
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

FRÉDÉRIC SARRUS

Analyse transcendante. Recherche de diverses séries

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 10 (1819-1820), p. 217-227

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1819-1820__10__217_0>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1819-1820, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ANALISE TRANSCENDANTE,

Recherche de diverses séries ;

Par M. FRÉDÉRIC SARRUS, professeur de mathématiques
au collège de Pezenas ;



I. **E**_N multipliant membre à membre les formules connues

$$\text{Cos.}^2 z = \text{Cos.}^2 z - \text{Sin.}^2 z, \quad 1 = \text{Cos.}^2 z + \text{Sin.}^2 z,$$

on trouve

$$\text{Cos.} 2z = \text{Cos.}^4 z - \text{Sin.}^4 z = \text{Cos.}^4 z (1 - \text{Tang.}^4 z); \quad (1)$$

de laquelle on déduira

$$\text{Log. Cos.} 2z = \text{Log. Cos.}^4 z + \text{Log.} (1 - \text{Tang.}^4 z);$$

c'est-à-dire,

$$\text{Log. Cos.} 2z = 4 \text{Log. Cos.} z - M (\text{Tang.}^4 z + \frac{1}{3} \text{Tang.}^8 z + \frac{1}{5} \text{Tang.}^{12} z + \dots);$$

ou bien encore, en considérant $1 - \text{Tang.}^4 z$ sous la forme $\frac{1 - \text{Tang.}^4 z}{1}$;

$$\text{Log. Cos.} 2z = 4 \text{Log. Cos.} z - 2M \left\{ \frac{\text{Tang.}^4 z}{2 - \text{Tang.}^4 z} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} \left(\frac{\text{Tang.}^4 z}{2 - \text{Tang.}^4 z} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{\text{Tang.}^4 z}{2 - \text{Tang.}^4 z} \right)^5 + \dots \right\};$$

Tom. X, n.º VIII, 1.º février 1820.

formules dans lesquelles M est le module des tables ; et qui sont très-convergentes , principalement la dernière , toutes les fois que l'angle z est moindre qu'un demi-droit.

II. Si , dans la formule (1) , on change successivement z en $\frac{1}{2}z$, $\frac{1}{4}z$, $\frac{1}{8}z$, , on trouvera

$$\text{Cos. } z = \text{Cos.}^{\frac{1}{2}} z (1 - \text{Tang.}^{\frac{1}{2}} z) ,$$

$$\text{Cos. } \frac{1}{2} z = \text{Cos.}^{\frac{1}{4}} z (1 - \text{Tang.}^{\frac{1}{4}} z) ,$$

$$\text{Cos.}^{\frac{1}{4}} z = \text{Cos.}^{\frac{1}{8}} z (1 - \text{Tang.}^{\frac{1}{8}} z) ,$$

..... ,

En multipliant ces diverses équations membre à membre , on obtiendra , par la suppression des facteurs communs ,

$$\text{Cos. } z = \text{Cos.}^{\frac{3}{2}} z \text{Cos.}^{\frac{3}{4}} z \text{Cos.}^{\frac{3}{8}} z \dots \dots \dots$$

$$(1 - \text{Tang.}^{\frac{1}{2}} z)(1 - \text{Tang.}^{\frac{1}{4}} z)(1 - \text{Tang.}^{\frac{1}{8}} z) \dots \dots \dots$$

d'où

$$\text{Cos.}^{\frac{1}{2}} z \text{Cos.}^{\frac{1}{4}} z \text{Cos.}^{\frac{1}{8}} z \dots \dots = \frac{\text{Cos.}^{\frac{1}{2}} z}{(1 - \text{Tang.}^{\frac{1}{2}} z)^{\frac{1}{2}} (1 - \text{Tang.}^{\frac{1}{4}} z)^{\frac{1}{4}} (1 - \text{Tang.}^{\frac{1}{8}} z)^{\frac{1}{8}} \dots}$$

substituant cette valeur dans la formule connue

$$\text{Sin. } z = z \text{Cos.}^{\frac{1}{2}} z \text{Cos.}^{\frac{1}{4}} z \text{Cos.}^{\frac{1}{8}} z \dots \dots \dots ;$$

on aura

$$\text{Sin. } z = \frac{z \text{Cos.}^{\frac{1}{2}} z}{(1 - \text{Tang.}^{\frac{1}{2}} z)^{\frac{1}{2}} (1 - \text{Tang.}^{\frac{1}{4}} z)^{\frac{1}{4}} (1 - \text{Tang.}^{\frac{1}{8}} z)^{\frac{1}{8}} \dots} ;$$

série tout aussi régulière et beaucoup plus convergente.

III. Prenons encore les formules connues

$$\text{Cos.}z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2},$$

$$\text{Sin.}z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}};$$

dans lesquelles on a, comme l'on sait

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

L'on en déduira

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \text{Log.} \frac{\text{Cos.}z + \sqrt{-1}\text{Sin.}z}{\text{Cos.}z - \sqrt{-1}\text{Sin.}z}, \quad (2)$$

auquel on peut substituer

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \text{Log.} \frac{\text{Cos.}^2z + \sqrt{-1}\text{Sin.}z\text{Cos.}z}{\text{Cos.}^2z - \sqrt{-1}\text{Sin.}z\text{Cos.}z},$$

ou encore

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \text{Log.} \frac{1 - \text{Sin.}^2z + \sqrt{-1}\text{Sin.}z\text{Cos.}z}{1 - \text{Sin.}^2z - \sqrt{-1}\text{Sin.}z\text{Cos.}z};$$

ou enfin

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \text{Log.} \frac{1 - \text{Sin.}z(\text{Sin.}z - \sqrt{-1}\text{Cos.}z)}{1 - \text{Sin.}z(\text{Sin.}z + \sqrt{-1}\text{Cos.}z)},$$

et par conséquent

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \{ \text{Log.}[1 - \text{Sin.}z(\text{Sin.}z - \sqrt{-1}\text{Cos.}z)] - \text{Log.}[1 - \text{Sin.}z(\text{Sin.}z + \sqrt{-1}\text{Cos.}z)] \}. \quad (3)$$

Faisons présentement

$$\text{Tang.}z = x;$$

d'où

$$\text{Sin.}z = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \text{Cos.}z = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

mettant ces valeurs dans l'équation (3), elle deviendra

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left\{ \text{Log.} \left[1 - \frac{x}{1+x^2} (x - \sqrt{-1}) \right] - \text{Log.} \left[1 - \frac{x}{1+x^2} (x + \sqrt{-1}) \right] \right\}.$$

En développant le second membre de cette équation en deux séries et réunissant les termes correspondans, on tombe précisément sur la formule donnée par M. Kramp, à la page 29 de ce volume, et qui se trouve ainsi établie sans induction.

Désignons l'angle droit par q , et faisons, dans l'équation (3), $z = q - u$, nous trouverons

$$q - u = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left\{ \text{Log.} [1 - \text{Cos.}u (\text{Cos.}u - \sqrt{-1} \text{Sin.}u)] - \text{Log.} [1 - \text{Cos.}u (\text{Cos.}u + \sqrt{-1} \text{Sin.}u)] \right\};$$

développant le second membre, et observant que

$$\frac{(\text{Cos.}u + \sqrt{-1} \text{Sin.}u)^n - (\text{Cos.}u - \sqrt{-1} \text{Sin.}u)^n}{2\sqrt{-1}} = \text{Sin.}nu,$$

nous aurons, en changeant u en z ,

$$q - z = \frac{\text{Cos.}z}{1} \text{Sin.}z + \frac{\text{Cos.}^2z}{2} \text{Sin.}2z + \frac{\text{Cos.}^3z}{3} \text{Sin.}3z + \dots$$

série très-régulière.

IV. En intégrant par parties, on trouve

$$\int \frac{x^m dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x^{m+1}}{m(1+x^2)^n} + \frac{2n}{m} \int \frac{x^{m+2} dx}{(1+x^2)^{n+1}}; \quad (4)$$

et comme, lorsque x désigne la tangente de l'angle z , on a

$$dz = \frac{dx}{1+x^2},$$

on conclut de cette formule

$$z = \frac{1}{x} \left\{ \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^2 + \frac{2.4}{3.5} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^3 + \frac{2.4.6}{3.5.7} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^4 + \dots \right\},$$

dont les termes sont tous positifs.

On a encore

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - \frac{x^2}{1+x^2};$$

d'où l'on tire

$$z = x - \int \frac{x^2 dx}{1+x^2};$$

ce qui donne, en vertu de la formule (4);

$$z = x - \frac{x}{3} \left\{ \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) + \frac{2}{5} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^2 + \frac{2.4}{5.7} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^3 + \frac{2.4.6}{5.7.9} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^4 + \dots \right\}.$$

La valeur de z , déduite de la formule précédente, était constamment trop petite; celle qu'on déduira de celle-ci sera constamment trop grande; de sorte que, par leur emploi simultané, on obtiendra une limite de l'erreur résultant de l'usage de chacune d'elles; condition que l'on doit toujours s'imposer dans tout procédé approximatif. Ces formules sont précisément celles qu'on a proposé de démontrer à la page 188 de ce volume.

On tire de notre dernière série

$$\frac{z}{x} = 1 - \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) + \frac{2}{5} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^2 + \frac{2.4}{5.7} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^3 + \dots \right\};$$

en supposant $x=q$, on aura $x=\infty$, $\frac{x}{x} = 0$ et $\frac{x^2}{1+x^2} = 1$; substituant donc, il viendra, en transposant,

$$1 = \frac{1}{5} \left(1 + \frac{2}{5} + \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 7} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} + \dots \right);$$

multipliant celle-ci par 3, transposant et réduisant, nous aurons

$$2 = \frac{2}{5} + \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 7} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13} + \dots$$

multipliant cette dernière par $\frac{5}{2}$, transposant et réduisant, on aura

$$4 = \frac{4}{7} + \frac{4 \cdot 6}{7 \cdot 9} + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{7 \cdot 9 \cdot 11} + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13} + \dots$$

Un procédé semblable pouvant être répété indéfiniment, on aura, en général,

$$2n = \frac{2n}{2n+3} + \frac{2n}{2n+3} \cdot \frac{2n+2}{2n+5} + \frac{2n}{2n+3} \cdot \frac{2n+2}{2n+5} \cdot \frac{2n+4}{2n+7} + \dots$$

résultat remarquable, qu'il serait peut-être difficile d'obtenir *a priori* et qui peut faciliter les réductions dans certains calculs (*).

V. Soit représenté, en général, par (i, n) une fonction telle que

$$\frac{i}{1} \cdot \frac{i-1}{2} \cdot \frac{i-2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{i-n}{1+n};$$

on aura

$$(i, k+1) = (i, k) \cdot \frac{i-[k+1]}{k+2};$$

d'où on tire, par intégration,

(*) Il serait curieux de savoir si cette formule aurait également lieu pour une valeur fractionnaire ou négative de n .

$$f(i, k+1)di = -\frac{k+1}{k+2}f(i, k)di + \frac{1}{k+2}f(i, k)idi ;$$

en posant donc , pour abrégé ,

$$\frac{f(i, k)idi}{f(i, k)dx} = u ,$$

cette équation deviendra

$$f(i, k+1)di = -f(i, k)di \times \frac{k+1-u}{k+2} .$$

Si l'on prend les intégrales depuis $i=0$ jusqu'à $i=1$, la fonction u sera positive et moindre que l'unité; d'où l'on voit qu'entre ces limites $f(i, k+1)di$ est moindre que $f(i, k)di$, et de signe contraire. Il est même facile de s'assurer que, si l'on représente par $(-1)^k A_k$, l'intégrale $f(i, k)di$, prise entre ces limites, tous les nombres $A_0, A_1, A_2, \dots, A_k$ seront positifs.

VI. Cela posé, si y représente une fonction déterminée de x , et qu'on désigne par y_i la valeur que prend y , lorsqu'on change x en $x+i$; l'on aura, comme l'on sait, en posant $\Delta x=1$

$$y_i = y + (i, 0)\Delta y + (i, 1)\Delta^2 y + (i, 2)\Delta^3 y + \dots ;$$

multipliant par di , et intégrant entre les limites 0 et 1, on trouvera, en vertu de ce qui précède,

$$\Delta f y dx = y + A_0 \Delta y - A_1 \Delta^2 y + A_2 \Delta^3 y - A_3 \Delta^4 y + \dots ; \quad (6)$$

en observant qu'entre ces limites $f y_i di = \Delta f y dx$. Intégrant la formule (6) par rapport à Δ , on aura

$$f y dx = \Sigma y + A_0 y - A_1 \Delta y + A_2 \Delta^2 y - \dots, + Const. ; \quad (7)$$

d'où, en transposant et changeant de constante

$$\Sigma y = \int y dx - A_0 y + A_1 \Delta y - A_2 \Delta^2 y + \dots \quad (8)$$

Cette dernière formule nous paraît de beaucoup préférable à la formule ordinaire ; attendu que les *nombres de Bernoulli* qu'on y introduit, deviennent bientôt excessivement divergens ; tandis qu'au contraire nos $A_0, A_1, A_2, \dots, A_k$, convergent constamment, comme nous l'avons fait remarquer plus haut.

Pour donner une application de nos formules, soit

$$y = \frac{1}{x}, \quad \text{d'où} \quad \int y dx = \ln x$$

$$\Delta y = -\frac{1}{x(x+1)}, \quad \Delta^2 y = +\frac{1.2}{x(x+1)(x+2)}, \dots,$$

$$\Delta^k y = [-1]^k \cdot \frac{1.2.3 \dots k}{x(x+1)(x+2) \dots (x+k)} ;$$

alors la formule (6) donnera

$$\Delta \ln x = \frac{1}{x} - \frac{1.A_0}{x(x+1)} + \frac{1.2.A_1}{x(x+1)(x+2)} - \frac{1.2.3.A_2}{x(x+1)(x+2)(x+3)} + \dots$$

d'où on conclura

$$\Delta^2 \ln x = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1.2.A_0}{x(x+1)(x+2)} + \frac{1.2.3.A_1}{x(x+1)(x+2)(x+3)} - \dots$$

et, en général,

$$\Delta^k \ln x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{x!}{x} \left\{ \frac{k!}{(x+k)!} - \frac{(k+1)!}{(x+k+1)!} A_0 + \frac{(k+2)!}{(x+k+2)!} A_1 - \frac{(k+3)!}{(x+k+3)!} A_2 + \dots \right\}$$

Formule plus régulière, plus convergente et plus commode que toutes celles qui ont été proposées jusqu'ici, pour le calcul des différences logarithmiques.

On pourrait faire une infinité d'applications des séries (6, 7, 8); mais, comme elles ne sauraient offrir de difficulté, nous ne nous y arrêterons pas. Nous nous contenterons d'observer que la formule (6) est comprise, comme cas particulier, dans la suivante

$$\Delta^k f y dx = \Delta^{k-1} y + A_0 \Delta^k y - A_1 \Delta^{k+1} y + A_2 \Delta^{k+2} y - \dots$$

qui s'en déduit avec la plus grande facilité.

VIII. On peut employer aussi, dans un grand nombre de cas, la formule suivante

$$\frac{dy}{dx} = \Delta y - \frac{1}{2} \Delta^2 y + \frac{1}{6} \Delta^3 y - \frac{1}{24} \Delta^4 y + \dots$$

d'où on conclut

$$\Sigma \frac{dy}{dx} = y - \frac{1}{2} \Delta y + \frac{1}{6} \Delta^2 y - \frac{1}{24} \Delta^3 y + \dots + Const.$$

nous nous contenterons d'en faire les deux applications suivantes.

Soit $y = \frac{1}{x}$, d'où $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$; on aura

$$\Sigma \frac{1}{x^2} = Const. - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1 \cdot 2}{x(x+1)(x+2)} - \dots$$

série tout à la fois régulière et convergente.

Soit encore $y = f(i, n) di$, l'on aura $\frac{dy}{di} = (i, n)$, $\Sigma \frac{dy}{di} = (i, n+1) + C$,

et $\Delta^k y = \Delta^k f(i, n) di = f di \Delta^k(i, n)$; partant, en observant que

$$\Delta^k(i, n) = (i, n-k), \quad \Delta^{n+1}(i, n) = 1, \quad \Delta^{n+1+k}(i, n) = 0,$$

nous aurons

$$(i, n+1) = f(i, n)di - \frac{1}{2}f(i, n-1)di + \frac{1}{3}f(i, n-2)di - \dots \\ \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} f(i, 0)di + \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} i.$$

Si, dans cette dernière formulé, on prend les intégrales depuis $i=0$ jusqu'à $i=1$, en mettant pour $f(i, n)di$, $f(i, n-1)di$, ... prises entre ces limites, les nombres qui les représentent et que nous avons appelés $(-n)^n A_n$, $(-1)^{n-1} A_{n-1}$, ... on trouvera

$$0 = A_n + \frac{1}{2} A_{n-1} + \frac{1}{3} A_{n-2} + \dots + \frac{1}{n+1} A_0 - \frac{1}{n+2}.$$

On tire de là

$$A_n = \frac{1}{n+2} - \left(\frac{A_{n-1}}{1} + \frac{A_{n-2}}{3} + \frac{A_{n-3}}{4} + \frac{A_{n-4}}{5} + \dots + \frac{A_0}{n+1} \right);$$

ou encore, en observant que $A_0 = \frac{1}{1}$,

$$A_n = \frac{n}{2(n+1)(n+2)} - \left(\frac{A_{n-1}}{2} + \frac{A_{n-2}}{3} + \frac{A_{n-3}}{4} + \frac{A_{n-4}}{5} + \dots + \frac{A_1}{n} \right);$$

formule qui servira à déduire les uns des autres les nombres A_1 , A_2 , A_3 , ... A_n que nous avons substitués, dans nos formules, aux nombres de Bernoulli. En observant que $A_1 = \frac{1}{12}$, on trouvera

$$A_0 = \frac{1}{1} = 0,50000000,$$

$$A_1 = \frac{1}{12} = 0,08333333,$$

$$A_2 = \frac{1}{14} = 0,04166666,$$

$$A_3 = \frac{119}{715} = 0,02638888 ,$$

$$A_4 = \frac{1}{160} = 0,01875000 ,$$

$$A_5 = \frac{851}{60480} = 0,01426918 ,$$

.....

Or , ces nombres étant tous positifs , ainsi que nous l'avons déjà observé , et étant en outre perpétuellement convergens , il s'ensuit que

$$A_n < \frac{n}{2(n+1)(n+2)} - A_n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \right) ,$$

d'où on tire

$$A_n < \frac{n}{2(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}} ;$$

ce qui montre , mieux que nous ne l'avons fait ci-dessus , la convergence toujours croissante de ces nombres.

