LECHMÜTZ

Géométrie mixte. Solution nouvelle du problème où il s'agit d'inscrire à un triangle donne quelconque trois cercles tels que chacun d'eux touche les deux autres et deux côtés du triangle

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 10 (1819-1820), p. 289-298
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1819-1820__10__289_0>

GÉOMÉTRIE MIXTE.

Solution nouvelle du problème où il s'agit d'inscrire à un triangle donné quelconque trois cercles tels que chacun d'eux touche les deux autres et deux côtés du triangle ;

Par M. Lechmütz, docteur en philosophie à Berlin.

Au Rédacteur des Annales.

Monsieur,

En donnant, dans votre estimable recueil (*), l'historique du curieux problème dont je vais avoir l'honneur de vous entretenir, et en faisant connaître la solution extrêmement simple qui en a été donnée par un célèbre géomètre italien ; vous avez témoigné le regret qu'on en fût réduit à justifier *à posteriori* la formule finale de Malfatti, en prouvant qu'elle satisfait aux équations qu'il s'agit de résoudre ; sans qu'on aperçoive comment, à l'aide de ces seules équations, on pourrait parvenir à cette même formule, si elle était inconnue, ou du moins à toute autre équivalente et d'une facile construction.

(*) Voyez tom. I, pag. 343 ; tom. II, pag. 60 et 165.

Cette considération m'ayant déterminé à revenir de nouveau et tout recemment sur ce singulier problème ; j'ai été assez heureux pour en obtenir une solution que sa simplicité et son élégance vous feront peut-être juger de nature à ne point déparer votre recueil ; et qu'en conséquence je vais exposer brièvement.

Soient A, B, C les trois sommets d'un triangle quelconque ; soit O le centre du cercle inscrit, dont nous prenons le rayon pour unité. De ce centre, soient abaissées respectivement, sur les côtés BC, CA, AB, les perpendiculaires $OA'=OB'=OC'=1$; et soient de plus menées du même point aux sommets les droites OA, OB, OC.

Soient faits

$$Ang.AOB'=Ang.AOC'=\alpha\,,$$

$$Ang.BOC'=Ang.BOA'=\beta\,,$$

$$Ang.COA'=Ang.COB'=\gamma\,;$$

nous aurons

$$AB'=AC'=\text{Tang.}\alpha\,,\qquad OA=\text{Sec.}\alpha\,,$$

$$BC'=BA'=\text{Tang.}\beta\,,\qquad OB=\text{Sec.}\beta\,,$$

$$CA'=CB'=\text{Tang.}\gamma\,;\qquad OC=\text{Sec.}\gamma\,.$$

Nous aurons de plus, parce que $2\alpha+2\beta+2\gamma$ vaut quatre angles droits,

$$\text{Tang.}\gamma=-\text{Tang}(\alpha+\beta)=-\frac{\text{Tang.}\alpha+\text{Tang.}\beta}{1-\text{Tang.}\alpha\text{Tang.}\beta}\,;$$

ou bien, en chassant le dénominateur et transposant,

$$\text{Tang.}\alpha+\text{Tang.}\beta+\text{Tang.}\gamma=\text{Tang.}\alpha\text{Tang.}\beta\text{Tang.}\gamma\ .$$

Il s'agit donc d'inscrire à ce triangle trois cercles tels que chacun d'eux touche les deux autres et deux côtés du triangle ; et il est d'abord clair que les centres de ces cercles devront être situés sur les droites OA, OB, OC qui divisent ces angles en deux parties égales. Soient respectivement X, Y, Z, ces centres, et x, y, z, les rayons qui leur correspondent.

Si l'on projette orthogonalement les centres X, Y sur le côté $AB=AC'+BC'=\text{Tang.}\alpha+\text{Tang.}\beta$, leurs projections diviseront ce côté en trois segmens dont les extrêmes seront évidemment $x\text{Tang}\alpha$, $y\text{Tang}\beta$. Quant au segment intermédiaire, il ne sera autre chose que la projection de la distance des centres $XY=x+y$, et sera conséquemment

$$\sqrt{(x+y)^2-(x-y)^2}=\sqrt{4xy}=2\sqrt{xy}\ ;$$

égalant donc la somme de ces trois parties à la première expression du côté AB, on aura

$$x\text{Tang.}\alpha+2\sqrt{xy}+y\text{Tang.}\beta=\text{Tang.}\alpha+\text{Tang.}\beta\ .$$

La considération des deux autres côtés donnera des équations analogues, de sorte qu'en faisant, pour abréger,

$$\text{Tang.}\alpha=a\ ,$$

$$\text{Tang.}\beta=b\ ,$$

$$\text{Tang.}\gamma=c\ ;$$

tout se trouvera réduit à résoudre, par rapport à x, y, z, les trois équations

$$ax+2\sqrt{xy}+by=a+b\ , \qquad (1)$$

$$by+2\sqrt{yz}+cz=b+c\ , \qquad (2)$$

$$cz+2\sqrt{zx}+ax=c+a\ ; \qquad (3)$$

avec la condition

$$a+b+c=abc\ . \qquad (4)$$

En multipliant en croix les équations (2 , 3) et réduisant , on a

$$(b+c)(ax+2\sqrt{xz})-(a+c)(by+2\sqrt{yz})=c(a-b)z\ ;$$

mais l'équation (4) donne

$$c=-\frac{a+b}{ab-1}\ ,$$

d'où

$$b+c=\frac{a(1+b^2)}{ab-1}\ , \quad a+c=\frac{b(1+a^2)}{ab-1}\ ;$$

substituant donc , et supprimant le dénominateur commun , on aura

$$a(1+b^2)(ax+2\sqrt{xz})-b(1+a^2)(by+2\sqrt{yz})=(a^2-b^2)z\ ,$$

ou encore

$$a(1+b^2)(ax+2\sqrt{xy})-b(1+a^2)(by+2\sqrt{yz})=\{(1+a^2)-(1+b^2)\}z\ ;$$

ou , en transposant ,

$$(1+b^2)(a^2x+2a\sqrt{xz}+z)=(1+a^2)(b^2y+2b\sqrt{yz}+z)\ ,$$

ou encore

$$(1+b^2)(a\sqrt{x}+\sqrt{z})^2=(1+a^2)(b\sqrt{y}+\sqrt{z})^2\ ;$$

ou , en extrayant les racines et divisant ,

$$\frac{a\sqrt{x}+\sqrt{z}}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{b\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt{1+b^2}}\ .$$

Nous ne donnons pas de double signe au second membre de cette équation, parce qu'ici nous n'avons simplement en vue que les cercles interieurs au triangle, se touchant extérieurement.

Par une simple permutation de lettres, on conclura de là

$$\frac{b\sqrt{y}+\sqrt{x}}{\sqrt{1+b^2}}=\frac{c\sqrt{z}+\sqrt{x}}{\sqrt{1+c^2}}\ ,\qquad \frac{c\sqrt{z}+\sqrt{y}}{\sqrt{1+c^2}}=\frac{a\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{1+a^2}}\ ;$$

ajoutant ces deux dernières membre à membre, z disparaîtra, et il viendra

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\right\}\sqrt{x}=\left\{\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}-\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\right\}\sqrt{y}\ ;$$

mais, à cause de

$$c=\frac{a+b}{ab-1}\ ,$$

on a

$$\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}=\frac{ab-1}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}\ ;$$

substituant donc, et chassant les dénominateurs, il viendra

$$\{1-ab+\sqrt{1+a^2}-a\sqrt{1+b^2}\}\sqrt{x}=\{1-ab+\sqrt{1+b^2}-b\sqrt{1+a^2}\}\sqrt{y}\,.$$

Les coefficiens des deux membres peuvent d'abord être écris ainsi

$$(1-a+\sqrt{1+a^2})+a(1-b-\sqrt{1+b^2})\ ,$$

$$(1-b+\sqrt{1+b^2})+b(1-a-\sqrt{1+a^2})\ ;$$

en considérant ensuite que

$$a=\tfrac{1}{2}.2a=-\tfrac{1}{2}\{(1-a)^2-(1+a^2)\}=-\tfrac{1}{2}(1-a+\sqrt{1+a^2})(1-a-\sqrt{1+a^2}),$$

$$b=\tfrac{1}{2}.2b=-\tfrac{1}{2}\{(1-b)^2-(1+b^2)\}=-\tfrac{1}{2}(1-b+\sqrt{1+b^2})(1-b-\sqrt{1+b^2}),$$

ils prendront cette nouvelle forme

$$(1-a+\sqrt{1+a^2})\{1-\tfrac{1}{2}(1-a-\sqrt{1+a^2})(1-b-\sqrt{1+b^2})\}\ ;$$

$$(1-b+\sqrt{1+b^2})\{1-\tfrac{1}{2}(1-a-\sqrt{1+a^2})(1-b-\sqrt{1+b^2})\}\ ;$$

c'est-à-dire, qu'ils ont un facteur commun ; en supprimant donc ce facteur, l'équation deviendra simplement

$$(1-a+\sqrt{1+a^2})\sqrt{x}=(1-b+\sqrt{1+b^2})\sqrt{y}\ .$$

En posant donc, pour abréger,

$$1-a+\sqrt{1+a^2}=A\ ,$$

$$1-b+\sqrt{1+b^2}=B\ ,$$

$$1-c+\sqrt{1+c^2}=C\ ,$$

on tirera de là, par une simple permutation de lettres,

$$B\sqrt{y}=C\sqrt{z}\ ,\qquad C\sqrt{z}=A\sqrt{x}\ ;$$

d'où

$$\sqrt{x}=\frac{C}{A}\sqrt{z}\ ,\qquad \sqrt{y}=\frac{C}{B}\sqrt{z}\ . \qquad (5)$$

Retournons présentement à nos équations primitives ; si de la somme des équations (2, 3) nous retranchons l'équation (1), en supprimant le facteur 2, commun à tous les termes de l'équation résultante, elle deviendra

$$cz+\sqrt{xz}+\sqrt{yz}-\sqrt{xy}=c\;;$$

mettant dans celle-ci pour $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ leurs valeurs (5), elle deviendra

$$\left(c+\frac{C}{A}+\frac{C}{B}-\frac{C^2}{AB}\right)z=c\;,$$

ou

$$\{cAB+C(A+B-C)\}z=cAB\;. \qquad (6)$$

Or, on a, d'après les valeurs de A, B, C

$$cAB=c(1-a)(1-b)+c(1-b)\sqrt{1+a^2}+c(1-a)\sqrt{1+b^2}+c\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}\;;$$

ou bien, en remplaçant $\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$ par son égal $(ab-1)\sqrt{1+c^2}$

$$cAB=c(1-a)(1-b)+c(1-b)\sqrt{1+a^2}+c(1-a)\sqrt{1+b^2}+c(ab-1)\sqrt{1+c^2}\;.$$

On a ensuite

$$A+B-C=1-a-b+c+\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}-\sqrt{1+c^2}\;;$$

d'où, en multipliant par $C=1-c+\sqrt{1+c^2}$, et remplaçant respectivement $\sqrt{(1+a^2)(1+c^2)}$ et $\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}$ par $(ac-1)\sqrt{1+b^2}$ et $(bc-1)\sqrt{1+a^2}$,

$$C(A+B-C)=-(1-c)(a+b)-2c^2-c(1-b)\sqrt{1+a^2}-(a+b-2c)\sqrt{1+c^2}$$
$$-c(1-a)\sqrt{1+b^2}$$

donc, en ajoutant et réduisant,

$$cAB+C(A+B-C)=c-a-b+abc-2c^2+(c-a-b+abc)\sqrt{1+c^2}\;.$$

En remplaçant abc par son équivalent $a+b+c$, cela deviendra

$$cAB+C(A+B-C)=2c(1-c+\sqrt{1+c^2})=2cC \;;$$

substituant donc cette valeur dans l'équation (6), et supprimant le facteur c, commun aux deux membres, elle deviendra simplement

$$2Cz=AB\;,$$

Par une simple permutation de lettres, on obtiendra les équations en x, y; de sorte qu'on a finalement

$$x=\frac{BC}{2A}\;,\qquad y=\frac{CA}{2B}\;,\qquad z=\frac{AB}{2C}\;.$$

Cela posé, soient prolongés AO, BO, CO, jusqu'à ce qu'ils rencontrent de nouveau la circonférence du cercle inscrit en A″, B″, C″; puis des sommets A, B, C, pris respectivement pour centres, et avec les rayons AB′=AC′, BC′=BA′, CA′=CB′, soient décrits des arcs coupant respectivement AO, BO, CO en A‴, B‴, C‴; nous aurons ainsi

$$A''A'''=AO+OA''-AB'=OA''-AB'+AO=1-\mathrm{Tang}\,\alpha+\mathrm{Sec.}\,\alpha=A$$

$$B''B'''=BO+OB''-BC'=OB''-BC'+BO=1-\mathrm{Tang}\,\beta+\mathrm{Sec}\,\beta=B$$

$$C'C''=CO+OC''-CA'=OC''-CA'+CO=1-\mathrm{Tang.}\,\gamma+\mathrm{Sec.}\,\gamma=C$$

Les trois longueurs A, B, C étant ainsi déterminées, on en pourra conclure, par une construction unique, les trois rayons cherchés x, y, z. Pour cela, on construira un triangle DEF, dont les trois côtés EF, FD, DE, soient respectivement égaux à ces trois longueurs; par les sommets D, E, F, on menera des droites se terminant aux côtés opposés en D′, E′, F′, et tellement dirigées qu'on ait

Aig.

$$Ang.\mathrm{FDD'}=Ang.\mathrm{E}\ ,$$

$$Ang.\mathrm{DEE'}=Ang.\mathrm{F}\ ,$$

$$Ang.\mathrm{EFF'}=Ang.\mathrm{D}\ ;$$

alors, en vertu de la proportionnalité des côtés homologues des triangles semblables, les longueurs DD′, EE′, FF′ seront les diamètres des cercles cherchés, ayant respectivement leurs centres en X, Y, Z.

Ces expressions des rayons des cercles une fois trouvées, rien de plus facile que de leur substituer telles autres inconnues qu'on voudra. En prenant, par exemple, pour inconnues les distances des sommets auxquelles les cercles cherches touchent les côtés du triangle, ces inconnues seront $x\mathrm{Tang}.\alpha=ax$, $y\mathrm{Tang}.\beta=by$, $z\mathrm{Tang}.\gamma=cz$, et l'on aura

$$ax=\frac{aBC}{2A}\ ,\qquad by=\frac{bCA}{2B}\ ,\qquad cz=\frac{cAB}{2C}\ .$$

Or, d'après les valeurs trouvées ci-dessus pour cAB et $C(A+B-C)$, on a

$$cAB=C\{2c-(A+B-C)\}\ ;$$

donc

$$cz=\frac{cAB}{2C}=\tfrac{1}{2}\{2c-(A+B-C)\}\ ;$$

c'est-à-dire,

$$cz=\tfrac{1}{2}(a+b+c-1+\sqrt{1+c^2}-\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+b^2})\ ,$$

ou encore

$$cz=\tfrac{1}{2}\ \mathrm{AB'+BC'-CA'-OC'+OC-OA-OB})\ ;$$

ce qui revient exactement à la construction de Malfatti. (Voyez l'article cité, tom. I, pag. 347).

Si l'on voulait prendre pour inconnues les distances AX, BY, CZ des sommets aux centres correspondans, ces inconnues seraient respectivement $x\sqrt{1+a^2}$, $y\sqrt{1+b^2}$, $z\sqrt{1+c^2}$; et l'on trouverait, par exemple, d'après ce qui précède,

$$z\sqrt{1+c^2}=cz.\frac{\sqrt{1+c^2}}{c}=\frac{\sqrt{1+c^2}}{2c}(a+b+c-1+\sqrt{1+c^2}-\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+b^2}).$$

Si enfin on voulait prendre pour inconnues les distances OX, OY, OZ, ces inconnues seraient respectivement $(1-x\sqrt{1+a^2}$, $(1-y)\sqrt{1+b^2}$, $(1-z)\sqrt{1+c^2}$; et l'on trouverait, par exemple,

$$(1-z)\sqrt{1+c^2}=(c-cz)\frac{\sqrt{1+c^2}}{c}=\frac{\sqrt{1+c^2}}{2c}(1-a-b+c+\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}-\sqrt{1+c^2}).$$

En variant les signes des radicaux d'une manière convenable, et en substituant au cercle inscrit, proprement dit, chacun des trois autres cercles qui peuvent toucher à la fois les trois côtés du triangle, on obtiendra toutes les solutions dont le problème peut être susceptible (*).

Berlin, le 23 janvier 1820.

(*) La simplicité de cette solution engagera peut-être quelqu'un à tenter celle du problème analogue pour le tétraèdre, qui a été proposé à la page 287 du II.ᵉ volume de ce recueil.

J. D. G.