un axe radical commun, et ne fourniront deux à deux que quatre plans radicaux seulement.