ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

FRÉGIER

Analise indéterminée. Théorème sur les puissances des nombres

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 9 (1818-1819), p. 211-212
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1818-1819__9__211_0>

ANALISE INDÉTERMINÉE.

Théorème sur les puissances des nombres;

Par M. Frégier, professeur de mathématiques au collége de Troye, ancien élève de l'école polytechnique.

Théorème. « Toute puissance a^m d'un nombre quelconque a » est égale à la somme des termes d'une progression par différences; » dont le premier terme est 1, dont le nombre des termes est a, » et dont la raison est égale à la somme des termes de la pro- » gression géométrique $2+2a+2a^2+2a^3+\ldots\ldots+2a^{m-2}$. »

Démonstration. Designons par S la somme des termes de la progression arithmétique dont il s'agit, et par d la raison de cette progression; puisque son premier terme est 1, et le nombre de ses termes a, son dernier terme sera $1+(a-1)d$, d'où il suit qu'on aura

$$S=[1+(a-1)d]\frac{a}{2};$$

mais, par hypothèse, on a

$$d=2a+2a^2+\ldots\ldots\ldots+2a^{m-2}=2\frac{a^{m-1}-1}{a-1},$$

donc

$$(a-1)d=2(a^{m-1}-1);$$

ce qui donne, en substituant

$$S=a^m\ ,$$

comme l'énonce le théorème.

Si $m=2$, on aura $2+2a+\ldots\ldots+2a^{m-2}=2$, d'où

$$a^2=1+3+5+7+\ldots\ldots\ldots+(2a-1)\ ,$$

propriété connue.

Mais, si $m=3$, ce qui donne $2+2a+\ldots\ldots+2a^{m-2}=2(1+a)$; on aura

$$a^3=1+(3+2a)+(5+4a)+(7+6a)+\ldots\ldots+[(2a-1)+2(a-1)a]\ ;$$

propriété curieuse des nombres cubes, qu'il est d'ailleurs facile de vérifier immédiatement.

En faisant successivement $a=1$, 2, 3, 4,....., on a

$$1=1^3=1\ ;$$

$$8=2^3=1+7\ ;$$

$$27=3^3=1+9+17\ ,$$

$$64=4^3=1+11+21+31\ ;$$

$$125=5^3=1+13+25+37+49\ ;$$

$$216=6^3=1+15+29+43+57+71\ ;$$

$$343=7^3=1+17+33+49+65+91+107\ ,$$

. . . .

Chacun de ces cubes forme donc une progression arithmétique dont le premier terme est l'unité, dont le nombre des termes est la racine du cube, et dont la raison est double de cette racine augmentée d'une unité.

ANALISE