ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

KRAMP

Analise transcendante. Essai d'une méthode générale, servant à intégrer, avec une approximation illimitée, toute équation différentielle à deux variables

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 10 (1819-1820), p. 1-32

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1819-1820__10__1_0>

ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Essai d'une méthode générale, servant à intégrer, avec une approximation illimitée, toute équation différentielle à deux variables;

Par M. le professeur KRAMP, correspondant de l'académie royale des sciences, doyen de la faculté des sciences de Strasbourg, Chevalier de l'Ordre royal de la Légion d'honneur.

DANS plusieurs précédens mémoires (*), nous avons enseigné à construire des formules à l'aide desquelles on peut intégrer, entre deux limites données et avec tout le degré d'approximation qu'on peut désirer, toute fonction différentielle d'une seule variable:

(*) Voyez, tom. VI, pag. 281 et 372; tom. VII, pag. 241; tom. IX, pag. 345.

nous nous proposons de montrer ici comment, en suivant l'esprit de la même methode, on peut parvenir à intégrer, avec le même degré d'approximation, toute équation différentielle d'ordre et de degré quelconque, entre deux variables x, y Ce sujet semble devoir meriter d'autant plus d'intérêt que notre indigence, relativement a cette branche d'analise, n'est malheureusement que trop bien connue : que les équations généralement intégrables se réduisent à un très-petit nombre de classes; et qu'encore leurs integrales ne sont, pour la plupart, que des équations compliquées et transcendantes, dont on ne saurait, le plus souvent, tirer aucun parti, pour obtenir la valeur de l'une des variables en fonction de l'autre.

Soit une équation différentielle quelconque, représentée généralement par

$$F\left(x\,,\,y\,,\,\frac{dy}{dx}\,,\,\frac{d^2y}{dx^2}\,,\,\frac{d^3y}{dx^3}\,,\ldots\ldots\frac{d^nx}{dx^n}\right)=0\,; \qquad (1)$$

si son intégrale pouvait être obtenue, et si cette intégrale était résoluble par rapport à y, on en tirerait, pour cette variable, une expression de cette forme

$$y=f(x\,,\,C_1\,,\,C_2\,,\,C_3\,,\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,C_n)\,, \qquad (2)$$

laquelle, après avoir déterminé les constantes C_1, C_2, C_3, ... C_n, par n conditions distinctes, prendrait cette nouvelle forme

$$y=\varphi(x)\,; \qquad (3)$$

et alors seulement il deviendrait possible d'assigner, soit exactement, soit par approximation, la valeur b de y, repondant à une valeur quelconque a attribuée à x; cette valeur serait, en effet,

$$b=\varphi(a)\,. \qquad (4)$$

L'objet que nous nous proposons ici est de parvenir à cette valeur b de y, sans passer par le double intermediaire de l'integration de l'equation (1) et de la résolution de son integrale par rapport à y.

Observons d'abord, avant d'entrer en matière, que ce que nous dirons ici du cas où c'est y que l'on veut obtenir en fonction de x doit s'entendre également du cas où ce serait au contraire x qu'il s'agirait de déterminer en fonction de y; attendu que, par des formules connues, on peut, dans l'equation (1), changer l'hypothese relative à la variable independante, et traiter ensuite x par rapport à y, dans l'équation résultante, comme nous allons traiter, dans celle-ci, y par rapport à x.

Ces choses ainsi entendues, considérons l'équation (3); cette équation exprime une certaine courbe, dont l'ordonnée b, répondant à l'abscisse donnée a, est l'inconnue de notre problème. Considerons sur cette courbe un arc très-petit coupé à peu près à son milieu par l'ordonnée b. Plus cet arc sera petit, et plus il deviendra permis de le considerer comme se confondant sensiblement avec l'arc d'une certaine courbe parabolique ayant une équation de la forme

$$y=A+Bx+Cx^2+\ldots\ldots+Rx^m\,; \tag{5}$$

et même, si la courbe (3) était connue, rien ne serait plus facile que d'assigner les valeurs des coefficiens A, B, C, ... R, propres à satisfaire à cette condition; on voit d'ailleurs que, plus le nombre arbitraire m ou le nombre $m+1$ des coefficiens serait considerable, et plus aussi les deux courbes approcheraient de coïncider exactement à une petite distance de part et d'autre de l'ordonnée b. Alors donc, en faisant $x=a$, dans l'équation (5), la valeur qui en résulterait pour y pourrait être sensiblement prise pour l'ordonnée cherchée b.

Voyons donc si nous ne pourrions pas parvenir à déterminer les coefficiens de l'équation (5). D'abord, ces coefficiens doivent être tels que les conditions relatives à la détermination des constantes se trouvent satisfaites ; ce qui établira déjà entre eux un nombre n de relations. Il ne s'agira donc plus que d'en trouver $m-n+1$ autres.

De l'équation (5) on tire

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{dy}{dx}=B+2Cx+3Dx^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+mRx^{m-1}\ ,\\
\frac{d^2y}{dx^2}=2C+6Dx+12Ex^2+\ldots\ldots+m(m-1)Rx^{m-2}\ ,\\
\frac{d^3y}{dx^3}=6D+24Ex+60Fx^2+\ldots\ldots+m(m-1)(m-2)Rx^{m-3}\ ,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}\ (6)$$

en substituant ces valeurs dans l'équation (1), elle prendra la forme

$$\psi(x\ ,\ A\ ,\ B\ ,\ C\ \ldots\ldots\ R)=0\ . \qquad (7)$$

Or, il est clair, par ce qui précède, que, si les coefficiens inconnus A, B, C, ... R, avaient été convenablement déterminés, cette dernière équation serait identique, ou du moins à très-peu près, pour toutes les valeurs de x, peu différentes de la valeur a; en exprimant donc qu'elle devient telle, en effet, pour de pareilles valeurs, au nombre de $m+n-1$, on se procurera, entre les coefficiens A, B, C, ... R, le nombre d'équations nécessaires pour compléter leur détermination.

Comme le nombre m est arbitraire, et assujetti seulement à n'être pas trop petit ; on pourra toujours le prendre tel que le nombre $m-n+1$ soit un nombre impair $2p+1$; alors, ce qu'il y aura de mieux à faire, sera de mettre successivement pour x dans (7) les nombres a, $a\pm z$, $a\pm 2z$, $a\pm 3z$, ... $a\pm pz$; z étant une fraction arbitraire, mais très-petite ; on conçoit en effet qu'en considérant ainsi des points situés de part et d'autre de l'ordonnée b et très-rapprochés de cette ordonnée, on obtiendra un plus haut degré de précision.

On peut, au surplus, simplifier le procédé, en changeant d'abord dans l'équation proposée (1), x en $a+zx$; alors, il suffira de substituer les nombres 0, ± 1, ± 2, ..., $\pm p$, à la place de x, dans l'équation (7), et de chercher simplement la valeur A de y qui répond à $x=0$. Et, comme l'exactitude de cette valeur dépendra, en grande partie, de la petitesse de z; ce qu'il y aura de mieux à faire sera d'y supposer $z=0$. Il est entendu, au surplus, que, dans la recherche des conditions relatives à la détermination des constantes, il faudra également avoir égard au changement de x en $a+zx$.

Comme, dans le cas où l'équation (1) se trouverait d'un degré un peu élevé, l'équation (7), renfermant alors des puissances des coefficiens A, B, C, ..., R, pourrait être incommode pour la détermination de ces coefficiens; on ferait bien de différentier une ou plusieurs fois l'équation (1), et de combiner ses différentielles tant entre elles qu'avec elle-même, de manière à obtenir l'équation la plus simple possible, laquelle serait alors substituée à cette équation (1). Il faudrait seulement, aux conditions déjà établies pour la détermination des constantes, en ajouter d'autres en nombre égal à l'excès de l'ordre de différentielle de la nouvelle équation sur l'ordre de l'équation (1).

Enfin, notre procédé pourra également être employé à résoudre, par approximation, les équations transcendantes à deux variables non résolubles immédiatement. Il ne faudra pour cela que les différentier un nombre de fois suffisant pour qu'on puisse, entre elles et leurs différentielles, éliminer toutes les transcendantes. Le résultat de l'élimination sera alors l'équation qu'il faudra prendre pour l'équation (1).

Il ne nous reste plus présentement qu'à appliquer notre procédé à des exemples; mais, afin de faire mieux apprécier les services qu'on peut s'en promettre, nous choisirons de préférence des équations qu'on sache intégrer, et dont l'intégrale soit connue. En outre, afin qu'on puisse juger de l'influence du nombre des termes admis dans la valeur hypothetique de y sur l'exactitude de la formule finale, nous ferons croître ce nombre par degré, en le prenant d'abord fort petit, et en l'augmentant ensuite successivement.

PROBLÈME I. Un nombre étant donné, trouver son logarithme naturel ?

Solution. Soient x le nombre dont il s'agit, et y son logarithme cherché; l'équation du problème sera

$$y = \text{Log}.x\ ,$$

ou, en différentiant,

$$x\frac{dy}{dx} = 1\ ; \qquad (1)$$

et il s'agira de déterminer, au moyen de cette dernière équation, la valeur de y qui répond à une valeur quelconque a de x, en observant d'ailleurs que la constante que comporte son intégrale doit être déterminée par cette consideration qu'à la valeur $x=1$ doit répondre la valeur $y=0$.

Changeons d'abord x en $a+zx$; cela changera dx en zdx; et notre équation deviendra

$$(a+zx)\frac{dy}{dx} - z = 0\ . \qquad (1)$$

où la constante devra être déterminée par cette considération qu'à $a+zx=1$ ou $x=\frac{1-a}{z}$ devra répondre $y=0$; et il s'agira simplement de déterminer, au moyen de cette dernière équation, la valeur de y qui répond à $x=0$.

Soit posé d'abord simplement

$$y=A+Bx\ , \qquad (5)$$

de manière que A soit le nombre cherché ou Log.a ; nous en déduirons

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=B\ ; \qquad (6)$$

substituant ces valeurs dans l'équation (1), elle deviendra

$$(a+zx)B-z=0\ ; \qquad (7)$$

dans laquelle faisant la supposition unique $x=0$, nous aurons

$$aB-z=0\ ;$$

la condition relative à la constante donnera ensuite

$$0=A+\frac{1-a}{z}B\ ;$$

éliminant donc B, entre ces deux équations, il viendra

$$A=\frac{a-1}{a}\ ,$$

résultat où z disparaît de lui-même ; changeant donc a en x, nous aurons, pour première approximation,

$$\text{Log}.x=\frac{x-1}{x}\ .$$

Cette formule est exacte pour les logarithmes de *zéro* et de l'*unité*, et même pour les logarithmes de tous les nombres très-voisins de l'unité ; elle donne tous les autres beaucoup trop faibles, et d'autant trop faibles que les nombres sont plus grands ; ce qui s'aperçoit sur-le-champ, en remarquant qu'elle donne l'unité pour le logarithme de l'infini, lequel, comme on sait, doit être lui-même infini.

Posons, en second lieu,

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3\,, \qquad (5')$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}=B+2Cx+3Dx^2\,; \qquad (6')$$

en substituant dans l'équation (1), elle deviendra

$$(a+zx)(B+2Cx+3Dx^2)-z=0\,;$$

ou, en ordonnant par rapport à x,

$$(aB-z)+(Bz+2aC)x+(2Cz+3aD)x^2+3Dzx^3=0\,. \qquad (7')$$

En mettant successivement pour x, dans cette équation, les valeurs -1, 0, $+1$, on obtient

$$0=(aB-z)-(Bz+2aC)+(2Cz+3aD)-3Dz\,,$$

$$0=(aB-z)\,,$$

$$0=(aB-z)+(Bz+2aC)+(2Cz+3aD)+3Dz\,.$$

Prenant les différences consécutives de ces équations, nous obtiendrons ces deux-ci

$$0=(Bz+2aC)-(2Cz+3aD)+3Dz\,,$$

$$0=(Bz+2aC)+(2Cz+3aD)+3Dz\,.$$

Prenant la demi-différence de ces dernières, nous aurons

$$2Cz+3aD=0\,;$$

d'où,

d'où ; en remontant à celles qui précèdent, nous conclurons

$$Bz+2aC=-3Dz\ ;$$

$$-z+aB=\ 0\ .$$

Cela donne

$$B=+\frac{z}{a}\ , \qquad C=-\frac{z^2}{2(a^2-z^2)}\ , \qquad D=+\frac{z^3}{3a(a^2-z^2)}\ ;$$

mais la condition relative à la constante donne

$$A=\frac{a-1}{z}B-\frac{(a-1)^2}{z^2}C+\frac{(a-1)^3}{z^3}D\ ;$$

substituant donc les valeurs ci-dessus ; il viendra

$$A=\frac{a-1}{a}+\frac{(a-1)^2}{2(a^2-z^2)}+\frac{(a-1)^3}{3a(a^2-z^2)}\ ;$$

faisant enfin $z=0$ et changeant a en x, nous aurons

$$\text{Log}.x=\frac{x-1}{x}+\frac{(x-1)^2}{2x^2}+\frac{(x-1)^3}{3x^3}\ ;$$

formule plus exacte que la précédente ; mais, comme elle, seulement pour les valeurs de x peu différentes de l'unité.

Posons encore

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5\ ; \qquad (5'')$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}=B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+5Fx^4\ ; \qquad (6'')$$

en substituant dans l'équation (1), elle deviendra

$$(a+zx)(B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+5Fx^4)-z=0\ ;$$

ou, en développant, ordonnant par rapport à x, et posant, pour abréger,

$$aB-z=A', \qquad 3Dz+4aE=D',$$

$$Bz+2aC=B', \qquad 4Ez+5aF=E',$$

$$2Cz+3aD=C', \qquad 5Fz=F';$$

$$o=A'+B'x+C'x^2+D'x^3+E'x^4+F'x^5; \qquad (7'')$$

mettant successivement pour x, dans cette équation, les valeurs -2, -1, 0, $+1$, $+2$, il viendra

$$o=A'-2B'+4C'-8D'+16E'-32F',$$

$$o=A'-B'+C'-D'+E'-F',$$

$$o=A',$$

$$o=A'+B'+C'+D'+E'+F',$$

$$o=A'+2B'+4C'+8D'+16E'+32F';$$

en prenant les différences consécutives, nous aurons

$$o=B'-3C'+7D'-15E'+31F',$$

$$o=B'-C'+D'-E'+F',$$

$$o=B'+C'+D'+E'+F',$$

$$o=B'+3C'+7D'+15E'+31F';$$

prenant la moitié des différences consécutives de celles-ci, nous aurons

$$0=C'-3D'+7E'-15F' \,,$$

$$0=C'+E' \,,$$

$$0=C'+3D'+7E'+15F' \,,$$

prenant le tiers des différences consécutives de ces dernières, nous aurons

$$0=D'-2E'+5F' \,,$$

$$0=D'+2E'+5F' \,,$$

prenant enfin le quart de la différence de ces deux-ci, il viendra

$$E'=0 \;;$$

d'où, en remontant

$$D'=-5F' \,,$$

$$C'=0 \,,$$

$$B'=+4F' \,,$$

$$A'=0 \;;$$

remettant pour ces lettres les quantités dont elles sont le symbole, nous aurons

$$4Ez+5aF=0 \,,$$

$$3Dz+4aE=-25Fz \;;$$

$$2Cz+3aD=0 \,,$$

$$Bz+2aC=+20Fz \;;$$

$$-z+aB=0 \;;$$

d'où

$$B=+\frac{z}{a},$$

$$C=-\frac{z^2(a^2-5z^2)}{2(a^4-5a^2z^2+4z^4)};$$

$$D=+\frac{z^3(a^2-5z^2)}{3a(a^4-5a^2z^2+4z^4)};$$

$$E=-\frac{z^4}{4(a^4-5a^2z^2+4z^4)},$$

$$F=+\frac{z^5}{5a(a^4-5a^2z^2+4z^4)};$$

mais, par la condition qui détermine la constante, on a

$$A=\frac{a-1}{z}B-\frac{(a-1)^2}{z^2}C+\frac{(a-1)^3}{z^3}D-\frac{(a-1)^4}{z^4}E+\frac{(a-1)^5}{z^5}F;$$

substituant donc, il viendra

$$A=\frac{a-1}{a}+\frac{(a-1)^2(a^2-5z^2)}{2(a^4-5a^2z^2+4z^4)}+\frac{(a-1)^3(a^2-5z^2)}{3a(a^4-5a^2z^2+4z^4)}$$
$$+\frac{(a-1)^4}{4(a^4-5a^2z^2+4z^4)}+\frac{(a-1)^5}{5a(a^4-5a^2z^2+4z^4)};$$

faisant enfin $z=0$, et changeant ensuite a en x, nous aurons

$$\text{Log}.x=\frac{x-1}{x}+\frac{(x-1)^2}{2x^2}+\frac{(x-1)^3}{3x^3}+\frac{(x-1)^4}{4x^4}+\frac{(x-1)^5}{5x^5};$$

formule plus approchée encore que les précédentes; mais toujours pour des valeurs de x peu différentes de l'unité.

Il n'est pas nécessaire d'aller plus loin pour être conduit à soupçonner que, si on admettait une infinité de termes dans la valeur hypothétique de y, auquel cas le procédé pourrait passer pour rigoureux, on aurait

$$\text{Log.}x=\frac{x-1}{x}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2+\tfrac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x}\right)^3+\tfrac{1}{4}\left(\frac{x-1}{x}\right)^4+\tfrac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x}\right)^5+\ldots;$$

or, cette valeur est en effet exacte; car si l'on y fait

$$\frac{x-1}{x}=-t \qquad \text{d'où} \qquad x=\frac{1}{1+t}\,,$$

elle devient, en substituant et changeant les signes

$$\text{Log.}(1+t)=t-\tfrac{1}{2}t^2+\tfrac{1}{3}t^3-\tfrac{1}{4}t^4+\tfrac{1}{5}t^5-\ldots\ldots$$

formule connue.

Ainsi, l'exemple que nous avons choisi, tout en justifiant complètement notre méthode, montre clairement, en outre, que cette méthode n'est point seulement un procédé approximatif, mais qu'elle peut même donner le développement général et rigoureux en série d'une fonction transcendante proposée.

PROBLÈME II. Trouver le nombre auquel répond un logarithme naturel proposé?

Solution. Cette question étant l'inverse de la précédente, il faudra, pour la résoudre, changer x en y et *vice versâ*, dans l'équation de la première, qui deviendra ainsi

$$y-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0\,,$$

ou, en changeant x en $a+zx$,

$$zy-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0\,, \qquad (1)$$

la constante devant ici être déterminée par la considération qu'à $y=1$ doit répondre $a+zx=0$ ou $x=-\frac{a}{z}$.

Posons d'abord simplement

$$y=A+Bx\,, \tag{5}$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}=B\,; \tag{6}$$

en substituant dans l'équation (1), elle deviendra

$$z(A+Bx)-B=0\,,$$

ou

$$(Az-B)+Bzx=0\,; \tag{7}$$

nous aurons ici à faire la seule supposition $x=0$, qui nous donnera

$$Az=B\,;$$

la condition qui doit déterminer la constante donnera, en outre,

$$1=A-B\frac{a}{z}\,;$$

éliminant B entre ces deux équations, z disparaîtra de lui-même; et, en changeant ensuite a en x, nous aurons, pour première approximation,

$$e^x=\frac{1}{1-x}\,.$$

Posons, en second lieu,

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3\,, \tag{5'}$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}=B+2Cx+3Dx^2\ ; \qquad (6')$$

en substituant dans l'équation (1), elle deviendra,

$$z(A+Bx+Cx^2+Dx^3)-(B+2Cx+3Dx^2)=0\ ;$$

ou, en ordonnant,

$$0=(Az-B)+(Bz-2C)x+(Cz-3D)x^2+Dzx^3\ . \qquad (7')$$

Nous aurons seulement ici à faire pour x les suppositions -1, 0, $+1$, ce qui donnera

$$0=(Az-B)-(Bz-2C)+(Cz-3D)-Dz\ ;$$

$$0=(Az-B)\ ,$$

$$0=(Az-B)+(Bz-2C)+(Cz-3D)+Dz\ ;$$

prenant les différences consécutives, il viendra

$$0=(Bz-2C)-(Cz-3D)+Dz\ ,$$

$$0=(Bz-2C)+(Cz-3D)+Dz\ ;$$

en prenant la demi-différence de ces deux équations, il viendra

$$Cz-3D=0\ ,$$

d'où, en remontant,

$$Bz-2C=-Dz\ ;$$

$$Az-B=0\ ;$$

ce qui donnera

$$B=Az\,,\quad C=\frac{3z^2}{6-z^2}A\,,\quad D=\frac{z^3}{6-z^2}A\,;$$

mais, par la condition qui détermine la constante, on a

$$1=A-B\frac{a}{z}+C\frac{a^2}{z^2}-D\frac{a^3}{z^3}\,,$$

en substituant donc, il viendra

$$1=A\left\{1-a+\frac{3a^2}{6-z^2}-\frac{a^3}{6-z^2}\right\};$$

faisant enfin $z=0$, et changeant a en x, il viendra, pour seconde approximation

$$e^x=\frac{1}{1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}}\,.\qquad 4$$

Posons encore

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5\,;\qquad (5'')$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}=B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+5Fx^4\,,\qquad (6'')$$

substituant ces valeurs dans l'équation (1), elle deviendra

$$z(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5)-(B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+5Fx^4)=0\,;$$

ou en ordonnant et posant, pour abréger,

$$Az-B=A'\,,\qquad Dz-4E=D'\,,$$

$$Bz-2C=B'\,,\qquad Ez-5F=E'\,,$$

$$Cz-3D=C'\,,\qquad Fz=F'\,;$$

$$0=A'$$

$$0=A'+B'x+C'x^2+D'x^3+E'x^4+F'x^5 \,. \qquad (7'')$$

En supposant successivement, dans cette dernière équation, $x=$; -2, -1, 0, $+1$, $+2$; on en tirera, comme dans le précédent problème;

$$\left.\begin{array}{l} A'=0\,, \\ B'=+4F'\,, \\ C'=0\,, \\ D'=-5F'\,, \\ E'=0\,, \end{array}\right\} \text{c'est-à-dire} \left\{\begin{array}{l} Az-B=0\,, \\ Bz-2C=+4Fz\,; \\ Cz-3D=0\,, \\ Dz-4E=-5Fz\,, \\ Ez-5F=0\,; \end{array}\right.$$

d'où

$$\frac{B}{z}=A\,,$$

$$\frac{C}{z^2}=\frac{15(4-z^2)}{2(60-15z^2+2z^4)}A\,,$$

$$\frac{D}{z^3}=\frac{5(4-z^2)}{2(60-15z^2+2z^4)}A\,,$$

$$\frac{E}{z^4}=\frac{5}{2(60-15z^2+2z^4)}A\,,$$

$$\frac{F}{z^5}=\frac{1}{2(60-15z^2+2z^4)}A\,;$$

la condition relative à la constante est d'ailleurs ici

$$1=A-\frac{B}{z}a+\frac{C}{z^2}a^2-\frac{D}{z^3}a^3+\frac{E}{z^4}a^4-\frac{F}{z^5}a^5\,;$$

en substituant donc, il viendra

$$1=A\left\{1-a+a^2.\frac{15(4-z^2)}{2(60-15z^2+2z^4)}-a^3.\frac{5(4-z^2)}{2(60-15z^2+2z^4)}\right.$$

$$\left.+a^4.\frac{5}{2(60-15z^2+2z^4)}-a^5.\frac{1}{2(60-15z^2+2z^4)}\right\};$$

faisant enfin $z=0$, tirant la valeur de A, et changeant a en x, nous aurons, pour troisième approximation,

$$e^x=\frac{1}{1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5}{5!}}.$$

Il n'en faut pas davantage pour être conduit à soupçonner que l'on doit avoir généralement et rigoureusement

$$e^x=\frac{1}{1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5}{5!}+\dots};$$

et en effet, cette formule est exacte; car, en y changeant x en $-x$, elle devient

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\dots;$$

formule connue.

PROBLÈME III. Trouver le sinus et le cosinus d'un arc donné quelconque?

Solution. Soit x l'arc donné et y son sinus; on aura l'équation

$$y=\text{Sin}.x;$$

d'où, en différentiant,

$$\frac{dy}{dx}=\text{Cos}.x\ ;$$

en prenant la somme des quarrés de ces deux équations, il viendra

$$y^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1\ .$$

Pour nous délivrer des quarrés, qui embarrasseraient le calcul, différentions de nouveau ; ce qui donnera, en divisant par $\frac{dy}{dx}$,

$$y+\frac{d^2y}{dx^2}=0\ .$$

Les deux constantes que comporte l'intégrale de cette équation doivent être déterminées par cette double considération qu'à $x=0$ doivent répondre $y=0$ et $\frac{dy}{dx}=1$.

Changeons x en $a+zx$; l'équation différentielle deviendra

$$z^2y+\frac{d^2y}{dx}=0\ ; \qquad (1)$$

les deux constantes devront alors être déterminées par cette double considération qu'à $a+zx=0$ ou à $x=-\frac{a}{z}$ doivent répondre $y=0$, $\frac{dy}{dx}=z$; et les sinus et cosinus de a seront ce que deviennent y et $\frac{1}{z}\frac{dy}{dx}$, respectivement, lorsqu'on suppose $x=0$.

Comme nous avons déjà deux conditions à remplir, relativement aux constantes; la supposition la plus simple que nous puissions admettre est

$$y=A+Bx+Cx^2\ ; \qquad (5)$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}=B+2Cx\,,\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=2C\;;\tag{6}$$

de sorte qu'on aura

$$\text{Sin}.a=A\,,\qquad \text{Cos}.a=\frac{B}{z}\,:$$

En substituant dans l'équation (1), elle deviendra

$$z^2(A+Bx+Cx^2)+2C=0\;;$$

c'est-à-dire,

$$(Az^2+2C)+Bz^2+Cz^2x^2=0\,.\tag{7}$$

Nous ferons ici la seule hypothèse $x=0$; laquelle donnera

$$Az^2+2C=0\,,$$

ou bien

$$A+2\frac{C}{z^2}=0\,;$$

les conditions relatives aux constantes donnent d'ailleurs,

$$0=A-a\frac{B}{z}+a^2\frac{C}{z^2}\,,\quad 1=\frac{B}{z}-2a\frac{C}{z^2}\;;$$

éliminant donc $\frac{C}{z^2}$ entre ces équations, et tirant des équations résultantes les valeurs de A et $\frac{B}{z}$, il viendra

$$A=\frac{a}{1+\frac{a^2}{2}}\,,\quad \frac{B}{z}=\frac{1-\frac{a^2}{2}}{1+\frac{a^2}{2}}\,,$$

d'où z disparaît de lui-même. Changeant donc a en x, nous aurons, pour première approximation,

$$\text{Sin.}x = \frac{x}{1+\frac{x^2}{2}}\ ; \quad \text{Cos.}x = \frac{1-\frac{x^2}{2}}{1+\frac{x^2}{2}}\ ;$$

d'où

$$\text{Tang.}x = \frac{x}{1-\frac{x^2}{2}}\ .$$

Posons, en second lieu,

$$y = A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4\ , \tag{5'}$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3\ , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2C+6Dx+12Ex^2\ . \tag{6'}$$

en substituant ces valeurs dans l'équation (1), elle deviendra

$$z^2(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4)+2(C+3Dx+6Ex^2)=0\ ;$$

ou, en ordonnant,

$$(Az^2+2C)+(Bz^2+6D)x+(Cz^2+12E)x^2+Dz^2x^3+Ez^2x^4=0\ ; \tag{7'}$$

supposant successivement x égal à -1, 0, $+1$, il viendra

$$0=(Az^2+2C)-(Bz^2+6D)+(Cz^2+12E)-Dz^2+Ez^2\ ,$$

$$0=(Az^2+2C)\ ,$$

$$0=(Az^2+2C)+(Bz^2+6D)+(Cz^2+12E)+Dz^2+Ez^2\ ;$$

prenant les différences consécutives de ces trois équations, il viendra

$$0=(Bz^2+6D)-(Cz^2+12E)+Dz^2-Ez^2\ ,$$

$$0=(Bz^2+6D)+(Cz^2+12E)+Dz^2-Ez^2\ ;$$

prenant enfin la demi-différence de ces deux-ci, on aura

$$o=(Cz^2+12E)+Ez^2 .$$

d'où, en remontant,

$$o=(Bz^2+6D)+Dz^2 ;$$

$$o=(Az^2+2C) .$$

On tirera de ces trois dernières équations

$$\frac{C}{z}=-\tfrac{1}{2}A , \quad \frac{D}{z^3}=-\frac{1}{6+z^2}\cdot\frac{B}{z} , \quad \frac{E}{z^4}=+\frac{A}{2(12+z^2)} ;$$

les conditions relatives aux constantes sont d'ailleurs ici

$$o=A-a\frac{B}{z}+a^2\frac{C}{z^2}-a^3\frac{D}{z^3}+a^4\frac{E}{z^4} ,$$

$$1=\frac{B}{z}-2a\frac{C}{z^2}+3a^2\frac{D}{z^3}-4a^3\frac{E}{z^4} ;$$

en y substituant donc les trois valeurs ci-dessus, elles deviendront en faisant de suite $z=o$, excepté dans le dénominateur de B.

$$\left(1-\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{24}\right)A-\left(a-\frac{a^3}{6}\right)\frac{B}{z}=o .$$

$$\left(a-\frac{a^3}{6}\right)A+\left(1-\frac{a^2}{2}\right)\frac{B}{z}=1 ,$$

desquelles on tirera

$$A=\frac{a-\frac{a^3}{6}}{1-\frac{a^4}{24}+\frac{a^6}{144}} , \qquad \frac{B}{z}=\frac{1-\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{24}}{1-\frac{a^4}{24}+\frac{a^6}{144}} .$$

changeant donc a en x, nous aurons, pour seconde approximation,

$$\mathrm{Sin}.x=\frac{\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}}{\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}\right)+\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}\right)^2};$$

$$\mathrm{Cos}.x=\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}}{\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}\right)+\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}\right)^2};$$

d'où

$$\mathrm{Tang}.x=\frac{\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}}.$$

Si nous admettions deux termes de plus à la valeur hypothétique de y, en opérant d'une manière semblable, nous trouverions, pour troisième approximation,

$$\mathrm{Sin}.x=\frac{\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}}{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\right)+\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\right)^2};$$

$$\mathrm{Cos}.x=\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}}{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\right)+\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\right)^2};$$

d'où

$$\mathrm{Tang}.x=\frac{\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}}.$$

La marche de ces résultats nous conduit à soupçonner avec fondément, qu'en posant, en général,

$$M = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots\ldots ;$$

$$N = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{7!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots\ldots ;$$

on doit avoir

$$\text{Sin.}x = \frac{N}{M^2+N^2} ; \quad \text{Cos.}x = \frac{M}{M^{2}+^{2}} ;$$

d'où

$$\text{Tang.}x = \frac{N}{M} ;$$

or, s'il en est ainsi, on devra avoir

$$1 = \text{Sin.}^2 x + \text{Cos.}^2 x = \left(\frac{N}{M^2+N^2}\right)^2 + \left(\frac{M}{M^2+N^2}\right)^2 = \frac{1}{M^2+N^2} ;$$

d'où on conclura

$$M^2 + N^2 = 1 ;$$

on aura donc simplement

$$\text{Sin.}x = N , \qquad \text{Cos.}x = M ;$$

c'est-à-dire,

$$\text{Sin.}x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots$$

$$\text{Cos.}x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} - \ldots\ldots$$

ce qui, en effet, est rigoureusement vrai.

PROBLÈME IV. Déterminer la longueur d'un arc de cercle dont la tangente est donnée ?

Solution.

Solution. Soit x la tangente donnée et y l'arc cherché auquel elle appartient ; nous aurons l'équation

$$x=\text{Tang}.y\ ,\qquad \text{ou}\qquad x\text{Cos}.y=\text{Sin}.y\ ,$$

ou, en différentiant,

$$\text{Cos}.y-x\frac{dy}{dx}\text{Sin}.y=\frac{dy}{dx}\text{Cos}.y\ .$$

En éliminant Cos.y entre ces deux équations, Sin. y disparaîtra aussi, et nous aurons l'équation

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx}-1=0\ .$$

Dans laquelle la constante doit se déterminer par cette considération que x et y doivent être nuls en même temps.

Changeant, dans cette équation, x en $a+zx$, elle deviendra

$$\{(1+a^2)+2azx+z^2x^2\}\frac{dy}{dx}-z=0\ ,\qquad (1)$$

où la constante se déterminera par la considération qu'à $a+zx=0$ ou $x=-\frac{a}{z}$ doit répondre $y=0$; et l'arc cherché, dont la tangente est a, sera ce que devient y, lorsqu'on suppose $x=0$.

Posons d'abord simplement

$$y=A+Bx\ ,\qquad (5)$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}=B\ ;\qquad (6)$$

mettant cette valeur dans (1), elle deviendra

$$B\{(1+a^2)B-z\}+2azx+z^2x^2\}-z=0;$$

ou, en ordonnant,

$$\{(1+a^2)B-z\}+2azBx+z^2Bx^2=0\,. \tag{7}$$

En supposant $x=0$, cette équation donnera

$$(1+a^2)B-z=0\;;$$

la condition relative à la constante donnera d'ailleurs

$$0=A-\frac{a}{z}B\;;$$

éliminant B entre les deux, on aura

$$A=\frac{a}{1+a^2}=\frac{a}{1+a^2}\cdot\frac{(a+\sqrt{-1})-(a-\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}\;;$$

changeant donc a en x, nous aurons, pour première approximation,

$$\text{Arc}(\text{Tang.}=x)=\frac{x}{1+x^2}\cdot\frac{(x+\sqrt{-1})-(x-1\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}\,.$$

Posons, en second lieu,

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3\,,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}=B+2Cx+3Dx^2\;; \tag{6'}$$

substituant dans l'équation (1), elle deviendra

$$\{(1+a^2)+2azx+z^2x^2\}(B+2Cx+3Dx^2)-z=0\,,$$

ou en développant, ordonnant et posant, pour abréger,

$$(1+a^2)B-z=A' ,$$

$$2aBz+2(1+a^2)C=B' ,$$

$$Bz^2+4aCz+3(1+a^2)D=C' ,$$

$$2Cz^2+6aDz=D' ,$$

$$3Dz^2=E' ;$$

$$0=A'+B'x+C'x^2+D'x^3+E'x^4 , \qquad (7')$$

faisant successivement pour x, dans cette dernière, les suppositions -1, 0, $+1$, il viendra

$$0=A'-B'+C'-D'+E' ,$$

$$0=A' ,$$

$$0=A'+B'+C'+D'+E' ;$$

d'où, en prenant les différences consécutives,

$$0=B'-C'+D'-E' ,$$

$$0=B'+C'+D'+E' ;$$

prenant la demi-différence de ces deux dernières, il viendra

$$C'+E'=0 ,$$

d'où

$$B'+D'=0 ,$$

nous avons d'ailleurs

$$A'=0 ;$$

nous aurons donc, en substituant,

$$(1+a^2)B-z=0\ ;$$

$$azB+\{(1+a^2)+z^2\}C+3azD=0\ ,$$

$$z^2B+4azC+3\{(1+a^2)+z^2\}D=0\ ;$$

d'où on tire

$$\frac{B}{z}=\frac{3z^2}{1+a^2}\ ,$$

$$\frac{C}{z^2}=-\frac{a}{(1+a^2)^2+2(1-a^2)z^2+z^4}\ ;$$

$$\frac{D}{z^3}=-\frac{(1-3a^2)+z^2}{3(1+a^2)\{(1+a^2)^2+2(1-a^2)z^2+z^4\}}\ ;$$

La condition relative à la constante donne d'ailleurs

$$A=a\frac{B}{z}+a^2\frac{C}{z^2}+a^3\frac{D}{z^3}\ ;$$

substituant donc, et faisant, après la substitution, $z=0$, nous anrons

$$A=\frac{a}{1+a^2}-\frac{a^2}{2(1+a^2)^2}\cdot 2a+\frac{a^3}{3(1+a^2)^3}(3a^2-1)\ ;$$

c'est-à-dire,

$$A=\frac{a}{1+a^2}\cdot\frac{(a+\sqrt{-1})-(a-\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$

$$+\frac{a^2}{2(1+a^2)^2}\cdot\frac{(a+\sqrt{-1})^2-(a-\sqrt{-1})^2}{2\sqrt{-1}}$$

$$+\frac{a^3}{3(1+a^2)^3}\cdot\frac{(a+\sqrt{-1})^3-(a-\sqrt{-1})^3}{2\sqrt{-1}}\ ;$$

ou bien, en changeant a en x,

$$\text{Arc}(\text{Tang}=x)=\frac{x}{1+x^2}\cdot\frac{(x+\sqrt{-1})-(x-\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$

$$+\tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{1-x^2}\right)^2\cdot\frac{(x+\sqrt{-1})^2-(x-\sqrt{-1})^2}{2\sqrt{-1}}$$

$$+\tfrac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^3\cdot\frac{(x+\sqrt{-1})^3-(x-\sqrt{-1})^3}{2\sqrt{-1}}\ .$$

En admettant deux termes de plus dans la valeur hypothétique de y, on trouverait

$$\text{Arc.}(\text{Tang.}=x)=\left(\frac{x}{1+x^2}\right)\cdot\frac{(y+\sqrt{-1})-(x-\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$

$$+\tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2\cdot\frac{(x+\sqrt{-1})^2-(x-\sqrt{-1})^2}{2\sqrt{-1}}$$

$$+\tfrac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^3\cdot\frac{(x+\sqrt{-1})^3-(x-\sqrt{-1})^3}{2\sqrt{-1}}$$

$$+\tfrac{1}{4}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^4\cdot\frac{(x+\sqrt{-1})^4-(x-\sqrt{-1})^4}{2\sqrt{-1}}$$

$$+\tfrac{1}{5}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^5\cdot\frac{(x+\sqrt{-1})^5-(x-\sqrt{-1})^5}{2\sqrt{-1}}\ ;$$

série, dont la loi est évidente, et qu'on peut prolonger aussi loin qu'on le voudra.

Il ne serait peut-être pas aisé de ramener ce développement aux formules connues; mais on ne saurait néanmoins en contester l'exactitude. Pour ne laisser aucun doute à cet égard, appliquons-le à la recherche du nombre $\frac{\varpi}{4}$, dont la valeur, approchée à moins d'une demi-unité décimale du 12.^{e} ordre, est

$$\frac{\pi}{4}=0{,}785398163397\ .$$

Pour y parvenir, il ne s'agira que de faire $x=1$, dans la formule ci-dessus; les termes, dont l'indice est divisible par 4, disparaîtront d'eux-mêmes, et il viendra

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4}=&+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{3}\right)=+\frac{5}{1.2.3}\\
&-\left(\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{7}\right)\quad-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{46}{5.6.7}\\
&+\left(\frac{1}{2^5}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{2^5}\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{2^6}\cdot\frac{1}{11}\right)\quad+\frac{1}{2^4}\cdot\frac{127}{9.10.11}\\
&-\left(\frac{1}{2^7}\cdot\frac{1}{13}+\frac{1}{2^7}\cdot\frac{1}{14}+\frac{1}{2^8}\cdot\frac{1}{15}\right)\quad-\frac{1}{2^6}\cdot\frac{248}{13.14.15}\\
&+\left(\frac{1}{2^9}\cdot\frac{1}{17}+\frac{1}{2^9}\cdot\frac{1}{18}+\frac{1}{2^{10}}\cdot\frac{1}{19}\right)\quad+\frac{1}{2^8}\cdot\frac{409}{17.18.19}\\
&-\left(\frac{1}{2^{11}}\cdot\frac{1}{21}+\frac{1}{2^{11}}\cdot\frac{1}{22}+\frac{1}{2^{12}}\cdot\frac{1}{23}\right)\quad-\frac{1}{2^{10}}\cdot\frac{610}{21.22.23}\\
&+\left(\frac{1}{2^{13}}\cdot\frac{1}{25}+\frac{1}{2^{13}}\cdot\frac{1}{26}+\frac{1}{2^{14}}\cdot\frac{1}{27}\right)\quad+\frac{1}{2^{12}}\cdot\frac{851}{25.26.2}\\
&-\left(\frac{1}{2^{15}}\cdot\frac{1}{29}+\frac{1}{2^{15}}\cdot\frac{1}{30}+\frac{1}{2^{16}}\cdot\frac{1}{31}\right)\quad-\frac{1}{2^{14}}\cdot\frac{1132}{29.30.31}\\
&+\left(\frac{1}{2^{17}}\cdot\frac{1}{33}+\frac{1}{2^{17}}\cdot\frac{1}{34}+\frac{1}{2^{18}}\cdot\frac{1}{35}\right)\quad+\frac{1}{2^{16}}\cdot\frac{1453}{33.34.35}\\
&-\left(\frac{1}{2^{19}}\cdot\frac{1}{37}+\frac{1}{2^{19}}\cdot\frac{1}{38}+\frac{1}{2^{20}}\cdot\frac{1}{39}\right)\quad-\frac{1}{2^{18}}\cdot\frac{1814}{37.38.39}
\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{1}{2^{21}}\cdot\frac{1}{41}+\frac{1}{2^{21}}\cdot\frac{1}{42}+\frac{1}{2^{22}}\cdot\frac{1}{43}\right)\quad+\frac{1}{2^{20}}\cdot\frac{2215}{41.42.43}$$

$$-\left(\frac{1}{2^{23}}\cdot\frac{1}{45}+\frac{1}{2^{23}}\cdot\frac{1}{46}+\frac{1}{2^{24}}\cdot\frac{1}{47}\right)\quad-\frac{1}{2^{22}}\cdot\frac{2656}{45.46.47}$$

$$+\left(\frac{1}{2^{25}}\cdot\frac{1}{49}+\frac{1}{2^{25}}\cdot\frac{1}{50}+\frac{1}{2^{26}}\cdot\frac{1}{51}\right)\quad+\frac{1}{2^{24}}\cdot\frac{3137}{49.50.51}$$

$$-\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;-\;\ldots\ldots$$

série dont le terme général est

$$\left(-\tfrac{1}{4}\right)^{n-1}\cdot\frac{20n^2-19n+4}{(4n-3)(4n-2)(4n-1)}\;.$$

En réduisant ses termes en décimales, on aura

$$\frac{\pi}{4}=+\frac{5}{1.2.3}=+0.833333333$$

$$-\frac{1}{4}\,\frac{46}{5.6.7}=\ldots\ldots\ldots\ldots-0{,}054761905$$

$$+\frac{1}{4^2}\cdot\frac{127}{9.10.11}=+0{,}008017677$$

$$-\frac{1}{4^3}\cdot\frac{248}{13.14.15}=\ldots\ldots\ldots\ldots-0{,}001419414$$

$$+\frac{1}{4^4}\cdot\frac{409}{17.18.19}=+0.000274795$$

$$-\frac{1}{4^5}\cdot\frac{610}{21.22.23}=\ldots\ldots\ldots\ldots-0{,}000056061$$

$$+\frac{1}{4^6}\cdot\frac{851}{25.26.27}=+0.000011838$$

$$-\frac{1}{4^7}\cdot\frac{1132}{29.30.31}=\ldots\ldots\ldots\ldots -0{,}000002562$$

$$+\frac{1}{4^8}\cdot\frac{1453}{33.34.35}=+0.000000565$$

$$-\frac{1}{4^9}\cdot\frac{1814}{37.38.39}=\ldots\ldots\ldots\ldots -0{,}000000126$$

$$+\frac{1}{4^{10}}\cdot\frac{2215}{41.42.43}=+0.000000029$$

$$-\frac{1}{4^{11}}\cdot\frac{2656}{45.46.47}=\ldots\ldots\ldots\ldots -0{,}000000007$$

$$+\frac{1}{4^{12}}\cdot\frac{3137}{49.50.51}=+0{,}000000001$$

$$-0{,}056240075$$

$$+0{,}841638238 \qquad +0{,}841638238$$

Ce qui donne . . . . $\frac{\pi}{4} = 0{,}785398163$;

valeur exacte jusqu'à la dernière décimale inclusivement.

Nous étant ainsi assurés de l'exactitude et de la commodité de notre méthode, par son application à des cas déjà connus ; il ne nous reste plus qu'à l'appliquer à des équations différentielles qu'on ne sait pas encore intégrer, et à examiner si elle ne serait pas susceptible de quelques simplifications ; et ce sera le sujet d'un second mémoire.