
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Statique. Essai sur quelques cas particuliers d'attraction

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 10 (1819-1820), p. 133-159

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1819-1820__10__133_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1819-1820, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

STATIQUE.

Essai sur quelques cas particuliers d'attraction ;

Par M. GERGONNE.



ON trouve à la fin du second volume de la traduction du livre des *PRINCIPES*, par Madame du Chatelet, une suite de recherches relatives à l'attraction exercée, dans diverses hypothèses, par des corps symétriques, sur un point symétriquement situé par rapport au corps attirant.

Tout récemment, dans un mémoire présenté à l'académie de Turin, M. le professeur Plana a traité, dans le même genre, des questions plus générales et plus difficiles, et dont la solution exige toutes les ressources de la haute analyse.

Mais personne ne paraît s'être encore occupé jusqu'ici d'un autre genre de questions qui ont quelque analogie avec celles-là, et qui ne semblent pas moins dignes d'intérêt : ce sont celles où il s'agit de déterminer l'intensité et la direction de l'action totale exercée par un angle polyèdre solide, homogène et indéfini, sur un point situé à son sommet. Ce problème comprend évidemment, comme cas particulier, celui où l'on demanderait d'assigner l'intensité et la direction de l'action totale exercée par un angle dièdre, solide, homogène et indéfini, sur l'un quelconque des points de son arête. Il comprend donc également celui où il s'agirait de l'attraction exercée par un corps homogène terminé d'une part par une surface plane indéfinie, et lui-même d'une étendue indéfinie au-delà

Tom. X, n.º V, 1.º novembre 1819.

de cette surface , sur l'un quelconque des points de cette même surface.

Ces divers cas d'attraction ont cela de particulier et de très-remarquable qu'ils permettent d'assigner la direction et même l'intensité relative de l'action totale exercée par le corps attirant sur le point attiré, indépendamment de la loi d'attraction ; c'est-à-dire, sans qu'on ait préalablement besoin de statuer sur la fonction de la distance qui mesure cette force, ni même de songer, en aucune sorte, à la nature de cette fonction. Que l'on conçoive, en effet, l'angle polyèdre attirant partagé en une infinité d'autres infiniment petits, de même sommet que lui et équivalens en capacité ; c'est-à-dire, de nature à intercepter des portions équivalentes d'une sphère d'un rayon quelconque, ayant son centre à leur sommet commun. Ces angles polyèdres partiels exerceront sur le point attiré, et chacun d'eux suivant sa direction, une infinité d'actions infiniment petites, d'une même intensité ; la direction de la résultante ne dépendra donc uniquement que des directions des composantes, c'est-à-dire, de la figure de l'angle polyèdre total ; et son intensité sera simplement proportionnelle à celle de chacune de ces composantes.

On peut remarquer, au surplus, que ce cas est exactement le même que celui où tous les points de diverses portions d'une même surface sphérique exerceraient des actions égales sur son centre. Il est clair, en effet, que l'action totale de chacune de ces portions de surface sphérique ne dépendrait nullement, quant à sa direction, de l'action commune exercée par chacun de ses points ; et que le rapport d'intensité des actions totales de deux de ces portions n'en dépendrait pas davantage.

Et par là on voit aussi que, dans le cas où l'intensité de la force attractive dépendrait de la masse des molécules attirantes, il n'y aurait encore rien de changé si le corps attirant, au lieu d'être homogène, était d'une densité variable, pourvu seulement que sa

densité fût constante , pour chacune des couches sphériques concentriques , ayant le point attiré pour centre commun.

Tout se passerait donc encore de la même manière , si l'action exercée par l'angle polyèdre , solide et indéfini était de ces actions dont l'étude de la nature nous offre sans cesse des exemples , et dont le caractère propre est de cesser d'être sensibles à une distance sensible du contact. Le seul changement qui surviendrait alors est que la condition d'une étendue indéfinie cesserait d'être de rigueur pour l'angle polyèdre qui pourrait , dans ce cas , être limité , du côté opposé à son sommet par une surface quelconque ; pourvu seulement que les arêtes concourant à ce sommet fussent toutes d'une longueur sensible.

On voit donc que , dans cette dernière hypothèse , si l'on conçoit un polyèdre fini et homogène , de figure quelconque ; 1.^o l'action de ce polyèdre sur un point situé dans l'intérieur de l'une quelconque de ses faces sera la même que si cette face se prolongeait indéfiniment , et que le solide fût d'une épaisseur indéfinie : cette action sera donc la même pour toutes les faces , du moins tant que le point attiré demeurera à une distance sensible des arêtes du polyèdre

2.^o L'action de ce polyèdre sur un point de l'une quelconque de ses arêtes sera la même que si les faces de l'angle dièdre , auquel cette arête se trouve appartenir , étaient indéfiniment prolongées ; pourvu toutefois que le point attiré demeure à une distance sensible des sommets du polyèdre ; mais ici l'intensité de la force attractive variera , suivant le plus ou le moins d'ouverture de l'angle dièdre ; de sorte qu'elle ne sera généralement la même que pour des arêtes appartenant à des angles dièdres égaux.

3.^o Enfin , l'action exercée par ce polyèdre sur l'un quelconque de ses sommets sera la même que si toutes les faces concourant à ce sommet , et conséquemment toutes les arêtes qui s'y terminent , s'étendaient indéfiniment du côté opposé ; mais encore ici l'action

passer d'un sommet à autre, suivant la figure et le plus ou le moins d'ouverture de chaque angle polyèdre.

Nous avons donc ici à nous occuper principalement, 1.^o de l'attraction exercée par un corps homogène, indéfini d'une part et terminé de l'autre par une surface plane indéfinie, sur un point de cette surface; 2.^o de l'attraction exercée par un angle dièdre solide, homogène et indéfini, sur un point de son arête; 3.^o enfin, de l'attraction exercée par un angle polyèdre solide, homogène et indéfini, sur son sommet; ou, ce qui revient au même, nous avons à nous occuper de la recherche de l'intensité et de la direction de l'attraction exercée par un hémisphère, un fuseau ou un polygone sphérique sur le centre de la sphère.

Mais, afin de rendre notre travail plus complet, nous nous occuperons d'abord, 1.^o de l'attraction exercée par un plan homogène, indéfini d'une part, et terminé de l'autre par une droite indéfinie, sur l'un des points de cette droite; 2.^o de l'attraction exercée par un angle plan, homogène et indéfini, sur son sommet; ou ce qui revient au même, nous chercherons l'intensité et la direction de l'attraction exercée par une demi-circonférence ou par un arc quelconque de grand cercle, sur le centre de la sphère.

LEMME I. Déterminer l'intensité et la direction de l'action exercée sur le centre d'une sphère, par le trapèze sphérique isocèle compris entre deux méridiens quelconques et deux parallèles quelconques à l'équateur ?

Solution. Soit pris le rayon de la sphère pour unité de longueur. Soit a l'arc de l'équateur compris entre les deux méridiens qui terminent le trapèze, et dont nous adoptons les plus à gauche pour premier méridien; soient b, b' les distances polaires des deux parallèles. Soit R l'intensité inconnue de l'attraction exercée par l'aire du trapèze sur le centre de la sphère; cette force sera évidemment dirigée dans le plan d'un méridien également distant de ceux qui terminent le trapèze; c'est-à-dire, que sa longitude sera $\frac{1}{2}a$; il ne

s'agira donc plus, pour en connaître la direction, que d'en assigner la distance polaire, que nous désignerons par θ .

Cela pose, concevons cette force R décomposée, dans le plan de son méridien, en deux autres; l'une P dirigée vers le pôle, et l'autre Q dirigée dans le plan de l'équateur; d'après les premières notions de statique, nous aurons

$$P = R \cos. \theta, \quad Q = R \sin. \theta.$$

La force Q , se dirigeant au milieu de l'arc de l'équateur intercepté entre les deux méridiens qui terminent le trapèze pourra ultérieurement être décomposée, dans l'équateur, en deux forces égales, passant par les extrémités de cet arc; et, en appelant S l'une de ces forces, on aura

$$S \sin. a = Q \sin. \frac{1}{2} a.$$

Eliminant Q entre ces trois équations, on en tire

$$R = \sqrt{P^2 + 4S^2 \cos. \frac{1}{2} a}, \quad \text{Tang. } \theta = \frac{2S \cos. \frac{1}{2} a}{P};$$

de sorte que tout se réduit à trouver P et S .

Pour y parvenir, considérons, sur notre trapèze sphérique, un élément m , dont la longitude soit x , et la distance polaire y . Supposons que cet élément soit lui-même un trapèze sphérique isocèle, compris entre deux méridiens interceptant entre eux un arc dx de l'équateur, et entre deux parallèles interceptant entre eux un arc dy du premier méridien; la surface de la zone infiniment étroite dont l'élément m fait partie, ayant pour expression $2\pi dy \sin. y$; il s'ensuit que la surface même de cet élément sera $\frac{dx}{2\pi} \cdot 2\pi dy \sin. y$; c'est-à-dire, $dx dy \sin. y$; et l'attraction exercée par ce même élément sur le centre de la sphère, suivant la direction

du rayon qui lui répond, sera $k dx dy \sin. \gamma$; k étant une constante qui dépendra de l'intensité de la force attractive.

Décomposons cette attraction, que nous pouvons représenter par $d^2 R$, en deux autres, l'une $d^2 P$ dirigée vers le pôle, et l'autre $d^2 Q$ dirigée vers le point de l'équateur dont la longitude est x ; par le principe de la composition des forces, nous trouverons, pour les deux composantes,

$$d^2 P = k dx dy \sin. \gamma \cos. \gamma, \quad d^2 Q = k dx dy \sin. \gamma^2.$$

Décomposons cette dernière, dans le plan de l'équateur, en deux autres passant par les points de ce cercle dont les longitudes sont 0 et a ; en désignant cette dernière par $d^2 S$, nous aurons

$$d^2 S = d^2 Q \cdot \frac{\sin. x}{\sin. a} = \frac{k}{\sin. a} dx dy \sin. x \sin. \gamma^2.$$

Intégrant une première fois, par rapport à x , entre $x=0$ et $x=a$, nous aurons

$$dP = k dy \sin. \gamma \cos. \gamma, \quad dS = k dy \sin. \gamma^2 \text{Tang. } \frac{1}{2} a.$$

Intégrant une seconde fois, par rapport à y , entre $y=b'$ et $y=b$, il viendra

$$P = \frac{1}{2} k a \sin. (b+b') \sin. (b-b'),$$

$$S = \frac{1}{2} k \text{Tang. } \frac{1}{2} a \cdot \{ (b-b') - \sin. (b-b') \cos. (b+b') \}.$$

Substituant enfin ces valeurs dans celles de R et $\text{Tang. } \theta$, trouvées ci-dessus, nous aurons

$$R = \frac{1}{2} k \sqrt{a^2 \sin.^2 (b+b') \sin.^2 (b-b') + 4 \sin.^2 \frac{1}{2} a \cdot \{ (b-b') - \sin. (b-b') \cos. (b+b') \}^2}, \quad (\text{I})$$

$$\text{Tang. } \theta = \frac{\sin. \frac{1}{2} a \cdot \{ (b-b') - \sin. (b-b') \cos. (b+b') \}}{\frac{1}{2} a \cdot \sin. (b+b') \sin. (b-b')}. \quad (\text{II})$$

Et telles sont les deux formules fondamentales desquelles nous allons déduire successivement tous les cas particuliers.

PROBLÈME I. Déterminer l'intensité et la direction de la force attractive exercée par un arc de petit cercle sur le centre de la sphère ?

Solution. Soit supposé l'arc de petit cercle dont il s'agit parallèle à l'équateur, et soit a l'arc de cet équateur compris entre les méridiens qui le terminent. Soit, en outre, b la distance polaire de cet arc. On obtiendra la solution du problème en faisant, dans les formules (I, II), $b' = b - db$, et observant que $\text{Sin}.db = db$, et que $\text{Cos}.db = 1$. Il viendra ainsi

$$R = kdb \cdot \text{Sin}.b \cdot \sqrt{a^2 \text{Cos}.^2 b + 4 \text{Sin}.^2 \frac{1}{2} a \text{Sin}.^2 b},$$

$$\text{Tang}.\theta = \frac{\text{Sin}.\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a} \cdot \text{Tang}.b.$$

Il est d'ailleurs évident que cette force sera dirigée dans le plan du méridien qui divise en deux parties égales l'arc dont il s'agit.

Corollaire. Telles seront donc aussi l'intensité et la direction de l'action exercée par une portion de surface conique droite homogène, soit indéfinie, soit à base circulaire, comprise entre deux arêtes ou génératrices rectilignes, sur un point placé à son sommet, en supposant que l'angle générateur est b , et que les plans conduits par l'axe et par les deux génératrices extrêmes forment entre eux un angle dièdre égal à a .

Remarque. de l'expression de $\text{Tang}.\theta$ on conclut

$$a : \text{Cord}.a :: \text{Tang}.b : \text{Tang}.\theta ;$$

mais, si l'on suppose le rayon de la sphère infini; les arcs de grands cercles se confondront avec leurs tangentes; de sorte que l'on aura alors

$$a : \text{Cord.}a :: b : t ;$$

mais, d'un autre côté, les actions exercées par les différens points de l'arc seront égales et parallèles ; d'où il suit que le point où la force R rencontrera la surface sphérique devenue plane, sera le centre de gravité de l'arc dont il s'agit ; on a donc cette proportion : *Un arc est à sa corde comme son rayon est à la distance de son centre de figure à son centre de gravité ;* ce qui est conforme aux theories connues.

PROBLÈME II. Déterminer l'intensité et la direction de la force attractive exercée par la circonférence d'un petit cercle sur le centre de la sphère ?

Solution. En désignant par b la distance polaire de ce petit cercle, il suffira, pour résoudre le problème, de supposer $a=2\pi$, dans les formules du problème précédent, ce qui donnera

$$R=2\pi kdb.\text{Sin.}b\text{Cos.}b=\pi kdb.\text{Sin.}2b, \quad \text{Tang } t=0.$$

Ainsi, cette attraction, dirigée vers le pôle, est proportionnelle au sinus du double de la distance polaire, ou, si l'on veut, au sinus du diamètre sphérique du petit cercle dont il s'agit ; elle est donc, toutes choses égales d'ailleurs, la plus grande possible pour le parallèle moyen.

Corollaire. Telle est donc aussi l'attraction exercée par une surface conique de révolution, soit indéfinie soit à base circulaire, sur un point placé à son sommet ; elle est donc la plus grande possible pour une surface conique dont l'angle générateur est demi-droit.

PROBLÈME III. Déterminer l'intensité et la direction de la force attractive exercée par un arc de grand cercle sur le centre de la sphère ?

Solution.

Solution. Il ne s'agit pour cela que de faire $b = \frac{1}{2} \pi$, dans les formules du *Problème I*, lesquelles deviendront ainsi

$$R = 2kdb \cdot \text{Sin.} \frac{1}{2} a . \quad \text{T. ng.} \theta = \infty .$$

Ainsi, cette attraction, dirigée vers le milieu de l'arc, est proportionnelle au sinus de sa moitié, ou à la moitié de sa corde, et conséquemment à sa corde même; elle est donc la même pour un arc que pour son complément à la circonférence, ce qui est d'ailleurs évident, puisqu'elle doit être nulle pour la circonférence entière; elle est donc la plus grande possible pour une demi-circonférence.

Corollaire. Telle sera donc aussi la loi d'attraction du plan d'un angle indéfini ou d'un secteur de cercle, sur un point situé à son sommet ou centre.

Remarque. Si l'on prend pour unité d'attraction celle qui est exercée soit par un quart de circonférence ou par un quart de cercle, soit par le plan d'un angle droit indéfini, sur son centre ou sommet, on aura

$$1 = 2kdb \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} , \quad \text{d'où} \quad kdb = \frac{1}{2} \sqrt{2} ;$$

au moyen de quoi la valeur de R deviendra

$$R = \sqrt{2} \cdot \text{Sin.} \frac{1}{2} a .$$

C'est sous cette forme que nous emploierons R dans le problème suivant.

PROBLÈME IV. Déterminer l'intensité et la direction de la force attractive exercée par le périmètre d'un triangle sphérique quelconque sur le centre de la sphère ?

Solution. Soient A, B, C les trois angles du triangle, et a, b, c les côtés respectivement opposés. D'après ce qui précède,

tout se réduira à déterminer l'intensité et la direction de la résultante R de trois forces X , Y , Z , dirigées suivant les rayons qui passent par les milieux des côtés a , b , c , du triangle, et ayant respectivement pour expressions

$$X = \sqrt{2} \cdot \text{Sin.} \frac{1}{2} a, \quad Y = \sqrt{2} \cdot \text{Sin.} \frac{1}{2} b, \quad Z = \sqrt{2} \cdot \text{Sin.} \frac{1}{2} c. \quad (1)$$

Désignons respectivement par α , β , γ les arcs de grands cercles qui joignent les milieux consécutifs des côtés du triangle, α étant opposé à a , β à b et γ à c ; soient de plus x , y , z les arcs de grands cercles menés des mêmes milieux au point inconnu où la sphère est percée par la résultante, x partant du milieu de a , y du milieu de b et z du milieu de c ; nous aurons, par les théories connues (*),

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 + 2YZ \text{Cos.} \alpha + 2ZX \text{Cos.} \beta + 2XY \text{Cos.} \gamma. \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} R \text{Cos.} x &= X + Y \text{Cos.} \gamma + Z \text{Cos.} \beta, \\ R \text{Cos.} y &= Y + Z \text{Cos.} \alpha + X \text{Cos.} \gamma, \\ R \text{Cos.} z &= Z + X \text{Cos.} \beta + Y \text{Cos.} \alpha. \end{aligned} \right\} (3)$$

Cela posé, considérons le triangle dont les trois côtés sont γ , $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, et dans lequel conséquemment l'angle opposé à γ est C ; ce triangle donnera, comme l'on sait,

$$\text{Sin.} \frac{1}{2} a \text{Sin.} \frac{1}{2} b \text{Cos.} C = \text{Cos.} \gamma - \text{Cos.} \frac{1}{2} a \text{Cos.} \frac{1}{2} b;$$

mais le triangle proposé donne

(*) Voyez la pag. 55 du précédent volume.

$$\sin a \sin b \cos C = \cos c - \cos a \cos b ,$$

ou bien

$$4 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} b \cos C = \cos c - \cos a \cos b ;$$

divisant donc cette dernière par la première , afin d'éliminer $\cos C$, nous aurons

$$4 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\cos \gamma - \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b} ;$$

ou , en chassant le dénominateur et transposant ,

$$4 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \gamma = \cos c - \cos a \cos b + 4 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b ;$$

mais on a

$$4 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b = (1 + \cos a)(1 + \cos b) = 1 + \cos a + \cos b + \cos a \cos b ;$$

substituant donc , réduisant et formant les équations analogues pour les deux autres triangles dont α et β sont des côtés , nous aurons

$$\left. \begin{aligned} 4 \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c \cos \alpha &= 1 + \cos a + \cos b + \cos c , \\ 4 \cos \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} a \cos \beta &= 1 + \cos a + \cos b + \cos c , \\ 4 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \gamma &= 1 + \cos a + \cos b + \cos c . \end{aligned} \right\} (4)$$

On peut donc , à l'aide de ces dernières formules , calculer $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, en fonction de a , b , c . Les premières donneront ensuite R , x , y , z , en fonction de ces mêmes quantités.

Par des principes connus , on a

$$1 + \text{Cos.} a + \text{Cos.} b + \text{Cos.} c = 2 \text{Cos.}^{\frac{2}{3}} a + 2 \text{Cos.}^{\frac{2}{3}} (b+c) \text{Cos.}^{\frac{1}{3}} (b-c);$$

ou, en développant et réduisant,

$$1 + \text{Cos.} a + \text{Cos.} b + \text{Cos.} c = 2 \text{Cos.}^{\frac{2}{3}} a + 2 \text{Cos.}^{\frac{2}{3}} b \text{Cos.}^{\frac{2}{3}} c - 2 \text{Sin.}^{\frac{2}{3}} b \text{Sin.}^{\frac{2}{3}} c;$$

ou, en transformant les sinus en fonctions de cosinus et réduisant,

$$1 + \text{Cos.} a + \text{Cos.} b + \text{Cos.} c = 2 \{ \text{Cos.}^{\frac{2}{3}} a + \text{Cos.}^{\frac{2}{3}} b + \text{Cos.}^{\frac{2}{3}} c - 1 \},$$

ou enfin

$$1 + \text{Cos.} a + \text{Cos.} b + \text{Cos.} c = 2 \{ \text{Cos.}^{\frac{2}{3}} b + \text{Cos.}^{\frac{2}{3}} c - \text{Sin.}^{\frac{2}{3}} a \};$$

substituant dans la première des équations (4), et exécutant sur les deux autres une transformation analogue, nous aurons

$$\left. \begin{aligned} 2 \text{Cos.}^{\frac{1}{3}} b \text{Cos.}^{\frac{1}{3}} c \text{Cos.} a &= \text{Cos.}^{\frac{2}{3}} b + \text{Cos.}^{\frac{2}{3}} c - \text{Sin.}^{\frac{2}{3}} a, \\ 2 \text{Cos.}^{\frac{1}{3}} c \text{Cos.}^{\frac{1}{3}} a \text{Cos.} b &= \text{Cos.}^{\frac{2}{3}} c + \text{Cos.}^{\frac{2}{3}} a - \text{Sin.}^{\frac{2}{3}} b, \\ 2 \text{Cos.}^{\frac{1}{3}} a \text{Cos.}^{\frac{1}{3}} b \text{Cos.} c &= \text{Cos.}^{\frac{2}{3}} a + \text{Cos.}^{\frac{2}{3}} b - \text{Sin.}^{\frac{2}{3}} c. \end{aligned} \right\} (5)$$

Présentement, en vertu des formules (1), on a

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 2(\text{Sin.}^{\frac{2}{3}} a + \text{Sin.}^{\frac{2}{3}} b + \text{Sin.}^{\frac{2}{3}} c);$$

on a ensuite, en vertu des mêmes formules et des formules (5),

$$2YZ \text{Cos.} a + 2ZX \text{Cos.} b + 2XY \text{Cos.} c$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2\text{Sin.}\frac{1}{2}b\text{Sin.}\frac{1}{2}c(\text{Cos.}\frac{1}{2}b+\text{Cos.}\frac{1}{2}c-\text{Sin.}\frac{1}{2}a)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}b\text{Cos.}\frac{1}{2}c} \\
 &+ \frac{2\text{Sin.}\frac{1}{2}c\text{Sin.}\frac{1}{2}a(\text{Cos.}\frac{1}{2}c+\text{Cos.}\frac{1}{2}a-\text{Sin.}\frac{1}{2}b)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}c\text{Cos.}\frac{1}{2}a} \\
 &+ \frac{2\text{Sin.}\frac{1}{2}a\text{Sin.}\frac{1}{2}b(\text{Cos.}\frac{1}{2}a+\text{Cos.}\frac{1}{2}b-\text{Sin.}\frac{1}{2}c)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}a\text{Cos.}\frac{1}{2}b} ;
 \end{aligned}$$

ou , en réduisant au même dénominateur ,

$$\begin{aligned}
 &(\text{YZCos.}\alpha+\text{ZXCos.}\beta+\text{XYCos.}\gamma)\text{Cos.}\frac{1}{2}a\text{Cos.}\frac{1}{2}b\text{Cos.}\frac{1}{2}c \\
 &= \text{Sin.}\frac{1}{2}a\text{Cos.}\frac{1}{2}a(\text{Sin.}\frac{1}{2}b\text{Cos.}\frac{1}{2}c+\text{Cos.}\frac{1}{2}b\text{Sin.}\frac{1}{2}c)-\text{Sin.}\frac{1}{2}a\text{Cos.}\frac{1}{2}a\text{Sin.}\frac{1}{2}b\text{Sin.}\frac{1}{2}c \\
 &+ \text{Sin.}\frac{1}{2}b\text{Cos.}\frac{1}{2}b(\text{Sin.}\frac{1}{2}c\text{Cos.}\frac{1}{2}a+\text{Cos.}\frac{1}{2}c\text{Sin.}\frac{1}{2}a)-\text{Sin.}\frac{1}{2}b\text{Cos.}\frac{1}{2}b\text{Sin.}\frac{1}{2}c\text{Sin.}\frac{1}{2}a \\
 &+ \text{Sin.}\frac{1}{2}c\text{Cos.}\frac{1}{2}c(\text{Sin.}\frac{1}{2}a\text{Cos.}\frac{1}{2}b+\text{Cos.}\frac{1}{2}a\text{Sin.}\frac{1}{2}b)-\text{Sin.}\frac{1}{2}c\text{Cos.}\frac{1}{2}c\text{Sin.}\frac{1}{2}a\text{Sin.}\frac{1}{2}b ;
 \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
 &(\text{YZCos.}\alpha+\text{ZXCos.}\beta+\text{XYCos.}\gamma)\text{Cos.}\frac{1}{2}a\text{Cos.}\frac{1}{2}b\text{Cos.}\frac{1}{2}c \\
 &= \text{Sin.}\frac{1}{2}a\text{Cos.}\frac{1}{2}a\text{Sin.}\frac{1}{2}(b+c)-\text{Sin.}\frac{1}{2}a\text{Cos.}\frac{1}{2}a\text{Sin.}\frac{1}{2}b\text{Sin.}\frac{1}{2}c \\
 &+ \text{Sin.}\frac{1}{2}b\text{Cos.}\frac{1}{2}b\text{Sin.}\frac{1}{2}(c+a)-\text{Sin.}\frac{1}{2}b\text{Cos.}\frac{1}{2}b\text{Sin.}\frac{1}{2}c\text{Sin.}\frac{1}{2}a \\
 &+ \text{Sin.}\frac{1}{2}c\text{Cos.}\frac{1}{2}c\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b)-\text{Sin.}\frac{1}{2}c\text{Cos.}\frac{1}{2}c\text{Sin.}\frac{1}{2}a\text{Sin.}\frac{1}{2}b ;
 \end{aligned}$$

ou enfin

$$\begin{aligned}
& (YZ\cos.\alpha + ZX\cos.\beta + XY\cos.\gamma)\cos.\frac{1}{2}a\cos.\frac{1}{2}b\cos.\frac{1}{2}c \\
&= \sin.\frac{1}{2}a\cos.\frac{1}{2}a\{\cos.\frac{1}{2}a\sin.\frac{1}{2}(b+c) - \sin.\frac{1}{2}a\sin.\frac{1}{2}b\sin.\frac{1}{2}c\} \\
&+ \sin.\frac{1}{2}b\cos.\frac{1}{2}b\{\cos.\frac{1}{2}b\sin.\frac{1}{2}(c+a) - \sin.\frac{1}{2}b\sin.\frac{1}{2}c\sin.\frac{1}{2}a\} \\
&+ \sin.\frac{1}{2}c\cos.\frac{1}{2}c\{\cos.\frac{1}{2}c\sin.\frac{1}{2}(a+b) - \sin.\frac{1}{2}c\sin.\frac{1}{2}a\sin.\frac{1}{2}b\}
\end{aligned}$$

mais, de la valeur de $X^2 + Y^2 + Z^2$ trouvée ci-dessus, on peut conclure

$$\begin{aligned}
& (X^2 + Y^2 + Z^2)\cos.\frac{1}{2}a\cos.\frac{1}{2}b\cos.\frac{1}{2}c \\
&= 2(\sin.\frac{1}{2}a + \sin.\frac{1}{2}b + \sin.\frac{1}{2}c)\cos.\frac{1}{2}a\cos.\frac{1}{2}b\cos.\frac{1}{2}c ;
\end{aligned}$$

ajoutant à cette expression le double de la précédente, et ayant égard à l'équation (2), il viendra

$$\begin{aligned}
& R^2\cos.\frac{1}{2}a\cos.\frac{1}{2}b\cos.\frac{1}{2}c \\
& \{= 2\sin.\frac{1}{2}a\cos.\frac{1}{2}a\{\cos.\frac{1}{2}a\sin.\frac{1}{2}(b+c) + \sin.\frac{1}{2}a(\cos.\frac{1}{2}b\cos.\frac{1}{2}c - \sin.\frac{1}{2}b\sin.\frac{1}{2}c)\} \\
& + 2\sin.\frac{1}{2}b\cos.\frac{1}{2}b\{\cos.\frac{1}{2}b\sin.\frac{1}{2}(c+a) + \sin.\frac{1}{2}b(\cos.\frac{1}{2}c\cos.\frac{1}{2}a - \sin.\frac{1}{2}c\sin.\frac{1}{2}a)\} \\
& + 2\sin.\frac{1}{2}c\cos.\frac{1}{2}c\{\cos.\frac{1}{2}c\sin.\frac{1}{2}(a+b) + \sin.\frac{1}{2}c(\cos.\frac{1}{2}a\cos.\frac{1}{2}b - \sin.\frac{1}{2}a\sin.\frac{1}{2}b)\}
\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
& R^2\cos.\frac{1}{2}a\cos.\frac{1}{2}b\cos.\frac{1}{2}c \\
&= \sin.a\{\cos.\frac{1}{2}a\sin.\frac{1}{2}(b+c) + \sin.\frac{1}{2}a\cos.\frac{1}{2}(b+c)\}
\end{aligned}$$

$$\sin b \left\{ \cos \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} (c+a) + \sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} (c+a) \right\}$$

$$\sin c \left\{ \cos \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} (a+b) + \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} (a+b) \right\}$$

ou enfin

$$R^2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c = (\sin a + \sin b + \sin c) \sin \frac{1}{2} (a+b+c)$$

d'où

$$R = \sqrt{\frac{(\sin a + \sin b + \sin c) \sin \frac{1}{2} (a+b+c)}{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}}.$$

Telle est donc l'intensité de l'action exercée par le périmètre du triangle sphérique sur le centre de la sphère, du moins en prenant pour unité l'action exercée par le quart d'un grand cercle. Voyons actuellement quelle en sera la direction.

Cette direction perce la surface de la sphère en un point dont les distances aux trois sommets du triangle sphérique ayant pour ses côtés α , β , γ sont x , y , z . Cherchons l'arc de grand cercle abaissé perpendiculairement de ce même point sur l'un quelconque des côtés de ce triangle, sur γ par exemple. Cet arc de grand cercle n'est évidemment autre chose que l'arc abaissé perpendiculairement sur le côté γ , du sommet opposé, dans le triangle sphérique dont les trois côtés sont γ , x , y . Représentons par ρ l'arc cherché, et soient G , H les angles du triangle respectivement opposés à x , y ; dans le triangle sphérique rectangle dont l'hypothénuse est x et l'un des côtés de l'angle droit ρ , nous aurons

$$\sin \rho = \sin x \sin H \quad \text{ou} \quad \sin^2 \rho = \sin^2 x \sin^2 H,$$

ou encore

$$\sin^2 \rho = \sin^2 x (1 - \cos^2 H) ;$$

mais, par les formules connues,

$$\cos H = \frac{\cos \gamma - \cos \gamma \cos x}{\sin \gamma \sin x} ,$$

d'où

$$\begin{aligned} 1 - \cos^2 H &= \frac{\sin^2 \gamma \sin^2 x - (\cos \gamma - \cos \gamma \cos x)^2}{\sin^2 \gamma \sin^2 x} \\ &= \frac{(1 - \cos^2 \gamma)(1 - \cos^2 x) - (\cos \gamma - \cos \gamma \cos x)^2}{\sin^2 \gamma \sin^2 x} \\ &= \frac{1 - \cos^2 \gamma - \cos^2 x + 2 \cos \gamma \cos x \cos \gamma}{\sin^2 \gamma \sin^2 x} ; \end{aligned}$$

substituant cette valeur dans celle de $\sin^2 \rho$, elle deviendra

$$\sin^2 \rho = 1 - \frac{\cos^2 x - 2 \cos x \cos \gamma \cos \gamma + \cos^2 \gamma}{\sin^2 \gamma} ;$$

d'où encore

$$\cos^2 \rho = \frac{\cos^2 x - 2 \cos x \cos \gamma \cos \gamma + \cos^2 \gamma}{\sin^2 \gamma} ;$$

valeur que l'on peut encore écrire sous cette forme

$$\cos^2 \rho = \frac{(R \cos x)^2 - 2(R \cos x)(R \cos \gamma) \cos \gamma + (R \cos \gamma)^2}{R^2 \sin^2 \gamma} .$$

En substituant dans cette expression pour $R \cos x$ et $R \cos \gamma$ leur valeur

valeurs données par les équations (3), elle deviendra, en réduisant et ayant égard à l'équation (2),

$$\cos^2 \rho = 1 - \frac{(1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma) Z^2}{R^2 \sin^2 \gamma};$$

d'où

$$\sin^2 \rho = \frac{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}{\sin^2 \gamma} \cdot \frac{Z^2}{R^2}.$$

Or, R est connu, par ce qui précède; α , β , γ , sont donnés, soit par les équations (4), soit par les équations (5); enfin, par les équations (1) on a $Z^2 = 2 \sin^2 \frac{1}{2} c$; on a donc tout ce qui est nécessaire pour déterminer l'arc de grand cercle ρ abaissé du point cherché sur le côté γ du triangle sphérique dont les côtés sont α , β , γ ; on pourra donc, de la même manière, obtenir les arcs de grands cercles abaissés du même point perpendiculairement sur les deux autres; on connaîtra donc ainsi les arcs de grands cercles abaissés perpendiculairement du point cherché sur les trois côtés d'un triangle sphérique donné de grandeur et de situation; ce point peut donc être considéré comme étant complètement déterminé.

Corollaire Nous avons donc aussi résolu le problème où il s'agirait de déterminer l'intensité et la direction de l'action totale de la surface d'un angle trièdre, soit indéfini, soit terminé par des arcs d'un même rayon quelconque, ayant leur centre commun à son sommet, sur un point situé à ce sommet.

Remarque I. On se conduirait d'une manière analogue s'il était question de déterminer l'intensité et la direction de l'action totale exercée par le périmètre d'un polygone sphérique quelconque sur le centre de la sphère, ou s'il était question de déterminer l'intensité et la direction de l'action totale exercée par la surface d'un angle polyèdre quelconque, soit indéfini, soit terminé par des arcs d'un même rayon quelconque, ayant son sommet pour centre com-

mun, sur un point situé à ce sommet; mais il paraît que les formules seraient d'une extrême complication.

Remarque II. Si le rayon de la sphère devient infini, le triangle dont les côtés sont a, b, c devient un triangle rectiligne; et le triangle dont les côtés sont α, β, γ , devient également un triangle rectiligne inscrit au premier, ayant ses côtés parallèles aux siens et conséquemment d'une longueur moitié de celle de leur homologue dans celui-là; on a donc, dans ce cas, $\gamma = \frac{1}{2}c$, d'où

$$Z^2 = 2\text{Sin.}^2 \frac{1}{2}c = 2\text{Sin.}^2 \gamma,$$

et par suite

$$\text{Sin.}^2 \rho = 2 \cdot \frac{1 - \text{Cos.}^2 \alpha - \text{Cos.}^2 \beta - \text{Cos.}^2 \gamma + 2\text{Cos.} \alpha \text{Cos.} \beta \text{Cos.} \gamma}{R^2};$$

ρ est donc alors une fonction tout-à-fait symétrique; le point où la résultante coupe le plan des deux triangles, lequel est alors évidemment le centre de gravité du périmètre du triangle dont les côtés sont a, b, c , est donc également distant des trois côtés α, β, γ , de l'autre; il est donc le centre du cercle inscrit à ce dernier; ainsi, *le centre de gravité du périmètre d'un triangle rectiligne quelconque est le centre du cercle inscrit au triangle rectiligne dont les sommets seraient les milieux des côtés de celui-là*; c'est le théorème de M. Poinso. (Voyez sa *Statique*.)

PROBLÈME V. Déterminer l'intensité et la direction de la force attractive exercée par une zone sphérique quelconque, à bases parallèles, sur le centre de la sphère?

Solution. Supposons que le pôle commun des deux bases de la zone soit le pôle même de la sphère, et soient b, b' les distances polaires des circonférences de ces deux bases; il ne s'agira évidemment, pour résoudre le problème, que de supposer $a = 2\pi$, dans les formules (I, II); elles deviendront ainsi

$$R = k \sin.(b+b') \sin.(b-b'), \quad \text{Tang. } t = 0.$$

Corollaire. Telles seront donc aussi l'intensité et la direction de l'action exercée par un corps compris entre deux surfaces coniques de même axe et de même sommet, dont les angles générateurs sont b , b' , sur un point situé à ce sommet, soit que ce corps soit indéfini, soit qu'on le suppose terminé, du côté opposé à son sommet, par une surface sphérique de rayon quelconque, ayant ce sommet pour centre.

PROBLÈME VI. Déterminer l'intensité et la direction de l'attraction exercée sur le centre de la sphère, par la surface du triangle sphérique mixtiligne isocèle compris entre deux grands cercles et le petit cercle ayant leur intersection pour pôle?

Solution. Supposons que les deux grands cercles dont il s'agit soient deux méridiens formant entre eux un angle a , et soit b la distance polaire du petit cercle; il suffira évidemment, pour résoudre le problème proposé, de supposer $b' = 0$, dans les formules (I, II), lesquelles deviendront ainsi

$$R = \frac{1}{2} k \sqrt{a^2 \sin.^2 b + \sin.^2 \frac{1}{2} a (2b - \sin. 2b)^2},$$

$$\text{Tang. } t = \frac{\sin. \frac{1}{2} a}{\frac{1}{2} a} \cdot \frac{2b - \sin. 2b}{2 \sin.^2 b}.$$

Corollaire. Telles seront donc aussi l'intensité et la direction de l'action totale exercée par un angle solide trièdre indéfini, terminé par deux plans et par une portion de surface conique de révolution ayant son axe dans l'intersection des deux plans, sur un point situé à son sommet, soit que cet angle solide soit indéfini, soit

qu'on le suppose terminé, du côté opposé à son sommet, par une surface sphérique de rayon quelconque, ayant ce sommet pour centre.

PROBLÈME VII. Déterminer l'intensité et la direction de l'attraction exercée par la surface d'un triangle sphérique bi-rectangle quelconque sur le centre de la sphère ?

Solution. En supposant que les deux côtés égaux du triangle dont il s'agit sont deux méridiens formant entre eux un angle a ; il ne s'agira, pour résoudre le présent problème, que de supposer $b = \frac{1}{2}\pi$, dans les formules du précédent; elles deviendront ainsi

$$R = \frac{1}{2}k\sqrt{a^2 + \pi^2 \text{Sin.}^2 \frac{1}{2}a}, \quad \text{Tang. } \theta = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{\text{Sin.} \frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a}.$$

On voit par là que $\text{Tang. } \theta$ tend sans cesse à devenir $\frac{1}{2}\pi$, ou que θ tend sans cesse à devenir $80^{\circ}.57'.25''$ à peu près, à mesure que a diminue.

Corollaire. Telles seront donc aussi l'intensité et la direction de l'action totale exercée par un angle solide trièdre bi-rectangle sur son sommet, soit que cet angle solide soit indéfini, soit qu'on le suppose terminé, du côté opposé au sommet, par une surface sphérique de rayon quelconque, ayant ce sommet pour centre, de manière à former une pyramide sphérique bi-rectangle.

PROBLÈME VIII. Déterminer l'intensité et la direction de l'attraction exercée sur le centre de la sphère par la surface d'un triangle sphérique tri-rectangle ?

Solution. Il ne s'agit évidemment pour cela que de supposer $a = \frac{1}{2}\pi$, dans les formules du précédent problème, lesquelles deviendront ainsi

$$R = \frac{1}{2}\pi k\sqrt{3}, \quad \text{Tang. } \theta = \sqrt{2}.$$

Corollaire. Telles seront donc aussi l'intensité et la direction de l'action totale exercée, soit par un angle solide trièdre tri-rectangle indéfini, soit par une pyramide triangulaire sphérique solide tri-rectangle, sur un point situé à son sommet.

Remarque. De même que nous avons pris pour unité d'attraction des angles plans, celle qui est exercée par l'angle droit plan; il paraît naturel de prendre, pour unité d'attraction des angles solides polyèdres, celle qui est exercée par l'angle solide trièdre tri-rectangle; on a ainsi

$$1 = \frac{1}{2} \pi k \sqrt{3}, \quad \text{d'où} \quad k = \frac{4\sqrt{3}}{3\pi}.$$

C'est sous cette forme que nous emploierons à l'avenir la valeur de k .

PROBLÈME IX. Déterminer l'intensité et la direction de l'attraction exercée par une calotte sphérique sur le centre de la sphère ?

Solution. En désignant par b la distance polaire du petit cercle qui termine la calotte dont il s'agit, on parviendra également à la solution de ce problème, soit en faisant $b' = 0$, dans les formules du *Problème V*, soit en faisant $a = 2\pi$, dans les formules du *Problème VI*. Par l'une ou par l'autre voie, on trouvera également, en ayant égard à la valeur de k déterminée ci-dessus,

$$R = \frac{4 \sin^2 b}{\sqrt{3}}, \quad \text{Tang. } \theta = 0.$$

Cette force, dirigée vers le pôle, est donc proportionnelle au carré du sinus de la distance polaire du petit cercle qui termine la calotte, ou ce qui revient au même, au carré du rayon de cette base, et par conséquent à l'aire même de cette base; elle est donc la

même pour les deux calottes qui complètent la surface sphérique, ce qui est d'ailleurs évident, puisqu'elle doit être nulle pour la sphère entière. On peut remarquer encore que pour les distances polaires de 30° , 45° , 60° , 90° , les intensités suivent le rapport des nombres 1, 2, 3, 4.

Corollaire. Telles seront donc aussi l'intensité et la direction de l'action totale d'un cône de révolution solide homogène et indéfini ou d'un secteur sphérique sur un point situé à son sommet; cette action sera donc la plus grande possible, soit pour un corps indéfini terminé d'une part par un plan indéfini, soit pour un hémisphère solide et homogène.

Remarque. En rapprochant de la solution de ce problème celle que nous avons obtenue pour le *Problème III*, on en voit ressortir une analogie très-remarquable entre l'une et l'autre. Le plan du cercle qui sert de base à une calotte sphérique est en effet, par rapport à cette calotte, ce qu'est la corde d'un arc par rapport à cet arc même; et, de même que l'attraction exercée par l'arc se trouve proportionnelle à sa corde, celle qu'exerce la calotte sphérique se trouve, semblablement, proportionnelle à l'aire de sa base.

PROBLÈME X. Déterminer l'intensité la direction de l'attraction exercée par un fuseau sphérique sur le centre de la sphère?

Solution. En désignant par a l'angle des plans des deux grands cercles qui terminent le fuseau, il suffira évidemment de supposer $b = \pi$, dans les formules du *Problème VI*, ce qui donnera, en ayant d'ailleurs égard à la valeur assignée à k ,

$$R = \frac{4\text{Sin.} \frac{1}{2}a}{\sqrt{3}}, \quad \text{Tang. } t = \infty.$$

Cette force, dirigée vers le milieu de l'arc de l'équateur intercepté entre les deux méridiens qui bornent le fuseau, est donc proportionnelle à la corde de cet arc; elle est donc la même pour un

fuseau quelconque que pour son complément à la sphère, ainsi que cela doit être ; elle est donc la plus grande possible pour la surface de l'hémisphère. On peut encore remarquer que, pour les fuseaux de 60° , 90° , 180° , les forces seront entre elles comme les nombres 1 , $\sqrt{2}$, 2 .

Corollaire. Telles seront donc aussi l'intensité et la direction de l'action totale exercée soit par un angle solide dièdre homogène et indéfini sur un point de son arête, soit par un onglet sphérique homogène, compris entre les plans de deux grands cercles sur le milieu de son arête rectiligne.

Remarque I. La comparaison des résultats que nous venons d'obtenir avec celui où nous a conduit le *Problème III* donne lieu à un rapprochement très-remarquable : il consiste en ce que l'attraction exercée par un angle solide dièdre homogène et indéfini sur un point de son arête croît et décroît exactement comme celle qu'exercerait sur le même point le plan de la section faite perpendiculairement à l'angle solide par le même point ; de sorte qu'il n'y a absolument entre l'une et l'autre forces qu'une simple différence d'intensité.

Remarque II. Si l'on demandait quelle doit être la grandeur de l'angle dièdre pour que son action sur un point de son arête fût double de celle qu'exercerait sur ce même point un angle trièdre tri-rectangle dont il serait le sommet, il suffirait de faire $R=2$, ce qui donnerait

$$\text{Sin. } \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \text{d'où} \quad \text{Tang. } \frac{1}{2}a = \sqrt{3};$$

cela donne $\frac{1}{2}a = 60^\circ$ et $a = 120^\circ$. Ainsi, un point placé sur l'arête d'un angle dièdre solide homogène et indéfini de 120° , en est deux fois plus attiré, toutes choses égales d'ailleurs, qu'il ne le serait par un angle trièdre solide tri-rectangle indéfini au sommet duquel il se trouverait situé.

LEMME II. Déterminer l'intensité et la direction de l'attraction exercée par une portion de fuseau sphérique infiniment étroit sur le centre de la sphère?

Solution En supposant que les arcs de grands cercles qui bornent le fuseau soient des arcs de méridiens, d'une longueur commune égale à b , et formant entre eux un angle égal à da , il suffira évidemment, pour parvenir au but, de changer a en da , dans les formules du *Problème VI*; observant qu'alors $\text{Sin } \frac{1}{2} da = \frac{1}{2} da$, il viendra

$$R = \frac{1}{2} k da \sqrt{b^2 - 2b \text{Sin.} b \text{Cos.} b + \text{Sin.}^2 b}, \quad \text{Tang.} \theta = \frac{b - \text{Sin.} b \text{Cos.} b}{\text{Sin.}^2 b}.$$

PROBLÈME XI. Déterminer l'intensité et la direction de l'attraction exercée par la surface d'un triangle sphérique quelconque sur le centre de la sphère?

Solution. Le triangle sphérique dont il s'agit étant donné, ses angles et ses côtés doivent l'être aussi. Soient donc a, b, c ses trois côtés et A, B, C les angles respectivement opposés. Supposons-le tellement situé sur la sphère que son côté a se confonde avec le premier méridien et le sommet de son angle C avec le pôle.

Considérons sur ce triangle une portion de fuseau infiniment étroite ayant son sommet en C et se terminant au côté opposé c ; soit X l'angle que forme l'un des deux méridiens qui borne cette portion de fuseau avec le premier méridien; soit dX l'angle des deux méridiens qui le terminent, et soit enfin y leur longueur commune jusqu'au côté c (car, à cause de l'angle infiniment petit qu'ils comprennent, il est permis de les supposer égaux). Si nous désignons par dP l'action exercée par cet élément sur le centre de la sphère et par θ l'angle que fait sa direction avec le rayon qui va au pôle, nous aurons, par le *Lemme II*,

$$dP = \frac{1}{2} k dX \sqrt{y^2 - 2y \text{Sin.} y \text{Cos.} y + \text{Sin.}^2 y}, \quad \text{Tang.} \theta = \frac{y - \text{Sin.} y \text{Cos.} y}{\text{Sin.}^2 y};$$

et,

et, d'après les principes connus sur les triangles sphériques, les variables X et y se trouveront liées entre elles par la relation

$$\cos a \cos X = \sin a \cot y - \sin X \cot B, \quad (1)$$

de laquelle on tire, par différentiation,

$$dy \sin a = dX (\cos a \sin X - \cot B \cos X). \quad (2)$$

Considérant, dans ces deux équations, $\sin X$ et $\cos X$ comme deux inconnues, nous en tirerons

$$(\cos^2 a + \cot^2 B) \sin X = \sin a \left(\cot B \cot y + \frac{dy}{dX} \cos a \right),$$

$$(\cos^2 a + \cot^2 B) \sin X = \sin a \left(\cos a \cot y - \frac{dy}{dX} \cot B \right);$$

ajoutant ensemble les carrés de ces deux équations, nous aurons, en réduisant,

$$(\cos^2 a + \cot^2 B) = \sin^2 a \left\{ \cot^2 y + \left(\frac{dy}{dX} \right)^2 \right\};$$

d'où

$$dX = \sin a \cdot \frac{dy \sin y}{\sqrt{(\cos^2 a + \cot^2 B) \sin^2 y - \sin^2 a \cos^2 y}};$$

substituant cette valeur de dX dans celle de dP , elle deviendra

$$dP = \frac{1}{2} k \sin a \cdot \frac{dy \sin y \sqrt{y^2 - 2y \sin y \cos y + \sin^2 y}}{\sqrt{(\cos^2 a + \cot^2 B) \sin^2 y - \sin^2 a \cos^2 y}}.$$

Cherchons présentement à décomposer cette force en trois autres dD , dE , dF , passant par les sommets A , B , C , ou plutôt cherchons seulement la composante dF passant par le sommet A ; attendu que de celle-là il sera facile de conclure les deux autres. Pour y parvenir, remarquons que, par les principes de la statique, on a

$$dP : dF :: \text{Sin.}y : \text{Sin.}(y-\theta);$$

d'où

$$dF = dP \cdot \frac{\text{Sin.}(y-\theta)}{\text{Sin.}y},$$

mais, d'après l'expression de $\text{Tang.}\theta$, on trouve,

$$\text{Sin.}\theta = \frac{y - \text{Sin.}y \text{Cos.}y}{\sqrt{y^2 - 2y \text{Sin.}y \text{Cos.}y + \text{Sin.}^2y}};$$

$$\text{Cos.}\theta = \frac{\text{Sin.}^2y}{\sqrt{y^2 - 2y \text{Sin.}y \text{Cos.}y + \text{Sin.}^2y}};$$

d'où résulte

$$\text{Sin.}(y-\theta) = \text{Sin.}y \text{Cos.}\theta - \text{Cos.}y \text{Sin.}\theta = \frac{\text{Sin.}y - y \text{Cos.}y}{\sqrt{y^2 - 2y \text{Sin.}y \text{Cos.}y + \text{Sin.}^2y}};$$

et par conséquent

$$dF = dP \cdot \frac{\text{Sin.}y - y \text{Cos.}y}{\text{Sin.}y \sqrt{y^2 - 2y \text{Sin.}y \text{Cos.}y + \text{Sin.}^2y}};$$

mettant enfin pour dP la dernière valeur trouvée ci-dessus, nous aurons

$$dF = \frac{1}{2} k \text{Sin.}a \cdot \frac{(\text{Tang.}y - y) dy}{\sqrt{(\text{Cos.}^2a + \text{Cot.}^2B) \text{Tang.}^2y - \text{Sin.}^2a}}.$$

Voici donc finalement à quoi se réduit la question. Il faudra intégrer dF ; entre $X=0$ et $X=C$, c'est-à-dire, entre

$$\text{Cot.}y = \frac{\text{Cos.}a + \text{Cot.}B}{\text{Sin.}a} \quad \text{et} \quad \text{Cot.}y = \frac{\text{Cos.}a \text{Cos.}C + \text{Cot.}B \text{Sin.}C}{\text{Sin.}a} ;$$

on obtiendra ainsi une expression de F que l'on pourra toujours amener à n'être uniquement fonction que des trois côtés du triangle proposé, et de laquelle, par une simple permutation de lettres, on conclura les valeurs de D , E ; on connaîtra donc les intensités et les directions de trois composantes D , E , F , passant respectivement par les points A , B , C ; d'où il sera facile de conclure l'intensité et la direction de leur résultante R .

Dans un article supplémentaire, nous tenterons d'intégrer l'expression de dF , et de compléter ainsi la solution de notre problème.
