ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

CONDITIONS DE LA SOUSCRIPTION.

Depuis le premier juillet 1810, ce recueil paraît de mois en mois, par livraisons de 30 à 40 pages. La couverture de chaque livraison présente l'annonce des ouvrages nouveaux et des concours académiques.

On peut souscrire indifféremment,

Au bureau des *Annales*, rue du St-Sacrement, maison *Fouquet*, à Montpellier, [Hérault];

Chez madame *veuve Courcier*, imprimeur-libraire pour les mathématiques, rue du Jardinet, n.° 12, quartier de St-André-des-Arcs, à Paris;

Et à tous les bureaux de poste.

Les articles à insérer et ouvrages à annoncer doivent être adressés, francs de port, au *Bureau des Annales.*

Le prix de la souscription annuelle est 21 fr. pour la France, et 24 fr. pour l'étranger. Il en coûte moitié moins, pour six mois; et le prix de chacun des neuf premiers volumes est inférieur de 3 fr. à celui de la souscription annuelle. Les lettres et l'argent doivent être affranchis.

AVIS au Relieur,

Sur le placement des Planches.

Planche	I.	Après la page	116.
	II.		320.

ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

RECUEIL PÉRIODIQUE,

RÉDIGÉ

Par J. D. GERGONNE, professeur d'astronomie à la faculté des sciences de Montpellier, membre de plusieurs sociétés savantes.

TOME NEUVIÈME.

A NISMES,

DE L'IMPRIMERIE DE P. DURAND-BELLE.

Et se trouve à PARIS, chez la dame Veuve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, rue du Jardinet, n.° 12, quartier St-André-des-Arcs.

1818 ET 1819.

ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

VARIÉTÉS.

Essai sur la théorie des définitions,

Par M. Gergonne.

Rien ne semble plus propre à rabattre l'orgueil de l'homme ; à lui inspirer une juste défiance de lui-même, et à lui montrer à quel point sont resserrées les bornes de son intelligence ; rien ne peut mieux lui faire sentir combien ce qu'il appelle sa raison est encore enveloppé de nuages et de ténèbres que la divergence des opinions des plus grands philosophes, ou du moins de ceux qui sont universellement tenus pour tels, je ne dirai pas sur telle doctrine, particulièrement relative à telle ou telle branche de nos connaissances, mais sur ces doctrines premières qui semblent devoir être le fondement commun de tout savoir humain.

Cette divergence d'opinions, indice irrécusable de l'imperfection de nos lumières, ne se montre en aucune part d'une manière plus frappante qu'en ce qui concerne les définitions. Les géomètres de tous les temps y ont attaché le plus grand prix et la plus haute importance : Platon regardait, dit-on, celui qui savait bien définir, comme participant de l'intelligence divine ; et Pascal n'a pas hésité à regarder l'impossibilité où nous sommes de tout définir, comme la source unique de l'incertitude de nos connaissances.

Locke a professé une doctrine à peu près pareille, touchant les définitions ; et cependant, une secte philosophique, sortie de son école, a voulu, dans ces derniers temps, les frapper d'une sorte de proscription, les a signalées, non seulement comme tout-à-fait inutiles, mais même comme d'un usage extrêmement dangereux ; et beaucoup de gens aujourd'hui ont adopté et professent hautement cette doctrine.

Ce n'est pas tout encore : parmi les philosophes qui ont admis la nécessité ou du moins l'utilité des définitions, les uns, comme Aristote et toute son école, ont prescrit de définir *par le genre et la différence* ; tandis qu'au contraire, d'autres, comme Locke, ont prétendu que cette manière de définir n'était pas toujours nécessaire ni même toujours possible. Enfin, tandis qu'Aristote distingue des *définitions de choses*, sujettes à être contestées, et qui doivent conséquemment être appuyées d'une démonstration, et des *définitions de noms*, qui doivent être admises comme des axiomes, et placées au même rang qu'eux dans la pratique du raisonnement ; d'autres philosophes, comme Pascal, Hobbes et Locke, semblent n'en avoir reconnu que de la dernière sorte ; et d'Alembert, prenant un parti mitoyen, admet des définitions qui, dit-il, sont un peu moins que des définitions de choses, mais cependant un peu plus que de simples définitions de noms.

Il y aurait sans doute beaucoup d'orgueil à prétendre dire encore aujourd'hui quelque chose de neuf sur un sujet tant et si long-temps débattu ; mais, de même que le rapporteur dans une affaire contentieuse peut souvent, avec des lumières d'ailleurs très-bornées, résumer et balancer les opinions, de manière à répandre plus de jour sur la discussion, et à lui donner une issue favorable, il peut également n'être pas sans intérêt et sans utilité qu'un homme de bonne foi examine à quoi l'on peut raisonnablement s'en tenir à l'égard des opinions diverses auxquelles la théorie des définitions a donné naissance ; et c'est parce qu'il nous paraît qu'un éloignement bien décidé pour ce qui ressemble à l'esprit de secte et de parti, est la qualité la plus désirable de la part de celui qui voudra remplir cette tâche, que nous hasardons de l'entreprendre.

I. En examinant de quelle manière toutes les langues connues sont constituées, on aperçoit d'abord qu'elles renferment toutes également et principalement deux sortes de mots, dont les uns désignent des objets individuels, tandis que les autres sont les signes de diverses collections d'objets, plus ou moins nombreux, se ressemblant les uns aux autres par quelques points dont la considération exclusive a conduit à en faire autant de groupes distincts. Ainsi, par exemple, le mot *Newton* est le nom d'un seul individu, tandis que celui de *Géomètre* est, au contraire, le nom commun à une multitude d'hommes différens de pays, de caractère, etc. ; mais se ressemblant du moins en ce point qu'ils cultivent tous ou ont tous cultivé, dans le cours de leur vie, les sciences exactes d'une manière spéciale.

Il serait assez difficile de décider si les noms individuels sont plus ou moins nombreux que les noms collectifs. Mais ce qu'on peut remarquer c'est que, tandis qu'il n'y a qu'une petite portion des noms individuels qui soient en usage dans chaque localité, les noms communs, au contraire, sont *presque tous* à l'usage de tout le monde. Ainsi, par exemple, les noms des rues et des places d'une ville, ceux des individus dont elle est peuplée, qui sont d'ordinaire très-familiers aux gens qui l'habitent depuis long-temps, sont inconnus de presque tous ceux qui n'y font point leur résidence ; tandis que les mots *homme*, *oiseau*, *poisson*, etc., sont également sans cesse dans la bouche de tout le monde.

Nous avons dit *presque tous*, parce que les termes d'arts et de sciences, quoiqu'ils soient, pour la plupart, des noms communs; ne sont guères familiers qu'à ceux par qui ces arts et ces sciences sont cultivés.

Ainsi, bien que les noms individuels soient extrêmement nombreux; ils sont, à l'égard de chacun de nous en particulier, comme s'ils étaient en petit nombre, attendu que chacun de nous n'en a besoin, pour son usage, que d'un nombre assez limité; et voilà comment, dans le langage, on emploie incomparablement plus de noms communs que de noms propres, quoiqu'il puisse très-bien se faire que les derniers soient beaucoup plus nombreux que les premiers. Quoi qu'il en soit, on sent qu'il existe et qu'il existera toujours une multitude innombrable d'objets dépourvus de noms individuels; qu'il serait d'autant plus difficile de les nommer tous qu'il est impossible de les tous connaître; et qu'on sera d'autant moins sollicité à le faire qu'on n'en pourrait retirer aucun avantage réel. Ainsi, tandis que les étoiles du ciel, du moins celles que nous pouvons apercevoir, ont toutes reçu des noms, il est très-probable que les arbres de nos forêts et les animaux qui les habitent ne seront jamais honorés d'une pareille distinction.

De même qu'on a inventé des mots pour désigner collectivement des objets qui se ressemblaient à certains égards, on en a inventé également pour nommer des collections de groupes ayant aussi entre eux quelques points de ressemblance; on en a inventé encore pour réunir, par des propriétés communes, plusieurs de ces collections de groupes, et ainsi de suite; jusque-là qu'on est enfin parvenu, d'abstraction en abstraction, à un mot unique comprenant universellement dans sa signification tous les objets de nos pensées: c'est le mot *être* dans notre langue.

Les premiers inventeurs de langues, c'est-à-dire, les premières réunions d'hommes, ont donc fait par instinct ce que postérieurement les naturalistes ont fait par un dessein réfléchi, c'est-à-dire que, pour éluder la difficulté, ou, pour mieux dire, l'impossibilité d'imposer des noms à tous les objets qui affectaient ou pouvaient affecter leurs sens, ou occuper leurs pensées, ils se sont bornés à former des *classes*, des *ordres*, des *genres*, des *espèces*, des *variétés*, etc. Mais on conçoit très-bien qu'entre leur travail et celui des naturalistes, il doit y avoir la même différence qui existe entre des habitations informes bâties à la hâte, dans la seule vue de satisfaire au premier besoin, et de superbes palais, élevés d'après des plans dressés à l'avance et long-temps médités. Si donc le travail des naturalistes est loin d'être parfait; si chaque jour on se trouve obligé d'y apporter quelques modifications, d'y remplir des lacunes, d'en faire disparaître des doubles emplois et d'y réparer de graves omissions; à combien plus forte raison les classifications entreprises par les premiers inventeurs des langues doivent-elles laisser à désirer. C'est seulement dans un état de civilisation très-avancé qu'on pourrait tenter de reprendre un pareil travail avec tout le soin que semble exiger son importance; mais alors même, il laisserait toujours quelque chose à l'arbitraire; et son exécution serait inévitablement subordonnée à la tournure d'esprit et à la manière de voir et de sentir de celui qui aurait le courage de s'en charger. Si d'ailleurs, comme on ne saurait en disconvenir, la langue que nous avons apprise dans notre enfance est l'instrument dont nous nous servons pour penser; il est naturel d'en conclure que le travail grossier des premiers inventeurs des langues ne serait pas sans quelque influence sur ce travail plus perfectionné.

Nous venons de voir comment un premier genre d'abstraction avait donné naissance à un grand nombre de mots de nos langues: nous allons voir un autre genre d'abstraction contribuer encore à les enrichir.

Les objets de nos pensées ne sont réellement pour nous que des collections de propriétés par lesquelles nous avons prise sur eux. Que le sujet dans lequel nous concevons ces propriétés puisse en être totalement dépouillé sans perdre toute existence réelle, ou, qu'au contraire, ce soit l'ensemble même de ces propriétés qui en constitue l'existence; c'est là ce que nous devons probablement consentir à toujours ignorer, et ce qu'au surplus il nous importe assez peu de savoir.

Mais tandis que, d'un objet à un autre, quelques-unes de ces propriétés sont différentes, il en est d'autres, au contraire, qui sont constamment les mêmes dans plusieurs objets, très-différens d'ailleurs, sous d'autres rapports; et c'est ce qui nous a conduit à détacher ces propriétés des objets dans lesquels elles résident, pour en faire le sujet particulier de nos pensées, et à leur imposer des noms; et c'est ainsi, par exemple, que ce sont introduits dans le langage les mots qui représentent les couleurs, les odeurs, les saveurs, etc. Ces mots ne désignent ni des individus, ni des collections d'individus; mais seulement la manière commune dont nous affectent, sous un point de vue particulier, certaines classes d'individus.

Mais, parce que, dans l'origine, on avait représenté les choses par des mots; on a été bientôt conduit à supposer que tous les mots devaient exprimer des choses, ayant une existence réelle et indépendante; ainsi, par exemple, on s'est figuré qu'il existait une *rondeur* tout-à-fait indépendante des objets en qui on remarque cette qualité, et l'on a sérieusement demandé, par exemple, ce que devenait la rondeur d'une boule de cire lorsque cette boule était applatie. C'est cette réalité, attribuée faussement à de pures conceptions de notre esprit, qui a donné naissance à tant de vaines disputes et fait dire tant de sottises dans les écoles.

Au surplus, ce second genre d'abstraction n'est pas aussi différent du premier qu'on pourrait être d'abord tenté de le croire; et il est évident, par exemple, qu'en créant le mot *blanc* ou *blancheur*, on n'a fait autre chose que réunir dans une même classe tous les objets dans lesquels cette couleur se manifeste.

On a donc créé des mots dont les uns désignaient de simples individus, les autres des collections d'individus, et d'autres enfin des propriétés ou manières d'être communes à plusieurs individus; et ces mots sont ce qu'on appelle des *noms* en termes de grammaire. On les a distingués en noms *substantifs* et en noms *adjectifs*; mais cette distinction est née de la supposition de l'existence dans chaque objet d'un soutien ou support des qualités par lesquelles cet objet se manifeste; et, comme cette supposition ne saurait être appuyée d'aucune preuve, il s'ensuit qu'on ne doit raisonnablement considérer la distinction des noms en noms substantifs et en noms adjectifs, que comme une distinction purement grammaticale.

Les noms tant substantifs qu'adjectifs ne sont pas les seuls dont on ait besoin dans les langues, et il est nécessaire d'y introduire encore des mots qui marquent les relations que les choses ont entre elles; tels sont les mots *égalité*, *inégalité*, *antériorité*, *postériorité*, *dessus*, *dessous*, *dedans*, *dehors*, et une multitude d'autres, dont on pourrait grammaticalement faire plusieurs classes, mais que, philosophiquement parlant, on peut comprendre dans une seule. Si l'on y joint le verbe substantif, c'est-à-dire, le verbe *être* ou son équivalent dans les idiomes étrangers à notre langue, on aura la collection à peu près complète des mots strictement nécessaires à toutes les langues, et qui se retrouvent à peu près dans toutes.

Pour qui a peu de besoins et peu de pensées, la langue peut impunément être extrêmement bornée; mais, à mesure que les besoins se multiplient, que les relations se compliquent, que les pensées se combinent, le besoin de mots nouveaux se fait sentir de plus en plus; et, ce qu'on paraît n'avoir pas assez remarqué, c'est que ces mots n'agissent simplement que comme abréviation; et qu'ils remplissent exactement le même office que remplissent en algèbre les symboles par lesquels, dans la vue de simplifier les calculs et leurs résultats, on représente des fonctions que l'on prévoit devoir se reproduire fréquemment.

On peut remarquer, en effet, que, de même qu'en chimie, le mixte le plus composé ne peut offrir qu'une combinaison soit des élémens communs à tous les corps, soit d'autres mixtes plus simples, formés eux-mêmes de la réunion de quelques-uns de ces élémens;

les idées qu'une science embrasse, les propositions dont elles se composent, ne sauraient également contenir que les idées et propositions élémentaires que l'étude de la science suppose déjà acquises, ou d'autres idées et propositions formées déjà de la combinaison de quelques-unes de celles-ci.

Si donc on n'avait recours à quelques moyens d'abréviation, il est aisé de sentir qu'à mesure qu'on pénetrerait plus avant dans quelque science que ce soit, qu'à mesure que les propositions s'éloigneraient davantage des notions premières d'où on les aurait derivées; elles se compliqueraient de plus en plus; et ce serait là un obstacle assez grave pour arrêter bientôt la marche de l'esprit humain dans ses recherches, et rendre ainsi le progrès des sciences tout-à-fait impossible. On ne peut, en effet, saisir nettement le sens d'une proposition qu'autant que les idées dont elle se compose et les rapports qu'elle annonce exister entre elles, sont simultanément présens à la pensée; et comme, d'un autre côté, notre esprit n'a pas la faculté d'embrasser à la fois, d'une manière distincte, un grand nombre d'objets, il est nécessaire d'en conclure qu'une proposition qui renferme explicitement dans son énoncé, une multitude d'idées et de rapports divers, est, par là même, une proposition tout-à-fait inintelligible.

Prenons, par exemple, cette proposition très-élémentaire de géométrie : *Dans un demi-cercle, la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de la circonférence sur le diamètre est moyenne proportionnelle entre les deux segmens de ce diamètre*; et supposons que, dans la vue de nous rapprocher du langage vulgaire, nous voulions ôter de cette proposition les mots *circonférence*, *diamètre*, *perpendiculaire* et *moyenne proportionnelle*, il faudrait l'énoncer ainsi : *Une courbe plane ayant tous ses points également distans d'un même point*; *si*, *ayant mené par ce point une droite terminée de part et d'autre à la courbe*, *on mène*, *par un autre point quelconque de cette courbe*, *une droite faisant des angles égaux avec celle-là*, *et terminée à sa rencontre avec elle*, *le quarré*

quarré construit sur cette dernière droite sera équivalent au rectangle construit sur les deux parties qu'elle détermine sur la première. Voilà, certes, déjà une proposition d'une passable longueur; mais, qu'on essaie d'en faire disparaître encore les mots *angle*, *quarré*, *rectangle*, *équivalent*, et l'on verra qu'il deviendra tout-à-fait impossible, non seulement de la comprendre, mais même de l'énoncer nettement; et cependant il ne s'agit ici que d'une proposition tout-à-fait élémentaire; que serait-ce donc s'il était question de quelque théorème de mécanique, tel, par exemple, que celui des vitesses virtuelles ou de la conservation des forces vives.

C'est donc bien à tort que l'on reproche aux savans de ne point parler la langue vulgaire, et d'en créer une exclusivement destinée à leur usage; c'est au fond leur reprocher de s'occuper d'autres objets que ceux dont s'occupe le vulgaire, ou d'envisager les objets sous d'autres rapports. Ce n'est point volontairement, c'est tout-à-fait par contrainte qu'ils créent des mots nouveaux, à mesure qu'ils pénètrent plus avant dans leurs recherches; peut-être même pourrait-on leur reprocher, au contraire, de ne pas user assez largement de cette faculté; il y a apparence qu'alors beaucoup de parties des sciences deviendraient d'une étude plus facile; précisément parce que les propositions dont ces parties se composent deviendraient d'un énoncé plus brief (*).

C'est en imitant exactement ce que font les algébristes lorsqu'ils calculent que l'on pourra parvenir à éluder cet inconvénient des longues phrases. A mesure qu'ils s'aperçoivent que leurs résultats se compliquent, ils ont soin de désigner par un caractère unique

(*) C'est, par exemple, une chose tout-à-fait inconvenante qu'on n'ait pas encore de nom pour désigner et la droite qui divise un angle en deux parties égales et la perpendiculaire sur le milieu d'une droite. Le mot *projection* peut aussi rendre plus courtes, et conséquemment plus claires, beaucoup de propositions de géométrie; et cependant il n'y a guère que M. Francœur qui ait songé jusqu'ici à l'introduire dans les élémens.

chacune des combinaisons de lettres qui s'y trouvent répétées plusieurs fois ; ils opèrent ensuite sur les nouveaux symboles qu'ils ont ainsi institués comme ils l'avaient fait sur les premiers ; et, si leurs formules se compliquent de nouveau, ils les simplifient encore par un semblable procédé, et parviennent enfin, par l'application répétée du même artifice, à un dernier résultat dont la simplicité n'a, pour ainsi dire, d'autres limites que celles qu'il leur plaît de lui assigner. A la vérité, ce résultat final renferme autre chose que les élémens primitifs de la question à laquelle il se rapporte, et peut même ne renfermer aucun de ces élémens ; mais il n'en est pas pour cela moins intelligible, puisque les symboles dont il se compose représentent des combinaisons connues soit de ces élémens, soit d'autres symboles intermédiaires, qui en sont eux-mêmes des combinaisons absolument déterminées. C'est ainsi, par exemple, que si l'on a la formule

$$x=\frac{(1+a^2)+\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}+(1+b^2)}{(1+a^2)-\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}+(1+b^2)},$$

en y faisant

$$\sqrt{1+a^2}=A\ ;\qquad \sqrt{1+b^2}=B\ ,$$

elle devient

$$x=\frac{A^2+\sqrt{AB}+B^2}{A^2-\sqrt{AB}+B^2},$$

qui devient elle-même

$$x=\frac{M}{N}\ ,$$

en posant à la fois

$$A^2+\sqrt{AB}+B^2=M\ ,\qquad A^2-\sqrt{AB}+B^2=N\ .$$

C'est encore ainsi que continuellement, dans le calcul, on remplace les séries

$$\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\ldots\ldots,$$

$$1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\ldots\ldots;$$

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots\ldots,$$

$$4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots\right),$$

par les abréviations Sin.x, Cos.x, e, ϖ.

Si donc on ne veut pas que les propositions se compliquent de plus en plus, à mesure qu'on avance dans les sciences, il faut pareillement créer des mots nouveaux pour désigner les combinaisons d'idées, rapports ou vues de l'esprit dont on prévoit que la considération pourra s'offrir fréquemment, et que, sans cet artifice, on ne pourrait exprimer que par de longues phrases. Il est donc vrai de dire qu'en créant ou en perfectionnant une science on se trouve inévitablement conduit à créer ou à perfectionner une langue; et il est encore vrai de dire que, de même qu'en algèbre, un choix heureux de notations rend les calculs beaucoup plus faciles à suivre et à exécuter, la bonne composition de la langue d'une science, quoiqu'elle ne constitue pas seule la science, est singulièrement propre à en faciliter l'étude et à en hâter les progrès.

En ayant donc l'attention, toutes les fois du moins que le besoin ou l'utilité s'en fera sentir, de remplacer une collection de mots par un mot unique équivalent, il arrivera que les propositions placées aux dernières limites des sciences ne seront pas plus compliquées que les propositions élémentaires desquelles elles auront été déduites; et, bien qu'elles soient formées de mots différens de ceux qu'on avait employés dans l'énoncé de celles-ci, elles n'en seront pas pour cela moins intelligibles, puisque le sens de chacun des mots dans lesquels elles seront exprimées pourra toujours être indiqué à l'aide d'autres mots dont la signification précise aura été antérieurement fixée.

On pourrait objecter ici qu'en remplaçant ainsi une collection de mots par un mot unique, l'esprit n'en sera pas moins obligé de porter son attention sur la totalité des idées dont on l'aura constitué le symbole, et qu'ainsi on n'évitera qu'en apparence l'inconvénient des longues phrases et l'obscurité qu'elles entraînent. Mais, outre qu'une expérience constante montre assez tout l'avantage que nous retirons de ces sortes d'abréviations, soit dans le discours, soit lorsqu'en nous-mêmes nous nous aidons des mots pour penser, on peut observer que, lorsqu'une idée est exprimée par un grand nombre de mots, nous ne pouvons la saisir nettement et la distinguer sûrement de toute autre idée dont l'expression aurait des points nombreux de ressemblance avec la sienne, qu'autant que notre attention se porte successivement, et même à plusieurs reprises, sur tous les mots qui l'expriment; tandis qu'au contraire, en remplaçant une collection de mots par un mot unique, dès-lors que nous nous sommes une fois rendue bien familière la signification de ce mot, il peint nettement à notre esprit la collection d'idées qu'il est destiné à rappeler. On se convaincra au surplus, d'une manière tout-à-fait frappante, de l'exactitude de ces réflexions, en réfléchissant à l'embarras extrême où nous nous trouverions si les noms des nombres n'étaient point inventés, et si nous étions forcés de les suppléer par l'énonciation distincte de toutes les unités que ces nombres renferment.

Ce ne peut donc être, au plus, que les premières fois qu'un mot nouveau vient s'offrir à nous, que nous sommes obligés de nous rappeler, d'une manière explicite, toutes les idées qu'il exprime; aussi éprouvons-nous que c'est alors seulement que son usage nous cause quelque embarras; mais cet embarras disparaît bientôt par l'effet de l'habitude; et nous ne tardons pas à trouver, au contraire ; un très-grand secours dans l'usage de cette même expression dont, au premier abord, nous avions à peine entrevu l'utilité. C'est ainsi, en particulier, que toute la science du calcul repose sur la puissance des mots, c'est-à-dire, sur l'emploi des dénominations des diverses collections d'unités. On doit ajouter encore qu'assez souvent on peut raisonner sur les mots sans qu'il soit besoin de s'enquérir de leur signification, tout comme en algèbre on exécute des calculs, sans songer aucunement à ce que représentent les symboles sur lesquels on opère.

Mais comme enfin les mots ne sont au fond que de vains sons, tout-à-fait insignifians par eux-mêmes, et ne pouvant devenir les signes de nos pensées qu'en vertu d'une convention ; et comme d'ailleurs il est impossible soit d'en faire un emploi convenable, soit de comprendre l'usage qu'en font ceux qui nous parlent, sans être au courant de cette convention, il est d'une nécessité rigoureuse, toutes les fois qu'on introduit des mots nouveaux dans le langage, d'en circonscrire nettement le sens ; et c'est là ce qu'on appelle les définir. Ainsi, faire une *définition*, c'est proprement et uniquement annoncer que l'on convient d'exprimer à l'avenir, par un mot unique, choisi arbitrairement, une collection d'idées que, sans le secours de ce mot, on serait obligé d'exprimer par le moyen de plusieurs autres, et conséquemment d'une manière moins briève. Ainsi, par exemple, lorsqu'on dit : j'appelle *nombre premier* un nombre entier qui n'a d'autres diviseurs que lui-même et l'unité ; j'appelle *diamètre* d'un cercle une ligne droite qui, passant par son centre, se termine, de part et d'autre, à sa circonférence, on fait des définitions. La définition ne fait donc autre chose qu'établir une identité de sens entre deux expressions d'une même collection d'idées dont la plus simple est nouvelle et arbitraire ; tandis que l'autre, plus composée, est énoncée en mots dont le sens se trouve déjà fixé, soit par l'usage, soit par une convention antérieure. Demander donc si l'on doit définir les mots, c'est demander à peu près s'il faut parler à la manière des perroquets, sans attacher aucune idée nette aux mots qu'on prononce ; c'est demander s'il est permis d'introduire un nouveau symbole dans un calcul algébrique sans faire connaître quelle est la fonction des quantités déjà connues que ce symbole représente.

D'après l'idée que nous venons de donner des définitions, il semblerait qu'elles dussent être tout-à-fait arbitraires; on les a néanmoins assujetties à des règles parmi lesquelles, au surplus, deux seulement paraissent d'obligation rigoureuse, mais qui pourtant sont toutes bonnes à observer; voici en peu de mots à quoi elles se réduisent :

I. *La définition doit renfermer un mot et ne doit renfermer qu'un seul mot dont la signification n'ait pas été antérieurement déterminée.* Il est clair, en effet, qu'une définition qui ne renfermerait dans son énoncé que des mots connus ne serait point proprement une définition, puisqu'elle ne fixerait le sens d'aucun mot. Elle ne pourrait être considérée que comme un théorème, lequel aurait besoin d'être prouvé. D'un autre côté, une définition qui présenterait dans son énoncé plusieurs mots dont la signification ne serait pas antérieurement connue ne mériterait pas davantage le nom de définition, puisqu'elle ne pourrait, au plus, qu'établir une relation entre les idées que ces mots expriment, sans fixer proprement le sens d'aucun d'eux. Le premier cas revient à celui où l'on donnerait, en algèbre, la valeur d'une quantité connue en fonction d'autres quantités également connues ; le second revient à celui où l'on exprimerait une quantité inconnue en fonction d'une ou de plusieurs autres quantités tout aussi inconnues qu'elle (*).

(*) Il est pourtant des définitions qui, bien que régulières, sembleraient, au premier abord, pécher contre la dernière partie de cette règle : ce sont celles qui ont pour objet des mots composés, tels, par exemple, que ceux-ci : *sciences exactes*, *chimie végétale*, *anatomie comparée*, *géométrie descriptive*, etc., mais ici chacun de ces mots composés doit être considéré comme n'en formant qu'un seul.

Il convient aussi d'observer que souvent l'arrangement des mots simples dans

La définition ne devant renfermer dans son énoncé qu'un seul mot nouveau, on sent d'après cela qu'il ne saurait être permis de definir un mot à l'aide soit de ce mot lui-même, soit de quelqu'un de ses dérivés ou composés. Cela reviendrait à vouloir, en algèbre, donner la valeur d'une inconnue, soit au moyen de cette inconnue, soit à l'aide de quelqu'une de ses fonctions. Celui qui, par exemple, definirait l'*astronomie*, la science de l'*astronome* pécherait évidem-demment contre ce précepte.

On donne aussi communément comme règle des définitions, de ne point employer le même mot à désigner deux idées ou deux collections d'idées différentes; mais cette règle, bien importante sans doute, se trouve implicitement comprise dans la première. Si quelqu'un, en effet, par deux définitions distinctes, se permet d'attacher successivement au même mot des idées différentes, rien n'empêchera d'admettre la première de ces définitions, et dès-lors la seconde, ne renfermant plus aucun mot dont le sens ne soit déjà antérieurement fixé, cessera par là même d'être proprement une définition. Ce sera donc un théorème dont on pourra demander la démonstration. C'est ainsi qu'en algèbre, si l'on donne deux valeurs d'un symbole nouveau, en fonction de quantités toutes connues, on pourra fort bien admettre l'une d'elles; mais il faudra ensuite prouver que l'autre coïncide avec celle-là.

Toutefois, à raison de la répugnance, peu fondée sans doute, que nous avons à forger des mots nouveaux, aussi souvent que nous en éprouvons le besoin ou l'utilité, cette règle, malgré son évidente importance, n'est point prise très à la rigueur dans la pratique; et on ne rencontre que trop souvent, dans le langage, des mots qui sont pris, tantôt sous une acception et tantôt sous

---

le mot composé influe sur la signification de celui-ci; et c'est ainsi, par exemple, qu'un *auteur pauvre* peut fort bien ne pas être un *pauvre auteur*.

une autre : tels sont, par exemple, les mots *ellipse* et *hyperbole* que les rhétoriciens emploient sous une acception très-différente de celle qu'ils ont reçus en géométrie.

L'inconvénient n'est point très-grave encore, lorsque, comme dans cet exemple, les mots dont on fait double emploi ont, dans les deux cas, des significations totalement différentes. Il n'arrive là, en effet, que ce qui arrive en algèbre, lorque, dans deux questions indépendantes, on se permet de faire usage des mêmes lettres pour représenter des élémens divers; mais il n'en est plus ainsi, lorsque les diverses acceptions d'un même mot se trouvent avoir entre elles une certaine analogie, et sur-tout lorsque c'est dans une même science qu'elles sont adoptées; c'est, par exemple, ce qui arrive en géométrie pour les mots *axe*, *pôle*, *tangente*, *projection*, etc. On se trouve alors à peu près dans le même cas où serait un analiste qui, dans une même question, représenterait, par un même symbole, plusieurs élémens distincts. On ne saurait donc alors user de trop de précaution pour éviter l'équivoque. Ce qu'on peut faire de mieux pour y parvenir, c'est d'ajouter, dans les différens cas, au mot qu'on se propose d'employer à plusieurs usages, des déterminatifs formant avec lui des mots composés dissemblables. C'est à peu près de la même manière que, lorsque dans une même question d'algèbre on juge convenable de représenter plusieurs élémens par une même lettre, on a soin d'affecter cette lettre de divers accens ou de divers indices, dont la combinaison avec elle en forme autant de caractères différens.

II. *La définition doit renfermer tout ce qu'il faut pour bien fixer le sens du mot défini : il convient qu'elle ne renferme rien au-delà de ce qui est nécessaire pour remplir cette destination.* La première partie de cette règle est évidemment de rigueur; car l'on sent fort bien qu'en la négligeant on ne ferait point une définition, puisqu'on ne fixerait le sens d'aucun mot. C'est, par exemple, ce qui arriverait si, voulant définir la *sphère*, on se bornait à dire que c'est une surface courbe. Quant à la seconde partie de la

même

même règle, quoiqu'elle ne soit pas d'observation rigoureuse, il est néanmoins très-bon de s'y conformer; attendu qu'en toutes choses, tout ce qui ne concourt pas nécessairement au but qu'on se propose est par là-même superflu. Ainsi, par exemple, ce serait définir la *sphère* d'une manière inconvenante que de dire que c'est une surface dont tous les points sont également distans d'un même point et dont toutes les sections par des plans sont des cercles, puisque la première de ces propriétés suffit pour distinguer la sphère de toute autre surface, et que la seconde y est implicitement contenue.

Le défaut de cette attention pourrait même rendre une définition tout-à-fait vicieuse, en y comprenant quelque autre proposition contraire à la nature de l'objet défini; et c'est ce qui arriverait, par exemple, pour la définition que nous venons de citer, si la sphère était de nature à ne pas avoir toutes ses sections circulaires. Dans tous les cas, une définition qui renfermera au-delà de ce qui lui est nécessaire, contiendra par là même implicitement quelque théorème et perdra ainsi la précieuse prérogative de se faire recevoir sans contestation.

La plupart des auteurs de logique prescrivent de définir *par le genre et la différence*; c'est-à-dire, qu'ils veulent que, considérant l'objet à définir comme espèce, on énonce le genre dont cette espèce fait partie et le caractère qui distingue cette espèce de toutes les autres du même genre. Cette méthode serait très-bonne à suivre généralement, si nous possédions une classification exacte et complète des objets de nos connaissances; mais, jusqu'à ce que nous en soyons là, ce serait se tourmenter en pure perte que de vouloir constamment s'assujettir à ce précepte.

Une chose très-essentielle à remarquer, c'est que le but d'une définition n'est point, en général, de nous donner une connaissance complète de l'objet que désigne le mot défini, mais seulement de nous mettre en état de le distinguer nettement de tout ce qui n'est pas lui. Ainsi, par exemple, quelque définition qu'on adopte pour le mot *végétal* ou pour le mot *or*, jamais nous ne pourrons nous flatter d'y comprendre toutes les propriétés de ces deux sortes d'êtres; puisque nous ne saurions même nous flatter de les toutes connaître; mais il suffit que les définitions que l'on donnera de ces deux mots nous mettent en état de distinguer ce qui est or ou végétal de ce qui ne l'est pas.

Il est, au contraire, certains objets de nos pensées qui se trouvent tellement renfermés dans leur définition qu'il est impossible d'en rien dire qui n'y soit implicitement compris ; c'est, en particulier, le cas de tous les objets que l'on considère dans les sciences exactes, et c'est ainsi, par exemple, qu'on sait tout du cercle, ou du moins qu'il est possible de tout en savoir, lorsqu'on en sait la définition. On pourrait appeler ces sortes de définitions des *définitions complètes*, en appelant, par opposition, *définitions incomplètes*, celles qui, suffisantes pour faire discerner un objet de tout autre, ne le sont pas néanmoins pour le faire complètement connaître.

III. *Il convient d'imposer des noms à toutes les collections d'idées et aux seules collections d'idées que l'on prévoit devoir se reproduire fréquemment dans le discours.* On conçoit, en effet, qu'en négligeant cette double précaution, on s'exposerait tantôt à rendre la langue extrêmement prolixe, et tantôt à la surcharger d'un grand nombre de mots, sans aucun avantage réel. On a fort bien fait, par exemple, de donner des noms aux nombres sur lesquels on opère, dans la multiplication et dans la division, et on ferait peut-être bien, pour les mêmes raisons, d'en donner aussi aux nombres que l'on considère dans l'addition et la soustraction ; mais on ferait également bien sans doute de debarrasser l'astronomie d'une multitude de locutions non moins barbares pour la plupart qu'elles sont superflues, et qui n'ont d'autre effet que de rendre la science d'un abord plus âpre et plus rebutant.

IV. *Il convient de définir tous les mots et les seuls mots sur la signification desquels on n'est point généralement d'accord.* En effet, les definitions etant destinées à faire connaître le sens des mots, sont par là-même inutiles, toutes les fois que ce sens se trouve fixé sans équivoque ; tandis qu'au contraire l'omission d'une définition à l'égard des mots dont le sens n'est point fixé d'une manière uniforme et invariable, ne peut que rendre vagues et équivoques les propositions dans lesquelles ces mots sont employés.

Aussi voit-on que la plupart des disputes, lorsqu'on vient à les examiner de près, se réduisent à de simples disputes de mots, dans lesquelles au fond les deux parties sont d'accord et ne diffèrent que par les diverses acceptions qu'ils attachent aux mêmes mots, et desquelles il résulte que telles propositions qui paraissent évidentes à l'un paraissent au contraire à l'autre d'une fausseté manifeste.

On demande, par exemple, sur les bancs des écoles, si l'âme pense toujours ; et ceux qui soutiennent l'affirmative en donnent pour raison que l'âme est une substance essentiellement pensante ; il est clair, en effet, que, si l'on admet une telle définition de l'âme, l'âme ne peut cesser de penser sans cesser d'être une âme ; mais, par cette définition, on ne fait, à ce qu'il nous paraît, que déplacer la question ; elle se réduit alors, en effet, à celle-ci : avons nous constamment une âme dans tous les instans de notre vie ?

De même encore, les physiciens et les chimistes disputeraient moins sur les propriétés essentielles de la matière, s'ils prenaient la peine de faire attention que le nombre et la nature de ces propriétés sont tout-à-fait subordonnés à la définition qu'on voudra adopter du mot *matière*. Si, par exemple, on appelle matière tout ce qui est capable d'affecter nos sens, on ne pourra contester la matérialité de la cause de la chaleur, de celles de la lumière et de celles des phénomènes magnétiques et électriques, quand même l'impondérabilité de ces divers agens serait aussi bien prouvée qu'elle l'est peu. Que si, au contraire, on appelle simplement matière toute portion d'étendue impénétrable, la question de la matérialité du calorique de la lumière, de l'électricité et du magnétisme se réduira à examiner si ces êtres jouissent ou ne jouissent pas de l'étendue et de l'impénétrabilité.

Non seulement on ne doit pas définir tous les mots, mais il est même des mots que l'on tenterait vainement de définir ; et cette impossibilité résulte de la nature même de la chose. Puisqu'en effet, definir un mot, c'est en expliquer le sens, à l'aide d'autres mots dont la signification a déjà été antérieurement fixée ; on sent qu'on ne pourrait tenter de définir tous les mots, sans tomber dans un cercle vicieux inévitable (*). Les mots qu'on ne saurait définir sont principalement ceux qui expriment des idées simples, soit physiques, comme il arrive pour les noms des couleurs, des odeurs, des saveurs, des sons, etc., soit métaphysiques, comme il arrive pour les noms des passions, affections ou faculté de l'âme, pour les prépositions, pour les mots *étendue*, *durée*, *ressemblance*, *différence*, etc. On ne saurait non plus définir les noms des individus, attendu que les qualités qui les constituent tels sont presque innombrables et nous sont le plus souvent inconnues pour la plupart. Enfin, il est presque impossible de définir les mots qui expriment des notions abstraites très-compliquées et très-fugitives, tels que ceux de *gloire*, de *justice*, de *vertu*, de *bonheur*.

Mais, dira-t-on, s'il est impossible de définir tous les mots, comment donc parviendra-t-on à connaître la signification des mots non susceptibles d'être définis ? Nous répondrons que, s'il s'agit de mots qui expriment des idées sensibles, on parviendra à en faire comprendre le sens, en produisant la sensation à laquelle ils répondent, en même temps qu'on les prononcera. Mais, il est encore certaines précautions delicates sans lesquelles les tentatives de cette sorte d'enseignement pourraient devenir tout-à-fait infructueuses. Si, par

(*) Pascal regarde l'impossibilité absolue où nous nous trouvons de définir tous les mots comme une imperfection de nos méthodes ; mais, si l'on ne doit appeler imperfection dans un objet que l'absence d'une qualité qui pourrait s'y trouver, nous ne saurions sur ce point partager l'opinion de l'auteur des *Pensées*.

exemple, dans la vue de faire connaître à un enfant en bas âge la signification du mot *rouge*, on met simultanément sous ses yeux des *Cérises*, des *Fraises*, des *Groseilles*, des *Framboises*, etc., il sera fort à craindre qu'il ne prenne le change et n'attache au mot *rouge* le sens que nous attachons au mot *fruit*. Il faudra donc choisir de préférence des objets tout-à-fait disparates d'ailleurs, et n'ayant, pour ainsi dire, d'autres propriétés communes que celle que désigne le mot dont il s'agit de faire connaître la signification. Ainsi, par exemple, dans le cas actuel, on fera convenablement de prendre pour objet d'expérience une *fleur*, un *fruit*, du *vin* et un *morceau d'étoffe*. Si, au surplus, on n'a pas sous la main ces divers objets, et que leurs noms soient déjà connus de celui à qui on s'adresse, il suffira de les lui rappeler. Ainsi, par exemple, en lui disant successivement

Le *sang* est *rouge*,

Une *pivoine* est *rouge*,

Une *fraise* est *rouge*,

L'*écarlate* est *rouge*;

Etc., etc., etc.;

il y a tout lieu de croire qu'il se formera une idée nette de la signification du mot *rouge*.

La ressource que nous venons d'indiquer, comme propre à faire connaître la signification des mots qui, exprimant des idées sensibles, ne sont point susceptibles de définition, ne saurait evidemment être employée vis-à-vis des êtres privés de l'organe auquel ces idées sont relatives; et voilà pourquoi, par exemple, pour les aveugles de naissance, les noms des couleurs ne seront éternellement que de vains sons, auxquels il nous sera à jamais impossible de leur faire attacher les idées que ces sons réveillent en nous. L'homme doué d'un sens de plus serait exactement dans la même situation à notre égard.

Si un mot exprime une idée simple intellectuelle, tel que les mots *désirer*, *craindre*, se *ressouvenir*, etc., ou une idée de relation, telle que les mots *dessus*, *dessous*, *dedans*, *dehors*, etc.; ce ne sera guères que, par une observation attentive et long-temps prolongée, des diverses circonstances dans lesquelles ce mot est employé par ceux qui en connaissent bien la valeur, que l'on pourra parvenir à en découvrir l'exacte signification, et se mettre soi-même en état d'en faire un emploi convenable.

On voit par là, pour le dire en passant, de quelle importance il peut être de placer près des enfans en bas âge des personnes intelligentes qui sachent leur faire acquérir de bonne heure une connaissance exacte de leur langue, connaissance au défaut de laquelle ils ne pourraient retirer que des fruits tardifs et souvent très-imparfaits de l'éducation du monde, bien autrement importante que celle qu'on reçoit dans les colléges.

Le moyen que nous venons d'indiquer comme propre à acquérir l'intelligence de mots qui expriment des idees simples intellectuelles, peut être généralement employé à la recherche de la signification de tous les mots d'une langue; et dès qu'on en connaît un certain nombre, des lectures choisies et la fréquentation des gens qui parlent bien, suffisent pour acquérir peu à peu l'intelligence de tous les autres. C'est, en effet, de cette manière que les enfans en bas âge, le peuple et même les gens lettrés parviennent, sans le secours des définitions et des vocabulaires, à apprendre peu à peu leur langue, et c'est encore de la même manière que nous apprenons souvent les langues etrangères par le seul séjour dans les pays où elles sont généralement en usage. On conçoit fort bien, en effet, que, si une phrase contient un seul mot dont la signification nous soit inconnue, l'énoncé de cette phrase pourra souvent suffire pour nous en révéler la valeur. Si, par exemple, on dit à quelqu'un qui connaît bien les mots *triangle* et *quadrilatère*, mais qui n'a jamais entendu prononcer le mot *diagonale*, que *chacune des deux diagonales d'un quadrilatère le divise en deux triangles*, il concevra sur-le-champ ce que c'est qu'une diagonale, et le concevra d'autant mieux que c'est ici la seule ligne qui puisse diviser le quadrilatere en triangles.

Ces sortes de phrases, qui donnent ainsi l'intelligence de l'un des mots dont elles se composent, au moyen de la signification connue des autres, pourraient etre appelées *définitions implicites*, par opposition aux definitions ordinaires qu'on appellerait *définitions explicites*; et l'on voit qu'il y aurait entre les unes et les autres la même difference qui existe entre les équations résolues et les équations non résolues. On conçoit aussi que, de même que deux équations entre deux inconnues les déterminent l'une et l'autre, deux phrases qui contiennent deux mots nouveaux, combinés avec des mots connus, peuvent souvent en déterminer le sens; et on peut en dire autant d'un plus grand nombre de mots nouveaux combinés avec des mots connus, dans un pareil nombre de phrases; mais il y a ici à exécuter une sorte d'elimination qui peut devenir d'autant plus pénible que le nombre des mots dont il s'agit est lui-même plus considérable.

Quoi qu'il en soit, ces considérations semblent très-propres à expliquer comment un ouvrage qui, à une première lecture, nous avait semblé obscur, à raison d'un grand nombre de mots que l'auteur y avait employés sans les définir, et qui ne nous étaient point familiers, nous devient ensuite, par des lectures réitérees, de plus en plus intelligible, et nous le devient au point de pouvoir definir nous-mêmes ces mêmes mots qui, au premier abord, nous avaient causé tant d'embarras. Les mêmes considerations expliquent aussi fort bien comment la connaissance une fois acquise d'un certain nombre de mots d'une langue étrangère, nous conduit peu à peu, par la seule fréquentation de ceux qui la parlent et la lecture des écrivains qu'elle possède, sans le secours d'aucun dictionnaire ou moyen auxiliaire quelconque, à la parfaite intelligence de tous les mots de cette langue. C'est là, en particulier, un moyen dont on pourrait profiter avec avantage pour l'enseignement des langues mortes dans nos écoles. Un de ses fruits les plus précieux serait d'exercer perpétuellement le jugement pour lequel, en général, on fait si peu dans nos gothiques systèmes d'éducation.

« Parce qu'il y a des mots qu'on peut définir, dit Condillac, » on a voulu les definir tous » (*); mais, parce qu'il y a des mots qu'on ne saurait definir, Condillac en a conclu qu'il n'en fallait définir aucun, ce qui n'est guère plus sensé. Il cite pour exemple le mot *triangle*, et pretend que, pour faire comprendre la signification de ce mot, on n'a rien de mieux à faire que de montrer l'objet qu'il designe; mais, qui ne voit que le mot triangle, comme la plupart des mots de nos langues, n'exprime pas un être unique et individuel, mais une infinité de figures, différentes de forme et de grandeur; de sorte que quelqu'un qui en aurait vu mille, serait bien loin de les connaître toutes; tandis qu'elles sont toutes comprises dans la définition qu'on en donne, et qu'elles ne peuvent toutes se trouver que là. Il n'est pas même rare de rencontrer des gens étrangers à la géométrie qui, par ignorance de l'exacte definition du mot triangle, se persuadent que, pour qu'une figure mérite cette dénomination, il est nécessaire que deux de ses côtés soient égaux, que le troisième soit horizontal et que le sommet opposé soit tourné vers le haut; il en est même quelques-uns qui, outre ces conditions, exigent de plus l'égalité des trois côtés (**). Toutes ces méprises sont une conséquence toute naturelle du défaut de definition.

Mais il y a plus, et il est absolument impossible qu'on nous montre un seul triangle tel que ceux que la géométrie considère

(*) *Logique*, II.e partie, chap. VI.

(**) C'est dans ce sens qu'on entend souvent dire, dans la société, que *Paris*, *Bordeaux* et *Lyon* forment *presque un triangle*.

et

et que désigne leur définition commune. On sait, en effet, qu'elle suppose et qu'elle est même obligée de supposer que la surface du triangle est rigoureusement plane, et que ses limites sont des lignes sans largeur ni épaisseur, et exactement droites; or, ce n'est certainement pas avec nos instrumens grossiers et nos moyens imparfaits d'apercevoir que nous réaliserons de semblables conceptions de notre esprit. Il est donc rigoureusement vrai de dire qu'à proprement parler, nous n'avons jamais vu ni ne saurions jamais voir de véritables triangles; et que ces figures, purement idéales, ne nous sont uniquement connues que par leur définition.

« Pour découvrir les propriétés d'une chose, poursuit Condillac, » il faut la voir. » Cela est faux; et il y a même des cas où la vue de la chose ne saurait suppléer à la définition. Nous n'en donnerons pour exemple que le *Chiliogone*, que l'on pourrait contempler long-temps sans être seulement bien certain du nombre de ses côtés; tandis qu'on en découvre très-facilement toutes les propriétés sur sa simple définition.

Condillac veut qu'on remplace les définitions par des *analises*; mais, ou ces analises ne détermineront pas le sens précis des mots, auquel cas elles seront insuffisantes, ou bien elles le détermineront, et alors elles seront de véritables définitions, quelque dénomination qu'on prétende d'ailleurs leur donner. Les définitions sont, à quelques égards, une sorte de synthèse, puisqu'elles composent plusieurs idées en une seule; puisqu'elles fondent plusieurs symboles dans un symbole unique; mais, en admettant même qu'on puisse y trouver quelque chose d'analitique, faut-il donc appeler indistinctement et uniquement *analises* toutes les opérations de notre esprit? Et, parce que tous les êtres qui affectent nos sens sont des corps, croirait-on faire une utile révolution dans la physique; croirait-on en rendre la langue plus claire et l'étude plus facile, en ne désignant que par cette seule dénomination tous les objets matériels dont elle s'occupe?

Condillac reproche enfin aux logiciens l'usage où ils sont de ranger les définitions dans la classe des *principes*; et il se fonde sur ce que ce sont les *sensations* et non les définitions qui sont les principes de toutes nos connaissances; mais, c'est ici évidemment une très-mauvaise chicane; il en est, en effet, du mot principe comme de tant d'autres qui sont pris tantôt sous une acception et tantôt sous une autre. Il est bien vrai que le mot principe, pris dans le sens le plus étroit, veut dire *commencement*, *source*, *origine*; et, sous ce point de vue, nous accorderons, tant qu'on voudra, que nos sensations sont le principe commun de toutes nos connaissances; mais on se sert aussi très-fréquemment du même mot pour désigner une maxime certaine sur laquelle on peut s'appuyer en toute confiance, et qu'on peut prendre pour base dans ses recherches; et c'est ainsi qu'on donne souvent le nom de principe à une proposition qui résulte elle-même d'un grand nombre d'autres. Cette dernière acception du mot *principe* n'est pas, au surplus, aussi étrangère à la première qu'on pourrait être d'abord porté à le croire. On voit, en effet, que, si éloignée que soit une proposition des notions premières d'où elle tire son origine; elle peut, dès-lors qu'elle est vraie, donner naissance à un grand nombre de conséquences, dont elle devient, à son tour, la source et l'origine commune, c'est-à-dire, le *principe*; et c'est ainsi que, dans la nature, tout est, tour à tour, effet et cause.

Lors donc qu'on dit que *les définitions sont des principes*, on veut seulement faire entendre par là que, ne pouvant être refusées, elles doivent être employées dans le raisonnement, comme autant de propositions incontestables; et cette assertion ne présente rien qui ne soit d'une parfaite exactitude. On pourrait encore dire, au surplus, que les définitions sont des principes, en ce sens qu'avant de parcourir la série des propositions dont une science se compose, il est nécessaire de s'enquérir d'abord soigneusement de la signification des termes dans lesquels ces propositions sont énoncées.

On voit qu'ici nous regardons les définitions comme tout-à-fait libres et arbitraires; car ce n'est qu'en les considérant ainsi qu'on ne saurait les contester. Cela vient de ce que nous ne considérons que des *définitions de noms* et que nous rejetons tout-à-fait l'emploi des *définitions de choses*. Si nous avons bien compris ce qu'ont écrit les logiciens sur ce sujet, il paraît que cette dernière sorte de définition ne diffère uniquement de la première qu'en ce que celui qui l'énonce ne prétend pas fixer le sens du mot défini ; mais que, prenant ce mot suivant l'acception générale, il prétend simplement expliquer quelle est cette acception. Il suppose donc que ce mot est entendu de la même manière par tout le monde ; et, s'il en est ainsi, il rentre dès-lors dans la classe des mots qu'il est superflu de définir.

Nous ne voyons guères qu'un cas où les définitions ne soient point libres, et c'est celui où se trouvent ceux qui rédigent les vocabulaires des langues. Leur tâche est, en effet, de nous expliquer, non pas le sens qu'il leur plaît d'attacher aux mots, mais bien celui que l'usage général y attache. Ils se constituent donc, en quelque sorte, les interprètes du public ; et il faut conséquemment qu'ils en soient des interprètes fidèles. Mais la tâche qu'ils s'imposent est d'autant plus délicate et difficile que souvent on n'est point très-généralement d'accord sur la signification d'un grand nombre de mots, et que quelquefois même cette signifiation varie avec les temps et les lieux.

En résumé ; la distinction des définitions en définitions de noms et en definitions de choses paraît pouvoir être réduite à dire qu'une définition doit être admise sans contestation ou bien peut être refusée, suivant qu'elle commence par ces mots : *j'appelle*, ou par ceux-ci : *on appelle.*

V. *Il convient de ne pas détourner les mots, par des définitions, de la signification que l'usage général leur a attribué.* On sent, en effet, que, sans cette précaution, ceux à qui l'on parlerait, ou pour qui l'on écrirait, perdant bientôt de vue la nouvelle acception donnée aux mots, seraient tôt ou tard entraînés à les entendre dans l'acception vulgaire, ce qui dénaturerait totalement le sens du discours, et pourrait même le rendre tout-à-fait inintelligible. C'est pourtant là ce que font fréquemment les écrivains en métaphysique ; et nous ne voudrions pas même répondre que, maîtrisés eux-mêmes par d'anciennes habitudes, il ne leur arrive pas quelquefois d'employer le même mot tantôt dans le sens vulgaire et tantôt sous l'acception nouvelle qu'il leur a plu d'y attacher ; voilà probablement ce qui rend la plupart de leurs ouvrages d'une lecture si difficile et si rebutante.

On sent que ce serait une égale inconvenance de donner, par une définition, une dénomination nouvelle à une collection d'idées à laquelle l'usage général aurait déjà affecté une autre dénomination. C'est pourtant là ce que ne se permettent que trop souvent des écrivains qui se persuadent et cherchent à persuader à leurs lecteurs qu'ils ont des idées nouvelles, par cela seul qu'ils expriment en termes nouveaux des idées quelquefois fort communes et fort triviales, si même elles ne sont tout-à-fait fausses.

Aux règles diverses que nous venons d'indiquer, touchant les définitions, quelques logiciens ajoutent celle de n'employer, autant qu'il est possible, dans la définition, que des idées positives; et, en général, cette règle est fort bonne à observer. Cependant, comme il est beaucoup d'objets desquels nous savons beaucoup moins ce qu'ils sont que ce qu'ils ne sont pas, on ne doit faire aucune difficulté de s'écarter de ce précepte, toutes les fois qu'il en peut résulter quelque avantage sous le rapport de la clarté et de la brièveté. Il nous paraît, par exemple, que M. Legendre a très-nettement défini la ligne courbe, en disant que c'est une ligne qui n'est ni droite ni composée de lignes droites.

On donne aussi pour règle des définitions que, dans le discours, la définition puisse toujours être substituée au mot défini, sans que le sens en soit aucunement altéré. Mais il nous paraît que c'est moins là une règle des définitions, qu'une règle sur l'emploi des mots. Si, en effet, quelqu'un, après avoir défini un mot, l'emploie sous une acception différente de celle qu'il lui aura lui-même assignée, il aura tort sans doute ; mais sa définition n'en sera pas pour cela moins admissible : c'est son langage et non cette définition qu'il devra réformer.

Mais il est un objet que les écrivains même qui ont traité le plus au long des définitions ont totalement passé sous silence : c'est ce qui concerne le choix des mots. La raison en est sans doute que ces écrivains, uniquement littérateurs, pour la plupart, ont pensé qu'il n'y avait plus de mots à créer. Mais, puisque le progrès toujours croissant des sciences oblige chaque jour d'y introduire des mots nouveaux ; puisque quelques-unes ont senti le besoin de réformer entièrement leur langue : et puisque, si ce besoin n'a pas été aussi impérieusement senti pour d'autres sciences, il n'en est peut-être pas pour cela moins réel, il convient, avant de terminer, de nous arrêter un moment sur ce sujet.

En principe, il est rigoureusement vrai de dire que rien n'est plus indifférent en soi que le choix des signes que nous destinons à exprimer nos pensées ; et que tout ce qu'on peut raisonnablement exiger d'eux est qu'ils ne soient ni trop longs ni d'une prononciation trop difficile et trop peu analogue à la conformation de nos organes et aux habitudes qu'ils ont contractées. Il semblerait donc qu'en se conformant d'ailleurs à ces indications du bon sens, il devrait être permis de choisir, d'une manière tout-à-fait arbitraire, les signes nouveaux dont de nouvelles idées peuvent réclamer l'usage. La vérité est pourtant que, dans nos langues modernes, il n'existe pas un seul mot qui, si l'on peut s'exprimer ainsi, ait été formé *de toutes pièces* ; pas un seul qui ne soit dérivé d'une manière plus ou moins directe des langues auxquelles les nôtres ont succédé ; et dont les mots ont été sans doute dérivés de la même manière de ceux de quelque autre langue plus ancienne. Il est même très-vrai de dire que l'opinion est aujourd'hui tellement formée, ou, pour mieux dire, égarée, sur ce point, qu'un écrivain qui, ayant à exprimer quelque idée nouvelle, y attacherait un signe tout-à-fait nouveau, et qui ne serait dérivé d'aucune langue connue, serait sûr d'indisposer contre lui une multitude de gens qui jamais ne consentiraient à faire usage d'un mot ainsi créé.

C'est l'habitude constante où nous sommes de dériver ainsi les mots des langues plus modernes de ceux des langues qui le sont moins qui a donné naissance à la science des *Étymologies*, à laquelle, faute de l'avoir envisagée sous son véritable point de vue, on a peut-être attaché beaucoup trop d'importance. On a voulu, en particulier, en faire une sorte de supplément aux définitions; et des gens plus érudits que judicieux n'ont pas même paru très-éloignés de croire que l'on ne pouvait bien posséder une science sans connaître les langues d'où elle a emprunté les termes qui lui sont propres (*).

Nous conviendrons très-volontiers que c'est une recherche à la fois curieuse et utile que celle de la filiation, des mutations et

---

(*) C'est, par exemple, une opinion très-répandue que celle de l'utilité de l'étude de la langue grecque, comme préliminaire de celle de la médecine; et on en donne pour raison le grand nombre des mots que cette science a empruntés à la langue d'Hypocrate; mais, outre qu'une centaine d'origines grecques au plus serait peut-être suffisante pour la parfaite intelligence de tous les mots employés en médecine, et pourrait être bien connue en moins d'une semaine; ne pourrait-on pas suppléer même à la connaissance de ces origines par des définitions précises? Si l'on considère que presque tous les bons ouvrages grecs et latins sur la médecine ont été traduits dans nos langues; et qu'ici le mérite du style est d'une importance assez mince, on verra que tout le fruit qu'un médecin peut se promettre de l'étude des langues mortes se réduit ou à pouvoir lire dans ces langues quelques ouvrages insignifians, qui n'ont pas paru dignes des honneurs de la traduction, et que les écrits des modernes ont laissés bien loin derrière eux; ou bien à savoir débiter, en présence des femmes qui entourent le lit d'un malade, quelques aphorismes qu'ils entendent à peine; mais à l'aide desquels ils se donnent une sorte d'importance aux yeux des sots. L'étude des langues vivantes leur serait d'un tout autre secours: elle les mettrait en possession des progrès que l'art de guerir fait journellement dans l'Europe entière. Mais ceci ne ferait point l'affaire des pédans de colléges qui, pour la plupart, sont tout-à-fait étrangers à ces langues.

altérations progressives des divers signes auxquels les hommes ont eu successivement recours, pour noter et communiquer leur pensées. Quoiqu'il paraisse que les grecs, nos maîtres et nos modèles dans tous les genres de littérature, se soient assez peu souciés de ce genre de savoir (*); nous accorderons sans peine qu'il peut n'être pas tout-à-fait sans fruits dans l'étude même des langues modernes. La recherche des étymologies peut fournir d'ailleurs des lumières très-précieuses sur les temps éloignés de nous, en servant d'appui et quelquefois même de supplément à l'histoire des peuples, en nous faisant, pour ainsi dire, assister aux premières combinaisons d'idées qu'ils ont formées, en développant à nos yeux le tableau graduel du progrès de leur intelligence, et en nous révélant le

(*) On entend chaque jour répéter qu'hors de l'étude du latin et du grec il ne saurait y avoir de salut pour les littérateurs; et l'on a raison, si l'on convient de n'appeler *littérateurs* que ceux à qui ces langues sont familières; car, comme nous l'avons déjà observé plus haut, les définitions sont tont-à-fait libres. Mais si, au contraire, on pense qu'un homme peut mériter le titre d'écrivain, par cela seul qu'il écrit sa propre langue avec pureté et élégance; on ne verra plus aussi clairement que l'étude de quelque autre langue soit nécessaire pour parvenir à ce but. Les Grecs n'étudiaient uniquement que leur langue, et ils nous ont laissé, en tous genres, des chefs-d'œuvres que nous avouons ne pouvoir atteindre. Les Romains du siècle d'Auguste, outre leur langue, cultivaient la littérature des Grecs; et nous sommes d'accord qu'ils ne sont pas parvenus à les égaler; enfin, nous joignons à l'étude de notre propre langue celle de la littérature des Grecs et des Romains; et nous nous avouons humblement inférieurs aux uns et aux autres. On pent dire sans doute de très-bonnes choses en faveur de l'étude du grec et du latin, comme moyen de parvenir à bien écrire dans les langues modernes; mais il faut du moins convenir que le succès de cette pratique n'est point prouvée par le fait; apparemment parce que ses avantages se trouvent plus que compensés par le peu de loisir qu'elle nous laisse pour cultiver notre propre langue; sur-tout d'après le parti qu'on a pris, dans presque toutes nos écoles, de rendre à dessein l'étude des langues anciennes longue et difficile; ce qui ne fait pas pourtant que la plupart des jeunes-gens qui en sortent y soient pour cela beaucoup plus habiles.

secret de leurs diverses migrations. Mais, là paraît devoir se borner le domaine de la science étymologique; et chercher à l'étendre plus loin, ce serait vouloir compliquer l'étude des sciences de difficultés qui ne lui seraient pas moins inutiles qu'étrangères. Ne serait-il pas absurde, en effet, d'attacher nécessairement le succès dans l'étude d'une science au plus ou moins d'intelligence des langues d'où il a plû à ses inventeurs de tirer les mots qu'on y emploie; et n'en résulterait-il pas cette conséquence tout-à-fait insoutenable, qu'une science qui n'aurait emprunté ses expressions à aucune langue connue ne pourrait être enseignée ni apprise? Pense-t-on, par exemple, que celui qui étudie l'arithmétique aura une idée beaucoup plus exacte de la science du calcul, lorsqu'on lui aura révélé que le nom de cette science vient du mot latin *Calculus*? Ne sera-t-il pas fondé à demander ensuite d'où vient à son tour ce dernier mot, et pourquoi les Romains l'employaient de préférence à tout autre, pour désigner les petites pierres ou jetons dont ils se servaient pour compter? Et, de question en question, l'étymologiste ne se trouverait-il pas bientôt réduit au silence, ou ce qui est peut-être pis, ne serait-il pas entraîné à chercher son refuge dans les savantes rêveries débitées par Court-de-Gebelin et quelques autres sur la prétendue langue primitive?

En vain les défenseurs des étymologies diront-ils qu'en formant nos mots de portions de mots prises dans d'autres langues, nous obtenons l'avantage de montrer, dans leur contexture, leur véritable signification, et les relations qui les lient entre eux; on pourrait toujours leur objecter, avec fondement, qu'outre qu'on atteindrait à peu près le même but avec des mots formés de toutes pièces, en supposant les avantages de cette pratique aussi réel qu'ils le supposent, ce ne serait jamais qu'une très-faible portion de la société qui en pourrait recueillir les fruits; le nombre des hommes versés dans la connaissance des langues savantes devant toujours être incomparablement moindre que le nombre de ceux à qui ces langues sont tout-à-fait étrangères. Mais la vérité est que, loin que le re-

cours

cours aux étymologies soit un moyen infaillible de découvrir la véritable signification des mots ; il n'est propre, au contraire, qu'à nous induire fréquemment en erreur ; attendu qu'il est bien peu d'étymologies précises, bien peu sur lesquelles on puisse compter avec quelque certitude ; et que, parmi celles-ci, il en est une foule qui s'écartent notamment de la signification que l'usage général a attachée aux mots, ou qui même sont tout-à-fait opposées à cette signification (*).

Ce n'est donc point par des étymologies, très-souvent ignorées, fréquemment incertaines et quelquefois trompeuses, mais seulement par des définitions exactes, que l'on doit chercher à s'instruire de la véritable signification des mots en usage dans les sciences et sur-tout dans les sciences de raisonnement. Nous sommes loin, toutefois, de blâmer l'usage où sont les savans de tirer des langues mortes les mots dont ils ont besoin pour désigner des objets nouveaux. Il est plus simple et plus naturel, en effet, de faire rentrer dans la circulation des mots déjà existans, connus du moins des hommes lettrés de tous les pays, appartenant à des langues à l'abri de toutes vicissitudes, et pouvant ainsi s'introduire sans altération sensible dans tous les idiomes modernes, que d'en forger de tout-à-fait nouveaux qui ne pourraient offrir les mêmes avantages (**) ; mais il ne faut point attacher à cette pratique plus d'importance qu'elle n'en offre reellement.

(*) A combien de bévues ne serait point exposé, par exemple, un citoyen de l'ancienne Rome, bien versé dans la langue d'Athènes, qui, se trouvant tout-à-coup au milieu de nous, voudrait prendre uniquement l'étymologie pour guide et pour interprète. Nos *balances* seraient à ses yeux des *baromètres* ; il ne verrait dans nos *géomètres* que des *arpenteurs*, dans nos *chimistes* que des *fondeurs*, dans nos *barons* que des *goujats* ; il traiterait de *lucifers* les jeunes clercs qui, dans nos églises, *portent des flambeaux allumés*, et prendrait sans doute nos *Chanoines de St-Denis* pour des *Prêtres de Bacchus.*

(**) A condition toutefois que, si la langue dans laquelle on les introduit n'admet pas de cas, on les rendra indéclinables ; ainsi que l'a fait M. Lacroix pour les mots *maximum* et *minimum*, et M. Biot pour le mot *erratum.*

Ce n'est point là, en effet, ce qui constitue la perfection des langues. Une langue sera toujours bien faite, si une abondante simplicité et une rigoureuse analogie ont précédé à sa formation; c'est-à-dire, si ses mots radicaux, quelle qu'en puisse être d'ailleurs l'origine, sont très-courts, et offrent, dans leur plus ou moins grande ressemblance, le tableau fidèle du plus ou du moins d'analogie entre les idées simples qu'ils sont destinés à rappeler; si de plus elle a des mots propres à exprimer, sans périphrases, toutes les idées, tous les rapports, toutes les vues de l'esprit qui sont de nature à se représenter fréquemment; et si enfin, ces mots offrent, dans leur contexture, une sorte de tableau raccourci des diverses collections d'idées simples dont ils sont les signes. Mais on ne doit pas perdre de vue que, quelques désirables que puissent être pour les langues ces diverses qualités, les raisonnemens faits dans une langue, quelque imparfaite qu'elle soit d'ailleurs, pourront toujours être rigoureux, si tous les mots dont la signification pourrait laisser quelques nuages dans l'esprit peuvent y être nettement définis à l'aide de ceux dont, au contraire, la signification ne présente aucune sorte d'équivoque. C'est ainsi, qu'en algèbre, bien qu'un mauvais choix de notations puisse rendre les calculs plus pénibles, il ne saurait toutefois altérer la rigueur de leurs résultats.

On sent assez, d'après tout ce qui précède, ce que l'on doit penser de l'excessive délicatesse de quelques érudits qui jugent un mot mal fait, et le frappent de proscription, par cela seul qu'il est composé de parties dérivées de diverses langues; du latin et du grec, par exemple. Il est évident qu'il ne peut y avoir à cela aucune sorte d'inconvénient, et que même on ne doit pas faire difficulté d'en user ainsi, si l'on pense que le mot rendra mieux l'idée qu'il doit rappeler, ou si seulement il en devient plus aisé à prononcer ou plus agréable à l'oreille. Nous n'hésiterions pas même à conseiller de forger des mots arbitrairement, sans les dériver d'aucune langue, toutes les fois que cette dérivation pourrait induire en erreur sur leur véritable sens, si nous ne pensions qu'il est convenable de toujours se plier aux usages établis, lors même que ces usages ne peuvent être justifiés aux yeux de la raison.

Nous n'ajouterons plus qu'une réflexion : c'est que, comme on ne peut avancer dans la recherche de la verité qu'en créant des mots nouveaux, à mesure que de nouvelles combinaisons d'idées viennent s'offrir à la pensée, il est nécessaire, pour que les sciences ne demeurent pas stationnaires, d'en rendre sans cesse la langue de plus en plus riche. Cette remarque s'applique principalement aux sciences exactes que nous avons sur-tout en vue ici. En parcourant leur histoire on a bientôt lieu de s'apercevoir, en effet, que les symboles et les locutions qui y ont été successivement introduits n'ont guère moins contribué à leur avancement que les méditations des hommes de génie qui se sont dévoués à leur culture (*); et rien ne paraît plus propre à mettre en évidence la toute-puissante influence des signes sur les idées. On peut donc prévoir que ceux qui sont destinés à en reculer de nouveau les limites, ne parviendront surement à leur but qu'autant qu'ils continueront d'user à cet égard de la liberté la plus entière.

(*) Que ne devons-nous pas, par exemple, à l'usage du mot *fonction*, pris dans le sens que les géomètres y attachent aujourd'hui ?

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorème d'analise.

SOIT $X=0$ une équation en x du degré m dont la dérivée soit $X'=0$; et soit $Y=0$ l'équation du degré $m-1$, résultant de l'élimination de x entre les deux équations $X=y$ et $X'=0$;

1.° m étant pair, si $X=0$ n'a pas de racines égales, elle aura $0, 2, 4, 6, \ldots\ldots m$ racines imaginaires, suivant que $Y=0$ aura $\frac{m}{2}$, $\frac{m}{2}\pm1$, $\frac{m}{2}\pm2$, ... $\frac{m}{2}\pm\frac{m}{2}$ permanences de signes.

2.° m étant impair, si $X=0$ n'a pas de racines égales, elle aura $0, 2, 4, 6, \ldots\ldots(m-1)$ racines imaginaires, suivant que $Y=0$ aura $\frac{m-1}{2}$, $\frac{m-1}{2}\pm1$, $\frac{m-1}{2}\pm2$, ... $\frac{m-1}{2}\pm\frac{m-1}{2}$ permanences de signes.

3.° Enfin, si $Y=0$ a, à commencer par le terme tout connu $1, 2, 3, \ldots\ldots$ termes nuls consecutifs, $X=0$ aura une racine double, deux doubles ou une triple, trois doubles ou une quadruple, etc. (*).

(*) Ce théorème est extrait d'un ouvrage que M. Bérard vient de mettre au jour sur la résolution des équations numériques.

ANALISE ALGÉBRIQUE.

Théorie générale des fractions continues ;

Par M. Bret, professeur à la faculté des sciences de Grenoble, Chevalier de l'Ordre royal de la Légion d'honneur.

Le problème du développement d'une fraction ordinaire en fraction continue, se réduit évidemment à la résolution de l'équation

$$\frac{B}{A}=\cfrac{b}{a+\cfrac{b'}{a'+\cfrac{b''}{a''+\cfrac{b'''}{a'''+\ldots\ldots}}}} \qquad (1)$$

dans laquelle nous supposons que A, B sont deux nombres entiers positifs donnés, tels qu'on ait $A>B$, et où a, a', a'', a''', ..., b, b', b'', b''', ... sont des nombres entiers indéterminés, positifs ou négatifs ; on peut toujours supposer, au surplus, que a, a', a'', a''', ... sont positifs.

Posons successivement

$$\frac{B}{A}=\cfrac{b}{a+\cfrac{b'}{a'+\cfrac{b''}{a''+\ldots}}}\,,\quad \frac{C}{B}=\cfrac{b'}{a'+\cfrac{b''}{a''+\cfrac{b'''}{a'''+\ldots}}}\,,\quad \frac{D}{C}=\cfrac{b''}{a''+\cfrac{b'''}{a'''+\cfrac{b''''}{a''''+\ldots}}}\,,\ldots \quad (2)$$

il viendra ainsi

$$\frac{B}{A}=\frac{b}{a}+\frac{C}{B}, \quad \frac{C}{B}=\frac{b'}{a'}+\frac{D}{C}, \quad \frac{D}{C}=\frac{b''}{a''}+\frac{E}{D}, \ldots\ldots (3)$$

c'est-à-dire,

$$\left.\begin{array}{l} C=Ab\ -Ba\ , \\ D=Bb'-Ca'\ , \\ E=Cb''-Da''\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ ; \end{array}\right\} (4)$$

et la question se trouvera réduite à satisfaire en nombres entiers à cette suite d'équations, dans laquelle il est évident qu'on pourra prendre à la fois arbitrairement les dénominateurs a, a', a'',..... et les numérateurs b, b', b'',..... des fractions intégrantes.

Or, si l'on prend constamment $b<a$, $b'<a'$, $b''<a''$,......, la fraction continue se terminera nécessairement; en effet, on aura d'abord $\frac{b}{a}<1$; et, comme on aura aussi $\frac{b'}{a'}<1$, il s'ensuit qu'on aura $a+\frac{b'}{a'}>a-1$; donc, on aura

$$\frac{b}{a}+\frac{b'}{a'}<\frac{b}{a-1};$$

mais $\frac{b}{a-1}$ est au plus l'unité; donc, on aura

$$\frac{b}{a}+\frac{b'}{a'}<1.$$

On aura, par la même raison,

$$\frac{b'}{a'}+\frac{b''}{a''}<1;$$

donc

$$a+\cfrac{b'}{a'+\cfrac{b''}{a''}}>a-1\ ;$$

et, par suite,

$$\cfrac{b}{a+\cfrac{b'}{a'+\cfrac{b''}{a''}}}<\frac{b}{a-1}\ ;$$

d'où on conclura, comme ci-dessus,

$$\cfrac{b}{a+\cfrac{b'}{a'+\cfrac{b''}{a''}}}<1\,.$$

En continuant ainsi, de proche en proche, on parviendra à se convaincre que les portions de développement

$$\cfrac{b}{a+\cfrac{b'}{a'+\cfrac{b''}{a''+\ldots}}}\,,\quad \cfrac{b'}{a'+\cfrac{b''}{a''+\cfrac{b'''}{a'''+\ldots}}}\,;\quad \cfrac{b''}{a''+\cfrac{b'''}{a'''+\cfrac{b''''}{a''''+\ldots}}}\,,\ldots$$

sont toutes moindres que l'unité.

Il est pourtant un cas qui fait exception : c'est celui où l'on aurait précisément $b=a-1$, $b'=-(a'-1)$, $b''=-(a''-1)$, $b'''=-(a'''-1)$, c'est-à-dire le cas où la fraction continue serait

$$\cfrac{a-1}{a-\cfrac{a'-1}{a'-\cfrac{a''-1}{a''-\cfrac{a'''-1}{a-\ldots}}}}$$

et où, prolongée à l'infini, elle tendrait sans cesse vers l'unité : dans tout autre cas, elle sera constamment plus petite.

En appliquant présentement ce que nous venons de démontrer à la suite des équations (2), on voit que, si l'on a constamment, abstraction faite des signes,

$$b<a\ ,\quad b'<a'\ ,\quad b''<a''\ ,\quad b'''<a'''\ ,\ldots\ldots\ ,$$

on aura aussi constamment, abstraction faite des signes,

$$\frac{B}{A}<1\ ,\quad \frac{C}{B}<1\ ,\quad \frac{D}{C}<1\ ,\ldots\ldots\ ;$$

c'est-à-dire,

$$B<A\ ,\quad C<B\ ,\quad D<C\ ,\quad E<D\ ,\ldots\ldots\ ;$$

les nombres A, B, C, D, ... seront donc continuellement décroissans ; et, comme ils sont tous entiers, il faudra enfin que l'un d'eux soit nul ; ce qui prouve que la fraction continue se terminera.

Donc, si une fraction continue, dans laquelle les dénominateurs des fractions intégrantes sont constamment plus grands que leurs numérateurs, ne se termine pas, elle ne pourra être le développement d'une fraction finie, et sera conséquemment le développement d'un incommensurable.

Tout ce que nous venons de dire a encore lieu lors même que les numérateurs des fractions intégrantes sont d'abord plus grands que leurs dénominateurs, pourvu qu'ensuite ils deviennent plus petits qu'eux et demeurent constamment tels ; il arrive seulement alors que la suite des nombres A, B, C, D, ... est d'abord divergente ; mais elle devient ensuite convergente et doit conséquemment se terminer à zéro, comme dans le premier cas.

Posons présentement

$$\frac{B}{A}=\frac{b}{a+\frac{b'}{a'+\ldots\ldots+\frac{\beta}{\alpha}}}\ ,\quad \frac{B'}{A'}=\frac{b}{a+\frac{b'}{a'+\ldots\ldots+\frac{\beta}{\alpha+\frac{\beta'}{\alpha'}}}}\ ,\quad \frac{B''}{A''}=\frac{b}{a+\frac{b'}{a'+\ldots\ldots+\frac{\beta}{\alpha+\frac{\beta'}{\alpha'+\frac{\beta''}{\alpha''}}}}}\ ,\ldots\ldots$$

En réduisant la première de ces fractions continues en fraction orinaire, on trouvera une expression de cette forme

$$\frac{B}{A}=\frac{P\beta+Q\alpha}{M\beta+N\alpha};$$

on passera de là à la valeur de $\frac{B'}{A'}$, en y changeant α en $\alpha+\frac{\beta'}{\alpha'}$, ce qui donnera

$$\frac{B'}{A'}=\frac{P\beta+Q\left(\alpha+\frac{\beta'}{\alpha'}\right)}{M\beta+N\left(\alpha+\frac{\beta'}{\alpha'}\right)}=\frac{(P\beta+Q\alpha)\alpha'+Q\beta'}{(M\beta+N\alpha)\alpha'+N\beta'};$$

c'est-à-dire,

$$\frac{B'}{A'}=\frac{B\alpha'+Q\beta'}{A\alpha'+N\beta'}=\frac{Q\beta'+B\alpha'}{N\beta'+A\alpha'};$$

et l'on aura de même

$$\frac{B''}{A''}=\frac{B\beta''+B'\alpha''}{A\beta''+A'\alpha''};$$

d'où

$$B''=B\beta''+B'\alpha'', \quad A''=A\beta''+A'\alpha'';$$

Eliminant α'' entre ces deux équations, il viendra

$$A'B''-B'A''=-(AB'-BA')\beta'';$$

on aura donc, en général,

$$A'B''-B'A''=\pm bb'b''\ldots\ldots\beta\beta'\beta'';$$

le signe *plus* ou le signe *moins* aura lieu, suivant que le nombre des fractions intégrantes est *impair* ou *pair*, en les supposant du moins toutes positives.

Si nous prenons la différence entre deux fractions convergentes consécutives, nous aurons, abstraction faite des signes,

$$\frac{B''}{A''}-\frac{B'}{A''}=\frac{A'B''-B'A''}{A'A''}=\frac{bb'b''\ldots\ldots\beta\beta'\beta''}{A'A''};$$

mais nous avons trouvé ci-dessus

$$A''=A\beta''+A'\alpha'';$$

posant donc

$$\frac{A}{A'}\cdot\frac{\beta''}{\alpha''}=\omega'',$$

ce qui donnera nécessairement $\omega''<1$,
on aura

$$A''=A'\alpha''(1+\omega''),$$

et l'on aurait semblablement

$$A'=A\alpha'(1+\omega');$$

d'où on conclurait, en multipliant,

$$A''=A\alpha'\alpha''(1+\omega')(1+\omega'');$$

on aura donc généralement

$$A''=aa'a''\ldots\alpha\alpha'\alpha''(1+o)(1+o')1+o'')\ldots\ldots(1+\omega)(1+\omega')(1+\omega'');$$

o, o', o'', ... ω, ω', ω'' étant des quantités positives, plus petites que l'unité.

On aura donc ainsi

$$A'A''=A'aa'a''\ldots\alpha\alpha'\alpha''(1+o)(1+o')(1+o'')\ldots(1+\omega)(1+\omega')(1+\omega'');$$

et par conséquent

$$\frac{B''}{A''}-\frac{B'}{A'}=\frac{1}{A'}\cdot\frac{\frac{b}{a}\cdot\frac{b'}{a'}\cdot\frac{b''}{a''}\ldots\ldots\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\frac{\beta''}{\alpha''}}{(1+o)(1+o')(1+o'')\ldots(1+\omega)(1+\omega')(1+\omega'')};$$

et comme on les a inégalités.

$$b<a\ ,\ b'<a'\ ,\ b''<a''\ ,\ \ldots\ldots\ \beta<\alpha\ ,\ \beta'<\alpha'\ ,\ \beta''<\alpha''\ ,$$

il s'ensuit que la différence $\frac{B''}{A''}-\frac{B'}{A'}$ devient de plus en plus petite, à mesure qu'on s'avance dans la série des fractions convergentes, puisque d'ailleurs le dénominateur A' croît très-rapidement.

Cherchons présentement la différence entre la fraction $\frac{B'}{A'}$ et la fraction continue

$$x=\cfrac{b}{a+\cfrac{b'}{a'+\cfrac{b''}{a''+\ldots+\cfrac{\beta}{\alpha+\cfrac{\beta'}{\alpha'+\cfrac{\beta''}{y}}}}}}$$

y étant quelconque, mais plus grand que β''. Il viendra

$$x-\frac{B'}{A'}=\frac{B'y+B\beta''}{A'y+A\beta''}-\frac{B'}{A'}=\frac{(BA'-AB')\beta''}{A'(A'y+A\beta'')}\ ;$$

on aura pareillement

$$x-\frac{B}{A}=\frac{B'y+B\beta''}{A'y+A\beta''}-\frac{B}{A}=\frac{(AB'-BA')y}{A(A'y+A\beta'')}\ ;$$

divisant ces deux équations l'une par l'autre, on trouve

$$\frac{x-\frac{B'}{A'}}{x-\frac{B}{A}}=-\frac{B\beta''}{A'y}\ ;$$

or, on a, par hypothèse, $A'>A$, $y>\beta''$; donc $x-\frac{B'}{A'}$ est moindre que $x-\frac{B}{A}$, et l'on voit de plus qu'ils sont des signes contraires ; ainsi, si l'on a $x<\frac{B}{A}$, on aura $x>\frac{B'}{A'}$ et *vice versâ* ; ainsi, dans tous les cas, la valeur exacte de x se trouvera comprise entre deux fractions convergentes consécutives quelconques $\frac{B}{A}$, $\frac{B'}{A'}$, mais plus voisine de la seconde que de la première ; puis donc que, comme nous l'avons vu ci-dessus, la différence entre ces deux fractions décroît rapidement, à mesure qu'on s'avance dans la série des fractions convergentes, il s'ensuit qu'elles s'approchent aussi très-rapidement de la véritable valeur de x dont elles diffèrent alternativement par excès et par défaut, ce qui justifie pleinement leur dénomination.

Ce qui précède, suppose, à la vérité, que toutes les fractions intégrantes sont positives ; mais, dans le cas contraire, il est toujours facile de transformer la fraction continue en une autre qui n'en renferme que de telles ; on a, en effet,

$$a-\frac{q}{p}=(a-1)+\cfrac{1}{1+\cfrac{q}{p-q}},$$

$$a-\cfrac{q}{p-\cfrac{q'}{p'}}=(a-1)+\cfrac{1}{1+\cfrac{q}{p-q-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{q'}{p'-q'}}}};$$

$$a-\cfrac{q}{p-\cfrac{q'}{p'-\cfrac{q''}{p''}}}=(a-1)+\cfrac{1}{1+\cfrac{q}{p-q-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{q'}{p'-q'-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{q''}{p''-q''}}}}}};$$

et ainsi de suite.

On conclut de cette transformation que la nouvelle fraction continue remplira, à la fois, la condition de ne renfermer que des fractions intégrantes positives et celle de la convergence, si l'on a

$$\left.\begin{array}{l} q<p-q-1, \\ q'<p'-q'-1, \\ q''<p''-q''-1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} p>2q+1, \\ p'>2q'+1, \\ p''>2q''+1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Il

Il suffira même, quelles que soient d'ailleurs les premières fractions intégrantes, que ces conditions soient remplies, à partir de l'une quelconque d'entre elles; d'où l'on voit qu'en particulier la convergence vers une valeur fixe aura toujours lieu, lorsque les numérateurs q, q', q'',....., étant égaux et d'une grandeur quelconque, les dénominateurs p, p', p'',...... croîtront constamment, quelque lentement que ce soit, à partir de l'un quelconque.

Voyons présentement comment on pourra procéder, d'une manière régulière, au développement en fraction continue d'une fonction quelconque de x. On pourrait bien supposer que la fonction dont il s'agit a d'abord été développée en série ascendante; mais, pour plus de généralité nous la supposerons développée en fraction, ayant de pareilles séries pour ses deux termes; c'est-à-dire que nous supposerons

$$y=\frac{B+B'x+B''x^2+B'''x^3+....}{A+A'x+A''x^2+A'''x^3+....};$$

alors, en posant successivement

$$\frac{B+B'x+B''x^2+....}{A+A'x+A''x^2+....}=\frac{B}{A}+x.\frac{C+C'x+C''x^2+.....}{B+B'x+B''x^2+.....},$$

$$\frac{C+C'x+C''x^2+....}{B+B'x+B''x^2+....}=\frac{C}{B}+x.\frac{D+D'x+D''x^2+....}{C+C'x+C''x^2+....},$$

$$\frac{D+D'x+D''x^2+....}{C+C'x+C''x^2+....}=\frac{D}{C}+x.\frac{E+E'x+E''x^2+....}{D+D'x+D''x^2+....},$$

et ainsi de suite, on aura

$$y=\cfrac{B}{A+\cfrac{Cx}{B+\cfrac{Dx}{C+\cfrac{Ex}{D+\cfrac{Fx}{E+....}}}}}$$

Et l'on conclura les valeurs de C, D, E, F,..... des valeurs connues de A, A', A'',...... B, B', B'',....... au moyen des formules

$$C=BA'-AB'\ ,\quad C'=BA''-AB''\ ,\quad C''=BA'''-AB'''\ ,\ldots\ldots ,$$

$$D=CB'-BC'\ ,\quad D'=CB''-BC''\ ,\quad D''=CB'''-BC'''\ ,\ldots\ldots ,$$

$$E=DC'-CD'\ ,\quad E'=DC''-CD''\ ,\quad E''=DC'''-CD'''\ ,\ldots\ldots ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots ,$$

que l'on conclut des équations ci-dessus, en y chassant les dénominateurs, et exprimant ensuite qu'elles sont identiques.

Si les deux termes de la fraction valeur de y, au lieu de procéder suivant les puissances de x, procédaient suivant celles de x^n, il ne s'agirait que d'y traiter x^n ainsi que nous venons de traiter x dans le développement général; et si une puissance de x se trouvait être facteur soit du numérateur soit du dénominateur, on la ferait préalablement passer soit comme diviseur soit comme multiplicateur de y, ce qui ramenerait la question au premier cas.

Pour premier exemple, prenons la fonction

$$\text{Tang.}x=\frac{\text{Sin.}x}{\text{Cos.}x}=\frac{\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\ldots\ldots}{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\ldots\ldots}\ ;$$

nous écrirons d'abord

$$\frac{\text{Tang.}x}{x}=\frac{1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-\ldots\ldots}{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\ldots\ldots}\ ;$$

traitant alors x^2 comme x, dans le second membre, il viendra

$$A=1\ ,\quad A'=-\frac{1}{2!}\ ,\quad A''=+\frac{1}{4!}\ ,\quad A'''=-\frac{1}{6!}\ ,\quad A''''=+\frac{1}{8!}\ ,\ldots\ldots$$

$$B=1\ ,\quad B'=-\frac{1}{3!}\ ,\quad B''=+\frac{1}{5!}\ ,\quad B'''=-\frac{1}{7!}\ ,\quad B''''=+\frac{1}{9!}\ ,\ldots\ldots$$

$$C=-\frac{2}{3!}\,,\ C'=+\frac{4}{5!}\,,\ C''=-\frac{6}{7!}\,,\ C'''=+\frac{8}{9!}\,,\ldots\ldots$$

$$D=+\frac{2.8}{3!5!}\,,\ D'=-\frac{4.12}{3!7!}\,,\ D''=+\frac{6.16}{3!9!}\,,\ldots\ldots$$

$$E=+\frac{2.8.48}{3!5!7!}\,,\ E'=-\frac{4.12.64}{3!5!9!}\,,\ldots\ldots$$

$$F=-\frac{2.8.48.128}{3!5!7!9!}\,,\ldots\ldots$$

Nous avons donc finalement

$$A=+1\,,\ B=+1\,,\ C=-\tfrac{1}{3}\,,\ D=+\tfrac{1}{45}\,,\ E=+\tfrac{1}{4725}\,,\ F=-\tfrac{1}{13395375}\,,\ldots;$$

puis donc qu'on doit avoir

$$\frac{\text{Tang.}x}{x}=\cfrac{B}{A+\cfrac{Cx^2}{B+\cfrac{Dx^2}{C+\cfrac{Ex^2}{D+\cfrac{Fx^2}{E+\ldots}}}}}$$

on aura

$$\frac{\text{Tang.}x}{x}=\cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{1}{3}x^2}{1+\cfrac{\frac{1}{45}x^2}{-\frac{1}{3}+\cfrac{\frac{1}{4725}x^2}{\frac{1}{45}-\cfrac{\frac{1}{13395375}x^2}{\frac{1}{4725}+\ldots}}}}}$$

ce qui donne, en amenant successivement les numérateurs à être entiers négatifs, et en multipliant ensuite par x^2

$$x\text{Tang.}x=\cfrac{x^2}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\cfrac{x^2}{9-\cfrac{x^2}{11-\ldots}}}}}}$$

résultat dont la loi est manifeste, et qui, quel que soit x, satisfera à la condition de convergence, pourvu qu'on le pousse assez loin.

Si l'on transforme cette expression en une autre dont tous les termes soient positifs, d'après les formules trouvées ci-dessus, on obtiendra

$$\frac{\text{Tang.}x}{x}=\cfrac{1}{1+\cfrac{x^2}{2-x^2+\cfrac{1}{1+\cfrac{x^2}{4-x^2+\cfrac{1}{1+\cfrac{x^2}{6-x^2+\dots}}}}}}\,;$$

d'où il suit que, pourvu que l'on prenne $x^2<2-x^2$ ou $x<1$, cette fraction continue convergera, à partir de l'origine, vers la véritable valeur de $\frac{\text{Tang.}x}{x}$; dans tout autre cas, elle finira toujours par être convergente, pourvu qu'on la prolonge suffisamment.

Soit $x=\frac{\varpi}{4}$, nous aurons $\text{Tang.}x=1$, et notre formule deviendra

$$\frac{4}{\varpi}=\cfrac{1}{1-\cfrac{\left(\frac{\varpi}{4}\right)^2}{3-\cfrac{\left(\frac{\varpi}{4}\right)^2}{5-\cfrac{\left(\frac{\varpi}{4}\right)^2}{7-\cfrac{\left(\frac{\varpi}{4}\right)^2}{9-\dots}}}}}$$

Nous savons qu'on a $\frac{\varpi}{4}<1$, soit donc, s'il est possible, $\frac{\varpi}{4}=\frac{n}{m}$, m et n étant deux nombres entiers premiers entre eux, tels que $n<m$; il viendra, en substituant,

$$\frac{n}{m}=1-\cfrac{n^2}{3m^2-\cfrac{n^2}{5-\cfrac{n^2}{7m^2-\cfrac{n^2}{9-\cfrac{n^2}{11m^2-\dots}}}}}$$

or, cette équation est absurde; car son second membre est une fraction continue qui, ne se terminant pas et étant convergente, en la prolongeant suffisamment, doit avoir une valeur incommensurable, tandis que son premier membre est une fraction rationnelle;

il est donc absurde de supposer que $\frac{\pi}{4}$ est égal à une pareille fraction, π est donc incommensurable.

Prenons, pour second exemple, la fonction

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\ldots ;$$

nous aurons ici

$$A = 1\ ,\ A' = 0\ ,\ A'' = 0\ ,\ A''' = 0\ ,\ A'''' = 0\ ,\ \ldots\ldots$$

$$B = 1\ ,\ B' = 1\ ,\ B'' = \frac{1}{2!},\ B''' = \frac{1}{3!},\ B'''' = \frac{1}{4!}\ ,\ \ldots\ldots$$

$$C = -1\ ,\ C' = -\frac{1}{2!},\ C'' = -\frac{1}{3!},\ C''' = -\frac{1}{4!}\ ,\ldots\ldots$$

$$D = -\frac{1}{2!},\ D' = -\frac{2}{3!},\ D'' = -\frac{3}{4!}\ ,\ldots\ldots$$

$$E = -\frac{1}{2!3!},\ E' = -\frac{2}{2!4!},\ldots\ldots$$

$$F = +\frac{1}{2!3!4!}\ ,\ldots\ldots$$

Nous aurons donc finalement

$$A = 1\ ,\ B = 1\ ,\ C = -1\ ,\ D = -\tfrac{1}{2}\ ,\ E = -\tfrac{1}{12}\ ,\ F = +\tfrac{1}{144}\ ,\ldots\ldots$$

ce qui donnera, en substituant

$$xe^x = \frac{x}{1} - \frac{x}{1} + \frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x}{2} - \frac{x}{5} + \frac{x}{2} - \frac{x}{7} + \frac{x}{2} - \frac{x}{9} + \ldots$$

résultat dont la loi est manifeste.

On a, d'après cela

$$e=\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{9+\ldots}}}}}}}}}}$$

ce qui prouve que le nombre e est incommensurable.

On pourrait étendre cette théorie à d'autres exemples, non moins intéressans; mais, comme ces applications ne présentent aucune difficulté, nous terminerons par observer que, lorsque les numérateurs b, b', b'', ... β, β', β'',...... sont supposés égaux à l'unité, les résultats auxquels nous sommes parvenus se simplifient d'une manière notable. C'est ainsi, par exemple, que l'équation

$$A'B''-B'A''=\pm bb'b''\ldots\ldots\beta\beta'\beta''\ldots\ldots$$

devient

$$A'B''-B'A''=\pm 1\ ;$$

alors aussi les fractions convergentes se trouvent toutes réduites à leurs moindres termes, et la différence $\frac{1}{AA'}$ entre deux fractions convergentes consécutives $\frac{B}{A}$, $\frac{B'}{A'}$, diminue de plus en plus, à mesure qu'on avance dans la suite que forment ces fractions; on peut aussi remarquer que le quotient

$$\frac{x-\frac{B'}{A'}}{x-\frac{B}{A}}=-\frac{A}{A'y}\ ,$$

est toujours moindre que l'unité, puisqu'on a, à la fois, $y>1$ et $A'>A$, d'où il suit que les conditions de la convergence de la fraction continue se trouvent nécessairement remplies. Si la fraction continue a quelques fractions intégrantes négatives, en la transformant en une autre qui ne présente plus cette circonstance, les conclusions seront encore les mêmes. Enfin, il est facile, dans le cas que nous examinons, de démontrer ce beau théorème, savoir : que chaque fraction convergente approche plus de la valeur totale de la fraction continue que ne pourrait le faire toute autre fraction, exprimée par de plus petits nombres. Nous ne faisons que rappeler cette propriété, pour montrer comment elle se rattache à la théorie nouvelle et plus générale des fractions continues que nous avons essayé de présenter dans ce mémoire.

GÉOMÉTRIE.

Recherches sur le parallélogramme et sur le parallelipipède ;

Par M. Gergonne.

On a continuellement besoin, soit en géométrie soit en mécanique, de déterminer, en fonction des trois arêtes qui concourent en un même sommet d'un parallélipipède et des angles que ces arêtes forment deux à deux, soit la diagonale du parallélipipède, soit les angles que forme cette diagonale avec ces trois mêmes arêtes, soit enfin le volume de ce parallélipipède. Le moyen que l'on emploie communément, pour parvenir à ces divers résultats, consiste principalement dans la résolution d'un certain triangle sphérique ; ce qui est, à la fois, compliqué et peu symétrique. Nous allons faire voir que l'on peut parvenir au but d'une manière incomparablement plus simple et plus élégante, à l'aide du seul principe des projections; mais afin d'introduire à cette recherche par une recherche analogue, mais beaucoup plus facile, nous résoudrons d'abord les questions du même genre, relativement au parallélogramme.

I. soient A, B les deux côtés d'un même angle d'un parallélogramme quelconque; et soit Δ la diagonale qui joint le sommet de cet angle au sommet opposé; soient, en outre,

$$\text{Ang.}(A, B)=c, \quad \text{Ang.}(A, \Delta)=x, \quad \text{Ang.}(B, \Delta)=y.$$

On peut parvenir d'une extrémité à l'autre de la diagonale Δ, en cheminant extérieurement sur deux côtés consécutifs, égaux et parallèles à A, B; d'où il suit que la projection de la diagonale Δ sur une droite quelconque est égale à la somme des projections des côtés A, B sur la même droite. Projetant donc successivement cette diagonale sur les directions même des côtés A, B, nous aurons

$$\left.\begin{array}{l}\Delta\text{Cos.}x=A+B\text{Cos.}c, \\ \Delta\text{Cos.}y=B+A\text{Cos.}c;\end{array}\right\} \quad (1)$$

mais, d'un autre côté, en projetant sur la diagonale Δ les deux côtés par lesquels on chemine de l'une à l'autre de ses extrémités, on aura

$$\Delta=A\text{Cos.}x+B\text{Cos.}y; \qquad (2)$$

multipliant cette dernière équation par Δ, et remplaçant ensuite $\Delta\text{Cos.}x$, $\Delta\text{Cos.}y$ par les valeurs que donnent les équations (1), il viendra, en extrayant la racine quarrée,

$$\Delta=\sqrt{A^2+B^2+2AB\text{Cos.}c}. \qquad (3)$$

les équations (1) donneront ensuite

Cos.x

$$\text{Cos}.x=\frac{1}{\Delta}(A+B\text{Cos}.c)\ ,\quad \text{Cos}.y=\frac{1}{\Delta}(B+A\text{Cos}.c)\ ; \qquad (4)$$

formules dans lesquelles il faudra mettre pour Δ la valeur que nous venons de trouver. Telles sont, en particulier, les formules qu'il faut employer pour déterminer l'intensité et la direction de la résultante de deux puissances, données elles-mêmes d'intensité et de direction.

On conclut encore de là

$$\text{Sin}.x=\frac{B\text{Sin}.c}{\Delta}\ ,\quad \text{Sin}.y=\frac{A\text{Sin}.c}{\Delta}\ ; \qquad (5)$$

et, par suite,

$$\text{Tang}\,x=\frac{B\text{Sin}.c}{A+B\text{Cos}.c}\ ,\quad \text{Tang}.y=\frac{A\text{Sin}.c}{B+A\text{Cos}.c}\ . \qquad (6)$$

Des équations (1) on tire

$$A=\Delta\,.\,\frac{\text{Cos}x-\text{Cos}.y\text{Cos}.c}{1-\text{Cos}.^2c}\ ,\quad B=\Delta\,.\,\frac{\text{Cos}.y-\text{Cos}.x\text{Cos}.c}{1-\text{Cos},^2c}\ ; \qquad (7)$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (2), il viendra, en divisant par Δ, chassant le dénominateur et transposant,

$$1-\text{Cos}.^2c-\text{Cos}.^2x-\text{Cos}.^2y+2\text{Cos}.c\text{Cos}.x\text{Cos}.y=0\ ; \qquad (8)$$

équation de relation entre les trois angles que forment deux à deux, sur un même plan, trois droites partant d'un même point, et par conséquent trois droites quelconques. C'est aussi la relation entre les distances de trois points d'un arc de cercle, pris deux à deux, et de laquelle on déduirait, au besoin, la relation entre les distances de trois points d'une droite, pris deux à deux, en supposant le rayon du cercle infini, après avoir préalablement transformé les cosinus en sinus, et chassé les radicaux.

Si, de cette dernière équation, on tire la valeur de $\text{Cos}.c$ pour la substituer dans les équations (7), on aura les formules nécessaires pour décomposer une puissance Δ en deux autres A, B de directions données.

Par le sommet de l'angle (A, B), imaginons une perpendiculaire indefinie à la diagonale Δ. Si l'on conçoit un triangle dont cette diagonale soit la hauteur et dont la base soit la somme des projections des côtés A, B sur la perpendiculaire ; il est aisé de voir que ce triangle sera équivalent au parallelogramme. En représentant donc par P l'aire de ce dernier, et remarquant que la somme des projections de A, B est $A\text{Sin}.x+B\text{Sin}.y$, on aura

$$P=\tfrac{1}{2}\Delta(A\text{Sin}.x+B\text{Sin}.y)\ ;$$

formule qui, en y mettant pour $\text{Sin}.x$, $\text{Sin}.y$ leurs valeurs (5) deviendra

$$P=AB\text{Sin}.c\ ;$$

d'où il serait facile de déduire l'expression de l'aire d'un triangle en fonction de ses trois cotés.

II. Soient A, B, C les trois arêtes d'un même angle d'un parallélipipède quelconque ; et soit Δ la diagonale qui joint le sommet de cet angle au sommet opposé ; soient en outre

$$\text{Ang}.(B, C)=a\ ,\quad \text{Ang}.(C, A)=b\ ,\quad \text{Ang}.(A, B)=c\ ,$$

$$\text{Ang}.(\Delta, A)=x\ ,\quad \text{Ang}.(\Delta, B)=y\ ,\quad \text{Ang}.(\Delta, C)=z\ .$$

On peut parvenir d'une extrémité à l'autre de la diagonale Δ, en cheminant extérieurement sur trois arêtes consécutives, égales et parallèles à A, B, C ; d'où il suit que la projection de la diagonale Δ sur une droite quelconque est égale à la somme des projections des trois arêtes A, B, C sur la même droite. Projetant donc successivement cette diagonale sur les directions mêmes des trois arêtes A, B, C, nous aurons

$$\left.\begin{aligned}\Delta\text{Cos}.x&=A+B\text{Cos}.c+C\text{Cos}.b\,,\\ \Delta\text{Cos}.y&=B+C\text{Cos}.a+A\text{Cos}.c\,,\\ \Delta\text{Cos}.z&=C+A\text{Cos}.b+B\text{Cos}.a\,,\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

mais, d'un autre côté, en projetant sur la diagonale Δ les trois arêtes par lesquelles on chemine de l'une à l'autre de ses extrémités, on a

$$\Delta=A\text{Cos}.x+B\text{Cos}.y+C\text{Cos}.z\,;\qquad(2)$$

multipliant cette dernière équation par Δ, et remplaçant ensuite $\Delta\text{Cos}.x$, $\Delta\text{Cos}.y$, $\Delta\text{Cos}.z$ par les valeurs que donnent les équations (1), il viendra, en extrayant la racine quarrée,

$$\Delta=\sqrt{A^2+B^2+C^2+2BC\text{Cos}.a+2CA\text{Cos}.b+2AB\text{Cos}.c}\,.\qquad(3)$$

Les équations (1) donneront ensuite

$$\left.\begin{aligned}\text{Cos}.x&=\frac{1}{\Delta}(A+B\text{Cos}\,c+C\text{Cos}.b)\,,\\ \text{Cos}.y&=\frac{1}{\Delta}(B+C\text{Cos}.a+A\text{Cos}.c)\,,\\ \text{Cos}.z&=\frac{1}{\Delta}(C+A\text{Cos}.b+B\text{Cos}.a)\,;\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

formules dans lesquelles il faudra mettre pour Δ la valeur que nous venons de trouver. Telles sont, en particulier, les formules qu'il faut employer pour déterminer l'intensité et la direction de la résultante de trois puissances données elles-mêmes d'intensité et de direction.

On conclut encore de là

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{Sin.}x&=\frac{1}{\Delta}\sqrt{B^2+C^2+2BC\mathrm{Cos.}a-(B\mathrm{Cos.}c-C\mathrm{Cos.}b)^2}\,,\\
\mathrm{Sin.}y&=\frac{1}{\Delta}\sqrt{C^2+A^2+2CA\mathrm{Cos.}b-(C\mathrm{Cos.}a-A\mathrm{Cos.}c)^2}\,,\\
\mathrm{Sin.}z&=\frac{1}{\Delta}\sqrt{A^2+B^2+2AB\mathrm{Cos.}c-(A\mathrm{Cos.}b-B\mathrm{Cos.}a)^2}\,;
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

et par suite

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{Tang.}x&=\frac{\sqrt{B^2+C^2+2BC\mathrm{Cos.}a-(B\mathrm{Cos.}c-C\mathrm{Cos.}b)^2}}{A+B\mathrm{Cos.}c+C\mathrm{Cos.}b}\,,\\
\mathrm{Tang.}y&=\frac{\sqrt{C^2+A^2+2CA\mathrm{Cos.}b-(C\mathrm{Cos.}a-A\mathrm{Cos.}c)^2}}{B+C\mathrm{Cos.}a+A\mathrm{Cos.}c}\,,\\
\mathrm{Tang.}z&=\frac{\sqrt{A^2+B^2+2AB\mathrm{Cos.}c-(A\mathrm{Cos.}b-B\mathrm{Cos.}a)^2}}{C+A\mathrm{Cos.}b+B\mathrm{Cos.}a}\,.
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Des équations (1) on tire

$$\left.\begin{aligned}
A&=\Delta.\frac{(1-\mathrm{Cos.}^2a)\mathrm{Cos.}x-(\mathrm{Cos.}c-\mathrm{Cos.}a\mathrm{Cos.}b)\mathrm{Cos.}y-(\mathrm{Cos.}b-\mathrm{Cos.}c\mathrm{Cos.}a)\mathrm{Cos.}z}{1-\mathrm{Cos.}^2a-\mathrm{Cos.}^2b-\mathrm{Cos.}^2c+2\mathrm{Cos.}a\mathrm{Cos.}b\mathrm{Cos.}c}\\
B&=\Delta.\frac{(1-\mathrm{Cos.}^2b)\mathrm{Cos.}y-(\mathrm{Cos.}a-\mathrm{Cos.}b\mathrm{Cos.}c)\mathrm{Cos.}z-(\mathrm{Cos.}c-\mathrm{Cos.}a\mathrm{Cos.}b)\mathrm{Cos.}x}{1-\mathrm{Cos.}^2a-\mathrm{Cos.}^2b-\mathrm{Cos.}^2c+2\mathrm{Cos.}a\mathrm{Cos.}b\mathrm{Cos.}c}\\
C&=\Delta.\frac{(1-\mathrm{Cos.}^2c)\mathrm{Cos.}z-(\mathrm{Cos.}b-\mathrm{Cos.}c\mathrm{Cos.}a)\mathrm{Cos.}x-(\mathrm{Cos.}a-\mathrm{Cos.}b\mathrm{Cos.}c)\mathrm{Cos.}y}{1-\mathrm{Cos.}^2a-\mathrm{Cos.}^2b-\mathrm{Cos.}^2c+2\mathrm{Cos.}a\mathrm{Cos.}b\mathrm{Cos.}c}
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

substituant ces valeurs dans l'équation (2), il viendra, en divisant par Δ, chassant le dénominateur et transposant

$$\left.\begin{array}{l}
1-\mathrm{Cos.}^2a-\mathrm{Cos.}^2b-\mathrm{Cos.}^2c+2\mathrm{Cos.}a\mathrm{Cos.}b\mathrm{Cos.}c \\
+(1-\mathrm{Cos.}^2a)\mathrm{Cos.}^2x+2(\mathrm{Cos.}a-\mathrm{Cos.}b\mathrm{Cos.}c)\mathrm{Cos.}y\mathrm{Cos.}z \\
-(1-\mathrm{Cos.}^2b)\mathrm{Cos.}^2y+2(\mathrm{Cos.}b-\mathrm{Cos.}c\mathrm{Cos.}a)\mathrm{Cos.}z\mathrm{Cos.}x \\
-(1-\mathrm{Cos.}^2c)\mathrm{Cos.}^2z+2(\mathrm{Cos.}c-\mathrm{Cos.}a\mathrm{Cos.}b)\mathrm{Cos.}x\mathrm{Cos.}y
\end{array}\right\} = 0; \quad (8)$$

équation de relation entre les six angles que forment, deux à deux, dans l'espace, quatre droites qui partent d'un même point, et conséquemment quatre droites quelconques (*).

C'est aussi la relation entre les six distances de quatre points d'une sphère, pris deux à deux, et de laquelle on déduirait, au besoin, la relation entre les six distances deux à deux de quatre points d'un plan, en supposant le rayon de la sphère infini, après avoir préalablement transformé les cosinus en sinus et chassé les radicaux.

Les formules (7, 8) présentent tout ce qui est nécessaire pour décomposer une puissance Δ en trois autres de directions données.

Par le sommet de l'angle (A, B, C), imaginons un plan indéfini, perpendiculaire à la diagonale Δ. Si l'on conçoit une pyramide hexagonale dont la base soit la somme des projections de trois faces de l'angle (A, B, C) sur ce plan; il est aisé de voir que cette pyramide sera équivalente au parallélipipède.

Il n'est pas moins facile de se convaincre que la base de la pyramide sera un hexagone symétrique; c'est-à-dire, un hexagone ayant ses côtés opposés égaux et parallèles, et se trouvant conséquemment composé de trois parallélogrammes, lesquels seront les projections, sur notre plan, des trois faces de l'angle (A, B, C);

(*) Voyez le mémoire de M. Carnot sur la *Relation entre cinq points dans l'espace*, page 37.

mais les projections sur le même plan des trois arêtes de cet angle sont $A\text{Sin}.x$, $B\text{Sin}.y$, $C\text{Sin}.z$; d'où il suit (I), qu'en désignant par α, β, γ les projections des angles a, b, c sur ce plan, l'aire de la base de la pyramide sera

$$BC\text{Sin}.y\text{Sin}.z\text{Sin}.\alpha+CA\text{Sin}.z\text{Sin}.x\text{Sin}.\beta+AB\text{Sin}.x\text{Sin}.y\text{Sin}.\gamma\,;$$

de sorte qu'en désignant par P le volume du parallélipipède, on aura

$$P=\tfrac{1}{3}\Delta(BC\text{Sin}.y\text{Sin}.z\text{Sin}.\alpha+CA\text{Sin}.z\text{Sin}.x\text{Sin}.\beta+AB\text{Sin}.x\text{Sin}.y\text{Sin}.\gamma)\,;$$

tout se réduit donc à déterminer les angles α, β, γ.

Or, ces angles sont évidemment la mesure des angles dièdres que formeraient deux à deux les plans que l'on conduirait par la diagonale Δ et par chacune des trois arêtes A, B, C ; en considérant donc successivement les trois angles trièdres dont les arêtes sont

$$\Delta\,,\ B\,,\ C\,;\qquad \Delta\,,\ C\,,\ A\,;\qquad \Delta\,,\ A\,,\ B\,;$$

et dont les angles plans, respectivement opposés, sont

$$a\,,\ z\,,\ y\,;\qquad b\,,\ x\,,\ z\,;\qquad c\,,\ y\,,\ x\,;$$

nous aurons, par les principes fondamentaux de la trigonométrie sphérique,

$$\text{Sin}.y\text{Sin}.z\text{Cos}.\alpha=\text{Cos}.a-\text{Cos}.y\text{Cos}.z\,,$$

$$\text{Sin}.z\text{Sin}.x\text{Cos}\,\beta=\text{Cos}.b-\text{Cos}.z\text{Cos}.x\,,$$

$$\text{Sin}.x\text{Sin}.y\text{Cos}\,\gamma=\text{Cos}.c-\text{Cos}.x\text{Cos}.y\,;$$

d'où, en passant aux sinus,

$$\text{Sin.}y\text{Sin.}z\text{Sin.}\alpha=\sqrt{1-\text{Cos.}^2a-\text{Cos.}^2y-\text{Cos.}^2z+2\text{Cos.}a\text{Cos.}y\text{Cos.}z}\,,$$

$$\text{Sin.}z\text{Sin.}x\text{Sin.}\beta=\sqrt{1-\text{Cos.}^2b-\text{Cos.}^2z-\text{Cos.}^2x+2\text{Cos.}b\text{Cos.}z\text{Cos.}x}\,,$$

$$\text{Sin.}x\text{Sin.}y\text{Sin.}\gamma=\sqrt{1-\text{Cos.}^2c-\text{Cos.}^2x-\text{Cos.}^2y+2\text{Cos.}c\text{Cos.}x\text{Cos.}y}\,;$$

mais, en mettant dans les seconds membres de ces équations pour $\text{Cos.}x$, $\text{Cos.}y$, $\text{Cos.}z$, leurs valeurs (4), ils deviennent respectivement

$$\frac{A}{\Delta}\sqrt{1-\text{Cos.}^2a-\text{Cos.}^2b-\text{Cos.}^2c+2\text{Cos.}a\text{Cos.}b\text{Cos.}c}\,,$$

$$\frac{B}{\Delta}\sqrt{1-\text{Cos.}^2a-\text{Cos.}^2b-\text{Cos.}^2c+2\text{Cos.}a\text{Cos.}b\text{Cos.}c}\,,$$

$$\frac{C}{\Delta}\sqrt{1-\text{Cos.}^2a-\text{Cos.}^3b-\text{Cos.}^2c+2\text{Cos.}a\text{Cos.}b\text{Cos.}c}\,;$$

donc enfin, en substituant dans la valeur de P, il viendra

$$P=ABC\sqrt{1-\text{Cos.}^2a-\text{Cos.}^2b-\text{Cos.}^2c+2\text{Cos.}a\text{Cos.}b\text{Cos.}c}\,.$$

D'où il serait facile de conclure le volume d'un tétraèdre, en fonction de ses six arètes (*).

(*) Au moment où je termine ceci, je m'aperçois qu'à la page 253 du VI.e volume de ce recueil, M. Bérard est parvenu, par la même voie que moi, à l'équation de relation entre les six angles que forment deux à deux quatre droites dans l'espace; mais, cet estimable géomètre n'a pas songé à déduire de ces formules la diagonale du parallélipipède, ce qui n'était pourtant pas le point le plus difficile.

ANALISE ALGÉBRIQUE.

De la détermination du nombre des racines imaginaires des équations numériques (*);

Par un ABONNÉ.

NOUS nous proposons d'offrir ici, pour la détermination du nombre des racines imaginaires des équations, une méthode à laquelle on pourra peut-être reprocher sa prolixité, dans les degrés un peu élevés; mais qui néanmoins, dans l'espèce d'indigence où nous nous trouvons à cet égard, nous paraît ne devoir pas être tout-à-fait dédaignée, et qui peut d'ailleurs recevoir divers perfectionnemens dès qu'elle sera bien connue.

Pour rendre nos développemens plus facilement intelligibles, nous procéderons d'abord successivement des degrés les moins élevés à ceux qui le sont davantage. Nous présenterons ensuite l'exposé général de la méthode.

(*) Ce qu'on va lire présente des points nombreux de ressemblance avec le contenu du VI.e chapitre d'un ouvrage que M. BÉRARD vient de mettre au jour, sur la *Résolution des équations numériques*; mais, l'ouvrage de M. Bérard n'étant point encore en circulation, lorsque ce mémoire nous est parvenu, il est impossible que son auteur en ait eu connaissance. On trouve d'ailleurs des premiers germes de la théorie qui va être exposée, dans un mémoire du même auteur, inséré à la page 22 du VIII.e volume de ce recueil.

J. D. G.

1. Soit d'abord l'équation du *premier degré*

$$ax+b=0\ ; \qquad\qquad (X=0)$$

on sait que a étant positif, sa racine unique, toujours réelle, est *positive*, *négative* ou *nulle*, suivant que $-b$ est lui-même *positif*, *négatif* ou *nul*.

2. Soit l'équation du *second degré*

$$ax^2+bx+c=0\ , \qquad\qquad (X=0)$$

dans laquelle nous pouvons toujours supposer, et nous supposons en effet a positif.

Considérons la parabole ayant pour équation

$$ax^2+bx+c=y\ ; \qquad\qquad (X=y)$$

il est clair que la recherche des racines de la proposée se réduit à la recherche des abscisses des intersections de cette parabole avec l'axe des x; ces racines seront donc réelles et inégales, égales ou imaginaires, suivant que les intersections de la courbe avec l'axe des x seront au nombre de deux, se confondront en une seule ou n'existeront pas.

Et comme les branches extrêmes de la parabole se prolongent du côté des y positives, on peut dire que la proposée aura ses deux racines réelles et inégales, égales ou imaginaires, suivant que le sommet de la courbe aura son ordonnée négative, nulle ou positive. Tout se réduit donc à obtenir l'ordonnée de ce sommet.

Au sommet de la parabole on doit avoir $\frac{dy}{dx}=0$; c'est-à-dire,

$$2ax+b=0\ ; \qquad\qquad (X'=0)$$

c'est donc là l'équation qui donne l'abscisse du sommet de la courbe;

on aura donc l'équation qui donne son ordonnée, en éliminant x entre celle-ci et l'équation $X=y$; ce qui donnera

$$4ay+(b^2-4ac)=0 \text{ (*) }; \qquad (Y=0)$$

d'où l'on conclura (1) que l'équation $X=0$ a ses deux racines réelles et inégales, égales ou imaginaires, suivant que b^2-4ac est positif, nul ou négatif.

3. Soit l'équation du *troisième degré*

$$ax^3+bx^2+cx+d=0, \qquad (X=0)$$

dans laquelle nous supposons toujours a positif.

Considérons la courbe parabolique ayant pour équation

$$ax^3+bx^2+cx+d=y; \qquad (X=y)$$

il est clair que la recherche des racines de la proposée se réduit à la recherche des abscisses des intersections de cette courbe avec l'axe des x; ces racines seront donc toutes trois réelles ou inégales, ou bien deux d'entre elles seront égales, ou enfin il y en aura deux d'imaginaires, suivant que la courbe aura avec l'axe des x trois intersections distinctes, ou que deux de ces intersections se confondront en une seule, ou enfin que la courbe ne coupera l'axe des x qu'en un seul point. Il pourrait aussi arriver que les trois

---

(*) Il est clair que tout se réduit à éliminer x entre $X=0$ et $X'=0$, sauf à changer ensuite, dans le résultat, c en $c-y$; or, si l'on prend la différence des produits de X par 2 et de X' par x, il vient $bx+2c=0$; donc, tout se réduit à éliminer d'abord x entre les deux équations $2ax+b=0$ et $bx+2c=0$, ce qui donne $b^2-4ac=0$, et à changer ensuite c en $c-y$. On obtient ainsi $b^2-4a(c-y)=0$, qui est en effet l'équation du texte.

intersections se confondissent en une seule, auquel cas la proposée aurait ses trois racines égales.

Or, sauf les cas d'exception, sur lesquels nous reviendrons tout-à-l'heure, la courbe aura généralement deux sommets ; et, en supposant, pour fixer les idées, que l'angle des coordonnées positives soit pris au-dessus de l'axe des x, supposé horizontal, et à droite de l'axe des y, supposé vertical, voici quel sera son cours : de ses deux branches extrêmes et infinies, celle de gauche se prolongera en bas et à gauche, tandis que celle de droite se prolongera en haut et à droite ; et, quant à ses sommets, le plus à gauche aura sa convexité tournée vers le haut, tandis que le plus à droite aura la sienne tournée vers le bas.

Or, de là il est aisé de conclure, 1.° que la proposée ne pourra avoir ses trois racines réelles qu'autant que l'axe des x se trouvera compris entre les tangentes aux deux sommets ; 2.° qu'elle aura deux racines égales, lorsque l'axe des x se confondra avec l'une ou l'autre de ces tangentes ; 3.° qu'enfin elle aura deux racines imaginaires, si l'axe des x est au-dessus ou au-dessous de ces deux tangentes.

Cela revient évidemment à dire, 1.° que la proposée ne pourra avoir ses trois racines réelles et inégales qu'autant que les ordonnées des deux sommets seront de signes contraires ; 2.° que deux de ses racines seront égales, si l'une quelconque de ces ordonnées est nulle ; 3.° qu'enfin elle aura deux racines imaginaires, si ces deux ordonnées ont un même signe quelconque.

Tout se réduit donc, comme l'on voit, à déterminer les ordonnées des deux sommets, ou seulement à pouvoir en assigner les signes ; or, aux sommets de la courbe, on doit avoir $\frac{dy}{dx}=0$; c'est-à-dire,

$$3ax^2+2bx+c=0\ ; \qquad\qquad (X'=0)$$

c'est donc là l'équation qui doit donner les abscisses des sommets ;

on aura donc l'equation qui donne leurs ordonnées, en éliminant x entre celle-ci et l'équation $X=y$; ce qui donnera (*)

(*) Pour exécuter facilement cette élimination, et obtenir l'équation finale telle qu'on la voit dans le texte, on remarquera, en premier lieu, que tout se réduit à éliminer x entre les deux équations $X=0$, $X'=0$, pourvu que, dans le résultat, on change d en $d-y$.

Or, si de l'équation $X=0$, multipliée par 3, on retranche l'équation $X'=0$, multipliée par x, il viendra

$$bx^2+2cx+3d=0\;;$$

tout se réduit donc à éliminer x entre cette dernière équation et l'équation

$$3ax^2+2bx+c=0\,,$$

et à changer ensuite d en $d-y$ dans le résultat.

Le résultat de cette élimination étant

$$(bc-9ad)^2-4(b^2-3ac)(c^2-3bd)=0\,, \qquad (D=0)$$

il s'ensuit que l'équation finale en y doit être

$$\{bc-9a(d-y)\}^2-4(b^2-3ac)\{c^2-3b(d-y)\}=0\;; \qquad (Y=0)$$

équation qu'il s'agirait de développer et d'ordonner.

Mais il est clair qu'on aura les coefficiens de ses différens termes, du dernier au premier, en posant $y=0$ dans Y, $\frac{dY}{dy}$, $\frac{1}{2}\frac{d^2Y}{dy^2}$; or, on a

$$\frac{dY}{dy}=18a\{bc-9a(d-y)\}-12b({}^2b-3ac)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2Y}{dy^2}=81a^2\,,$$

ce qui, en faisant $y=0$, donne les trois coefficiens du texte.

Cela revient, au surplus, à dire que l'équation finale en y est

$$\frac{1}{2}\frac{d^2D}{dd^2}y^2+\frac{dD}{dd}y+D=0\,.$$

$$81a^2y^2+6\{3a(bc-9ad)-2b(b^2-3ac)\}y$$

$$+\{(bc-9ad)^2-4(b^2-3ac)(c^2-3bd)\}=0\,, \qquad (Y=0)$$

La proposée aura donc ses trois racines réelles et inégales, deux racines égales, ou enfin deux racines imaginaires, suivant que cette dernière aura ou ses deux racines de signes contraires ou l'une d'elles nulle ou toutes les deux de mêmes signes; c'est-à-dire, suivant que son dernier terme

$$(bc-9ad)^2-4(b^2-3ac)(c^2-3bd)\,; \qquad (D)$$

produit de ces deux racines, sera négatif, nul ou positif.

Passons présentement aux cas particuliers. Nous avons supposé que la courbe parabolique $X=y$ avait deux sommets réels et distincts, ce qui suppose que l'équation $X'=0$ a ses deux racines réelles et inégales ou, en d'autres termes, qu'on a (2)

$$b^2-3ac>0\;;$$

mais, ces deux sommets pourraient fort bien se confondre en un seul; ou bien ils pourraient être tous deux imaginaires, et c'est ce qui arriverait si cette même fonction b^2-4ac était nulle ou négative.

Dans le premier cas, la courbe n'aurait qu'une seule tangente parallèle à l'axe des x; dans le second, elle n'en aurait aucun; dans l'un et l'autre elle ne pourrait évidemment couper l'axe des x en plus d'un point, et conséquemment l'équation proposée devrait avoir deux racines imaginaires.

Or, lorsque b^2-3ac est nul, la fonction (D) qui se réduit alors à $(bc-9ad)^2$ est essentiellement positive; il n'y a donc rien de changé alors au principe que nous avons établi ci-dessus.

Passons au second cas, c'est-à-dire, à celui où l'équation $X'=0$

a ses deux racines imaginaires, ou, ce qui revient au même, à celui où b^2-3ac est négatif; si nous résolvons la fonction (D) égalée à zéro, comme équation du second degré en d, nous trouverons

$$d=\frac{-b(2b^2-9ac)\pm 2\sqrt{(b^2-3ac)^3}}{27a^2}\;;$$

racines essentiellement imaginaires, lorsque b^2-3ac est négatif; donc, dans cette hypothèse, quelque valeur que l'on donne à d dans la fonction (D), on obtiendra toujours des résultats de mêmes signes; ils seront donc constamment positifs, puisqu'ils sont tels lorsqu'on fait, en particulier, $d=0$. Ainsi, dans ce cas encore, nous n'avons rien à changer à nos conclusions.

Il est un dernier cas qui a échappé à notre analise : c'est celui où les deux sommets se confondant en un seul, c'est à-dire, celui où la courbe n'ayant qu'une seule tangente parallèle à l'axe des x, cette tangente est l'axe des x lui-même. Il est évident qu'alors la proposée doit avoir ses trois racines égales; il faut donc que son premier membre soit un cube parfait, ou du moins soit susceptible de le devenir au moyen d'un multiplicateur convenable; soit λ ce multiplicateur, la proposée devra équivaloir à

$$(x\sqrt[3]{\lambda a}+\sqrt[3]{\lambda d})^3=0\;;$$

c'est-à-dire,

$$\lambda\{ax^3+3x^2\sqrt[3]{a^2d}+3x\sqrt[3]{ad^2}+d\}=0\;;$$

on devra donc avoir

$$b=3\sqrt[3]{a^2d}\;,\qquad c=3\sqrt[3]{ad^2}\;;$$

d'où

$$b^2=9a\sqrt[3]{ad^2}=3ac\;,\qquad c^2=9d\sqrt[3]{a^2d}=3bd\;,$$

et, par suite,

$$bc=9ad\,;$$

on aura donc, à la fois,

$$b^2-3ac=0\,,\qquad bc-9ad=0\,,\qquad c^2-3bd=0\,,$$

la fonction (D) sera donc nulle, comme dans le cas de deux racines égales seulement; mais, de plus, l'équation $Y=0$ qui, dans ce cas, ne perdait que son dernier terme, perdra aussi celui qui le précède.

Ainsi, en résumé, et quels que puissent être d'ailleurs les cas particuliers qui auront lieu, 1.° si l'équation $Y=0$ a une variation et une permanence, l'équation $X=0$ aura ses trois racines réelles et inégales; 2.° si cette équation n'a que des permanences, la proposée aura deux racines imaginaires; 3.° si cette équation est dépourvue de son dernier terme, la proposée aura deux racines égales; 4.° enfin, la proposée aura ses trois racines égales, si l'équation $Y=0$ est privée à la fois de ses deux derniers termes.

Il n'aura pas sans doute échappé au lecteur que la fonction (D) se compose de la même manière des coefficiens qui, dans la proposée, se trouvent être également éloignés des extrêmes. On conçoit que cela ne saurait être autrement, puisqu'en changeant dans la proposée x en $\frac{1}{x}$, cette équation ne fait simplement que se renverser; et que les racines de la nouvelle équation doivent être réelles ou imaginaires, égales ou inégales, suivant que celles de la proposée le sont elles-mêmes. C'est principalement pour laisser apercevoir cette circonstance que nous avons donné un coefficient au premier terme de la proposée; nous en avons d'ailleurs recueilli l'avantage de n'avoir à considérer que des fonctions homogènes.

4. Soit l'équation du *quatrième degré*

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0 \ . \qquad (X=0)$$

Soient posées les deux équations

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=y \ , \qquad (X=y)$$

$$4ax^3+3bx^2+2cx+d=0 \ ; \qquad (X'=0)$$

dont la dernière n'est autre chose que la dérivée de la proposée. En éliminant x entre elles, et posant, pour abréger,

$$bc-6ad=A \ , \quad 3b^2-8ac=B \ , \quad bd-16ae=C \ ,$$

$$cd-6be=E \ , \quad 3d^2-8ce=D \ , \quad 4c^2-9bd=F \ ,$$

on obtiendra

$$4096a^3y^3-16\{48a^2C-8a(2cB+3bA)+9b^2B\}y^2$$

$$+8\{6aC^2-(2cB+3bA)C-4a(BD+2AE)+2(2cA^2+3bBE)-cBF\}y$$

$$-\{C^3-2(BD+2AE)C+4(A^2D+E^2B)-BDF\}=0. \ (*) \quad (Y=0)$$

(*) Pour parvenir simplement à cette équation, éliminez d'abord x entre les deux équations

$$4ax^3+3bx^2+2cx+d=0 \ ,$$

$$bx^3+2cx^2+3d+4e=0 \ ;$$

en représentant par $E=\mathrm{f}(e)=0$ l'équation résultante, l'équation cherchée sera

$$\tfrac{1}{6}\frac{\mathrm{d}^3E}{\mathrm{d}e^3}y^3+\tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}e^2}y^2+\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}e}y+E=0 \ .$$

Cette

Cette équation est encore, comme ci-dessus, celle qui donne les ordonnées des sommets de la courbe parabolique, lesquels sont ici, en général, au nombre de trois : l'intermédiaire a sa convexité tournée vers le haut : les deux extrêmes ont la leur tournée vers le bas ; et les deux branches infinies de la courbe se prolongent en haut, celle de droite vers la droite, et celle de gauche vers la gauche.

En supposant donc ces trois sommets réels et distincts, on voit, 1.° que la proposée ne pourra avoir ses quatre racines réelles qu'autant que l'axe des x se trouvera compris entre la tangente au sommet intermédiaire et celle au sommet extrême dont la tangente est la plus voisine de celle-là ; 2.° que la proposée aura deux racines réelles inégales et deux autres égales, si l'axe des x est tangent soit au sommet intermédiaire soit à celui des deux extrêmes qui est le plus élevé ; 3.° qu'elle aura deux couples de racines égales, si l'axe des x est à la fois tangent aux deux sommets extrêmes ; 4.° qu'elle aura deux racines réelles inégales et deux racines imaginaires, si l'axe des x se trouve compris entre les tangentes aux deux sommets extrêmes ; 5.° qu'elle aura deux racines égales et deux racines imaginaires, si l'axe des x est tangent au sommet extrême le moins élevé ; 6.° qu'enfin ses quatre racines seront imaginaires si l'axe des x tombe au-dessous de cette dernière tangente.

Tout cela revient évidemment à dire, 1.° que l'équation $X=0$ ne pourra avoir ses quatre racines réelles et inégales qu'autant que l'équation $Y=0$ aura une racine positive et deux racines négatives ; 2.° que l'équation $X=0$ aura deux racines réelles inégales et deux racines imaginaires, si l'équation $Y=0$ a deux racines positives et une négative ou trois racines négatives ; 3.° que l'équation $X=0$ aura enfin ses quatre racines imaginaires, si les racines de l'équation $Y=0$ sont toutes trois positives ; 4.° qu'en particulier, l'équation $X=0$ aura ou deux racines égales ou deux couples de racines égales, suivant que l'équation $Y=0$ sera dépourvue de son dernier ou de ses deux derniers termes ; et que, dans le premier cas, ses deux autres racines ne seront réelles qu'autant que les racines restantes de l'équation $Y=0$ ne seront pas toutes deux positives.

Le dernier terme d'une équation du troisième degré, pris avec un signe contraire étant le produit de toutes ses racines, il s'ensuit que, quand le dernier terme de l'équation $Y=0$ sera positif, l'équation $X=0$ aura deux racines réelles et deux racines imaginaires, et que, quand il sera négatif, les racines de l'équation $X=0$ seront outes quatre réelles ou toutes quatre imaginaires; mais, par la règle de Descartes, l'équation $Y=0$ sera, dans le premier cas, de l'une des trois formes

$$\alpha y^3+\beta y^2+\gamma y-\delta=0 ,$$

$$\alpha y^3+\beta y^2-\gamma y-\delta=0 ,$$

$$\alpha y^3-\beta y^2-\gamma y-\delta=0 ;$$

tandis que, dans le second, elle ne pourra être que de la forme

$$\alpha y^3-\beta y^2+\gamma y-\delta=0 ;$$

ainsi ces deux cas seront toujours faciles à discerner l'un de l'autre.

Si nous en venions présentement à discuter les cas particuliers dans lesquels deux de nos trois sommets deviennent imaginaires, ou dans lesquels ces trois sommets se réduisent à deux ou à un seul, circonstances qui sont indiquées par les équations $Y=0$ ou $X'=0$, qui ont alors deux racines imaginaires, ou bien deux ou trois racines égales, nous nous convaincrions que ces cas particuliers ne nécessitent aucun changement dans nos conclusions générales relatives au nombre des racines tant réelles qu'imaginaires de la proposée. Il pourrait seulement se faire alors que cette équation eût trois ou même quatre racines égales, ce qu'on reconnaîtrait au nombre des termes de la droite de l'équation $Y=0$ qui s'évanouiraient.

5. Soit, en général, l'équation quelconque.

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots\ldots + px + q = 0 \ ; \qquad (X=0)$$

et soit

$$\alpha y^{m-1} + \beta y^{m-2} + \gamma y^{m-3} + \ldots\ldots + \pi y + \rho = 0 \ , \qquad (Y=0)$$

l'équation qu'on obtient en éliminant x entre la dérivée

$$max^{m-1} + (m-1)bx^{m-2} + (m-2)cx^{m-3} + \ldots\ldots + p = 0 \ , \qquad (X'=0)$$

de la proposée et l'équation

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots\ldots + px + q = y. \ (*) \qquad (X=y)$$

Cela posé, soient V et P respectivement le nombre des variations et le nombre des permanences de l'équation $Y=0$, ce qui donnera $V+P=m-1$. Si la proposée $X=0$ est de degré impair, le nombre de ses racines imaginaires sera

$$\pm(V-P) \ ;$$

et si, au contraire, elle est d'un degré pair, le nombre de ses racines imaginaires sera

(*) Il est patent, par tout ce qui précède, que l'équation $Y=0$ ne doit pas excéder le $(m-1)^{\text{me}}$ degré : cela résulte aussi de la théorie de l'élimination. Bezout a démontré, en effet, que si l'on a deux équations en x et y dans lesquelles les plus hautes puissances de x soient respectivement $p+p'$, $q+q'$ et celles de y seulement p, q, l'équation finale en y n'excéderait pas le degré $(p+p')(q+q')-p'q'$. Or, nous avons ici $p+p'=m$, $q+q'=m-1$, $p=1$, $q=0$ d'où $p'=m-1$, $q'=m-1$; donc le degré de l'équation en y doit être au plus

$$m(m-1)-(m-1)^2=m-1 \ .$$

$$\pm(V-P+1)\,.\ (*)$$

Nous avons construit des formules générales pour les quatre premiers degrés, et on pourrait également en construire pour les autres ; mais il sera peut-être plus court d'opérer immédiatement, dans la pratique, sur les équations numériques.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. PARTAGER l'aire d'un triangle sphérique en trois parties équivalentes, par des arcs de grands cercles joignant un point de son intérieur à ses trois sommets ?

II. Partager l'aire d'un triangle sphérique en trois parties équivalentes, par des arcs de grands cercles abaissés sur ses côtés d'un point de son intérieur ?

(*) C'est à cela que revient, au fond, le théorème de M. Bérard dont nous avons demandé la démonstration à la page 36 de ce volume : théorème que ce géomètre admet comme un *fait analitique*.

J. D. G.

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

Mémoire sur les développantes successives d'une même courbe quelconque ;

Par un Ancien élève de l'école polytechnique.

Nous nous proposons ici de démontrer quelques théorèmes relatifs aux développantes successives des courbes quelconques, continues ou discontinues. Quelques-uns des objets qui vont nous occuper ont déjà été traité par L'Hopital, Bernouilli, Euler, et récemment par M. Poinsot. Mais, comme il peut n'être pas sans intérêt de montrer comment on parvient au même but par des routes diverses, nous reprendrons de nouveau les questions traitées par ces illustres géomètres, pour en former un tout avec ce qui nous appartient en propre dans ce mémoire. Le lecteur y trouvera d'ailleurs l'avantage de n'avoir pas besoin de recourir à d'autres écrits pour entendre complètement celui-ci.

THÉORÈME I. Si l'on forme la développante d'un arc de courbe quelconque, puis la développante de cette développante, puis la développante de cette dernière courbe, et ainsi de suite ; en faisant commencer ces développantes consécutives à une même extrémité de la courbe primitive ; on obtiendra ainsi une suite d'arcs de courbes partant d'un même point, alternativement normales et tangentes en ce point à la courbe primitive, et ayant conséquemment pour tangentes et normales communes en ce même point deux droites indéfinies perpendiculaires l'une à l'autre.

Or, 1.° en prenant avec des signes contraires les arcs qui vont dans des directions opposées, la somme infinie des arcs tangens à l'arc primitif est égale à la projection de l'arc donné sur sa tangente à l'extrémité opposée à celle de laquelle partent toutes les développantes.

2.° En prenant également avec des signes contraires les arcs qui vont dans des directions opposées, la somme infinie des développantes normales à la courbe primitive sera égale à la projection de l'arc donné sur sa normale à l'extrémité opposée à celle de laquelle partent toutes les développantes.

Soit AB_0 (fig. 1) un arc de courbe quelconque, dont AX et AY soient la tangente et la normale à l'extrémité A, et dont B_0B_1 et B_0I soient la tangente et la normale à l'autre extrémité B_0. Soient de plus B_0A', B_0A'' les projections de l'arc sur ces deux dernières droites.

Soient AB_0, AB_1, AB_2, AB_3, ... une série d'arcs, tels que chacun soit la développante de celui qui le précède immédiatement. Il s'agit de démontrer, 1.° que

$$AB_0-AB_2+AB_4-AB_6+\ldots\ldots=B_0A' \;;$$

2.° que

$$AB_1-AB_3+AB_5-AB_7+\ldots\ldots=B_0A'' \,.$$

On doit remarquer que le théorème ne suppose pas nécessairement que l'arc primitif AB_0 soit soumis à une loi analitique ; de manière qu'on peut même lui substituer une portion de polygone quelconque, rectiligne, curviligne ou mixtiligne.

M. Poinsot a déjà remarqué la vérité du théorème, dans le cas où l'arc primitif est un arc de cercle ; il s'agit de faire voir qu'il a lieu également, lorsque l'arc primitif est une ligne quelconque.

Démonstration. Soit pris sur l'arc primitif AB_0, à partir de son extrémité A, une partie variable $AM_0=S_0$; soit M_0M_1 la tangente correspondante, terminée en M_1 à la développante AB_1 de AB_0 ;

soit fait $AM_1 = S_1$; soit M_1M_2 la tangente à AB_1 en M_1, terminée en M_2 à sa développante AB_2 ; soit fait $AM_2 = S_2$, et ainsi de suite. Soit enfin φ l'angle variable que fait la tangente M_0M_1 en M_0, avec la tangente AX en A. Soient de plus pris AX, AY pour les axes des coordonnées.

Cela posé, les choses étant d'ailleurs (fig. 2) comme nous les avons supposées (fig. 1) ; concevons que l'arc $AM_0 = S_0$ augmente de la quantité $M_0M_0 = dS_0$; l'arc $AM_1 = S_1$ augmentera de la quantité $M_1M'_1 = dS_1$; et l'on aura l'angle $M_1M'_0M'_1 = d\varphi$. De plus, l'arc $M_1M'_1$ pouvant être considéré comme une ligne droite, le triangle $M_1M'_0M'_1$, rectangle en M'_1, donnera

$$M_1M'_1 = M'_0M_1 \mathit{Cos}.M'_0M_1M'_1 = M'_0M_1 \mathit{Sin}.M_1M'_0M'_1 \text{ ;}$$

c'est-à-dire,

$$dS_1 = (S_0 + dS_0)\text{Sin}.d\varphi \text{ ;}$$

ou simplement

$$dS_1 = S_0 d\varphi \text{ ;}$$

d'où

$$S_1 = \int S_0 d\varphi \text{ ;}$$

l'intégrale devant s'évanouir en même temps que φ.

D'après cela, il est clair qu'on devra avoir

$$S_1 = \int S_0 d\varphi \text{ ,}$$

$$S_2 = \int^2 S_0 d\varphi^2 \text{ ;}$$

$$S_3 = \int^3 S_0 d\varphi^3 \text{ ,}$$

$$\cdots\cdots\cdots ,$$

$$S_n = \int^n S_0 d\varphi^n \text{ .}$$

Si l'on developpe ces intégrales au moyen de l'intégration par parties ; en se rappelant qu'elles doivent s'évanouir en même temps que φ, on aura

$$S_1 = \varphi S_0 - \int \varphi dS^0 \ ,$$

$$S_2 = \frac{\varphi^2}{2!} S_0 - \frac{\varphi}{1!} \int \varphi dS_0 + \int \frac{\varphi^2}{2!} dS_0 \ ,$$

$$S_3 = \frac{\varphi^3}{3!} S_0 - \frac{\varphi^2}{2!} \int \varphi dS_0 + \frac{\varphi}{1} \int \frac{\varphi^2}{2!} dS_0 - \int \frac{\varphi^3}{3!} dS_0 \ ,$$

. . . . ;

$$S_n = \frac{\varphi^n}{n!} S_0 - \frac{\varphi^{n-1}}{(n-1)!} \int \varphi dS_0 + \ldots\ldots \pm \frac{\varphi}{1!} \int \frac{\varphi^{n-1}}{(n-1)!} dS_0 \mp \int \frac{\varphi^n}{2!} dS_0 \, .$$

La série infinie des arcs de rangs pairs, pris avec leurs signes, est

$$S_0 - S_2 + S_4 - S_6 + \ldots\ldots$$

Si l'on y substitue pour S_0, S_2, S_4, ... les valeurs ci-dessus, il viendra, en réunissant ce qui multiplie chaque intégrale,

$$S_0 - S_2 + S_4 - S_6 + \ldots\ldots =$$

$$\left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \ldots\right)\left(S_0 - \int \frac{\varphi^2}{2!} dS_0 + \int \frac{\varphi^4}{4!} dS_0 - \ldots\ldots\right)$$

$$+ \left(\frac{\varphi}{1} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \ldots\right)\left(\int \frac{\varphi}{1} dS_0 - \int \frac{\varphi^3}{3!} dS_0 + \int \frac{\varphi^5}{5!} dS_0 - \ldots\ldots\right);$$

c'est-à-dire,

$$S_0 - S_2 + S_4 - S_6 + \ldots\ldots =$$

$$\left(S_0 - \int \frac{\varphi^2}{2!} dS_0 + \int \frac{\varphi^4}{4!} dS_0 - \int \frac{\varphi^6}{6!} dS_0 + \ldots\ldots\right) \text{Cos.}\varphi$$

$$+ \left(\int \frac{\varphi}{1} dS_0 - \int \frac{\varphi^3}{3!} dS_0 + \int \frac{\varphi^5}{5!} dS_0 - \ldots\ldots\right) \text{Sin}\,\varphi \ ;$$

ou, en faisant tout passer sous le même signe d'intégration, ce qui est permis, puisque les limites sont les mêmes,

$$S_0-S_2+S_4-S_6+\ldots\ldots=\text{Cos}\,\varphi\int dS_0\text{Cos.}\varphi+\text{Sin.}\varphi\int dS_0\text{Sin.}\varphi\ .$$

Or, $\int dS_0\text{Cos.}\varphi$ et $\int dS_0\text{Sin.}\varphi$ sont les projections de la courbe primitive sur les tangente et normale au point A; en représentant donc respectivement ces projections par x et y, on aura

$$S_0-S_2+S_4-S_6+\ldots\ldots=x\text{Cos.}\varphi+y\text{Sin.}\varphi\ ,$$

et on trouverait pareillement

$$S_1-S_3+S_5-S_7+\ldots\ldots=x\text{Sin.}\varphi-y\text{Sin.}\varphi\ .$$

Or, ce sont précisément là les formules au moyen desquelles on passe d'un système rectangulaire à un autre système rectangulaire formant un angle φ avec le premier, d'où il suit que ces deux séries ne sont autre chose que les projections de l'arc AM_0 sur la tangente et sur la normale à son autre extrémité M_0, ainsi que l'énonce le théorème.

Les développemens de S_1, S_2, S_3, ..., d'où nous avons conclu ce théorème, ne supposent aucunement que la relation entre les deux variables S_0 et φ, puisse être exprimée par une fonction analitique, unique et continue; ils ne sont fondés, en effet, que sur le principe d'intégration par parties, lequel a toujours lieu quel que puisse être le genre de dépendance entre S_0 et φ. Il faut seulement observer que, dans les séries

$$S_0-S_2+S_4-S_6+\ldots\ldots,$$

$$S_1-S_3+S_5-S_7+\ldots\ldots,$$

les arcs S_0, S_1, S_2, ... doivent se mesurer en prenant négativement les portions de développantes qui répondraient à des décroissemens de l'angle φ, c'est-à-dire, à des mouvemens de la tangente inverses de son mouvement primitif.

Avant de passer à d'autres propositions qu'on peut conclure du précédent théorème, nous ferons remarquer que les arcs de développantes consécutifs, correspondant à un angle donné φ, doivent nécessairement décroître sans cesse, de manière à devenir enfin moindres que toute longueur donnée; du moins tant que l'arc primitif n'est pas infini; car, puisque chacune des séries

$$S_0-S_2+S_4-S_6+\ldots\ldots=S_0-\int^2 S_0 d\varphi^2+\int^4 S_0 d\varphi^4-\ldots\ldots,$$

$$S_1-S_3+S_5-S_6+\ldots\ldots=\int S_0 dx-\int^3 S_0 d\varphi^3+\int^5 S_0 d\varphi^5-\ldots\ldots;$$

se décompose en d'autres dont la sommation ne dépend que de celles de $\text{Sin}.\varphi$, de $\text{Cos}.\varphi$ et des intégrales $\int dS_0.\text{Cos}.\varphi$, $\int dS_0.\text{Sin}.\varphi$, lesquelles s'obtiennent toujours, quel que soit φ, lorsque S_0 n'est pas infini; il s'ensuit que ces séries en S_0, S_1, S_2, ... sont toujours convergentes, et qu'ainsi les arcs dont on vient de parler finissent par s'approcher indéfiniment de zéro.

On parviendrait à la même conclusion, en formant la somme

$$S_0+S_1+S_2+S_3+S_4+\ldots\ldots=e^{\varphi}\int e^{-\varphi} dS_0\ ;$$

cette intégrale devant, en effet, être finie, tant que S_0 le sera lui-même, on est certain que la série dont elle exprime la valeur est convergente, et qu'ainsi les longueurs des développemens successifs, faits dans le même sens, finissent par décroître indéfiniment.

THÉORÈME II. Si l'on forme la développante d'un arc de courbe quelconque, puis la développante de cette développante, puis la développante de cette dernière courbe, et ainsi de suite, en alternant constamment la direction du mouvement de la tangente; c'est-à-dire, en faisant commencer chaque développante au point où finit celle qui la précède immédiatement; ces développantes se trouveront *toutes comprises entre la tangente à l'une des extrêmités de l'arc primitif et la normale à son autre extrémité.* Cela posé,

1.° *Si les deux droites indéfinies qui comprennent toutes ces courbes sont* convergentes, *auquel cas les développantes auront des longueurs sans cesse décroissantes ; ces développantes tendront aussi sans cesse à devenir des* épicycloïdes intérieurs ;

2.° *Si ces droites sont* parallèles, *les développantes tendront sans cesse à devenir des* cycloïdes ;

3.° *Enfin, si ces mêmes droites sont* divergentes, *les développantes tendront sans cesse à devenir des* épicycloïdes extérieures.

Soient A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, ... une suite indéfinie d'arcs de courbes (fig. 3), dont le premier est quelconque et dont chacun est la développante de celui qui le précède immédiatement ; de telle sorte que le premier développement se fasse de A_1 vers A_2, le second de A_2 vers A_3, le troisième de A_3 vers A_4, et ainsi de suite. Les points A_1, A_3, A_5, ... se trouveront tous sur la normale à la courbe primitive au point A_1, laquelle est rencontrée en I par la normale à son autre extrémité A_0 ; et les points A_0, A_2, A_4, ... seront tous situés sur la tangente menée à la courbe primitive, par cette dernière extrémité, laquelle se trouve coupée en G par la tangente à son autre extrémité A_1.

Soit fait l'angle $A_0IA_1=\omega$; les deux droites $A_1A_3A_5$, ..., $A_0A_2A_4$ ... seront convergentes, parallèles ou divergentes, suivant que l'angle ω sera aigu, droit ou obtus. Il s'agit donc de démontrer que les développantes consécutives tendront à devenir des épicycloïdes intérieurs dans le premier cas, des cycloïdes dans le second et des épicycloïdes extérieures dans le troisième.

Ici encore, comme dans le précédent théorème, l'arc primitif peut n'être point assujetti à la loi de continuité ; ce peut être même une portion de polygone quelconque, rectiligne, curviligne ou mixtiligne.

Soient $A_1M_0=s_0$, $A_1M_1=s_1$; $A_3M_2=s_2$, $A_3M_3=s_3$, ... ; une suite d'arcs variables consécutifs et correspondans, développans les uns des autres ; et soit φ l'angle que fait la tangente M_0M_1 au point M_0 avec la tangente A_1G au point A_1.

Soient enfin Σ_0, Σ_1, Σ_2, ... les longueurs totales des développantes A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3 ......

Nous aurons d'abord, comme dans le précédent théorème,

$$S_1=\int S_0 d\varphi\ ,$$

l'intégrale s'évanouissant avec φ. On aurait de même

$$S_2=\int \overline{M_1A_2}.d\varphi\ ;$$

mais $\overline{M_1A_2}=A_1A_2-A_1M_1=\Sigma_1S_1$; donc

$$S_2=\int(\Sigma_1-S_1)d\varphi=\Sigma_1\varphi-\int S_1 d\varphi\ .$$

Ces valeurs de S_1, S_2 indiquent, en général, comment on peut passer d'une développante à la suivante ; et l'on voit qu'on peut poser cette suite d'équations

$$\begin{array}{ll} S_1=\int S_0 d\varphi\ , & S_2=\varphi\Sigma_1-\int S_1 d\varphi\ , \\ S_3=\int S_2 d\varphi\ , & S_4=\varphi\Sigma_3-\int S_3 d\varphi\ , \\ S_5=\int S_4 d\varphi\ , & S_6=\varphi\Sigma_5-\int S_5 d\varphi\ , \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Si l'on fait les substitutions, on trouvera

$$\begin{array}{ll} S_1=\int S_0 d\varphi\ , & S_2=\varphi\Sigma_1-\int^2 S_0 d\varphi^2\ , \\ S_3=\dfrac{\varphi^2}{2!}\Sigma_1-\int^3 S_0 d\varphi^3\ ; & S_4=\varphi\Sigma_3-\dfrac{\varphi^3}{3!}\Sigma_1+\int^4 S_0 d\varphi^4\ , \\ S_5=\dfrac{\varphi^2}{2!}\Sigma_3-\dfrac{\varphi^4}{4!}\Sigma_1+\int^5 S_0 d\varphi^5\ , & S_6=\varphi\Sigma_5-\dfrac{\varphi^3}{3!}\Sigma_3+\dfrac{\varphi^5}{5!}\Sigma_1-\int^6 S_0 d\varphi^6\ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

La

La loi de ses développemens se trouve suffisamment établie, par les équations même qui ont servi à les obtenir : on passe d'un arc de numéro pair au suivant, en intégrant à partir de $\phi=0$; et de ce dernier à l'arc de numéro pair qui vient après, en retranchant une integrale semblable du terme correspondant de la suite $\varphi\Sigma_1$, $\phi\Sigma_3$, $\varphi\Sigma_5$, ...

Comme les développantes de numéros impairs Σ_1, Σ_3, Σ_5,.... entrent seules avec les intégrales successives $\int S_0 d\phi$, $\int^2 S_0 d\varphi^2$, $\int^4 S_0 d\phi^4$,.... dans les expressions de tous ces arcs, nous allons examiner seulement comment varient ces développantes. Comme ω n'est autre chose que la valeur de φ qui répond à l'arc $A_1A_0=\Sigma_0$; il s'ensuit qu'on doit avoir

$$\Sigma_1 = \int S_0 d\varphi\ ,$$

$$\Sigma_3 = \frac{\omega^2}{2!}\Sigma_1 - \int^3 S_0 d\varphi^3\ ,$$

$$\Sigma_5 = \frac{\omega^2}{2!}\Sigma_3 - \frac{\omega^4}{4!}\Sigma_1 + \int^5 S_0 d\varphi^5\ ,$$

. . . .

$$\Sigma_{2n+1} = \frac{\omega^2}{2!}\Sigma_{2n-1} - \frac{\omega^4}{4!}\Sigma_{2n-3} + \frac{\omega^6}{6!}\Sigma_{2n-5} - \ldots \pm \frac{\omega^{2n}}{(2n)!}\Sigma_1 \mp \int^{2n+1} S_0 d\varphi^{2n+1}$$

Pour avoir le développement du terme général Σ_{2n+1}, après qu'on en a éliminé tous ceux Σ_{2n-3}, Σ_{2n-5}, ... Σ_1 qui le précèdent, soient multipliées ces équations, excepté la dernière, par des coefficiens a_{2n}, a_{2n-2}, a_{2n-4}, ... a_4, a_2, et formons-en la somme, en égalant à zéro les quantités qui multiplient Σ_{2n-1}, Σ_{2n-3}, Σ_{2n-5}, ... Σ_3, Σ_1 ; nous aurons ainsi

$$\Sigma_{2n+1} = a_{2n}\int S_0 d\phi - a_{2n-2}\int^3 S_0 d\phi^3 + a_{2n-4}\int^5 S_0 d\phi^5 - \ldots \pm \int^{2n+1} S_0 d\phi^{2n+1}$$

les coefficiens a_2, a_4, a_6, ... a_{2n} étant déterminés par les équations

$$a_2=\frac{\omega^2}{2!},$$

$$a_4=\frac{\omega^2}{2!}a_2-\frac{\omega^4}{4!},$$

$$a_6=\frac{\omega^2}{2!}a_4-\frac{\omega^4}{4!}a_2+\frac{\omega^6}{6!},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a_{2n}=\frac{\omega^2}{2!}a_{2n-2}-\frac{\omega^4}{4!}a_{2n-4}+\frac{\omega^6}{6!}a_{2n-6}-\ldots\ldots\pm\frac{\omega^{2n-2}}{(2n-2)!}a_2\mp\frac{\omega^{2n}}{(2n)!}.$$

Comme tous ces coefficiens contiendront des termes homogènes en ω; nous ferons $a_{2n}=A_{2n}\omega^{2n}$; les nouveaux coefficiens $A_2, A_4, A_6, \ldots A_{2n}$, se trouveront ainsi donnés par les équations

$$A_2=\frac{1}{2!},$$

$$A_4=\frac{A^2}{2!}-\frac{1}{4!},$$

$$A_6=\frac{A^4}{2!}-\frac{A^2}{4!}+\frac{1}{6!},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$A_{2n}=\frac{A^{2n-2}}{2!}-\frac{A^{2n-4}}{4!}+\frac{A^{2n-6}}{6!}-\ldots\pm\frac{A_2}{(2n-2)!}\mp\frac{1}{(2n)!}.$$

L'inspection de l'équation qui donne le coefficient A_{2n}, en fonction des précédens suffit pour faire voir que les nombres A_2, A_4, A_6, ...A_{2n} sont les coefficiens du développement de $\frac{1}{\operatorname{Cos.}x}$; car, en posant

$$1=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\right)\left(1+A_2x^2+A_4x^4+A_6x^6+\ldots\right);$$

le terme général du produit, égalé à zéro, donnera pour A_{2n} la valeur précédente.

Les coefficiens du développement de $\frac{1}{\text{Cos}.x}$ peuvent s'obtenir d'une manière qui en fait connaître la loi; il suffit de multiplier $\text{Cos}.x$ par le produit indefini

$$\left\{1-\left(\frac{x}{q}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{x}{3q}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{x}{5q}\right)^2\right\}\ldots\ldots$$

q désignant le quart du cercle, ou $\frac{1}{2}\varpi$. Ce produit étant convergent pour $x<q$, on peut poser, dans cette limite de x,

$$\frac{1}{\left\{1-\left(\frac{x}{q}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{x}{3q}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{x}{5q}\right)^2\right\}\ldots}=1+A_2x^2+A_4x^4+A_6x^6+\ldots+A_{2n}x^{2n}+\ldots$$

mais, à cause de la convergence du produit qui donne le cosinus, on peut appliquer, à la fraction précédente, la décomposition en fractions simples, et poser, en vertu de ce que $\text{Cos}.x$ est une fonction paire,

$$\frac{1}{\text{Cos}.x}=\frac{B_1}{\left\{1-\left(\frac{x}{q}\right)^2\right\}}+\frac{B_3}{\left\{1-\left(\frac{x}{3q}\right)^2\right\}}+\ldots\ldots\frac{B_m}{\left\{1-\left(\frac{x}{mq}\right)^2\right\}}+\ldots\ldots,$$

m représentant un nombre impair quelconque. On déterminera B_m par la valeur que prendra $\frac{1-\left(\frac{x}{mq}\right)^2}{\text{Cos}.x}$ pour $x=mq$. En différentiant les deux termes on a

$$\frac{\frac{2x}{(mq)^2}}{\text{Sin}.x}\ ;$$

faisant $x=mq$, on a, suivant que $m-1$ est divisible par deux seulement ou par quatre,

$$B_m=\pm\frac{2}{mq}\ ;$$

ainsi

$$\frac{1}{\text{Cos}.x}=\frac{2}{q}\left\{\frac{1}{1-\left(\frac{x}{q}\right)^2}-\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\left(\frac{x}{3q}\right)^2}+\frac{1}{5}\,\frac{1}{1-\left(\frac{x}{5q}\right)^2}-\ldots\pm\frac{1}{m}\,\frac{1}{1-\left(\frac{x}{mq}\right)^2}\mp\ldots\right\}$$

On obtiendra donc le terme général de $\frac{1}{\text{Cos}.x}$, en développant toutes ces fractions en progression, et en réunissant les coefficiens de x^{2n} dans les progressions. Il viendra ainsi

$$A_{2n}=\frac{2}{q}\left\{\frac{1}{q^{2n}}-\frac{1}{3}\,\frac{1}{(3q)^{2n}}+\frac{1}{5}\,\frac{1}{(5q)^{2n}}-\frac{1}{7}\,\frac{1}{(7q)^{2n}}-\ldots\right\}.$$

ou bien, en mettant $\frac{1}{q^{2n}}$ en facteur commun, et multipliant de part et d'autre par ω^{2n}

$$A_{2n}\omega^{2n}=a_{2n}=\frac{2}{q}\left(\frac{\omega}{q}\right)^{2n}\left\{1-\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{5^{2n+1}}-\frac{1}{7^{2n+1}}+\ldots\right\};\quad (*)$$

(*) On peut déduire assez simplement de ceci la sommation de la série

$$1-\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{5^{2n+1}}-\frac{1}{7^{2n+1}}+\ldots\ ;$$

car on a

$$A_{2n}=\frac{2}{q^{2n+1}}\left\{1-\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{5^{2n+1}}-\frac{1}{7^{2n+1}}+\ldots\right\}\ ;$$

or, on peut obtenir A_{2n}, soit par les équations successives et telle est l'expression generale des coefficiens $a_2, a_4, a_6, \dots a_{2n}$ qui, comme on l'a vu, donnent la valeur de la developpante Σ_{2n+1}; savoir

$$\Sigma_{2n+1}=a_{2n}\int S_0 d\varphi - a_{2n-2}\int^3 S_0 d\varphi^3 + a_{2n-4}\int^5 S_0 d\varphi^5 - \dots \pm \int^{2n+1} S_0 d\varphi^{2n+1}$$

Pour appliquer cette formule à la démonstration du théorème énoncé, nous prendrons d'abord le cas le plus simple, c'est-à-dire, celui où l'angle $\varpi=q$; il est visible qu'alors a_{2n} tendra vers la limite constante $\frac{2}{q}$, puisqu'alors $\left(\frac{\varpi}{q}\right)^{2n}$ sera l'unité, et que la série numérique qui entre dans l'expression de a_{2n} converge très-promptement vers l'unité. Et, comme les premiers coefficiens a_2, a_4, $a_6, \dots$ n'affectent que les intégrales $\int^{2n-1} S_0 d\varphi^{2n-1}$, $\int^{2n-3} S_0 d\varphi^{2n-3}, \dots$ qui, comme on l'a démontré, décroissent indéfiniment; il en résulte que, pour n très-grand, on aura sensiblement

$$\Sigma_{2n+1}=\frac{2}{q}\left\{\int S_0 d\varphi - \int^3 S_0 d\varphi^3 + \int^5 S_0 d\varphi^5 - \dots\dots\right\}.$$

$$A_2=\frac{1}{2!},$$

$$A_4=\frac{1}{2!}A_2-\frac{1}{4!},$$

$$A_6=\frac{1}{2!}A_4-\frac{1}{4!}A_2+\frac{1}{6!},$$

. . . .

Soit par $\frac{d^{2n}.\text{Séc}.x}{dx^{2n}}$, en y faisant $x=0$; en sorte qu'on a

$$1-\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{5^{2n+1}}-\frac{1}{7^{2n+1}}+\frac{1}{9^{2n+1}}-\dots=\frac{1}{2}\left(\frac{\varpi}{2}\right)^{2n+1}.\frac{d^{2n}.(\text{Séc}x=0)}{d^{2n}}$$

La série formée par ces intégrales a été trouvée (*Théor. I*) égale à la projection de la courbe primitive sur la dernière normale A_0I. Dans le cas où $\varpi = q$, cette projection devient la distance entre deux parallèles qui comprennent les développantes. En la désignant par D, on a, à la limite,

$$\Sigma_{2n+1} = \frac{2D}{q} \;;$$

ainsi, les longueurs des développantes finissent par être constantes. L'équation de ces courbes limites est, d'après cela, facile à obtenir, puisque la relation entre les arcs et les angles φ est donnée, pour les développantes de numéros pairs, par

$$S_{2n} = \varphi\Sigma_{2n-1} - \frac{\varphi^2}{2!}\Sigma_{2n-3} + \frac{\varphi^4}{4!}\Sigma_{2n-4} - \ldots \pm \frac{\varphi^{2n-1}}{(2n-1)!}\Sigma_1 \mp \int^{2n} S_0 d\varphi^{2n}.$$

On a démontré que les intégrales $\int^{2n} S_0 d\varphi^{2n}$, dont toutes les origines étaient $\varphi = 0$, décroissaient indéfiniment ; ce dernier terme disparaîtra donc à la limite. De plus, les arcs Σ^{2n-5}, Σ^{2n-3}, ... ne s'écartant sensiblement de $\frac{2D}{q}$ que lorsqu'ils portent sur la portion négligeable de la série : on peut écrire, pour n infini,

$$S_{2n} = \frac{2D}{q}\left(\frac{\varphi}{1} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \ldots\right) = \frac{2D}{q}\,\text{Sin.}\varphi\,.$$

Cette relation appartient à la cycloïde dont la longueur totale est $\frac{4r}{q}$ ou $\frac{4D}{\varpi}$, et dont le demi-grand axe est D. Il résulte d'ailleurs du mode de génération des développantes de numéros impairs qu'elles seront aussi des cycloïdes égales ; c'est d'ailleurs ce que l'on trouverait directement, par l'expression de S_{2n+1}.

Reprenons présentement le cas général, où l'angle ϖ, formé par les normales extrêmes, est quelconque. On a vu qu'une développante de numéro impair quelconque était donnée par la formule

$$\Sigma_{2n+1}=a_{2n}.\int S_0 d\varphi - a_{2n-2}.\int^3 S_0 d\varphi^3 + a_{2n-4}.\int^5 S_0 d\varphi^5 - \ldots \pm \int^{2n+1} S_0 d\varphi^{2n+1}$$

et qu'on avait généralement

$$a_{2n}=\frac{2}{q}\left(\frac{\omega}{q}\right)^{2n}\left\{1-\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{5^{2n+1}}-\frac{1}{7^{2n+1}}+\ldots\right\}.$$

Pour n très-grand, la série se réduit à l'unité, et l'on a, à la limite

$$a_{2n}=\frac{2}{q}\left(\frac{\omega}{q}\right)^{2n},$$

on peut donc, en vertu de la convergence de la série

$$\int S_0 d\varphi - \int^3 S_0 d\varphi^3 + \int^5 S_0 d\varphi^5 - \ldots\ldots,$$

poser, pour n infini

$$\Sigma_{2n+1}=\frac{2}{q}\left(\frac{\omega}{q}\right)^{2n}\left\{\frac{q}{\omega}\int S_0 d\varphi - \left(\frac{q}{\omega}\right)^3\int^3 S_0 d\varphi^3 + \left(\frac{q}{\omega}\right)^5\int^5 S_0 d\varphi^5 - \ldots\right\}.$$

On conclut de là que le rapport $\frac{\Sigma_{2n-1}}{\Sigma_{2n+1}}$ de deux développantes successives d'ordre impair est, à la limite, égal à $\frac{q^2}{\omega^2}$; mais comme on a, pour un arc variable, correspondant à l'angle φ,

$$S_{2n}=\varphi\Sigma_{2n-1}-\frac{\varphi^3}{3!}\Sigma_{2n-3}+\ldots\ldots\pm\frac{\varphi^{2n-1}}{(2n-1)!}\Sigma_1\mp\int^{2n}S_0 d\varphi^{2n};$$

on pourra poser, à la limite,

$$S_{2n}=\frac{\omega}{q}\Sigma_{2n-1}\left\{\frac{\varphi}{1}\frac{q}{\omega}-\frac{\varphi^3}{3!}\left(\frac{q}{\omega}\right)^3+\frac{\varphi^5}{5!}\left(\frac{q}{\omega}\right)^5-\ldots\right\}=\Sigma_{2n-1}.\frac{\omega}{q}\text{Sin}.\frac{\varphi q}{\omega}.$$

En faisant, dans cette équation, $\varphi=\omega$, on aura l'arc total $\Sigma_{2n}=\frac{\omega}{q}\Sigma_{2n-1}$; on peut donc écrire

$$S_{2n} = \Sigma_{2n}.\text{Sin.}\left(\frac{\phi q}{\varpi}\right).$$

Telle est donc l'équation de la courbe vers laquelle tendent les développantes d'ordre pair. On trouverait, soit en intégrant cette équation, soit en prenant directement la formule qui donne S_{2n+1},

$$S_{2n+1} = \Sigma_{2n+1}\left\{1 - \text{Cos.}\left(\frac{\phi q}{\varpi}\right)\right\}, \text{ ou } \Sigma_{2n+1} - S_{2n+1} = \Sigma_{2n+1}.\text{Sin.}\frac{(\varpi-\phi)q}{\varpi}$$

Cette équation, comparée avec la précédente, qui donne S_{2n}, fait voir que la courbe limite est telle que sa développante est une courbe semblable, mais dans une position inverse. Le rapport de grandeur des arcs correspondans, dans l'un à ϕ et dans l'autre à $\varpi-\phi$, est $\dfrac{\Sigma_{2n}}{\Sigma_{2n+1}} = \dfrac{q}{\varpi}$.

On peut faire voir assez simplement, par des considérations géométriques, que l'épicycloïde est la courbe qui jouit de cette propriété, et qui a pour équation $S = \Sigma\text{Sin.}\left(\dfrac{\phi q}{\varpi}\right)$.

Concevons, en effet, une épicycloïde AB (fig. 4) décrite par la demi-révolution d'un cercle dont le rayon est r sur R; et proposons-nous de trouver le centre de courbure pour un point M de cette courbe. On sait que la normale au point M passe par le point de contact P des deux cercles; il ne reste donc, pour connaître le rayon de courbure, qu'à chercher le point d'intersection de deux normales consécutives.

Soient AOP$=\beta$ et APM$=\alpha$. Si le rayon OP tourne de $d\beta$, la normale MN tournera de $d\beta + d\alpha$; or, il est facile de voir que

$$\beta R = 2\alpha r, \quad \text{d'où} \quad d\alpha = \frac{R}{2r}d\beta;$$

l'angle des deux normales consécutives sera donc

dβ

$$d\beta + \frac{R}{2r}d\beta \quad \text{ou} \quad d\beta.\frac{R+2r}{2r}.$$

Le point P s'est déplacé, dans le sens du cercle fixe AH, de $R d\beta$; pour avoir ce déplacement, mesuré perpendiculairement à la normale, on le multipliera par Sin.α, ou par $\frac{\overline{MP}}{2r}$; ce qui fera $d\beta.\frac{R}{2r}.\overline{MP}$. Or, à la limite, ce même déplacement est égal à $\overline{PN}$, multiplié par l'angle des deux normales; on a donc

$$\overline{PN}.d\beta\frac{R+2r}{2r} = d\beta.\frac{R}{2r}.\overline{MP}.$$

d'où

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{NP}} = \frac{R+2r}{r}.$$

Il est facile de conclure du rapport constant des deux lignes $\overline{MP}$, $\overline{PN}$ que, si l'on décrit, au-dessous du cercle générateur, un autre cercle, dont le diamètre soit à celui du premier dans le rapport $\frac{R}{R+2r}$; c'est-à-dire, dans le rapport des distances au centre O, le point N de la développée se trouvera toujours sur ce cercle; et comme l'arc QN sera toujours égal à QC, le point N décrira une nouvelle épicycloïde semblable, mais réduite, dans le rapport $\frac{R}{R+2r}$. On peut aisément se convaincre, d'après cela, que cette propriété identifie l'épicycloïde avec la courbe limite de notre théorème; car, en désignant par S l'arc AN, et par φ l'angle décrit par la normale ou la tangente, on aura

$$AN = S = MN = \overline{QS}\,\text{Sin}\,\alpha;$$

mais QS=CB, et CB est précisément la courbe totale ANC; en l'appelant donc Σ, on a

$$S = \Sigma \text{Sin.}\,\alpha\ ;$$

l'angle φ, dont la tangente MN a tourné, est précisément $\alpha + \beta$ ou $\alpha\frac{R+2r}{R}\alpha$; on a donc

$$\varphi = \alpha.\frac{R+2r}{r}\ ,\quad \text{d'où}\quad \alpha = \frac{R}{R+2r}\varphi\ .$$

Si ω est l'angle total formé par les tangentes extrêmes; comme α qui lui correspond $= \frac{\pi}{2} = q$, on aura

$$q = \frac{R}{R+2r}\omega\ ,\quad \text{d'où}\quad \frac{R}{R+2r} = \frac{q}{\omega}\ ;$$

on a donc, en substituant,

$$\alpha = \frac{q\varphi}{\omega}\ ;$$

d'où l'on conclut, pour l'équation de l'épicycloïde,

$$S = \Sigma \text{Sin.}\,\frac{q\varphi}{\omega}\ ;$$

équation qui est précisément celle de la courbe vers laquelle tendent les développantes successives. Et, comme les considérations précédentes s'appliquent aux épycicloïdes intérieures, pourvu qu'on prenne $d\alpha$ et $d\beta$ de signes contraires; on voit facilement que leurs équations seront de même

$$S = \Sigma \text{Sin.}\,\frac{q\varphi}{\omega}\ ;$$

l'angle ω étant alors plus petit que q. Le théorème se trouve donc ainsi complètement démontré.

Paris, le 13 de juillet 1818.

GNOMONIQUE.

Sur la méthode universelle, pour tracer toutes sortes de cadrans solaires à toutes latitudes;

Par M. Francœur, professeur à la faculté des sciences de Paris.

Au Rédacteur des Annales;

Monsieur,

Le but du petit mémoire de Gnomonique que j'ai eu l'honneur de vous adresser il y a quelque temps, et que vous avez eu la bonté d'insérer à la page 233 de votre VIII.e volume, était de donner des moyens faciles de tracer, à toutes latitudes, des cadrans horizontaux. Les échelles dont j'ai indiqué la construction résolvent la question avec une telle facilité, que le dessinateur le moins instruit peut former aisément un de ces cadrans. J'ai terminé par exposer un moyen de calcul, pour *réduire au tracé d'un cadran horizontal toutes sortes de cadrans plans*. Les éclaircissemens qui m'ont été demandés, sur ce dernier problème, m'ont convaincu qu'en cherchant à être bref, je ne m'étais pas fait suffisamment comprendre : c'est ce qui me détermine à revenir ici de nouveau sur le même sujet, dans la vue de lui donner un peu plus de développement.

Tout cadran est censé construit au centre du globe : l'axe de la terre est le style dont l'ombre se porte d'heure en heure sur diverses lignes tracées d'avance, et qui sont les intersections du plan du cadran avec une suite de plans conduits par l'axe de la terre. C'est lorsque le soleil atteint celui de ces plans qui est le méridien d'un lieu qu'on y compte midi, et que l'ombre du style se projette sur la meridienne du cadran : si le soleil est à 15° de ce plan, il est 11^{h} ou 1^{h} dans le même lieu, suivant que l'astre est à droite ou à gauche du méridien. (Voyez la 2.me édition de l'*Uranographie*).

Ces faits établis, passons à la résolution du problème, en commençant par le cas où le plan proposé décline, sans inclinaison.

Soient (fig. 5) Z le zénith d'un lieu, P le pôle, O le centre du monde, OP l'axe, AZPI le méridien céleste, ABGICD l'horizon, BZVC un plan vertical donné, sur lequel on se propose de tracer un cadran solaire. GOD, perpendiculaire sur BC determinera évidemment en D le zénith du lieu où le plan horizontal est parallèle à celui BZC du cadran. L'azimuth du plan BZC est l'angle AOB qu'il fait avec le méridien ; et, à cause de l'angle droit BOD, l'angle DOA est complément de l'azimuth, c'est-à-dire la déclinaison $DZA = d$ du plan proposé. C'est, en d'autres termes, l'angle que fait notre cadran avec le *premier vertical*, passant par les points *est* et *ouest*.

Désignons par l et L les latitudes des lieux Z et D ; joignons D au pôle, par un arc de grand cercle, et nous aurons un triangle sphérique ZDP, qui a pour élémens $ZP = 90^{\circ} - l$, $DP = 90^{\circ} + L$, $ZD = 90^{\circ}$, $DZP = 180^{\circ} - d$, $ZPD = \Lambda - \lambda$, différence des longitudes.

Il s'agit de trouver L et Λ. Les équations connues de la trigonométrie sphérique donnent (Voyez l'*Uranographie*, équations 17 et 20, pag. 383 et 387).

$$Cos.DP = Cos.ZD.Cos.ZP + Sin.ZD.Sin.ZP.Cos.Z\ ,$$

$$Sin.ZP\,Cot.ZD = Cos.ZP.Cos\,Z + Sin.Z.Cot.ZPD\ ;$$

ce qui revient à

$$\mathrm{Sin}.L=\mathrm{Cos}.l\,\mathrm{Cos}.d\ ,\qquad \mathrm{Cot}\,(\Lambda-\lambda)=\mathrm{Sin}.l\,\mathrm{Cot}.d\ .$$

Ces deux équations très-simples serviront à trouver sur le globe la situation du lieu D, par sa longitude Λ et sa latitude L. Il ne s'agira donc que de décrire un cadran horizontal, pour ce lieu D, à l'aide de nos échelles. Mais il y aura ici deux précautions à prendre.

1.° Le style devra être dirigé parallèlement à l'axe OP ; et l'ombre de OF devra indiquer les heures. La méridienne sera donc la projection de OF sur le plan BZC du cadran ; projection qu'on nomme *soustylaire* ; 2.° une fois les lignes horaires du cadran horizontal tracées, il faudra en changer les dénominations, attendu que les lieux Z et D comptent une heure de plus ou de moins l'un que l'autre pour chaque 15° de différence en longitude ; ainsi, par exemple, la ligne de X heures deviendra celle de XI ou de IX, s'il y a précisément 15° de différence, à l'est ou à l'ouest.

On ne peut donc appliquer nos échelles à ce tracé, sans avoir d'abord placé le style parallèlement à l'axe du monde. Il y a, pour y parvenir, divers moyens, que nous avons exposés dans l'ouvrage déjà cité : on peut, au reste, y parvenir par le calcul que voici. Le plan DOP est le méridien du point D, puisqu'il passe par ce point et par le pôle ; si donc V est l'intersection des arcs PD et ZC ; ce point V sera l'un des points de la soustylaire-méridienne, et il ne s'agira conséquemment que d'en fixer la position. Or, le triangle sphérique PVZ, rectangle en V, a pour élémens

$$\mathrm{ZP}=90°-l\ ;\quad \mathrm{Z}=98°-d\ ;\quad \mathrm{V}=90°\ ;$$

l'angle ZV, formé par la soustylaire et la méridienne sera donc donné par la formule

$$\mathrm{Tang}.\mathrm{ZV}=\mathrm{Cot}.l\,\mathrm{Sin}.d\ ;$$

Ainsi, après avoir tracé la verticale CM (fig. 6) sur le plan declinant proposé, pour représenter la ligne de midi : en un point quelconque C de cette droite, pris pour *centre*, on fera l'angle MCS égal à la valeur trouvée de ZV ; CS sera le soustylaire, au-dessus de laquelle, dans un plan SCT, perpendiculaire à celui du cadran, devra être élevé le style CT, formant sur CS l'angle SCT=L. Sur CS comme méridienne, et sa perpendiculaire CO, comme ligne de VI heures, on tracera, à l'aide des echelles, un cadran horizontal, pour la latitude L ; ce sera le cadran demandé, du moins après y avoir changé les dénominations des lignes horaires ainsi qu'il a été dit ci-dessus.

Supposons, par exemple, que la latitude du lieu étant $48^\circ.12'$, la déclinaison du plan soit $10^\circ.12'$; on fera le calcul que voici :

$$\text{Log. Cot. } l = 9.9513876$$

$$\text{Log. Sin.} d = 9.2481811$$

$$\text{Log.Tang.ZV} = 9.1995687$$

Donc $ZV = 8^\circ.59'50''$ (sensiblement 9°) ; on fera donc l'angle $MCS = 9^\circ$; à droite ou à gauche de CM, suivant que le plan déclinera à l'ouest ou à l'est. CS sera la soustylaire, ou la méridienne d'un cadran horizontal, pour le lieu dont les longitude et latitude Λ, L sont données ainsi qu'il suit.

$$\text{Los.Cos.} l = 9.8238213 \qquad \text{Log.Sin.} l = 9.8724337$$

$$\text{Log.Cos.} d = 9.9930814 \qquad \text{Log.Cot.} d = 0.7449003$$

$$\text{Log.Sin.} L = 9.8169027 \qquad \text{Log.Cot.}(\Lambda - \lambda) = 0.6173340$$

$$L = 40^\circ.59'.50''. \qquad \Lambda - \lambda = 13^\circ.34'.10''.$$

On fixera le style dans un plan perpendiculaire au cadran, et élevé au-dessus de CS; l'angle SCT, formé par ce style, devra être de 41°. Sur l'angle droit SCO, en prenant CS pour meridienne, on décrira un cadran horizontal pour cette latitude de 41°, et le cadran demandé sera tracé. Mais, après avoir marqué les lignes horaires, il faudra reculer toutes leurs dénominations de l'intervalle $\Lambda-\lambda$, réduit en temps, savoir 54^m. La ligne CS, qui était méridienne, deviendra ainsi la ligne horaire de 54^m, avant ou après midi, et ainsi des autres.

Au surplus, comme cette manière de procéder aurait l'inconvénient de donner souvent des heures que l'on n'a pas coutume d'indiquer sur les cadrans, il sera plus convenable de tracer sur le cadran considéré comme horizontal des lignes horaires telles qu'en changeant les dénominations, ainsi qu'il vient d'être dit, elles se trouvent être celles des heures et de leurs divisions d'usage.

Venons présentement aux cadrans inclinés.

Faisons tourner le plan vertical BZC (fig. 5) autour de sa section BC avec l'horizon, pour lui donner une position oblique; l'azimuth ne changera pas; et, la droite OD supposée mobile, demeurant constamment perpendiculaire à notre plan, le point D décrira le cercle vertical DZ. Supposons que le mouvement angulaire du plan BZC soit tel que, quand il sera fixé dans sa nouvelle situation, le point D se trouve situé en Z′ (fig. 8); ce point Z′ sera ainsi le zénith du lieu pour lequel notre cadran incliné serait horizontal. Dans cet état de choses, l'angle Z′ZA sera toujours la déclinaison d; en outre, ZO, Z′O seront perpendiculaires l'un à l'horizon ADI et l'autre au cadran incliné; de sorte que l'angle ZOZ′ de ces deux droites sera celui des deux plans, ou l'inclinaison i du cadran; ainsi, $ZOZ'=Arc ZZ'=i$. Le triangle sphérique Z′ZP aura, d'après cela, pour élémens $ZP=90^\circ-l$, $Z'P=90^\circ-L$, $ZPZ'=\Lambda-\lambda$, $ZZ'=i$, $Z'ZP=180^\circ-d$; en conséquence, les équations qui nous ont déjà servi, dans le premier cas, deviendront, pour celui-ci,

$$\text{Sin.}L=\text{Cos.}i\,\text{Sin.}l-\text{Sin.}i\,\text{Cos.}l\,\text{Cos.}d\ ;$$

$$\text{Cos.}l\,\text{Cot.}i=\text{Sin.}d\,\text{Cot.}(\Lambda-\lambda)-\text{Sin.}l\,\text{Cos.}d\ ;$$

ce sont précisément les équations de la page 243 du tome VIII.e, desquelles il faudrait tirer les valeurs de L et $\Lambda-\lambda$, pour en faire le même usage que précédemment ; mais il est préférable de résoudre notre triangle sphérique, à l'aide des procédés qui rendent les formules finales propres au calcul par logarithmes (Voyez *Uranographie*, pag. 386); il vient ainsi

$$\text{Tang.}\varphi=\text{Cos.}d\,\text{Tang.}i\ ,$$

$$\text{Sin.}L=\frac{\text{Cos.}i\,\text{Sin.}(l-\varphi)}{\text{Cos.}\varphi}\ ,$$

$$\text{Tang.}(\Lambda-\lambda)=\frac{\text{Sin.}\varphi\,\text{Tang.}d}{\text{Cos.}(l-\varphi)}\ .$$

L'angle auxiliaire φ est donné par la première équation ; on trouve L par la seconde, et Λ par la troisième. L'usage de ces grandeurs est le même que ci-dessus ; mais il est nécessaire, avant tout, de donner au style la situation convenable.

Soient Z le zénith (fig. 7), P le pôle, ZPV le méridien, VE le plan incliné du cadran ; soient les arcs ZI, PO perpendiculaires à ce plan. Il est visible que l'angle Z en est l'azimuth $=90°-d$, que DI en est l'inclinaison i ; le point D est supposé sur la ligne de plus grande pente, V sur la méridienne, O sur la projection de l'axe, c'est-à-dire, sur la soustylaire ; l'arc PO est l'angle Z du style avec le cadran. Il s'agit donc, en premier lieu, de résoudre le triangle sphérique rectangle ZVD, où l'on connait $ZD=90°-i$ et $Z=90°-d$; on calcule le côté VD, qui est l'angle formé par la méridienne et la ligne de plus grande pente ; on calcule aussi l'angle V ; et l'on a, de cette manière,

Tang.

$$Tang.VD = Cot.d\,Cos.i\ , \qquad Cos V = Sin.i\,Cos.d\ .$$

Ensuite, dans le triangle rectangle VPO, on calcule VO, connaissant l'angle V et le côté $PO=L$; ce qui donne

$$Sin.VO = Tang\ L\,Cot.V.$$

Ces trois valeurs remplissent le but proposé.

En effet, après avoir tracé sur le plan incliné AC (fig. 9) une horizontale AB et sa perpendiculaire EF, ligne de plus grande pente ; on mesurera les angles d et i ; savoir, l'angle i que forme EF avec sa projection sur le plan horizontal, et l'angle OAB que forme AB avec une méridienne horizontale AO ; ce qui donnera $d=90^\circ-OAB$. Ces valeurs introduites dans nos équations (Consultez les fig. 7, 8) font connaître,

1.° L et $\Lambda-\lambda$;

2.° L'angle VD que fait EF avec la méridienne F(XII) ; ce qui détermine la position de cette dernière ligne ;

3.° L'angle V, qui sert ensuite à trouver VO, angle que fait la méridienne avec la soustylaire, et qu'on formera en GF (XII), à droite ou à gauche de F(XII), suivant le côté où le cadran décline.

Cela fait, sur FG, comme méridienne, et sa perpendiculaire FR comme ligne de VI heures, d'un cadran horizontal, pour la latitude L, on décrira ce cadran, à l'aide des échelles. Le proposé sera ainsi tracé, sauf à changer les dénominations des lignes horaires, à raison de 15° par heure de la différence $\Lambda-\lambda$ des longitudes réduites en temps, ainsi qu'il a été expliqué ci-dessus.

Je pense, Monsieur, et vous penserez sans doute comme moi, que ces développemens ne sont pas sans utilité, et qu'ils complètent ce qu'on peut dire sur cette matière.

Agréez, etc.

Paris, le 16 de juillet 1818.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du problème de dynamique proposé à la page 72 du VIII.e volume de ce recueil ;

Par M. Tédénat, correspondant de l'académie royale des sciences (*).

Problème. *Donner la théorie des petites oscillations d'un corps pesant terminé dans sa partie inférieure par une surface courbe, et posé sur un plan horizontal ?*

Solution. La théorie demandée est implicitement exposée dans la *Mécanique analitique* (II.e partie , section VI), et il ne peut être question ici que d'en faire l'application au cas particulier que présente la question proposée.

Soit un corps quelconque, terminé par une surface courbe, un segment de sphère ou d'ellipsoïde, par exemple, posé sur un plan horizontal AB (fig. 10), et le touchant en P. Soit G le centre de gravité de ce corps ; pour qu'il soit en équilibre, il sera néces-

(*) La solution publiée à la page 298 du VIII.e volume n'avait pas encore paru lorsque celle-ci nous est parvenue.

J. D. G.

saire et suffisant que la droite GP soit perpendiculaire au plan AB, et conséquemment verticale ; et, si l'équilibre est stable, le centre de gravité G sera, comme l'on sait, le plus bas possible, ou, en d'autres termes, sa distance au plan sera un *minimum*.

Si l'on change la position du corps sur le plan, de telle sorte que la perpendiculaire élevée à ce plan, par son nouveau point de contact P′ ne contienne plus son centre de gravité ; il cessera dès-lors d'être en équilibre, et pourra prendre, en général, les mouvemens que voici : 1.° il pourra avoir un mouvement de rotation autour de la verticale menée par le point de contact variable P′ ; 2.° il pourra glisser sur le plan, par un mouvement de translation, commun à toutes ses parties, vers A ou B ; 3.° enfin, si le corps est libre, son centre de gravité descendra suivant une verticale. Il s'agit donc de déterminer ces trois sortes de mouvemens.

Lorsqu'un système quelconque de corps en mouvement s'écarte très-peu de la position d'équilibre, les équations différentielles qui expriment le rapport des forces accélératrices sont toujours intégrables ; et l'on peut alors déterminer rigoureusement les oscillations et les autres sortes de mouvemens. C'est pour cette raison que nous supposerons, dans tout ce qui va suivre, que le corps s'écarte très-peu de la position d'équilibre.

Pour fixer l'attention, par une figure très-simple, nous supposerons une demi-sphère dont les trois axes, passant par le centre C, soient a, b, c. Les coordonnées d'une molécule quelconque, rapportee à ces trois axes seront x, y, z. Nous aurons donc à determiner les oscillations de cette demi-sphère par rapport aux trois axes a, b, c.

La méthode qui détermine les oscillations pour chaque axe en particulier étant toujours la même, quel que soit l'axe que l'on considère, nous ne nous occuperons que de l'un d'eux seulement, ou plutôt, pour plus de simplicité, nous ne prendrons qu'un demi-cercle, dont l'axe vertical passe par le centre C et par le centre de gravité G ; ce sera celui des y : l'axe horizontal sera celui des x.

Il importe ici de distinguer deux systèmes d'axes ; l'un immobile sur le plan EPF ; l'autre mobile avec le corps, et prenant la position E′P′F′, lorsque le point de contact primitif passe de P en P′. Toutes les quantités qui varieront par le mouvement du corps se rapporteront aux axes fixes : celles qui dépendront de la figure de ce corps se rapporteront aux axes mobiles. Dans la position d'équilibre, les deux systèmes se confondront.

Nous avons dit plus haut que le mouvement d'oscillation se faisait autour du point de contact P ; mais il est visible que l'angle PCP′ formé par la rencontre des rayons de courbure CP, CP′ étant égal à BPB′, rien n'empêche que nous ne considérions le corps, dans ses petits mouvemens, comme oscillant autour du point P.

Cela posé, soit une molécule quelconque dm, située en o, dans la position d'équilibre ; soit menée la perpendiculaire oi sur CP, et soit l'angle ico représenté par α. Dans la nouvelle position E′P′F′ du corps EPF, cette molécule passera de o en o' duquel nous supposons une nouvelle perpendiculaire $o'i'$ sur CP. Soit φ l'angle oCo' décrit par la molécule autour du point C ; angle qui est évidemment le même que BPB′=PCP′ ; on aura l'angle iC$o'=\alpha+\varphi$; si donc l'on fait Co=C$o'=r$, on aura, pour les coordonnées $o'i'=x$, C$i'=y$,

$$x=r\text{Sin.}(\alpha+\varphi)\ , \qquad y=r\text{Cos.}(\alpha+\varphi)\ .$$

Les formules générales du mouvement donnent, pour la molécule o,

$$\text{d}m\left(\frac{\text{d}^2y}{\text{d}t^2}-g\right)\delta y+\text{d}m\,\frac{\text{d}^2x}{\text{d}t^2}\,\delta x=0\ .$$

En développant x, y, suivant les puissances de φ, en s'arrêtant aux termes du second ordre, on a

$$y=r\text{Cos.}\alpha-r\varphi\text{Sin.}\alpha-\tfrac{1}{2}r\varphi^2\text{Cos.}\alpha\ ;$$

$$x = r\,\mathrm{Sin.}\alpha + r\,\phi\,\mathrm{Cos.}\alpha - \tfrac{1}{2} r\phi^2\,\mathrm{Sin.}\alpha \;;$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -r(\mathrm{Sin.}\alpha + \phi\,\mathrm{Cos.}\alpha)\,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\;,$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = +r\,(\mathrm{Cos.}\alpha - \phi\,\mathrm{Sin.}\alpha)\,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\;,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -r\,\mathrm{Cos.}\alpha\,\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2}\;,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -r\,\mathrm{Sin.}\alpha\,\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2}\;,$$

et par suite

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\,\delta y + \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\,\delta x\right)\mathrm{d}m = r^2\mathrm{d}m\,\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2}\,\delta\phi\;.$$

En conséquence, l'équation générale deviendra, en divisant par $\delta\phi$,

$$r^2\mathrm{d}m\,\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} + g\,\mathrm{d}m(r\,\mathrm{Sin.}\alpha + r\phi\,\mathrm{Cos.}\alpha) = 0\;.$$

Pour qu'elle convienne à toutes les molécules du corps, il faut affecter tous ses termes du signe d'intégration, et intégrer en regardant r, α et dm comme variables ; c'est-à-dire, en prenant l'intégrale par rapport aux axes mobiles qui oscillent avec le corps dont il s'agit. On écrira donc

$$\int r^2\mathrm{d}m\,.\,\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} + g\int r\,\mathrm{d}m(\mathrm{Sin.}\alpha + \phi\,\mathrm{Cos.}\alpha) = 0\;;$$

Nous pouvons remarquer actuellement que, puisque $r\,\mathrm{Sin.}\alpha = x$, on doit avoir

$$\int dm.r\text{Sin}.\alpha = \int x dm \ ;$$

or, $\int x dm$ est l'expression de la somme des momens ou du moment de la résultante des forces parallèles à l'axe des y, pris par rapport à un plan passant par le centre de gravité; ce moment est donc nul, au moyen de quoi l'équation ci-dessus se réduit à

$$\int r^2 dm \ . \frac{d^2\phi}{dt^2} + g\phi \int r dm \text{Cos}.\alpha = 0 \ .$$

or, puisque $r\text{Cos}.\alpha = y$, on doit avoir

$$\int dm.r\text{Cos}.\alpha = \int y dm \ ;$$

mais $\int y dm$ est le moment de la résultante des forces parallèles à l'axe des x; il doit donc être égal à $m.\text{CG} = m(\text{CP}-\text{GP})$; si donc nous représentons par R le rayon de courbure et par β la distance du centre de gravité G au plan AB, nous aurons

$$\int dm.r\text{Cos}.\alpha = m(R-\beta) \ ;$$

en posant donc

$$gm(R-\beta) = B \quad \text{et} \quad \int r^2 dm = A \ ,$$

l'équation, exprimant le mouvement de rotation, deviendra

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{B}{A}\phi = 0 \ . \qquad (1)$$

Dans cette équation, la quantité A, qui est le moment d'inertie, sera toujours positive; mais la quantité B sera positive, négative ou nulle, suivant qu'on aura $R>\rho$, $R=\rho$ ou $R<\rho$. Si, comme nous l'avons d'abord supposé, le corps oscillant est un segment de sphère homogène, c'est évidemment le premier cas qui aura lieu; alors l'intégrale de l'équation (1) sera

$$\varphi=K\mathrm{Sin.}\left(t\sqrt{\frac{B}{A}}-k\right),$$

K, k étant deux constantes arbitraires.

Si B eût été négatif, l'intégration aurait présenté t hors du signe *sinus*; d'où l'on voit que, dans ce cas, φ doit croître indéfiniment avec le temps. Les oscillations ne sauraient donc alors être très-petites, comme on le suppose dans l'énoncé du problème.

On voit, par ce détail, que, lorsque le centre de courbure du point de contact est au-dessus du centre de gravité, les oscillations ont lieu; mais si, au contraire, il était au-dessous, le corps, une fois écarté de sa position d'équilibre, culbuterait tout-à-fait.

On trouve un exemple des deux cas dans une ellipse qui, ayant son plan vertical, se trouve appuyé sur une droite horizontale; elle ne peut être en équilibre qu'autant qu'elle pose sur l'un de ses sommets; mais, en l'écartant un peu de l'équilibre, elle tendra à reprendre sa situation primitive ou à s'en écarter, au contraire, de plus en plus, suivant que ce sommet appartiendra à l'extrémité du petit axe ou à l'extrémité du grand.

Pour savoir donc si un corps, d'abord mis en équilibre sur un plan, puis, déplacé d'une petite quantité, doit revenir dans sa première situation ou s'en écarter de plus en plus, il suffit d'examiner si le centre de courbure du point de contact est plus ou moins élevé que le centre de gravité (*).

(*) C'est aussi la conclusion à laquelle on est parvenu dans l'article de la page 349 du VIII^e volume de ce recueil.

J. D. G.

L'équation (1), multipliée par $d\phi$, donne, en intégrant,

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \pm \frac{B}{A}\phi^2 = C\ ;$$

d'où on déduit

$$dt = \frac{d\phi}{\sqrt{C \pm \frac{B}{A}\phi^2}}\ ;$$

équation séparée qui, intégrée de nouveau, fera connaître la durée de chaque oscillation.

On a déjà dit que le centre de gravité G descendait dans une droite verticale; et il est visible que la force avec laquelle il s'approche du plan n'est pas la pesanteur toute entière, puisqu'une partie de cette pesanteur est détruite par la résistance du point de contact. Le centre de gravité ne s'approche du plan horizontal qu'en vertu du mouvement de rotation. Or, la pesanteur en un point quelconque O décomposée donne, pour le mouvement de rotation $g\text{Sin}.\phi$ qui, décomposée de nouveau, suivant le sens vertical et suivant le sens horizontal, donne, pour ses deux composantes,

$$g\text{Sin.}^2\phi\ , \qquad g\text{Sin.}\phi\text{Cos.}\phi\ .$$

Puisque le centre de gravité n'a point de mouvement horizontal effectif, on aura pour la force accélératrice, dans le sens vertical,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g\text{Sin.}\phi\ ;$$

multipliant par

$$dy = -r\text{Sin.}\phi\ ;$$

intégrant et déterminant convenablement la constante, on aura

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = gr(\text{Sin.}^2\varphi + \tfrac{1}{3}\text{Cos.}^2\varphi)\text{Cos.}\varphi \;;$$

ce qui donnera, pour la vitesse verticale,

$$v = \sqrt{2gr(\text{Sin.}^2\varphi + \tfrac{1}{3}\text{Cos.}^2\varphi)\text{Cos.}\varphi}\,.$$

Quant à la force accélératrice, comme le corps n'a pas de mouvement effectif dans ce sens, c'est une preuve que le centre de gravité avance autant dans un sens, par le mouvement progressif, qu'il recule dans l'autre par le mouvement de rotation ; et, comme le premier de ces mouvemens est le même pour toutes les molécules du corps, il s'ensuit que, pour chaque molécule, on a, pour la force accélératrice horizontale,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\text{Sin.}\varphi\text{Cos.}\varphi \;;$$

multipliant par $dx = Rd\varphi\text{Cos.}\varphi$ et intégrant, on a

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = R^2 g\text{Cos.}^3\varphi + C' \;:$$

Il est d'ailleurs évident que le mouvement progressif s'exécutera dans un sens opposé à celui du mouvement de rotation.

D'après le principe de la *conservation des forces vives*, on doit avoir, pour un point quelconque

$$\frac{dy^2 + dx^2}{2dt^2} = gy\,,$$

ce qui est conforme aux valeurs trouvées pour dy^2, dx^2.

Dans tout ce qui précède, on a supposé le plan parfaitement poli et exempt de frottement; on pourra donc determiner toutes les circonstances du mouvement d'un corps pesant qui fait de petites oscillations sur un plan horizontal où on le suppose situé.

La même théorie pourrait servir à déterminer le mouvement d'un pareil corps qui aurait reçu une impulsion quelconque ; mais on tomberait dans des calculs très-compliqués et les équations dernières ne seraient pas intégrables. On ne pourrait donc determiner le mouvement que par approximation.

Solution du problème proposé à la page 200 *du VIII.e volume de ce recueil ;*

Par M. Tédenat, correspondant de l'académie royale des sciences.

PROBLÈME. *Donner la théorie du mouvement d'une échelle, posant, par son extrémité inférieure, sur un pavé horizontal, et appuyant, par son extrémité supérieure, contre un mur vertical, en ayant égard au frottement ?*

Solution. Soit une ligne pesante AB (fig. 11) représentant une échelle, appuyée par son extrémité B sur une ligne horizontale CB, et par son extrémité A sur la verticale CA. A moins que AB ne fût dans une situation horizontale ou dans une situation verticale, elle glisserait nécessairement sans l'effet du frottement qui a lieu en B et en A. Pour estimer cet effet, aux deux lignes CA, CB substituons-en deux autres CA', CB', perpendiculaires entre elles, comme les premières ; et faisant avec elles un angle β tel que la partie de l'effort de la gravité perdue, à raison de sa décomposition dans le sens des deux nouveaux axes CA', CB', soit équivalente à l'effet du frottement dans le sens des premiers CA, CB. L'angle $ACA'=BCB'=\beta$, est ce qu'on appelle, pour cette raison, l'angle du frottement.

Supposons tout le poids de la verge, que nous représenterons par gm, réuni en son centre de gravité O que, pour plus de généralité, nous supposerons différent de son milieu. Soient $OB'=a$, $OA'=b$ et l'angle $A'NC=\varphi$, d'où $A'B'C'=\varphi'=\varphi+\beta$.

L'effort de la pesanteur en O peut être décomposé en deux autres agissant en A', B', lesquels sont respectivement

$$gm\,.\,\frac{a}{a+b}\,,\qquad gm\,.\,\frac{b}{a+b}\,.$$

Ce dernier, décomposé parallèlement à $B'C$ et $A'C$, donnera pour ses composantes

$$gm\,.\,\frac{b}{a+b}\,\mathrm{Sin.}\beta\,;\qquad gm\,.\,\frac{b}{a+b}\,\mathrm{Cos.}\beta\,.$$

Ce dernier effort, perpendiculaire à la ligne ou plan CB' ; est détruit par la résistance de ce plan ; et on en pourra dire autant de l'effort exercé en A'. Cela posé :

L'équation générale de l'équilibre (Voyez la *Mécanique analitique*)

$$Y\delta y+X\delta x=0$$

donnera, en faisant $A'C=u$, $B'C=z$;

$$gm\cdot\frac{a}{a+b}\text{Cos.}\beta.\delta u+gm.\frac{b}{a+b}\text{Sin.}\beta\delta z=0\ ;$$

mais

$$u=(a+b)\text{Sin.}\varphi'\ ,z\qquad=(a+b)\text{Cos.}\varphi'\ ;$$

partant

$$\delta u=(a+b)\text{Cos.}(\varphi+\beta)\delta\varphi'\ ,$$

$$\delta z=(a+b)\text{Sin.}(\varphi+\beta)\delta\varphi'\ ;$$

donc

$$a\text{Cos.}\beta\text{Cos.}(\varphi+\beta)=b\text{Sin.}\beta\text{Sin.}(\varphi+\beta)\ ;$$

ce qui donne

$$\frac{a}{b}=\text{Tang.}\beta\text{Tang.}(\varphi+\beta)\ ,$$

comme on l'a trouvé, par une méthode tout-à-fait différente, à la page 199 du précédent volume.

Pour appliquer au mouvement de l'échelle la formule générale de l'équilibre, il suffit d'ajouter aux termes ci-dessus les deux suivans $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, exprimant les forces accélératrices des deux extrémités de l'échelle, dans le sens des axes CA, CB, c'est-à-dire, en n'ayant d'abord aucun égard à l'effet du frottement.

Si l'on fait, dans cette hypothèse,

$$gm\cdot\frac{a}{a+b}=g'\ ,\quad \text{Cos.}\beta=1\ ,\quad \text{Sin.}\beta=0\ ;$$

on aura

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}-g'\right)\delta y+\frac{d^2x}{dt^2}\delta x=0\,;$$

ou

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}-g'\right)\text{Cos.}\varphi-\frac{d^2x}{dt^2}\text{Sin.}\varphi=0\,; \qquad \text{(A)}$$

Mais, la ligne $AB=a+b=r$ étant constante, l'équation de condition donnera, dans un instant quelconque

$$(y-d^2y)^2+(x+d^2x)^2=0\;,$$

ou

$$y\frac{d^2y}{dt^2}+x\frac{d^2x}{dt^2}=0\,;$$

Cette équation, combinée avec l'équation (A), donne

$$\frac{d^2y}{dt^2}=g'\text{Cos.}^2\varphi \qquad \frac{d^2x'}{dt^2}=-g'\text{Sin.}\varphi\text{Cos.}\varphi\,;$$

Ainsi, la force accélératrice des deux points extrêmes sera variable; ils parcourront respectivement les deux droites CA, CB. Le milieu de AB décrira un arc de cercle dont le diamètre sera égal à cette même droite. Les autres points décriront des arcs d'ellipses qui auront leur grand axe suivant CB, pour la moitié inférieure, et suivant CA pour la moitié supérieure.

Si l'on veut connaître les vitesses des points extrêmes, on les trouvera en intégrant les équations suivantes

$$dy\frac{d^2y}{dt^2}=g'\text{Cos.}^2\varphi.rd\varphi\text{Cos.}\varphi=g'rd\varphi\text{Cos.}^3\varphi\;,$$

$$dx\frac{d^2x}{dt^2}=-g'r\,d\phi\,\text{Cos.}\phi\,\text{Sin.}^2\phi\ .$$

La première donne

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=k-\frac{g'r}{3}(2+\text{Cos.}^2\phi)\text{Sin.}\phi\ ;$$

et on tire de la seconde

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=k'-\frac{g'r}{3}\,\text{Sin.}^3\phi\ ;$$

ce qui s'accorde avec le principe des forces vives

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=C-2g'y\ .$$

Pour avoir égard au frottement, il suffit de rapporter le mouvement aux axes CA′, CB′. Conservons les deux lettres y, x, pour les deux axes CA, CB, et prenons u, z pour CA′, CB′; en posant, pour abréger,

$$gm\,.\,\frac{b}{a+b}=g''\ ,$$

nous aurons

$$\left(\frac{d^2u}{dt^2}-g'\text{Cos.}\beta\right)\text{Cos.}\phi'-\left(\frac{d^2z}{dt^2}+g''\text{Sin.}\beta\right)\text{Sin.}\phi'=0\ ;$$

mais

$$u=\frac{y}{\text{Cos.}\beta}\ ,\qquad z=\frac{x}{\text{Cos.}\beta}\ ;$$

donc, l'équation, ramenée aux premiers axes, deviendra

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}-g'\text{Cos}^2\beta\right)\text{Cos.}(\phi+\beta)-\left(\frac{d^2x}{dt^2}+g''\text{Sin.}\beta\text{Cos.}\beta\right)\text{Sin.}\phi+\beta)=0.$$

faisant, pour abréger,

$$g'\text{Cos.}^2\beta=\xi, \qquad g''\text{Sin.}\beta\text{Cos.}\beta=\xi',$$

et conservant l'angle ϕ', on aura

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\xi\right)\text{Cos.}\phi'-\left(\frac{d^2x}{dt^2}-\xi'\right)\text{Sin.}\phi=0.$$

Cette équation a la même forme que l'équation (A) déjà traitée: elle donnera

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\xi\text{Cos.}^2\phi'-\xi'\text{Sin.}\phi'\text{Cos.}\phi',$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\xi'\text{Sin.}^2\phi'-\xi\text{Sin.}\phi'\text{Cos.}\phi'.$$

On déduit de la première

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=k-\frac{\xi}{3}(2+\text{Cos.}^2\phi')\text{Sin.}\phi'+\frac{\xi'}{3}\text{Sin.}^3\phi',$$

et de la seconde

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=k'+\frac{\xi}{3}\text{Sin.}^3\phi'+\frac{\xi'}{3}(2-\text{Sin.}^2\phi')\text{Cos.}\phi'.$$

En faisant $\beta=0$, ces deux dernières formules deviennent celles qu'on a déjà trouvées ci-dessus; lorsqu'on n'a pas égard au frottement.

On déterminera d'ailleurs les constantes k, k' par les conditions qu'au commencement du mouvement on a $\frac{dy}{dt}=0$, $\frac{dx}{dt}=0$.

On doit avoir aussi, au commencement du mouvement $\frac{d^2y}{dt^2}=0$; $\frac{d^2x}{dt^2}=0$. Cette dernière condition donne

$$\frac{a}{b}=\text{Tang.}\beta\text{Tang.}(\phi+\beta)\ ;$$

ou

$$\text{Tang.}\phi=\frac{a\,\text{Tang.}^2\beta-b}{(a+b)\text{Tang.}\beta}\,,$$

comme cela doit être; parce que, lorsque l'angle φ est tel, l'effet du frottement détruit l'effort de la pesanteur, ou la force accélératrice, comme on l'a vu ci-dessus et en l'endroit déjà cité de ce recueil.

Les diverses positions que prend dans son mouvement la ligne pesante AB, se coupent consécutivement en une suite de points formant une courbe continue, dont on peut être curieux de connaître l'équation.

Soient AB, A'B' (fig. 12) deux positions consécutives infiniment voisines de la droite mobile, dont M soit le point d'intersection; ce point sera l'un de ceux de la courbe cherchée. Faisons $AB=a$, l'angle $CBA=\varphi$, et désignons respectivement par x, y les perpendiculaires MP, MQ abaissées du point M sur les droites CA, CB prises pour axes des coordonnées; nous aurons

$$a=AB=MA+MB=\frac{x}{\text{Cos.}\varphi}+\frac{y}{\text{Sin}\,\varphi}\ ;$$

c'est-à-dire,

$$x\text{Sin.}\varphi+y\text{Cos.}\varphi=a\text{Sin.}\varphi\text{Cos}\,\varphi\ .$$

Or,

Or, au point d'intersection N, l'équation doit convenir également aux deux droites AB, A'B'; il faut donc qu'elle soit indépendante de l'angle φ, et qu'elle ne soit composée que des seules quantités a, x, y qui sont communes aux deux positions; il faut donc que x et y demeurent constans tandis que φ varie, c'est-à-dire, que la différentielle de l'équation ci-dessus, prise par rapport à φ seulement, doit avoir lieu en même temps qu'elle. Cette différentielle étant

$$x\text{Cos.}\varphi - y\text{Sin.}\varphi = a(\text{Cos.}^2\varphi - \text{Sin.}^2\varphi)\ ;$$

il ne s'agit plus que d'éliminer φ entre elle et l'équation primitive.

Pour y parvenir, regardons x, y comme les deux inconnues de ces équations; nous en tirerons aisément

$$x = a\text{Cos.}^3\varphi\ , \qquad y = a\text{Sin.}^3\varphi\ ;$$

donc

$$\text{Cos.}^2\varphi = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}},\quad \text{Sin.}^2\varphi = \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\ ;$$

donc enfin l'équation de la courbe cherchée est

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = 1\ . \quad (*)$$

(*) C'est précisément la courbe de la page 376 du VIII.[e] volume de ce recueil, si ce n'est que la droite mobile qui y était représentée par $2c$ l'est ici par a.

Si l'on compare cette équation avec celle que nous avons trouvée à la page 288 du V.[e] volume de ce recueil, et qu'on pourrait mettre sous cette forme

$$\left(\frac{x}{a'}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b'}\right)^{\frac{2}{3}} = 1\ ;$$

Il est facile de s'assurer que cette courbe (fig. 13) a quatre points de rebroussement situés sur les deux axes à des distances de l'origine égales à a ; et qu'elle est symétrique non seulement par

---

on en pourra conclure que la courbe dont il s'agit est, par rapport à la développée de l'ellipse ce que le cercle est lui-même par rapport à l'ellipse. On ne saurait pourtant en conclure que cette courbe soit la développée d'un cercle, puisqu'une telle développée se réduit à un point.

Mais on est conduit à soupçonner que cette même courbe pourrait bien être la développée d'une ellipse dont les deux axes, infinis l'un et l'autre, auraient néanmoins une différence finie.

Pour vérifier ce soupçon prenons l'équation

$$\left(\frac{ax}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{by}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

de la développée de l'ellipse ; équation dans laquelle a, b sont les deux demi-axes ; soit fait

$$a-b=c\,,\qquad \text{d'où}\qquad b=a-c\qquad \text{et}\qquad a^2-b^2=2ac-c^2\,;$$

l'équation deviendra ainsi

$$\left\{\frac{ax}{2ac-c^2}\right\}^{\frac{2}{3}}+\left\{\frac{(a-c)y}{2ac-c^2}\right\}^{\frac{2}{3}}=1\,;$$

ou encore

$$\left\{\frac{x}{2c-\dfrac{c^2}{a}}\right\}^{\frac{2}{3}}+\left\{\frac{\left(1-\dfrac{c}{a}\right)y}{2c-\dfrac{c^2}{a}}\right\}^{\frac{2}{3}}=1$$

équation qui se réduit en effet à

$$\left(\frac{x}{2c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{2c}\right)^{\frac{2}{3}}=1\,;$$

lorsqu'on suppose a infini.

rapport à ces axes, mais encore par rapport aux deux droites qui divisent en deux parties égales les angles des coordonnées. On en concevra facilement la raison en remarquant (fig. 13) que, théoriquement parlant, les droites CA, CB devant être considérées comme s'étendant indéfiniment de part et d'autre du point C, le mouvement des extrémités A et B de la droite mobile AB n'est pas borné à ce point; mais que l'extrémité B peut passer à gauche et l'extrémité A au-dessous suivant les prolongemens de CB et CA.

Il est d'ailleurs évident que la courbe est à la fois circonscrite à toutes les ellipses décrites par les points de AB; et, en particulier, au cercle décrit par son milieu.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorèmes de Géométrie.

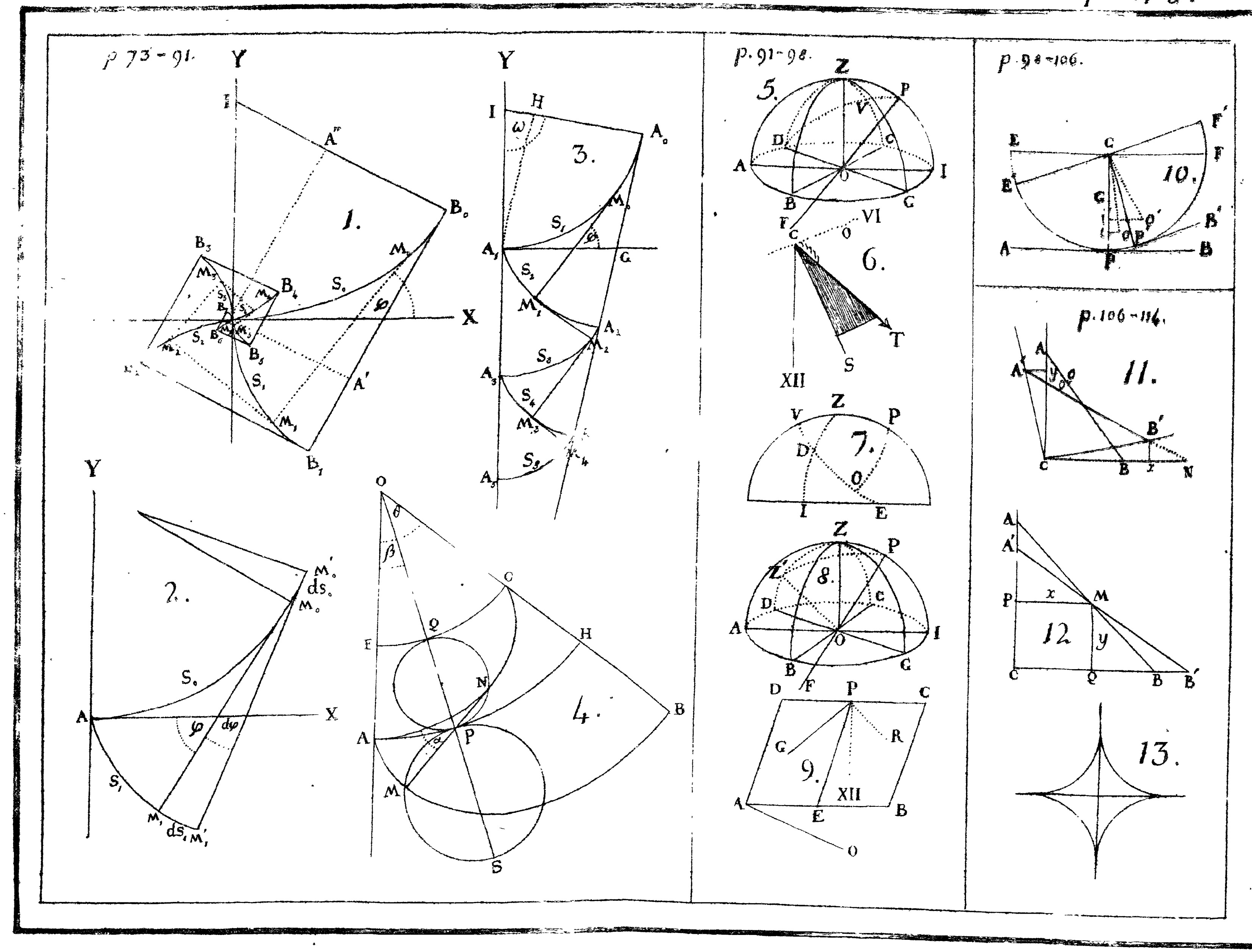
I. UN point P étant pris arbitrairement dans l'intérieur d'un triangle rectiligne ABC et A′, B′, C′ étant les points où ses côtés sont respectivement rencontrés par les prolongemens des droites menées respectivement à ce point P des sommets A, B, C; on doit avoir

$$\frac{PA'}{AA'}+\frac{PB'}{BB'}+\frac{PC'}{CC'}=1.$$

II. Un point P étant pris arbitrairement dans l'intérieur d'un tétraèdre ABCD, et A′, B′, C′, D′ étant les points ou les prolongemens des droites menées à ce point P respectivement des sommets A, B, C, D, rencontrent les faces opposées, on doit avoir

$$\frac{PA'}{AA'}+\frac{PB'}{BB'}+\frac{PC'}{CC'}+\frac{PD'}{DD'}=1.$$

Tom. IX, plan. I, pag. 73–116



J.D.G. fecit

ASTRONOMIE.

Calcul de l'éclipse de soleil du 7 de septembre 1820, pour 26 des principales villes de l'Europe;

Par M. KRAMP, professeur doyen de la faculté des sciences de Strasbourg, correspondant de l'académie royale des sciences, Chevalier de l'Ordre royal de la Légion d'honneur.

AVERTISSEMENT DU RÉDACTEUR DES ANNALES.

M. le professeur KRAMP, qui a adressé, il a quelque temps, à l'académie royale des sciences, un mémoire de plus de 100 pages in-4.^{e}, contenant le calcul des circonstances de l'éclipse de soleil du 7 de septembre 1820, pour 26 des principales villes de l'Europe, ayant bien voulu nous confier la minute de ce mémoire, nous en avons extrait les principaux résultats que nous avons consignés dans le tableau suivant.

Dans ce tableau, les villes se trouvent classées suivant l'importance plus ou moins grande que l'éclipse doit y avoir; et les époques y sont exprimées en temps solaire vrai du méridien de Paris. En leur ajoutant donc les longitudes en temps, telles qu'elles se trouvent dans le même tableau, on obtiendra les époques telles qu'elles doivent être comptées dans chaque ville en particulier.

D'après les calculs de M. Kramp, la seule de ces villes pour laquelle l'éclipse doive être annulaire est celle de Strasbourg. On trouvera le calcul détaillé pour cette ville à la page 342 du VIII.^{e} volume du présent recueil.

Noms des Villes.	Latitudes boréales.	Longitudes en temps de Paris.	Commenc.[t] de l'éclipse.	Époque de la plus grande phase.
	° ′ ″	h. m. s.	h. m. s.	h. m. s.
Strasbourg. . . .	48. 34. 56	+ 0. 21. 36	0. 47. 5	2. 13. 13
Gotha.	50. 56. 8	+ 0. 33. 35	0. 42. 2	2. 11. 42
Rome.	41. 53. 54	+ 0. 40. 32	1. 9. 20	2. 32. 33
Prague.	50. 5. 19	+ 0. 48. 20	0. 53. 25	2. 15. 41
Berlin.	52. 31. 45	+ 0. 44. 8	0. 47. 40	2. 15. 0
Palerme.	38. 6. 44	+ 0. 44 7	1. 17. 54	2. 46. 26
Bremen.	53. 4. 38	+ 0. 25. 51	0. 41. 9	2. 6. 35
Milan.	45. 28. 2	+ 0. 27. 26	0. 55. 50	2. 25. 13
Ofen.	47. 29. 44	+ 1. 6. 49	1. 4. 8	2. 29. 52
Vienne.	48. 12. 40	+ 0. 56. 10	0. 59. 35	2. 23. 19
Copenhague. . . .	55. 41. 4	+ 0. 40 59	0. 41. 25	2. 2. 34
Greenwich. . . .	51. 28. 40	— 0. 9. 21	0. 33. 21	1. 58. 15
Édimbourg. . . .	55. 57. 57	— 0. 22. 2	0. 23. 2	1. 48. 50
Paris.	48. 50. 14	± 0. 0. 0	0. 40. 31	2. 10. 58
Warsovie.	52. 14. 28	+ 1. 14. 50	0. 57. 6	2. 16. 46
Stockholm.	59. 20. 31	+ 1. 2. 53	0. 41. 18	2. 0. 0
Konigsberg. . . .	54. 42. 12	+ 1. 12. 36	0. 51. 51	2. 14. 49
Montpellier. . . .	43. 36. 16	+ 0. 6. 10	0. 54. 36	2. 22 47
Wilna.	54. 41. 2	+ 1. 31. 49	0. 56. 53	2. 18. 24
Brest.	48. 23. 14	— 0. 27. 16	0. 32. 53	1. 58. 21
Wardhuus. . . .	70. 22. 36	+ 1. 55. 7	0. 33. 35	1. 45. 34
Pétersbourg. . . .	59. 56. 23	+ 1. 51. 54	0. 51. 34	2. 7. 18
Moscow.	55. 45. 45	+ 2. 20. 51	1. 5. 42	2. 18. 19
Madrid.	40. 24. 57	— 0. 24. 10	0. 50. 26	2. 21. 0
Cadix.	36. 32. 0	— 0. 34. 31	0. 57. 18	2. 27. 30
Lisbonne.	38. 42. 18	— 0. 45. 51	0. 43. 48	2. 18. 7

Fin de l'éclipse.	Moindre distance des centres.	Nombre de doigts.	Époque de la conjonction.	Époque du passage par l'écliptique.
h. m. s.	′ ″	d. ′	h. m. s.	h. m. s.
3. 36. 37	0. 59	Annulaire.	2. 14. 51	2. 25. 17
3. 30. 56	1. 27	10. 59	2. 9. 2	2. 17. 4
3. 54. 4	1. 48	10. 52	2. 33. 45	2. 45. 40
3. 36. 30	1. 53	10. 49	2. 19. 18	2. 4. 11
3. 30. 46	1. 54	10. 49	2. 13. 33	2. 29. 43
4. 2. 54	1. 59	10. 47	2. 42. 51	3. 2. 51
3. 27. 13	2. 5	10. 45	2. 7. 22	2. 3. 46
3. 44. 25	2. 17	10. 40	2. 22. 47	2. 36. 0
3. 43. 48	2. 23	10. 38	2. 29. 4	2. 5. 26
3. 41. 17	2. 35	10. 34	2. 25. 9	2. 7. 58
3. 23. 20	2. 37	10. 33	2. 6. 29	1. 45. 17
3. 24. 51	3. 1	10. 24	1. 49. 12	2. 29. 30
3. 13. 0	3. 6	10. 22	1. 47. 51	2. 17. 15
3. 33. 29	3. 14	10. 19	2. 7. 8	2. 35. 56
3. 33. 48	3. 46	10. 7	2. 20. 44	1. 41. 16
3. 17. 8	3. 47	10. 6	2. 3. 53	1. 20. 53
3. 28. 34	3. 52	10. 4	2. 15. 13	1. 32. 37
3. 45. 13	4. 5	10. 0	3. 6. 16	2. 57. 22
3. 29. 9	4. 50	9. 53	2. 18. 33	1. 23. 0
3. 29. 28	5. 38	9. 24	1. 57. 34	2. 53. 13
2. 57. 5	6. 4	9. 15	1. 49. 21	0. 24. 24
3. 18. 32	6. 50	8. 58	2. 10. 36	0. 54. 34
3. 27. 40	7. 10	8. 50	2. 22. 15	0. 54. 37
3. 45. 11	8. 6	8. 29	2. 12. 36	3. 29. 29
3. 50. 26	10. 44	7. 29	2. 14. 56	3. 54. 26
3. 41. 42	11. 18	7. 17	2. 4. 36	3. 50. 9

Calcul de l'éclipse de soleil du 7 de septembre 1820, pour Strasbourg et Montpellier ;

Par M. BENJAMIN VALZ.

Au Rédacteur des *Annales* ;

MONSIEUR,

CONFORMÉMENT à la promesse que je vous en avais faite et qu'une petite absence m'a empêché de réaliser plutôt, j'ai l'honneur de vous adrèsser mon calcul de l'éclipse de soleil du 7 de septembre 1820. Permettez-moi d'y joindre les courtes observations que voici sur le calcul de la même éclipse pour les mêmes lieux, donné par M. le professeur Kramp, à la page 331 de votre VIII.e volume.

1.° La parallaxe solaire (pag. 331), cotée avec cinq décimales doit être purement fictive. L'on s'accorde à peine sur la première décimale ; et, très-certainement, il n'y a pas deux astronomes d'accord sur la seconde.

2.° La quantité B (pag. 332) a été obtenue en employant la tangente de la parallaxe, tandis que c'était de son sinus qu'il fallait faire usage ; cela donne

$$B=63,7827\,, \qquad \text{Log.}B=1.8047029\,.$$

3.°

3.° Il y a 6″ d'erreur (même page) sur la longitude du soleil le 7 à midi ; suivant la connaissance des temps elle doit être 164°.42′.47″. Cette erreur, introduite dans les déterminations subséquentes les a rendues fautives.

4.° Il y a, je crois, sur les longitudes lunaires (pag. 334), des erreurs en *plus*, savoir : de 6″ à deux heures ; de 2″ à trois heures ; de 1″ à quatre heures. Il y a aussi sur la latitude lunaire à trois heures une erreur de 1″ également en *plus*.

5.° Il n'a point été tenu compte (pag. 338) de l'aplatissement de la terre, dans la détermination de X, Y, Z. On a d'ailleurs employé simplement la parallaxe équatoriale de la lune, qui pourtant aurait dû être diminuée de 5 à 6″, pour les deux villes dont il s'agit.

6.° Pour trouver p, q (même page), on a considéré x comme infiniment petit par rapport à A ; et il est très-vrai, en effet, que l'erreur de cette supposition affecte à peine les dixièmes des secondes. Mais, pour compléter l'exposition théorique de la méthode, il aurait fallu justifier cette supposition.

7.° Enfin, on a tout-à-fait oublié l'augmentation du diamètre de la lune qui, dans ce cas, s'élève toutefois à 20″.

J'espére que toutes ces remarques expliqueront suffisamment les différences suivantes, peu considérables d'ailleurs, que j'ai trouvées entre les résultats de mes calculs et ceux des calculs de M. Kramp.

1.° Les valeurs de q (pag. 340) seraient fautives de 11 à 14″, et celles de r de 7 à 10″.

2.° Les distances des centres (page 341) seraient fautives de 15 à 17″. Celles de *une heure* est côtée 1750″ ; mais la marche des différences indique que ce doit être 1695″. Cette erreur de plume paraît provenir d'une autre, commise sur q, noté 1570″ au lieu de 1510″. Malheureusement c'est cette première quantité qui a servi à calculer le commencement de l'éclipse qui, par cela même se trouve en erreur de $1^m.40^s$, à peu près.

3.° En ayant égard à cette correction, et ajoutant la différence des méridiens en temps, afin de réduire les temps au méridien du lieu; les déterminations que j'ai obtenues seraient plus fortes de 6^s sur le commencement, de 37^s sur le milieu et de 45^s sur la fin de de l'éclipse, ainsi que vous le verrez dans le tableau ci-joint.

4.° Les résultats précédens sont relatifs à Montpellier; ceux de Strasbourg présentent à peu près les mêmes différences, en corrigeant toutefois l'heure du commencement, qui paraît devoir être $0^h.47^m55^s$. Mais ce pourrait être une faute d'impression.

5.° L'heure de la plus grande phase différerait bien de 3^m de mes déterminations, mais l'erreur se découvre à la simple inspection du tableau (pag. 345); car la marche des différences indique visiblement que cette plus grande phase doit avoir lieu après $2^h.15^m$ et non avant, comme le donne l'interpolation, où il faut, au reste, dans la valeur de B, remplacer 202 par 702.

7.° La moindre largeur de l'anneau (pag. 346) est	14″,8
Mais il faut en retrancher pour l'augm. du diam. . .	8″,4
Et le surplus.	6″,4

est absorbé par l'aplatissement et les autres erreurs que j'ai signalées.

Je borne là, Monsieur, ces observations, que vous trouverez peut-être assez minutieuses. Quelques secondes de plus ou de moins semblent en effet une vétille; mais vous voyez cependant qu'en résultat on finit par atteindre jusqu'aux minutes. Au surplus, le désir de remonter à la source de mon défaut d'accord avec l'estimable doyen de Strasbourg, en me poussant plus avant dans ses calculs que je n'en avais le dessein, m'a procuré en même temps sur les miens une nouvelle sécurité qui pourtant, je l'avoue, pourrait bien n'être que simplement relative.

Agréez, etc.

Nismes, le 13 de septembre 1818.

Premier Tableau.

Résultats communs aux deux villes de Montpellier et de Strasbourg.

Temps vrai de Paris.	$1^h.\ 0^m.\ 0^s.$	$2^h.\ 0^m.\ 0^s.$	$3^h.\ 0^m.\ 0^s.$	$4^h.\ 0^m.\ 0^s.$
Long. ☉	164°.45′.12″,8	164°.47′.38″,6	164°.50′. 4″,4	164°.52′.30″,2
Long. ☾	164 .17 .44 ,1	164 .47 .11 ,3	165 .16 .38 ,4	165 .46 . 5 ,5
Latit. ☾$=\lambda$	0 .47 .24 ,2	0 .44 .42 ,4	0 .42 . 0,5	0 .39 .18 ,7
Parall. horisont. (☾—☉)$=\varpi$	0 .53 .39 ,7	0 .53 .39 ,6	0 .53 .39 ,5	0 .53 .39 ,4
Ascension dro. ☉	165 .57 .45	166 . 0 . 0	166 . 2 .15	166 . 4 .30

Aplatissement de la terre $=\frac{1}{310}$.

Demi-diamètre du soleil $=0°.15'.54'',8$.

Parall. de long. $=\Pi=a+a^2\text{Cot.}(☾-\text{N})\text{Sin.}1''+a^3[\text{Cot.}^3(☾-\text{N})-\frac{1}{3}]\text{Sin.}^2 1''+\ldots\ldots$

$$a=\frac{\text{Sin.}\varpi\,\text{Sin.}h\,\text{Sin.}(☾-\text{N})}{\text{Cos.}\lambda\,\text{Sin.}1''}.$$

Parall. de latit. $=\pi=a'+a'^2\text{Tang.}(x+\lambda)\text{Sin.}1''+a'^3[\text{Tang.}^2(x+\lambda)-\frac{1}{3}]\text{Sin.}^2 1''+\ldots\ldots$

$$=a''+a''(a''-\lambda)\text{Tang.}x\,\text{Sin.}1''+a''\lambda(a''-\tfrac{1}{2}\lambda-a''\text{Tang.}^2x)\text{Sin.}^2 1''+a''^3(\text{Tang.}^2x-\tfrac{1}{3})\text{Sin.}^2 1''$$

$$a'=\frac{\text{Sin.}\varpi\,\text{Cos.}h\,\text{Cos.}(x+\lambda)}{\text{Cos.}x\,\text{Sin.}1''}\ ;\quad a''=\text{Sin.}\varpi\,\text{Cos.}h\,\text{Cot.}1''\ ;\quad \text{Tang.}x=\text{Tang.}h\,\text{Cos.}(☾-\text{N}+\tfrac{1}{2}\Pi)\text{Séc.}\tfrac{1}{2}\Pi.$$

Deuxième Tableau.

Résultats particuliers à la ville de Montpellier.

Latitude corrigée $=43°.25'.46''$.

Longitude en degrés $=+1°.32'.30''$; Longit. en temps $=6^m.10^s$.

Temps vrai.	1h. 6m. 10s.	2h. 6m. 10s.	3h. 6m. 10s.	4h. 6m. 10s.
Asc. dr. mil. du ciel	182°.30′.15″	197°.32′.30″	212°.34′.45″	227°.37′.[illegible]
Long. du nonag. .	161 .21 .59	173 .59 . 6	187 .54 .12	204 . 2 . 6
Haut. du nonag. .	49 .57 .30	44 . 7 .50	38 . 9 .25	32 24 .47
Parall. de long. .	0 . 2 7 ,5	—0 . 6 . 2 ,4	—0 .12 .52 ,5	—0 .17 .56 ,4
Parall. de lat. . .	0 .34 22 ,6	0 .38 .27 ,7	0 .42 .12 ,8	0 .45 .21 ,6
Long. app. ☾ . .	164 .19 .51 ,6	164 .41 . 8 ,8	165 . 3 .45 ,8	165 .28 . 9 ,0
Latit. app. ☾ . . .	0 .13 . 1 ,6	0 . 6 14 ,7	—0 . 0 .12 ,3	—0 . 6 . 2 ,9
Long (☾—⊙) . .	—0 .25 .21 ,2	—0 . 6 29 ,8	0 .13 .41 ,4	0 .35 .38 ,8
Dist. des centres.	0 .28 .30 ,2	0 . 9 . 0 ,7	0 .13 .41 ,5	0 .36 . 9 ,4
Demi-diam. ☾ . .	0 .14 .51 ,9	0 .14 .50 ,8	0 .14 .49 ,1	0 .14 .47 ,1

Temps vrai.	Long. (☾—⊙)	Latit. ☾	Dist. des cent.	Demi-diam.
Com.t 0h.59m. 8s	. . . .	. . . .	30′.46″,8	30′.46″,8
0 .59 .10	— 27′.29″,2	13′.49″,6	30 .46 ,1	. . . . . .
1 . 0 .10	— 27 .10 ,9	13 42 ,7	30 .26 ,7	. . . . . .
2 .29 .10	1 . 3 ,8	3 .43 ,2	. . . . . .	. . . . . .
Pl. g. ph. 2 .29 .34	1 .11 ,8	3 .40 ,6	3 .52 ,0	30 .44 ,9
2 .30 .10	1 .23 ,8	3 .36 ,7	. . . . . .	. . . . . .
3 .51 .10	29 .58 ,4	— 4 .38 ,5	30 .19 ,9	. . . . . .
Fin. 3 .52 . 8	. . . .	. . . .	30 .42 ,4	30 .42 ,4
3 .52 .10	30 .21 ,1	— 4 .44 ,1	30 .43 ,2	. . . . . .

Plus grande phase de $10^d,136$, dans la partie boréale du soleil. La première impression du disque lunaire aura lieu vers 60° à droite de l'extrémité supérieure du diamètre vertical du soleil.

Troisième

Troisième Tableau.

Résultats particuliers à la ville de Strasbourg.

Temps vrai.	$1^h. 21^m. 38^s.$	$2^h. 21^m. 38^s.$	$3^h. 21^m. 38^s.$	$4^h. 21^m. 38^s.$
Asc. dr. mil. du ciel	186°.22′.21″	201°.24′.36″	216°.26′.51″	231°.29′. 6″
Long. du nonag. .	160 .45 .57	173 . 2 .49	186 .49 .57	203 .22 .38
Haut. du nonag. .	44 .20 . 0	38 .30 .30	32 .32 . 0	26 .46 . 0
Parall. de long. .	0 . 2 20 ,0	—0 . 4 .50 ,8	—0 .10 .41 ,3	—0 .14 .50 ,0
Parall. de lat. . .	0 .38 .17 ,3	0 .41 .58 ,1	0 .45 .16 ,1	0 .47 .58 ,0
Long. app. ☾ . .	164 .20 . 4 ,1	164 .42 .20 ,5	165 . 5 .57 ,1	165 .31 .15 ,5
Latit. app. ☾ . . .	0 . 9 . 6 ,9	0 . 2 .44 ,3	—0 . 3 .15 ,6	—0 . 8 .39 ,3
Long. (☾—☉) . .	—0 .25 . 8 ,7	—0 . 5 18 ,1	0 .15 .52 ,7	0 .38 .45 ,3
Dist. des centres.	0 .26 .44 ,8	0 . 5 .58 ,1	0 .16 .12 ,5	0 .39 .42 ,5
Demi-diam. ☾ . .	0 .14 .50 ,9	0 .14 .49 ,8	0 .14 .48 ,2	0 .14 .46 ,2

Temps vrai.	Long. (☾—☉)	Latit. ☾	Dist. des cent.	Demi-diam.
$1^h. 9^m. 38^s$	— 28′.59″,0	10′.25″,0	30′.48″,0	. . . . . .
Com.t 1 . 9 .44	. . . .	. . . .	30 .46 ,0	30′.46″,0
1 .11 .38	— 28 .20 ,8	10 .11 ,9	30 . 7 ,5	. . . . . .
2 .36 .38	— 0 . 8 ,9	1 .11 ,6	. . . . . .	. . . . . .
Pl. g. ph. 2 .37 .57	0 .19 ,1	1 . 3 ,4	1 . 6 ,2	30 .44 ,2
2 .39 .30	0 .53 ,7	0 .53 ,2	. . . . . .	. . . . . .
3 .57 .38	29 .22 ,8	— 6 .34 ,8	30 . 6 ,5	. . . . . .
Fin. 3 .59 . 7	. . . .	. . . .	30 .41 ,7	30 .41 ,7
3 .59 .38	30 .9 ,1	— 6 .45 ,7	30 .54 ,0	. . . . . .

Grandeur de l'éclipse $11^d,173$, dans la partie boréale du soleil. La première impression du disque lunaire aura lieu vers 67° à droite de l'extrémité supérieure du diamètre vertical du soleil.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. QUELLE est la courbe enveloppe de l'espace parcouru par un cercle mobile d'un rayon donné, dont le centre décrit une ellipse donnée ?

II. Quelle courbe doit décrire le centre d'un cercle d'un rayon donné, pour que l'enveloppe de l'espace parcouru par ce cercle soit une ellipse donnée ?

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Théorie élémentaire de la courbure des lignes et des surfaces courbes ;

Par M. GERGONNE.

LONG-TEMPS encore après la découverte du calcul différentiel, les géomètres se confiaient à ses méthodes, par une sorte d'instinct, et sans trop se rendre compte des principes théoriques qui pouvaient les justifier et leur servir d'appui. Bien que souvent ils n'en fissent usage que par pure élégance, ils n'en regardaient pas moins cette nouvelle branche de calcul comme étant d'une nécessité indispensable dans certaines recherches, qui alors étaient réputées être essentiellement de son domaine.

Mais, à mesure que, par les travaux de quelques hommes supérieurs, et notamment par les méditations de notre illustre Lagrange, la métaphysique du calcul différentiel a été mieux connue, cette branche de calcul est aussi devenue, peu à peu, de moins en moins nécessaire ; et on est parvenu, par degrés, à soustraire à son empire une multitude de questions, soit d'analise, soit de géométrie, que pourtant, avant qu'elle fût connue, on eût à peine osé aborder. Il est digne de remarque qu'en particulier le problème des tangentes, qui lui avait donné naissance, en soit devenu, des premiers, tout-à-fait indépendant, du moins pour les courbes algébriques.

La vérité est qu'on ne saurait rencontrer aucune question, considérée individuellement, pour la solution de laquelle le calcul différentiel soit d'une nécessité indispensable. Tout le service que nous retirons de ce calcul se réduit au fond à nous permettre, au moyen de la symbolisation d'une nouvelle opération (la dérivation), d'enfermer la solution d'une infinité de questions particulières dans une formule unique, où nous pouvons lire d'une manière distincte la série des calculs à effectuer, dans chacun des cas individuels qu'une question générale peut offrir. Ainsi, par exemple, on n'a pas besoin du calcul différentiel pour mener une tangente ou une normale à telle ou telle courbe dont on a l'équation, mais il est nécessaire pour écrire l'équation de la tangente à une courbe quelconque, par l'un quelconque de ses points.

Si, dès le temps de Descartes et de Fermat, les géomètres avaient remarqué avec plus d'attention combien souvent l'opération appelée *dérivation* se représente dans les calculs; s'ils eussent eu dès-lors l'idée, fort simple et fort naturelle d'ailleurs, d'affecter un symbole à cette nouvelle opération, ainsi qu'ils l'avaient déjà fait pour toutes les autres, il y a tout lieu de croire que Leibnitz et Newton n'eussent pas eu à se disputer l'invention des nouveaux calculs; et l'on n'eût pas été près d'un siècle à en chercher la métaphysique Mais ce n'est pas d'ordinaire d'une allure si aisée que l'esprit humain s'achemine vers les découvertes. Parmi une multitude de routes qui se présentent devant lui, une seule est la bonne; mais, comme, avant de s'y engager, elles lui sont toutes également inconnues, ce ne pourrait être que par le hasard le plus heureux qu'il se déterminerait pour celle-là.

Ce serait, sans doute une puérilité d'éviter constamment l'usage du calcul différentiel, sur-tout lorsque son secours peut introduire dans les recherches des simplifications de quelque importance; cependant, il ne peut être que très-utile à celui qui veut entreprendre des études mathématiques sérieuses et profondes de ne recourir aux procédés de ce calcul qu'après avoir épuisé toutes les ressources de l'analise ordinaire.

D'un autre côté, beaucoup de gens pour qui les études mathématiques ne sont qu'accessoires, et qui n'ont pas conséquemment le loisir de les pousser fort loin, peuvent désirer néanmoins de ne pas demeurer tout-à-fait étrangers à certaines théories, sans s'engager dans l'etude des branches de calcul desquelles on a coutume de les faire dependre. Ainsi, c'est travailler également dans l'intérêt des uns et dans celui des autres que de ramener aux simples élémens le plus grand nombre de ces théories, sur-tout lorsqu'il est possible de le faire sans en accroître la complication d'une manière très-notable.

Parmi les théories que l'on regarde communément comme le plus essentiellement dépendantes du calcul différentiel, celle de la courbure des lignes et surfaces courbes tient sans contredit un des premiers rangs, soit en elle-même, soit par la multitude des importantes applications dont elle est susceptible. Il peut donc n'être pas sans intérêt de montrer comment cette théorie peut être rendue indépendante des méthodes différentielles; et tel est l'objet que nous nous proposons dans l'essai que l'on va lire.

Section I.

Des contacts du premier ordre.

Dans cette première section, nous ne nous occuperons uniquement que des contacts simples ou du premier ordre; c'est-à-dire que nous traiterons successivement des tangentes et normales aux courbes planes, des tangentes et plans normaux aux courbes à double courbure, et enfin des plans tangens et des normales aux surfaces courbes.

§. 1.

Du contact dans les courbes planes.

En prenant pour origine des coordonnées rectangulaires l'un quelconque des points du périmètre d'une courbe plane quelconque, son équation peut toujours, soit immédiatement, soit, s'il est nécessaire, par le développement en série, être amenée à cette forme

$$\left.\begin{array}{l} 0=Ax+Fxy+Gx^2+\ldots\ldots \\ \quad +By \qquad\quad +Hy^2+\ldots\ldots \end{array}\right\} \; (*) \quad (1)$$

A la vérité, lorsque le second membre de cette équation sera une série indéfinie, elle ne pourra être employée, avec sécurité, que pour des portions de la courbe assez voisines de l'origine pour que la petitesse de x et de y rende la série convergente ; mais ce n'est justement que pour de telles portions de la courbe que nous nous proposons d'en faire usage.

Lorsqu'on ne considère donc que des points de la courbe très-voisins de l'origine, on peut, sans erreur sensible, négliger, dans l'équation (1), les termes de plus d'une dimension en x et y; d'où il suit que, plus la portion de courbe que l'on considérera, à partir de l'origine, sera petite, et plus aussi cette courbe approchera de se confondre avec la droite ayant pour équation

$$Ax+By=0 \; ; \qquad (2)$$

la courbe se confondra donc rigoureusement à l'origine avec cette droite, qui en indiquera alors exactement la direction ; c'est donc une *tangente* à la courbe, en ce point. (**)

(*) Nous avons choisi les notations de manière à lier ce qui concerne les courbes planes avec ce qui est relatif aux courbes à double courbure et aux surfaces courbes.

(**) Cette manière simple et naturelle de parvenir à la tangente paraît tout-à-fait conforme à l'idée qu'on doit se faire d'une telle droite. Si cependant quelques esprits pointilleux n'en étaient pas pleinement satisfaits, ils pourraient la remplacer par ce qui suit.

Soit menée par l'origine une sécante à la courbe ; elle pourra généralement

On voit donc que, *lorsqu'une courbe passe par l'origine, on obtient l'équation de sa tangente en ce point, en égalant simplement à zéro, dans l'équation de la courbe, l'ensemble des termes d'une seule dimension par rapport aux coordonnées.*

Ayant ainsi la tangente à la courbe par l'origine, rien n'est plus facile que d'obtenir sa *normale* par le même point; l'équation de cette normale sera

---

rencontrer cette courbe en plusieurs autres points. Soient x, y les coordonnées de celui d'entre ces points qui est le plus voisin de l'origine, et soit r sa distance à cette origine, ou la corde interceptée. Soient posés

$$x=ar\,,\qquad y=br\,; \qquad (\alpha)$$

à cause de

$$x^2+y^2=r^2\,, \qquad (\beta)$$

nous aurons

$$a^2+b^2=1\,; \qquad (\gamma)$$

et l'équation de la sécante sera

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}\,. \qquad (\delta)$$

En mettant les valeurs (α) dans l'équation (1), elle devient, en divisant par r,

$$0=(Aa+Bb)+(Fab+Gab+Ga^2+Hb^2)r+\dots\dots\,;$$

équation qui nous donnerait les diverses valeurs de r; mais pour que la sécante devienne tangente, il faut que r soit nul; on doit donc avoir alors

$$Aa+Bb=0\,,$$

qui, combinée avec (δ), donne, comme dans le texte,

$$Ax+By=0\,.$$

Rien ne serait plus facile que de ramener à cette méthode la théorie de points singuliers des courbes; mais cela nous entraînerait beaucoup trop loin.

$$\frac{x}{A}=\frac{y}{B}\,. \qquad (3)$$

S'agit-il de mener une tangente ou une normale à une courbe donnée, par l'un quelconque (x', y') de ses points ; on y transportera d'abord l'origine, en changeant respectivement, dans l'équation de la courbe, x, y en $x'+x$, $y'+y$; l'ensemble des termes indépendans de x, y, dans l'équation résultante, égalé à zéro, sera l'équation de condition, exprimant que le point (x', y') est sur la courbe ; et l'ensemble des termes d'une seule dimension, par rapport aux mêmes variables, égalé pareillement à zéro, sera l'équation de la tangente à la nouvelle origine, rapportée aux nouveaux axes ; on la rapportera aux axes primitifs, en changeant respectivement, dans son équation x, y en $x-x'$, $y-y'$.

On remarquera, au surplus, que, dans le développement des puissances et produits de puissances des binomes $x'+x$, $y'+y$, on peut rejeter les termes de plus d'une dimension en x, y, attendu qu'on n'est point dans le cas d'en faire usage. Si l'on rejette également les termes indépendans de ces deux variables, et que, dans ce qui restera, on change respectivement x, y en $x-x'$, $y-y'$, on aura immédiatement l'équation de la tangente au point (x', y'), rapportée aux axes primitifs, et de laquelle on conclura facilement celle de la normale par le même point.

Appliquons ce procédé à l'ellipse ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,. \qquad (4)$$

Nous aurons d'abord

$$\frac{(x'+x)^2}{a^2}+\frac{(y'+y)^2}{b^2}=1\,;$$

puis, en développant,

0=

$$o=\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1\right)+\frac{2x'x}{a^2}+\dots..$$
$$+\frac{2y'y}{b^2}+\dots..$$

Parce que le point (x', y') est sur la courbe, on aura

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1\ ; \qquad (5)$$

et l'équation de la tangente, rapportée aux axes primitifs, sera

$$\frac{x'(x-x')}{a^2}+\frac{y'(y-y')}{b^2}=o\ ;$$

ou simplement, en vertu de la relation (5)

$$\frac{x'x}{a^2}+\frac{y'y}{b^2}=1\ . \qquad (6)$$

On en conclura, pour celle de la normale par le même point

$$a^2.\frac{x-x'}{x'}=b^2\frac{y-y'}{y'}\ . \qquad (7)$$

Nous ne disons rien du cas où il s'agirait de mener à une courbe une tangente ou une normale par un point qui lui serait étranger, attendu que ce second problème se ramène facilement au premier.

On voit, par ce qui précède, que si les équations de deux courbes qui passent par l'origine se ressemblent seulement dans les termes du premier ordre, quelque différence qu'elles puissent présenter d'ailleurs, ces courbes auront en ce point la même tangente et la même normale. Il n'est pas même nécessaire pour cela que les deux équations se ressemblent dans leurs premiers termes ; car, si

$$\left.\begin{array}{l} 0=ax+fxy+gx^2+\ldots.. \\ \quad +by \qquad +hy^2+\ldots.. \end{array}\right\} \quad (8)$$

est l'équation d'une courbe, l'équation de sa tangente par l'origine sera

$$ax+by=0\;; \qquad\qquad (9)$$

de sorte que cette courbe aura la même tangente en ce point que la courbe (1), si seulement l'équation (9) a lieu en même temps que l'équation (2) ; c'est-à-dire, si l'on a seulement

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}\;. \qquad\qquad (10)$$

Deux courbes qui ont une même tangente en un même point sont dites elles-mêmes *tangente* l'une à l'autre en ce point. On voit, par ce qui précède, qu'une infinité de courbes différentes peuvent avoir la même tangente et la même normale au même point.

Si l'on veut mener une tangente à la courbe (1) par le point (x', y'), on écrira d'abord

$$\begin{array}{ll} 0=A(x'+x)+F(x'+x)(y'+y)+G(x'+x)^2+\ldots. \\ \quad +B(y'+y) \qquad\qquad\qquad +H(y'+y)^2+\ldots. \end{array}$$

puis, en développant,

$$\begin{array}{ll|l|l} 0=Ax'+Fx'y'+Gx'^2+\ldots..+ & A & x+\;B & y+\ldots. \\ \quad +By' \qquad +Hy'^2+\ldots..+ & Fy' & +\;Fx' & +\ldots. \\ & +2Gx' & +2Hy' & +\ldots. \\ & +\ldots\ldots. & +\ldots.. & +\ldots. \end{array}$$

on aura donc, en premier lieu, l'équation de condition,

$$\left.\begin{array}{l} 0=Ax'+Fx'y'+Gx'^2+\ldots \\ +By' \qquad\qquad +Hy'^2+\ldots \end{array}\right\} \quad (11)$$

et l'équation de la tangente sera

$$0=(A+Fy'+2Gx'+\ldots)(x-x')+(B+Fx'+2Hy'+\ldots)(y-y')$$

ou, en ajoutant le double de l'équation (11) et réduisant

$$\left.\begin{array}{l} 0=A(x+x')+F(xy'+yx')+2Gxx'+\ldots\ldots \\ +B(y+y') \qquad\qquad\qquad +2Hyy'+\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (12)$$

Quant à l'équation de la normale, par le même point, elle sera (3)

$$\frac{x-x'}{A+Fy'+2Gx'+\ldots} = \frac{y-y'}{B+Fx'+2Hy'+\ldots}; \qquad (13)$$

§. 2.

Des contacts dans les courbes à double courbure.

En prenant pour origine des coordonnées rectangulaires l'un quelconque des points d'une courbe quelconque à double courbure, on peut toujours, soit immédiatement soit, s'il est nécessaire, par le développement en série, amener la courbe à être donnée par le système des deux équations

$$\left.\begin{array}{l} 0=Ax+Dyz+Gx^2+\ldots \\ +By+Ezx+Hy^2+\ldots \\ +Cz+Fxy+Kz^2+\ldots \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} 0=A'x+D'yz+G'y^2+\ldots \\ +B'y+E'zx+H'y^2+\ldots \\ +C'z+F'xy+K'z^2+\ldots \end{array}\right\} \quad (1')$$

ou par toutes autres équations déduites d'une combinaison quelconque de ces deux-là. A la vérité, lorsque les seconds membres de ces équations seront des séries indéfinies, elles ne pourront être employées, avec sécurité, que pour des portions de la courbe assez voisines de l'origine pour que la petitesse de x. y et z rende les séries convergentes ; mais ce n'est justement que pour de telles portions de la courbe que nous nous proposons d'en faire usage.

Lorsqu'on ne considère donc que des points de la courbe très-voisins de l'origine, on peut, sans erreur sensible, négliger, dans les équations (1, 1'), les termes de plus d'une dimension en x, y, z; d'où il suit que, plus la portion de courbe que l'on considèrera, à partir de l'origine, sera petite, et plus aussi cette courbe approchera de se confondre avec la droite ayant pour équations

$$Ax+By+Cz=0\ , \qquad (2)$$

$$A'x+B'y+C'z=0\ ; \qquad (2')$$

elle se confondra donc rigoureusement à l'origine avec cette droite, qui en indiquera exactement alors la direction ; c'est donc une *tangente* à la courbe, en ce point. (*)

(*) En posant

$$x=ar\ , \quad y=br\ , \quad z=cr\ , \qquad (\alpha)$$

avec la condition

$$a^2+b^2+c^2=1\ , \qquad (\beta)$$

qui donne

On voit donc que, *lorsqu'une courbe à double courbure passe par l'origine, on obtient les équations de sa tangente en ce point, en égalant simplement à zéro, dans les équations de la courbe, l'ensemble des termes d'une seule dimension par rapport aux coordonnées*.

Ayant ainsi la tangente à la courbe; par l'origine, rien n'est plus facile que d'obtenir son *plan normal*, par le même point; l'équation de ce plan sera

$$(BC'-CB')x+(CA'-AC')y+(AB'-BA')z=0 . \qquad (3)$$

Tout plan qui passe par une tangente à une courbe à double courbure est dit tangent à cette courbe; et toute droite tracée sur

---

les équations

$$x^2+y^2+z^2=r^2 , \qquad (\gamma)$$

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c} , \qquad (\delta)$$

seraient celles d'une sécante quelconque, menée par l'origine, et r serait la longueur de la corde interceptée, à partir de ce point. Mettant ensuite les valeurs (α) dans les équations $(1, 1')$ et divisant par r; elles deviendraient

$$0=(Aa+Bb+Cc)+(Dbc+Eca+Fab+Ga^2+Hb^2+Kc^2)r+\ldots\ldots$$

$$0=(A'a+B'b+C'c)+(D'bc+E'ca+F'ab+G'a^2+H'b^2+K'c^2)r+\ldots\ldots$$

mais, pour que la sécante devienne tangente, il faut qu'on ait $r=0$; on a donc aussi alors

$$Aa+Bb+Cc=0 , \qquad A'a+B'b+C'c=0 ;$$

équations qui, combinées avec (δ), donnent, comme dans le texte,

$$Ax+By+Cz=0 ;$$

$$A'x+B'y+C'z=0 ;$$

son plan normal, par le point où ce plan coupe la courbe, en est dite une normale; d'où l'on voit qu'une courbe à double courbure a, en chacun de ses points, une infinité de *normales* et de *plans tangens*.

S'agit-il de mener une tangente ou un plan normal à une double courbure, par l'un quelconque (x', y', z') de ses points; on y transportera d'abord l'origine, en changeant respectivement, dans les équations de la courbe, x, y, z en $x'+x$, $y'+y$, $z'+z$; l'ensemble des termes indépendans de x, y, z dans les équations résultantes, égalé à zéro, donnera les deux équations de condition, exprimant que le point (x', y', z') est sur la courbe; et l'ensemble des termes d'une seule dimension, par rapport aux mêmes variables égalé pareillement à zéro, dans les mêmes équations, donnera les équations de la tangente à la nouvelle origine, rapportée aux nouveaux axes; on la rapportera aux axes primitifs, en changeant respectivement, dans ses équations, x, y, z en $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$.

On remarquera encore ici que, dans le développement des puissances et produits de puissances des binomes $x'+x$, $y'+y$, $z'+z$, on peut rejeter les termes de plus d'une dimension en x, y, z; et que, si l'on rejette en outre les termes indépendans de ces variables, en changeant respectivement, dans ce qui restera, x, y, z en $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$, on aura immédiatement les équations de la tangente au point (x', y', z'), rapportée aux axes primitifs, et desquelles on conclura facilement celle du plan normal, par le même point.

Appliquons ce procédé à la courbe intersection de deux ellipsoïdes de même centre dont les diamètres principaux coïncident. Soient leurs équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (4)$$

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1; \qquad (4')$$

nous écrirons d'abord

$$\frac{(x'+x)^2}{a^2}+\frac{(y'+y)^2}{b^2}+\frac{(z'+z)^2}{c^2}=1\,,$$

$$\frac{(x'+x)^2}{a'^2}+\frac{(y'+y)^2}{b'^2}+\frac{(z'+z)^2}{c'^2}=1\,;$$

puis, en développant;

$$0=\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}-1\right)+\frac{2x'x}{a^2}+\frac{2y'y}{b^2}+\frac{2z'z}{c^2}+\dots$$

$$0=\left(\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}-1\right)+\frac{2x'x}{a'^2}+\frac{2y'y}{b^2}+\frac{2z'z}{c^2}+\dots$$

Parce que le point (x', y', z') est sur la courbe, nous aurons d'abord les deux équations de condition

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1\,, \qquad (5)$$

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}=1\,; \qquad (5')$$

et les équations de la tangente, rapportée aux axes primitifs, seront

$$\frac{x'(x-x')}{a^2}+\frac{y'(y-y')}{b^2}+\frac{z'(z-z')}{c^2}=0\,,$$

$$\frac{x'(x-x')}{a'^2}+\frac{y'(y-y')}{b'^2}+\frac{z'(z-z')}{c'^2}=0\,;$$

ou simplement, en vertu des conditions $(5, 5')$

$$\frac{x'x}{a^2}+\frac{y'y}{b^2}+\frac{z'z}{c^2}=1\,. \qquad (6)$$

$$\frac{x'x}{a'^2}+\frac{y'y}{b'^2}+\frac{z'z}{c^2}=1\,. \qquad (6')$$

On en conclura (3), pour celle du plan normal par le même point

$$a^2a'^2(b^2c'^2-c^2b'^2)\frac{x-x'}{x'}+b^2b'^2(c^2a'^2-a^2c'^2)\frac{y-y'}{y'}+c^2c'^2(a^2b'^2-b^2a'^2)\frac{z-z'}{z'}=0 \quad (7)$$

On voit, par ce qui précède, que, si les équations d'une courbe passant par l'origine ressemblent seulement à celles d'une autre courbe, passant également par l'origine, dans les termes du premier ordre; quelque différence qu'elles puissent présenter d'ailleurs, ces deux courbes auront en ce point la même tangente et le même plan normal. Il n'est pas même nécessaire pour cela que les deux couples d'équations se ressemblent dans leurs premiers termes; car, soient

$$\left.\begin{aligned} 0=&ax+dyz+gx^2+\dots\\ &+by+ezx+hy^2+\dots\\ &+cz+fxy+kz^2+\dots \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

$$\left.\begin{aligned} 0=&a'x+d'yz+g'x^2+\dots\\ &+b'y+e'zx+h'y^2+\dots\\ &+c'z+f'xy+k'z^2+\dots \end{aligned}\right\} \quad (8')$$

les deux équations d'une courbe, les équations de sa tangente par l'origine seront

$$ax+by+cz=0, \qquad (9)$$

$$a'x+b'y+c'z=0; \qquad (9')$$

de sorte que cette courbe aura, en ce point, la même tangente que la courbe (1), si seulement les équations (9, 9') ont lieu en même temps que les équations (2, 2'); ce qui entraîne la double condition

$$\frac{BC'-CB'}{bc'-cb'}=\frac{CA'-AC'}{ca'-ac'}=\frac{AB'-BA'}{ab'-ba'}. \qquad (10)$$

Deux courbes qui ont une même tangente en un même point sont dites elles-mêmes *tangentes* l'une à l'autre en ce point. On voit, par ce qui précède, qu'une infinité de courbes différentes peuvent avoir la même tangente et le même plan normal au même point.

Si l'on veut mener une tangente à la courbe $(1, 1')$ par le point (x', y', z'), on écrira d'abord

$$\begin{aligned}
o&=A(x'+x)+D(y'+y)(z'+z)+G(x'+x)^2+\ldots..\\
&+B(y'+y)+E(z'+z)(x'+x)+H(y'+y)^2+\ldots..\\
&+C(z'+z)+F(x'+x)(y'+y)+K(z'+z)^2+\ldots..\\
o&=A'(x'+x)+D'(y'+y)(z'+z)+G'(x'+x)^2+\ldots.\\
&+B'(y'+y)+E'(z'+z)(x'+x)+H'(y'+y)^2+\ldots.\\
&+C'(z'+z)+F'(x'+x)(y'+y)+K'(z'+z)^2+\ldots.
\end{aligned}$$

Développant et posant les équations de condition

$$\left.\begin{aligned}
o&=Ax'+Dy'z'+Gx'^2+\ldots.\\
&+By'+Ez'x'+Hy'^2+\ldots.\\
&+Cz'+Fx'y'+Kz'^2+\ldots.
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

$$\left.\begin{aligned}
o&=A'x'+D'y'z'+G'x'^2+\ldots...\\
&+B'y'+E'z'x'+H'y'^2+\ldots...\\
&+C'z'+F'x'y'+K'z'^2+\ldots...
\end{aligned}\right\} \quad (11')$$

les équations de la tangente, rapportée aux axes primitifs, seront

$$
\begin{aligned}
0 &= (A+Ez'+Fy'+2Gx'+\ldots..)(x-x') \\
&+(B+Fx'+Dz'+2Hy'+\ldots..)(y-y') \\
&+(C+Dy'+Ex'+2Kz'+\ldots..)(z-z')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= (A'+E'z'+F'y'+2G'x'+\ldots..)(x-x') \\
&+(B'+F'x'+D'z'+2H'y'+\ldots..)(y-y') \\
&+(C'+D'y'+E'x'+2K'z'+\ldots..)(z-z')
\end{aligned}
$$

ou, plus simplement, en leur ajoutant respectivement les produits par 2 des équations (11, 11′), et réduisant

$$
\left.\begin{aligned}
0 &= A(x+x')+D(yz'+zy')+2Gxx'+\ldots.. \\
&+B(y+y')+E(zx'+xz')+2Hyy'+\ldots.. \\
&+C(z+z')+F(xy'+yx')+2Kzz'+\ldots..
\end{aligned}\right\} \quad (12)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
0 &= A'(x+x')+D'(yz'+zy')+2G'xx'+\ldots.. \\
&+B'(y+y')+E'(zx'+xz')+2H'yy'+\ldots.. \\
&+C'(z+z')+F'(xy'+yx')+2K'zz'+\ldots..
\end{aligned}\right\} \quad (12')
$$

Quant à l'équation du plan normal par le même point, elle sera (3)

$$\left.\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}
\qquad\qquad +[2(BK'-KB')-(CD'-DC')]z'+\ldots\\
(BC'-CB')+[\ (BE'-EB')-(CF'-FC')]x'+\ldots\\
\qquad\qquad -[2(CH'-HC')-(BD'-DB')]y'+\ldots
\end{array}\right\}(x-x')\\
+\left\{\begin{array}{l}
\qquad\qquad +[2(CG'-GC')-(AE'-EA')]x'+\ldots\\
(CA'-AC')+[\ (CF'-FC')-(AD'-DA')]y'+\ldots\\
\qquad\qquad -[2(AK'-KA')-(CE'-EC')]z'+\ldots
\end{array}\right\}(y-y')\\
+\left\{\begin{array}{l}
\qquad\qquad +[2(AH'-HA')-(BF'-FB')]y'+\ldots\\
(AB'-BA')+[\ (AD'-DA')-(BE'-EB')]z'+\ldots\\
\qquad\qquad -[2(BG'-GB')-(AF'-FA')]x'+\ldots
\end{array}\right\}(z-z')
\end{array}\right\}=0. \quad (13)$$

§. 3.

Des contacts dans les surfaces courbes.

En prenant pour origine des coordonnées rectangulaires l'un quelconque des points d'une surface courbe quelconque, on peut toujours, soit immédiatement soit, s'il est nécessaire, par le développement en série, amener cette surface à être donnée par l'équation

$$\left.\begin{array}{l}
0=Ax+Dyz+Gx^2+\ldots\\
\quad+By+Ezx+Hy^2+\ldots\\
\quad+Cz+Fxy+Kz^2+\ldots
\end{array}\right\} \quad (1)$$

A la vérité, lorsque le second membre de cette équation sera une série indéfinie, elle ne pourra être employée, avec sécurité, que pour des portions de la surface courbe assez voisines de l'origine pour que la petitesse de x, y et z rende la série convergente;

mais ce n'est justement que pour de telles portions de la surface courbe que nous nous proposons d'en faire usage.

Lorsqu'on ne considère donc que des points de la surface très-voisins de l'origine, on peut, sans erreur sensible, négliger, dans l'équation (1), les termes de plus d'une dimension, en x, y, z; d'où il suit que, plus la portion de surface que l'on considèrera, à partir de l'origine, sera petite, et plus aussi cette surface approchera de se confondre avec le plan ayant pour équation

$$Ax+By+Cz=0\ ; \qquad (2)$$

elle se confondra donc rigoureusement à l'origine avec ce plan, qui en indiquera alors exactement la direction; c'est donc un *plan tangent* à la surface courbe en ce point.

Soit une autre surface courbe quelconque, passant aussi par l'origine, dont l'équation soit

$$\left.\begin{array}{l} 0=ax+dyz+gx^2+\ldots.. \\ \quad +by+ezx+hy^2+\ldots.. \\ \quad +cz+fxy+kz^2+\ldots.. \end{array}\right\} \quad (1')$$

Cette surface coupera la première suivant une courbe plane ou à double courbure, dont la tangente à l'origine sera (§. 2) donnée par le système de l'équation (2) et de l'équation

$$ax+by+cz=0\ . \qquad (2)$$

Or, que la surface (1') varie comme on voudra, en passant toujours par l'origine, la section qu'elle détermine sur la surface (1) variera également; mais, des deux équations (2, 2'), il n'y aura au plus que la dernière qui variera; d'où l'on doit conclure que si, par l'un quelconque des points d'une surface courbe, on trace, à volonté, tant de courbes qu'on voudra, sur cette surface, les tangentes à toutes ces courbes en ce point seront toutes situées sur le plan tangent à la surface courbe en ce même point.

De là on peut conclure encore que si, par un même point d'une surface courbe, on trace sur cette surface deux courbes quelconques, et qu'on leur mène ensuite des tangentes en ce point, le plan qu'on fera passer par ces deux tangentes sera le plan tangent à la surface courbe en ce même point.

On voit, par ce qui précède, que, *lorsqu'une surface courbe passe par l'origine, on obtient l'équation de son plan tangent, en égalant simplement à zéro, dans son équation, l'ensemble des termes d'une seule dimension, par rapport aux coordonnées.*

Ayant ainsi le plan tangent à la surface courbe par l'origine, rien n'est plus facile que d'obtenir sa *normale* par le même point; les équations de cette droite sont

$$\frac{x}{A}=\frac{y}{B}=\frac{z}{C}\,. \qquad (3)$$

Toute droite menée sur le plan tangent à une surface courbe, par son point de contact avec elle, est dite tangente à cette surface en ce point; et tout plan passant par sa normale en est dit un plan normal, pour le même point; d'où l'on voit qu'une surface courbe a, en chacun de ses points, une infinité de *tangentes* et de *plans normaux.*

S'agit-il de mener un plan tangent ou une normale à une surface courbe, par l'un quelconque (x', y', z') de ses points; on y transportera d'abord l'origine, en changeant respectivement, dans son équation x, y, z en $x'+x$, $y'+y$, $z'+z$; l'ensemble des termes indépendans de x, y, z, dans l'équation résultante, égalé à zéro, donnera l'équation de condition, exprimant que le point (x', y', z') est sur la surface courbe; et l'ensemble des termes d'une seule dimension, par rapport aux mêmes variables, égalé pareillement à zéro, dans la même équation, sera l'équation du plan tangent à la nouvelle origine, rapporté aux nouveaux axes ; on le rapportera aux axes primitifs, en changeant respectivement, dans son équation, x, y, z en $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$.

On voit, au surplus, que, dans le développement des puissances et produits de puissances des binomes $x'+x$, $y'+y$, $z'+z$, on peut rejeter les termes de plus d'une dimension en x, y, z ; si l'on rejette, en outre, les termes indépendans de ces variables ; en changeant respectivement, dans ce qui restera, x, y, z en $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$, on aura immédiatement l'équation du plan tangent au point (x', y', z'), rapporté aux axes primitifs, et de laquelle on conclura facilement celles de la normale au même point.

Appliquons ce procédé à l'ellipsoïde ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (4)$$

Nous écrirons d'abord

$$\frac{(x'+x)^2}{a^2}+\frac{(y'+y)}{b^2}+\frac{(z'+z)}{c^2}=1;$$

puis, en développant,

$$0=\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}-1\right)+\frac{2x'x}{a^2}+\frac{2y'y}{b^2}+\frac{2z'z}{c^2}+\ldots.$$

Parce que le point (x', y', z') est sur la surface courbe, nous aurons d'abord l'équation de condition

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1; \qquad (5)$$

et l'équation du plan tangent, rapporté aux axes primitifs, sera

$$\frac{x'(x-x')}{a^2}+\frac{y'(y-y')}{b^2}+\frac{z'(z-z')}{c^2}=0\,;$$

ou simplement, en vertu de la condition (4),

$$\frac{x'x}{a^2}+\frac{y'y}{b^2}+\frac{z'z}{c^2}=1\,. \qquad (6)$$

on en conclura (3), pour les équations de la normale, par le même point

$$a^2\frac{x-x'}{x'}=b^2\frac{y-y'}{y'}=c^2\frac{z-z'}{z'}\,. \qquad (7)$$

On voit, par ce qui précède, que, si les équations de deux surfaces, passant l'une et l'autre par l'origine, se ressemblent seulement par les termes du premier ordre, quelque différence qu'elles puissent présenter d'ailleurs, ces deux surfaces auront en ce point le même plan tangent et la même normale. Il n'est pas même nécessaire pour cela que les deux équations se ressemblent exactement dans leurs premiers termes; car, soient (1, 1') les équations dont il s'agit; (2, 2') seront respectivement les équations des plans tangens aux deux surfaces; et pour que ses plans se confondent, il suffira qu'on ait

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}\,. \qquad (8)$$

Deux surfaces courbes qui ont un même plan tangent en un même point sont dites elles-mêmes *tangentes* l'une à l'autre en ce point; et il en est de même pour les courbes résultant de leur section par un même plan quelconque conduit par ce point. On voit donc qu'une infinité de surfaces différentes peuvent avoir le même plan tangent et la même normale au même point.

Si l'on veut mener un plan tangent à la surface (1), par le point (x', y', z'), on écrira d'abord

$$\begin{aligned}
0=&A(x'+x)+D(y'+y)(z'+z)+G(x'+x)^2+\ldots\ldots\\
&+B(y'+y)+E(z'+z)(x'+x)+H(y'+y)^2+\ldots\ldots\\
&+C(z'+z)+F(x'+x)(y'+y)+K(z'+z)^2+\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Développant et posant l'équation de condition

$$\left.\begin{aligned}
0=&Ax'+Dy'z'+Gx'^2+\ldots\ldots\\
&+By'+Ez'x'+Hy'^2+\ldots\ldots\\
&+Cz'+Fx'y'+Kz'^2+\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

L'équation du plan tangent, rapporté aux axes primitifs, sera

$$\begin{aligned}
0=&(A+Ez'+Fy'+2Gx'+\ldots\ldots)(x-x')\\
&+(B+Fx'+Dz'+2Hy'+\ldots\ldots)(y-y')\\
&+(C+Dy'+Ex'+2Kz'+\ldots\ldots)(z-z')
\end{aligned}$$

ou, plus simplement, en lui ajoutant le double de l'équation (9) et réduisant

$$\left.\begin{aligned}
0=&A(x+x')+D(yz'+zy')+2Gxx'+\ldots\ldots\\
&+B(y+y')+E(zx'+xz')+2Hyy'+\ldots\ldots\\
&+C(z+z')+F(xy'+yx')+2Kzz'+\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

Quant aux équations de la normale, par le même point, elles seront (3)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{x-x'}{A+Ez'+Fy'+2Gx'+\ldots\ldots}\\
=&\frac{y-y'}{B+Fx'+Dz'+2Hy'+\ldots\ldots}\\
=&\frac{z-z'}{C+Dy'+Ex'+2Kz'+\ldots\ldots}
\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

SECTION II.

SECTION II.

Des contacts du second ordre.

Dans la précédente section, nous n'avons présenté aucun résultat qu'on ne sache aujourd'hui obtenir sans rien emprunter au calcul différentiel; et nous n'avons fait simplement qu'offrir, pour parvenir à ces résultats, des méthodes qui nous paraissent, à la fois, plus simples et plus naturelles que celles qu'on a coutume d'appliquer à leur recherche. Il n'en sera pas de même, dans la présente section, où il sera question des centres et rayons de courbure, cercles et plans osculateurs, développées et lignes de courbure; et il n'est pas à notre connaissance que ces divers objets aient été traités jusqu'ici, d'une manière simple, par les procédés de l'analise ordinaire.

Nous suivrons d'ailleurs ici la même marche que dans la section précédente; c'est-à-dire, que nous traiterons successivement de l'osculation dans les courbes planes, dans les courbes à double courbure et dans les surfaces courbes.

§. I.

De l'osculation dans les courbes planes.

Si l'on conçoit qu'une droite indéfinie se meuve sur le plan d'une courbe plane donnée quelconque, de manière à lui être constamment normale; la courbe enveloppe de l'espace parcouru par cette droite, c'est-à-dire, la courbe à laquelle, dans son mouvement, elle ne cessera pas d'être tangente, est ce qu'on appelle la *développée* de cette courbe donnée, laquelle, à l'inverse, en est appelée la *développante*. On les a ainsi nommées parce que, si l'on conçoit qu'un fil soit d'abord appliqué le long de la développée, et qu'on le développe ensuite en le tenant toujours tendu, l'un de ses points parcourra évidemment la développante. Quant à ses autres points, ils parcourront aussi des courbes qui auront la même développée que la courbe donnée ; d'où l'on voit qu'à une même courbe donnée doivent toujours répondre une développée unique et une infinité de développantes.

En considérant sous ce point de vue la génération des courbes planes, on voit qu'en chaque point d'une courbe, le point décrivant se trouve dans le même cas que s'il allait décrire un cercle ayant pour centre le point de contact de la développée avec la normale au point dont il s'agit, et pour rayon la distance entre ces deux points. Ce cercle est ce qu'on appelle le *cercle osculateur* de la courbe en ce point : son centre et son rayon sont dits le *centre* et le *rayon de courbure* de cette courbe pour le même point; parce qu'en effet la courbe a en ce point une courbure égale à celle de son cercle osculateur.

On est donc ainsi conduit à considérer toute courbe plane comme formée d'une infinité d'arcs de cercles infiniment petits se touchant consécutivement, et variant sans cesse de rayon ; auquel cas la développée est le lieu des centres de ces arcs. Cela revient encore à considérer la courbe proposée comme l'enveloppe de l'espace parcouru par un cercle mobile, de rayon variable, dont le centre parcourt sa développée et dont le rayon croît ou décroît constamment d'une quantité égale à la longueur parcourue sur cette dernière courbe par son centre.

Lorsqu'un cercle est simplement tangent à une courbe en l'un de ses points; c'est-à-dire, lorsque le cercle et la courbe ont en ce point une même tangente, ce qui exige que ce cercle ait son centre sur la normale; si d'ailleurs ils sont situés du même côté de cette tangente commune, ou, en d'autres termes, s'ils ont leurs courbures tournées dans le même sens ; le cercle passera entre la courbe et sa tangente, ou bien ce sera au contraire la courbe qui passera entre lui et cette tangente, suivant que la courbure de cette courbe, en ce point, sera plus grande ou plus petite que celle du cercle, c'est-à-dire, suivant que le rayon de courbure de la courbe en ce point sera moindre ou plus grand que celui du cercle ; mais , lorsqu'il s'agit du cercle osculateur , la courbure variable de la courbe se trouvant , au point de contact , exactement égale à la sienne , cette courbure devra lui être supérieure d'un côté de ce point et inférieure de l'autre ; ainsi , tandis que , d'un côté du point de contact , le cercle passera entre la courbe et sa tangente , de l'autre côté de ce point , ce sera la courbe , au contraire , qui passera entre cette tangente et lui ; c'est-à-dire, que le cercle osculateur de l'un des points d'une courbe coupe et touche à la fois cette courbe en ce point (*) ; il est évident , en outre , qu'il est le seul , entre les cercles tangens , qui puisse être dans ce cas.

Soient menées à une courbe quelconque deux normales , l'une fixe et l'autre mobile ; elles toucheront sa développée en deux points distincts et se couperont elles-mêmes en un troisième point. Mais , à mesure que la normale mobile se rapprochera de la normale fixe , deux de ces points tendront sans cesse à se confondre avec le troisième, et ils se confondront, en effet, en un seul qui sera le centre de courbure répondant à la normale fixe , lorsqu'enfin la normale mobile se confondra tout-à-fait avec elle. Le calcul , appliqué à ces considérations, va nous conduire simplement à la déterminatiou du centre de courbure d'une courbe quelconque en l'un quelconque de ses points , d'où il nous sera facile de conclure le rayon de courbure et le cercle osculateur.

Reprenons l'équation

$$\left.\begin{array}{l} 0=Ax+Fxy+Gx^2+\dots \\ \quad+By \qquad\;\; +Hy^2+\dots \end{array}\right\} \quad (1)$$

(*) Il faut en excepter les points de la courbe où sa courbure est *maximum* ou *minimum ;* mais ceci rentre dans la théorie des points singuliers , que nous avons précédemment écartée.

exprimant une courbe plane quelconque, passant par l'origine des coordonnées. Nous avons vu (SECT. I, §. 1.) que les normales à cette courbe par l'origine et par le point quelconque (x', y'), avaient respectivement pour équations

$$\frac{x}{A}=\frac{y}{B}, \qquad (3)$$

$$\frac{x-x'}{A+Fy'+2Gx'+\ldots.}=\frac{y-y'}{B+Fx'+2Hy'+\ldots.}; \qquad (13)$$

sous la condition

$$\left.\begin{array}{l} o=Ax'+Fx'y'+Gx'^2+\ldots.. \\ +By' \qquad\qquad +Hy'^2+\ldots.. \end{array}\right\} \quad (12)$$

On aura donc l'intersection des deux normales en considérant comme équations d'un même problème déterminé en x, y, soit le système de deux équations (3, 13) soit tout système de deux équations déduites d'une manière quelconque de la combinaison de ces deux-là. En y chassant les dénominateurs elles deviennent respectivement

$$Ay-Bx=o, \qquad (14)$$

$$(A+Fy'+2Gx'+\ldots..)y-(B+Fx'+2Hy'+\ldots..)x$$
$$=(A+Fy'+2Gx'+\ldots..)y'-(B+Fx'+2Hy'+\ldots..)x';$$

dont la dernière, en vertu de l'autre, se réduit à

$$\left.\begin{array}{l} (Fy'+2Gx'+\ldots..)y-(Fx'+2Hy'+\ldots..)x \\ =(A+Fy'+2Gx'+\ldots..)y'-(B+Fx'+2Hy'+\ldots..)x'; \end{array}\right\} \quad (15)$$

on pourra donc, dans la recherche de l'intersection des deux normales, substituer au système des équations (3, 13) le système des équations (14, 15), lesquelles, pour ce point, ont lieu en même temps qu'elles.

Mais, à mesure que le point (x', y') se rapprochera de l'origine, la dernière tendra sans cesse à se réduire à

$$(Fy'+2Gx')y-(Fx'+2Hy')x=Ay'-Bx' ,$$

ou

$$(A-Fy+2Hx)y'=(B-Fx+2G)x' ;$$

d'un autre côté, dans les mêmes circonstances, l'équation de condition (12) tendra de plus en plus à devenir simplement

$$Ax'+By'=0 ;$$

au moyen de laquelle on pourra éliminer à la fois x', y' de l'autre qui se réduira ainsi à

$$A(A-Fy+2Hx)+B(B-Fx+2Gy)=0 ,$$

ou bien

$$(2AH-BF)x+(2BG-AF)y+(A^2+B^2)=0 . \qquad (16)$$

Ainsi, lorsque les deux normales seront fort voisines, leur point d'intersection sera sensiblement donné par le système des deux équations (14, 16); il le sera donc rigoureusement, lorsque ces deux normales se confondront, puisqu'alors x', y' seront rigoureusement nuls; il est donc vrai de dire que le centre de courbure à l'origine est donné par le système des deux équations (14, 16). On en tire, pour les coordonnées de ce centre

$$x=-\frac{A(A^2+B^2)}{2(GB^2-FAB+HA^2)} , \quad y=-\frac{B(A^2+B^2)}{2(GB^2-FAB+HA^2)} . \qquad (17)$$

Ce sont donc là aussi les équations du point de contact de la développée avec la normale à l'origine.

Si l'on représente par R le rayon de courbure de la courbe (1), pour le même point, on aura

$$R=\sqrt{x^2+y^2}\ ;$$

c'est-à-dire, en substituant

$$R=\frac{(A^2+B^2)^{\frac{3}{2}}}{2(GB^2-FAB+HA^2)} \qquad (18)$$

En conséquence, le cercle osculateur aura pour équation

$$x^2+y^2+\frac{(A^2+B^2)(Ax+By)}{GB^2-FAB+HA^2}=0\ . \quad (*) \qquad (19)$$

(*) Si l'on mène une sécante à une courbe plane par deux de ses points et si l'on conçoit que l'un de ses points se rapproche sans cesse de l'autre, en suivant le cours de la courbe, et en entraînant avec lui la sécante qui tournera ainsi autour de ce dernier; lorsqu'enfin ces deux points se confondront, la sécante deviendra tangente.

Pareillement, par trois points quelconques pris sur une courbe, soit fait passer un cercle; et concevons que le second de ces points vienne joindre le premier, en suivant le cours de la courbe, et entraînant avec lui le cercle qui conséquemment variera à la fois de situation et de grandeur; lorsque ces deux points se confondront, le cercle sera simplemnte tangent à la courbe. Si ensuite le troisième point vient joindre les deux autres, sous les mêmes conditions, lorsqu'il les aura atteints, le cercle tangent sera osculateur.

Voilà pourquoi on considère la tangente et le cercle tangent comme ayant avec la courbe deux points communs qui se confondent en un seul; et voilà aussi pourquoi on considère le cercle osculateur comme ayant avec la courbe trois points communs qui se confondent également en un seul.

Cela revient évidemment à considérer la courbe comme un polygone d'une infinité de côtés; sa tangente comme le prolongement de l'un de ses côtés; ses cercles tangens comme des cercles qui ont ce côté pour corde commune; et enfin son cercle osculateur comme un cercle qui passe par trois de ses sommets consécutifs.

Veut-on présentement avoir le centre et le rayon de courbure d'une courbe quelconque, en l'un quelconque (x', y') de ses points; on y transportera d'abord l'origine, en changeant respectivement, dans l'équation de cette courbe x, y en $x'+x$, $y'+y$; on fera ensuite le développement des puissances et produits de puissances de ces deux binomes, dans lequel on pourra négliger d'ailleurs les termes de plus de deux dimensions en x, y. Égalant ensuite à zéro l'ensemble des termes indépendans de ces deux variables, on aura l'équation de condition qui exprime que le point (x', y') est sur la courbe; le surplus de l'équation transformée se trouvant alors de même forme que l'équation (1), on égalera séparément, dans l'une et dans l'autre, les coefficiens des termes correspondans; ce qui donnera les valeurs de A, B, F, G, H, en fonction de x', y' et des constantes renfermées dans l'équation de la courbe dont il s'agit. Ces valeurs étant enfin substituées dans les formules (17, 18), le centre et le rayon de courbure de la courbe pour le point (x', y') se trouveront déterminés. Mais, comme le centre de courbure se trouvera rapporté aux nouveaux axes, il faudra, pour le rapporter aux axes primitifs, changer respectivement, dans ses équations, x, y en $x-x'$, $y-y'$.

Appliquons ce procédé à l'ellipse déjà considérée précédemment, et ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (4)$$

Nous aurons d'abord

$$\frac{(x'+x)^2}{a^2}+\frac{(y'+y)^2}{b^2}=1;$$

développant et posant, comme alors, la condition

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1; \qquad (5)$$

il viendra

$$0=\frac{2x'}{a^2}x+\frac{1}{a^2}x^2$$

$$+\frac{2y'}{b^2}y+\frac{1}{b^2}y^2$$

Comparant cette dernière équation, terme à terme, avec l'équation (1), nous aurons

$$A=\frac{2x'}{a^2}\ ,\quad F=0\ ,\quad G=\frac{1}{a^2}\ ,$$

$$B=\frac{2y'}{b^2}\ ,\qquad\qquad H=\frac{1}{b^2}\ ;$$

d'où

$$A^2+B^2=4\left(\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}\right),$$

$$GB^2-FAB+HA^2=\frac{4}{a^2b^2}\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}\right);$$

ou simplement, en vertu de la relation (5)

$$GB^2-FAB+HA^2=\frac{4}{a^2b^2}\ ;$$

substituant enfin ces valeurs dans les formules (17, 18) nous aurons, d'abord pour le rayon de courbure,

$$R=a^2b^2\left(\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}, \qquad (20)$$

et ensuite pour les équations du centre de courbure, rapporté aux axes primitifs,

$x-x'$

$$x-x'=-b^2x'\left(\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}\right), \quad y-y'=-a^2y'\left(\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}\right).$$

de ces dernières, on tire, en transposant,

$$x=x'\left\{1-b^2\left(\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}\right)\right\}, \quad y=y'\left\{1-a^2\left(\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}\right)\right\};$$

mettant pour 1, dans l'une et dans l'autre, sa valeur donnée par la relation (5), elles deviendront, en réduisant,

$$x=\frac{a^2-b^2}{a}\cdot\frac{x'^3}{a^3}, \quad y=\frac{b^2-a^2}{b}\cdot\frac{y'^3}{b^3}; \tag{22}$$

et telles sont les équations du centre de courbure, pour le point (x', y') de la courbe (4), réduites à leur forme la plus simple.

Ayant ainsi obtenu les équations du centre de courbure d'une courbe, pour l'un quelconque (x', y') de ses points, rien n'est plus aisé que d'obtenir l'équation de la développée de cette courbe; il ne s'agit en effet pour cela que d'éliminer x', y' entre les équations de ce centre et l'équation de condition qui exprime que le point (x', y') est sur la courbe.

Ainsi, dans l'exemple qui vient de nous occuper, on tire des équations (22)

$$\frac{x'}{a}=\left(\frac{ax}{a^2-b^2}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \frac{y'}{b}=\left(\frac{by}{b^2-a^2}\right)^{\frac{1}{3}};$$

valeurs qui, substituées dans l'équation (5), donne pour l'équation de la développée de la courbe (4),

$$\left(\frac{ax}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{by}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1. \tag{23}$$

Si l'on prend pour axe des x la tangente même à la courbe par l'origine; auquel cas l'axe des y en sera la normale, l'équation

$$Ax+By=0 \qquad (2)$$

de cette tangente devant alors se réduire à $y=0$, on devra avoir $A=0$; ainsi, si l'équation d'une courbe passant par l'origine est de la forme

$$\left.\begin{array}{r} 0=By+Fxy+Gx^2+\ldots. \\ +Hy^2+\ldots.. \end{array}\right\} \quad (24)$$

l'axe des x sera une tangente à la courbe, le centre de courbure répondant à l'origine sera sur l'axe des y, et le rayon de courbure répondant au même point aura (18) pour expression

$$R=\frac{B}{2G}\,. \qquad (25)$$

Si l'on veut savoir comment la courbe est coupée par une parallèle à la tangente très-voisine de cette droite, il faudra supposer y sensiblement nul dans l'équation (24), ce qui, en ne faisant attention qu'aux deux plus petites valeurs de x, réduira sensiblement cette équation à

$$Gx^2=0\ ;$$

ce qui revient à dire qu'une corde infiniment petite, parallèle à la tangente, a son milieu sur la normale (*).

Les principaux points de la théorie que nous venons de développer sont un des résultats les plus importans des travaux géométriques de Huygens.

(*) On aurait pu parvenir immédiatement et d'une manière très-simple à la formule (25), en supposant dès l'abord l'axe des x tangent à la courbe, ou $A=0$.

§. 2.

De l'osculation dans les courbes à double courbure.

Concevons que, par la tangente en l'un des points d'une courbe à double courbure, et par un autre quelconque des points de cette courbe l'on conduise un plan, lequel sera tangent à la courbe au premier de ces deux points; concevons que le dernier de ces deux points se rapproche peu à peu du premier, en suivant le cours de la courbe, et en entraînant avec lui le plan tangent, qui tournera ainsi sur la tangente. Lorsqu'enfin le dernier point aura atteint le premier, le plan tangent se trouvera avoir acquis une position déterminée très-remarquable, et dépendant uniquement de la courbure de la courbe au point de contact. C'est dans cette position qu'il est dit le *plan osculateur* de la courbe en ce point.

On voit par la génération du plan osculateur que, plus un arc de la courbe, pris à partir du point de contact, sera petit et plus aussi cet arc approchera de se confondre avec ce plan, et conséquemment d'être un arc de courbe plane tracé sur le plan osculateur; cet arc se confondra donc tout-à-fait avec ce plan, lorsque sa longueur sera nulle.

On est donc conduit par-là à considérer toute courbe à double courbure comme formée d'une infinité d'arcs de courbes planes, consécutivement tangens les uns aux autres, et situés dans des plans variant sans cesse de position. Les plans de ces arcs sont les plans osculateurs de la courbe en ses différens points. Il est évident, d'après cela, qu'une courbe plane n'a, pour tous ses points, qu'un seul et même plan osculateur, qui est le plan même de cette courbe.

Appliquons le calcul à la recherche du plan osculateur, suivant le mode de génération que nous lui avons assigné. Reprenons les deux équations générales

$$\left.\begin{aligned} 0&=Ax+Dyz+Gx^2+\ldots\\ &+By+Ezx+Hy^2+\ldots\\ &+Cz+Fxy+Kz^2+\ldots \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} 0&=A'x+D'yz+G'y^2+\ldots\\ &+B'y+E'zx+H'x^2+\ldots\\ &+C'z+F'xy+K'z^2+\ldots \end{aligned}\right\} \quad (1')$$

d'une courbe à double courbure passant par l'origine des coordonnées; et dont nous avons trouvé la tangente au même point donnée par les deux équations

$$Ax+By+Cz=0\,, \qquad (2)$$

$$A'x+B'y+C'z=0\,; \qquad (2')$$

Par cette tangente et par un point quelconque (x', y', z') pris sur la courbe, soit fait passer un plan; l'équation de ce plan sera évidemment

$$(A'x'+B'y'+C'z')(Ax+By+Cz)=(Ax'+By'+Cz')(A'x+B'y+C'z). \quad (22)$$

En effet, il est d'abord évident que cette équation est celle d'un plan; il n'est pas moins évident que ce plan contient la tangente à l'origine, puisque le système des équations $(2, 2')$ satisfait à l'équation (22); enfin, cette équation (22) est encore satisfaite par les valeurs x', y', z' de x, y, z; ce qui prouve que le plan qu'elle exprime contient le point (x', y', z').

Or, comme ce point est sur la courbe $(1, 1')$, on doit avoir, comme nous l'avons déjà observé, dans la précédente section, les deux équations de condition

$$\left.\begin{array}{l} 0=Ax'+Dy'z'+Gx'^2+\ldots. \\ +By'+Ez'x'+Hy'^2+\ldots. \\ +Cz'+Fx'y'+Kz'^2+\ldots. \end{array}\right\} \quad (11)$$

$$\left.\begin{array}{l} 0=A'x'+D'y'z'+G'x'^2+\ldots\ldots \\ +B'y'+E'z'x'+H'y'^2+\ldots\ldots \\ +C'z'+F'x'y'+K'z'^2+\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (11')$$

au moyen desquelles l'équation (22) pourra être changée en celle-ci

$$\left.\begin{array}{l} (D'y'z'+E'z'x'+F'x'y'+G'x'^2+H'y'^2+K'z'^2+\ldots..)(Ax+By+Cz) \\ =(Dy'z'+Ez'x'+Fx'y'+Gx'^2+Hy'^2+Kz'^2+\ldots..)(A'x+B'y+C'z)\ . \end{array}\right\} \quad (23)$$

Mais, à mesure que le point (x', y', z') se rapprochera de l'origine, cette équation tendra sans cesse à se réduire à

$$\left.\begin{array}{l} (D'y'z'+E'z'x'+F'x'y'+G'x'^2+H'y'^2+K'z'^2)(Ax+By+Cz) \\ =(Dy'z'+Ez'x'+Fx'y'+Gx'^2+Hy'^2+Kz'^2)(A'x+B'y+C'z)\ ; \end{array}\right\} \quad (24)$$

d'un autre côte, dans les mêmes circonstances, les conditions (11, 11') approcheront de plus en plus de pouvoir être remplacées par les suivantes

$$Ax'+By'+Cz'=0\ , \qquad (25)$$

$$A'x'+B'y'+C'z'=0\ ; \qquad (25')$$

tirant donc de ces dernières les valeurs de x', y', pour les substituer dans l'autre, qui deviendra ainsi divisible par z'^2, et posant, pour abreger,

$$BC'-CB'=a\ ,\ CA'-AC'=b\ ,\ AB'-BA'=c\ , \qquad (26)$$

$$Dbc+Eca+Fab+Ga^2+Hb^2+Kc^2=L\ , \qquad (27)$$

$$D'bc+E'ca+F'ab+G'a^2+H'b^2+K'c^2=L'\ ; \qquad (27')$$

ce qui donnera

$$Aa+Bb+Cc=0\ ; \qquad (28)$$

$$Aa'+Bb'+Cc'=0\ , \qquad (28')$$

on aura enfin, pour l'équation du plan osculateur de la courbe (1, 1'), à l'origine des coordonnées

$$L'(Ax+By+Cz)=L(A'x+B'y+C'z)\ ,$$

ou encore

$$(AL'-LA')x+(BL'-LB')y+(CL'-LC')z=0\ . \qquad (29)$$

On peut donc, à l'origine, considérer la courbe (1, 1') comme une courbe plane située dans ce plan; sa normale, pour le même point, sera donc l'intersection du même plan avec le plan normal (3) dont l'équation, au moyen des abréviations (26), devient

$$ax+by+cz=0\ ; \qquad (30)$$

éliminant donc successivement x, y, z entre les équations (29, 30), on pourra prendre pour équations de cette normale

$$\frac{x}{b(CL'-LC')-c(BL'-LB')}=\frac{y}{c(AL'-LA')-a(CL'-LC')}$$

$$=\frac{z}{a(BL'-LB')-b(AL'-LA')}\ . \qquad (31)$$

S'agit-il présentement d'obtenir le plan osculateur de l'un quelconque (x', y', z') des points d'une courbe à double courbure quelconque, on transportera d'abord l'origine en ce point, en changeant respectivement dans les deux équations de la courbe, x, y, z en $x'+x$, $y'+y$, $z'+z$. On développera les puissances et produits de puissances de ces binomes, négligeant, dans le développement, les termes de plus de deux dimensions en x, y, z. Egalant ensuite à zéro, dans chaque équation l'ensemble des termes indépendans de ces variables, on obtiendra ainsi les deux équations de condition qui exprimeront que le point (x', y', z') est sur la courbe. Les équations transformées se trouveront ainsi réduites à la forme des équations (1, 1'). Egalant donc respectivement les coefficiens des unes à ceux des autres, on obtiendra ainsi les valeurs de

$$A\,,\quad B\,,\quad C\,,\quad D\,,\quad E\,,\quad F\,,\quad G\,,\quad H\,,\quad K\,,$$

$$A'\,,\quad B'\,,\quad C'\,,\quad D'\,,\quad E'\,,\quad F'\,,\quad G'\,,\quad H'\,,\quad K'\,,$$

en fonction de x', y', z' et des constantes des équations de la courbe; on en conclura ensuite les valeurs de a, b, c, L, L'; et substituant le tout dans l'équation (29), elle deviendra celle du plan osculateur demandé, rapporté à la nouvelle origine; de sorte que, pour le rapporter à l'origine primitive, il faudra changer respectivement x, y, z en $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$.

Appliquons ce procédé à la courbe donnée par les deux équations

$$4x^2+4z^2-4rz-3r^2=0\,, \qquad (32)$$

$$4y^2+4z^2+4rz-3r^2=0\,. \qquad (32')$$

C'est la courbe suivant laquelle se coupent les surfaces de deux cylindres droits égaux, d'un rayon égal à r, et qui se pénètrent de telle sorte que leurs axes sont à angles droits, et que l'axe de chacun est tangent à l'autre. Nous aurons d'abord

$$4(x'+x)^2+4(z'+z)^2-4r(z'+z)-3r^2=0\ ;$$

$$4(y'+y)^2+4(z'+z)^2+4r(z'+z)-3r^2=0\ ;$$

développant et posant les deux conditions

$$4x'^2+(2z'-r)^2-4r^2=0\ , \tag{33}$$

$$4y'^2+(2z'+r)^2-4r^2=0\ ; \tag{33'}$$

les équations transformées seront

$$\begin{array}{ll} 0=2x'x+x^2 & 0=2y'y+y^2 \\ +(2z'-r)z+z^2 & +(2z'+r)z+z^2 \end{array}$$

qui, comparés respectivement aux équations (1, 1'), donneront

$A=2x'$, $B=0$, $C=2z'-r$, $D=0$, $E=0$, $F=0$, $G=0$, $H=1$, $K=1$,

$A'=0$, $B'=2y'$, $C'=2z'+r$, $D'=0$, $E'=0$, $F'=0$, $G'=1$, $H'=0$, $K'=1$;

de là on conclura

$$a=-2y'(2z'-r)\ ;\quad b=-2x'(2z'+r)\ ,\quad c=4x'y'\ ;$$

et, par suite, en ayant égard aux relations (33, 33'),

$$L=4y'^2[4x'^2+(2z'-r)^2]=16r^2y'^2\ ,$$

$$L'=4x'^2[4y'^2+(2z'+r)^2]=16r^2x'^2\ ;$$

d'où encore

$$AL'-LA'=+32r^2x'^3\ ,\qquad BL'-LB'=-32r^2y'^3\ ,$$

$$CL'-LC'=16r^2[2z'(x'^2-y'^2)-r(x'^2+y'^2)]=24r^3(4z'^2-r^2)\ ;$$

en

en conséquence, l'équation du plan osculateur au point (x', y', z') rapporté à l'origine primitive sera (29)

$$4x'^3(x-x')-4y'^3(y-y')+8r(4z'^2-r^2)(z-z')=0. \quad (34)$$

Si la courbe était plane, le plan osculateur devrait toujours être le même, quel que pût être le point (x', y', z'), dont conséquemment les coordonnées ne devraient point paraître dans l'équation de ce plan; il faudrait donc qu'elles pussent en être chassées, au moyen des seules conditions qui expriment que le point (x', y', z') est sur la courbe ou, ce qui revient au même, il faudrait qu'en y substituant pour x', y' leurs valeurs en z', tirées de ces mêmes équations, les termes en z' disparussent d'eux-mêmes par l'égalité de leurs coefficiens à zéro. Ce serait donc aussi par un pareil calcul que l'on parviendrait à assigner les relations qui doivent exister entre les coefficiens des équations de deux surfaces, pour qu'elles se coupassent suivant des courbes planes.

Si l'on conçoit qu'une droite indéfinie se meuve dans l'espace de manière à demeurer constamment tangente à une même courbe à double courbure, cette droite décrira une surface développable dont la courbe donnée sera l'arête de rebroussement; cette surface serait aussi évidemment l'enveloppe de l'espace que parcourrait un plan indéfini, constamment osculateur de la courbe; c'est-à-dire, que ce plan, dans toutes ses positions, ne cesserait pas de lui être tangent; cette même surface, *lieu des tangentes*, peut aussi être dite le lieu *des développantes*, attendu que les développantes de la courbe, qui sont comme elle à double courbure, s'y trouvent toutes situées.

Lorsque la courbe donnée est plane, il est évident que les deux nappes de la surface développable doivent se confondre en un seul plan qui sera le plan même de la courbe, ou du moins celui de l'une de ses parties, si elle en a plusieurs; l'équation de cette surface devra donc être décomposable en facteurs du premier degré, ou du moins admettre un ou plusieurs facteurs de ce degré, ce qui offre un nouveau moyen de reconnaître si une courbe est plane, du moins lorsqu'on a l'équation de la surface développable dont elle est l'arête de rebroussement.

Or, lorsqu'on a les équations d'une tangente en un point quelconque (x', y', z') d'une courbe, rien n'est plus aisé que d'obtenir l'équation de cette surface ; il ne s'agit en effet, pour cela, que d'éliminer x', y', z' entre ces deux équations et les équations de condition qui expriment que le point (x', y', z') est sur la courbe.

Ainsi, par exemple, les deux équations de la tangente à la courbe (32, 32′) au point (x', y', z') étant

$$4xx'+(2z-r)(2z'-r)-4r^2=0\ ,$$

$$4yy'+(2z+r)(2z'+r)-4r^2=0\ ;$$

si l'on en tire les valeurs de x', y', pour les substituer dans les équations (33, 33′) lesquelles deviendront ainsi

$$\{(2z-r)(2z'-r)-4r^2\}^2+4x^2(2z'-r)^2-16r^2x^2=0\ ,$$

$$\{(2z+r)(2z'+r)-4r^2\}^2+4y^2(2z'+r)^2-16r^2y^2=0\ ;$$

l'élimination de z' entre ces deux dernières conduira à l'équation de la surface développable dont la courbe (32, 32′) est l'arête de rebroussement.

Puisqu'au point de contact une courbe quelconque est sensiblement une courbe plane, tracée sur son plan osculateur, elle doit avoir, en ce point, un centre de courbure et un cercle osculateur situés sur ce plan et qu'on peut désirer de connaître : cherchons-le d'abord pour la courbe (1, 1′), à l'origine des coordonnées. Pour cela, concevons qu'un plan indéfini se meuve dans l'espace, de manière à demeurer constamment normal à une même courbe à double courbure ; l'enveloppe de l'espace qu'il parcourra ou, ce qui revient au même, la surface développable à laquelle il sera constamment tangent pourra être nommée le *lieu des axes de courbure* de la courbe proposée, parce qu'en effèt ses élémens rectilignes seront les axes des arcs de cercles infiniment petits dont cette courbe pourra être conçue comme formée. Chacun de ces élémens rectilignes, lequel sera, en même temps, la ligne de contact de la surface développable avec le plan normal, coupera donc le plan osculateur au centre de courbure cherché.

Imitons cette génération par le calcul, et cherchons, pour la courbe (1, 1') quel est l'axe de courbure qui répond à l'origine; le plan normal en ce point, au moyen des abréviations (26), a pour son équation, comme nous l'avons déjà observé,

$$ax+by+cz=0\,. \qquad (30)$$

Au moyen de ces mêmes abréviations, l'équation (13) du plan normal, en un autre point quelconque (x', y', z'), devient (SECT. I, §. 2), sous les conditions (11, 11'),

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{l}
-[(CD'-DC')-2(BK'-KB')]z'+\ldots\\
+a+[(BE'-EB')-(CF'-FC')]x'+\ldots\\
-[(BD'-DB')-2(CH'-HC')]y'+\ldots
\end{array}\right\}(x-x')\\
+&\left\{\begin{array}{l}
-[(AE'-EA')-2(CG'-GC')]x'+\ldots\\
+b+[(CF'-FC')-(AD'-DA')]y'+\ldots\\
+[(CE'-EC')-2(AK'-KA')]z'+\ldots
\end{array}\right\}(y-y')\\
+&\left\{\begin{array}{l}
-[(BF'-FB')-2(AH'-HA')]y'+\ldots\\
+c+[(AD'-DA')-(BE'-EB')]z'+\ldots\\
+[(AF'-FA')-2(BG'-GB')]x'+\ldots
\end{array}\right\}(z-z')
\end{aligned}\right\}=0\,. \qquad (31)$$

Ces deux plans se coupent suivant une droite déterminée par le système de leurs équations, laquelle doit devenir l'axe de courbure à l'origine, lorsque les coordonnées x', y', z' deviennent nulles.

Mais, dans la recherche de l'intersection de ces deux plans on peut substituer à l'une ou à l'autre de leurs équations, toute équation résultant de leur combinaison. On pourra donc, en particulier, ôter de l'équation (31) les termes de l'équation (30). Si ensuite on transpose, et qu'on suppose le point (x', y', z') très-voisin de l'origine, ce qui permettra de ne conserver que les termes d'une seule dimension en x', y', z'; cette équation deviendra

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}-[(CD'-DC')-2(BK'-KB')]z'\\+[(BE'-EB')-\ (CF'-FC')]x'\\+[(BD'-DB')-2(CH'-HC')]y'\end{array}\right\}x\\+\left\{\begin{array}{l}-[(AE'-EA')-2(CG'-GC')]x'\\+[(CF'-FC')-\ (AD'-DA')]y'\\+[(CE'-EC')-2(AK'-KA')]z'\end{array}\right\}y\\+\left\{\begin{array}{l}-[(BF'-FB')-2(AH'-HA')]y'\\+[(AD'-DA')-\ (BE'-EB')]z'\\+[(AF'-FA')-2(BG'-GB')]x'\end{array}\right\}z\end{array}\right\}=ax'+by'+cz'\ ; \quad (32)$$

mais, dans les mêmes circonstances, les équations de condition (11, 11') deviendront sensiblement

$$Ax'+By'+Cz'=0\,, \qquad (25)$$

$$A'x'+B'y'+C'z'=0\,; \qquad (25')$$

desquelles tirant les valeurs de x', y' en z', pour les substituer dans (32), celle-ci deviendra, après la division par z',

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}-[(CD'-DC')-2(BK'-KB')]c\\+[(BE'-EB')-\ (CF'-FC')]a\\+[(BD'-DB')-2(CH'-HC')]b\end{array}\right\}x\\+\left\{\begin{array}{l}-[(AE'-EA')-2(CG'-GC')]a\\+[(CF'-FC')-\ (AD'-DA')]b\\+[(CE'-EC')-2(AK'-KA')]c\end{array}\right\}y\\+\left\{\begin{array}{l}-[(BF'-FB')-2(AH'-HA')]b\\+[(AD'-DA')-\ (BE'-EB')]c\\+[(AF'-FA')-2(BG'-GB')]a\end{array}\right\}z\end{array}\right\}=a^2+b^2+c^2. \qquad (33)$$

Voilà donc l'équation d'un plan, coupant le plan fixe (30) suivant une droite qui, lorsqu'on supposera x', y', z' nuls, deviendra l'axe de courbure qui répond à l'origine ; mais cette supposition ne change rien à l'équation (30) ; donc le plan qu'elle exprime contient déjà l'axe de courbure ; il contient donc aussi le centre de courbure ; puis donc que ce centre est d'ailleurs, ainsi que nous l'avons déjà dit sur la droite dont les équations sont

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{b(CL'-LC')-c(BL'-LB')}\\=\dfrac{y}{c(AL'-LA')-a(CL'-LC')}\\=\dfrac{z}{a(BL'-LB')-b(AL'-LA')}\end{array}\right\} \qquad (31)$$

Il est vrai de dire qu'il est à l'intersection de ce plan et de cette droite.

Résolvant donc les équations (31, 33) par rapport à x, y, z, en ayant égard aux relations (26, 27, 27′), nous aurons, pour les coordonnées du centre de courbure qui répond à l'origine

$$\left.\begin{aligned}
x&=-\frac{(a^2+b^2+c^2)\{b(CL'-C'L)-c(BL'-B'L)\}}{2\{(AL-A'L')(AL'-A'L)+(BL-B'L')(BL'-B'L)+(CL-C'L')(CL'-C'L)\}}\\
y&=-\frac{(a^2+b^2+c^2)\{c(AL'-A'L)-a(CL'-C'L)\}}{2\{(AL-A'L')(AL'-A'L)+(BL-B'L')(BL'-B'L)+(CL-C'L')(CL'-C'L)\}}\\
z&=-\frac{(a^2+b^2+c^2)\{a(BL'-B'L)-b(AL'-A'L)\}}{2\{(AL-A'L')(AL'-A'L)+(BL-B'L')(BL'-B'L)+(CL-C'L')(CL'-C'L)\}}
\end{aligned}\right\}(34)$$

or, en désignant par R le rayon de courbure, on a

$$R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,;$$

il viendra donc, en substituant, et ayant toujours égard aux relations (26)

$$R=\frac{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}\{(AL'-A'L)^2+(BL'-B'L)^2+(CL'-C'L)^2\}^{\frac{1}{2}}}{2\{(AL-A'L')(AL'-A'L)+(BL-B'L')(BL'-B'L)+(CL-C'L')(CL'-C'L)\}}\quad(35)$$

Est-il question présentement d'avoir le centre et le rayon de courbure d'une courbe quelconque à double courbure, pour un point quelconque (x', y', z') de cette courbe ; on changera, dans ces équations x, y, z en $x'+x$, $y'+y$, $z'+z$; on développera en supprimant les termes indépendans de x, y, z, et négligeant ceux de plus de deux dimensions par rapport à ces variables ; comparant alors les équations transformées aux équations (1, 1′) ; et supposant qu'elles sont les mêmes, on en conclura les valeurs de A, A', B, B', C, C', ... et par suite (26, 27, 27′) celles de a, b, c, L, L' ; ces valeurs, substituées dans la formule (35), feront connaître la longueur du rayon de courbure ; en les substituant ensuite dans les formules (34), et y changeant x, y, z en $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$, on aura la position du centre de courbure. (*).

Si, par le centre de courbure, on conçoit une droite perpendiculaire au plan osculateur, cette droite sera l'axe de courbure, pour le point (x', y', z'), si, entre les équations de cet axe et les équations qui expriment que le point est sur la courbe, on élimine x', y', z', l'équation résultante en x, y, z sera celle de la surface développable lieu des axes de courbures. (**)

(*) Si l'on mène une sécante à une courbe à double courbure par deux quelconques de ces points dont l'un soit fixe, et que l'autre se rapproche peu à peu de celui-là en suivant le cours de la courbe, et en entraînant avec lui la sécante, qui tournera ainsi autour du premier de ces deux points, lorsque ces deux points se confondront en un seul, la sécante sera alors une tangente.

Par trois points pris arbitrairement sur une courbe à double courbure, et dont un est supposé fixe, soit fait passer un plan, et sur ce plan soit décrit un cercle, par ces trois points; si l'on conçoit que l'un des points mobiles se rapproche peu à peu du point fixe, en suivant le cours de la courbe et en entraînant avec lui le plan, ainsi que le cercle qui, sans quitter ce plan, variera sans cesse de grandeur et de situation; lorsque les deux points se confondront, le plan et le cercle seront tangens à la courbe. Si le troisième point vient joindre les deux autres, sous les mêmes conditions, lorsqu'il les aura atteints, le plan et le cercle se trouveront osculateurs de la courbe.

Voilà pourquoi on a coutume de considérer la tangente et le plan tangent à une courbe à double courbure, comme ayant avec cette courbe deux points communs qui se confondent en un seul; et c'est pour cela aussi que l'on considère le plan et le cercle osculateurs de la même courbe comme ayant avec elle trois points communs qui se confondent également en un seul.

Cela revient évidemment à considérer la courbe comme un polygone gauche d'une infinité de côtés : le prolongement de l'un d'eux est la tangente; tout plan qui passe par cette tangente est un plan tangent; et le plan et le cercle qui passent par trois sommets consécutifs sont le plan et le cercle osculateurs.

(**) Si la courbe est plane, cette surface sera cylindrique; si la courbe est tracée sur une sphère, cette surface sera conique et aura pour centre le centre même de la sphère; généralement parlant, son arête de rebroussement sera le lieu des centres des sphères osculatrices de la courbe; c'est-à-dire, des

Si, entre les équations du centre de courbure pour le point (x', y', z') et les deux équations qui expriment que ce point appartient à la courbe, on élimine x', y', z', les deux équations en x, y, z qu'on obtiendra seront celles d'une courbe à double courbure lieu des centres de courbure qu'on appelle encore ici la *développée* (*) de la courbe proposée, parce que si l'on conçoit qu'un fil, d'abord maintenu sur toute sa longueur, se développe de manière à lui demeurer constamment tangent, un des points de ce fil tracera dans l'espace la courbe dont il s'agit.

§. 3.

De l'osculation dans les surfaces courbes.

Reprenons l'équation (SECT. I, §. 3)

$$\left.\begin{aligned} 0=&Ax+Dyz+Gx^2+\ldots\\ &+By+Ezx+Hy^2+\ldots\\ &+Cz+Fxy+Kz^2+\ldots \end{aligned}\right\}\quad(1)$$

d'une surface courbe quelconque passant par l'origine ; pour laquelle nous avons trouvé l'équation du plan tangent en ce point

---

sphères qui ont avec cette courbe quatre points communs se confondant en un seul, ou encore des sphères qui passent par quatre sommets consécutifs de la courbe, considérée comme polygone d'une infinité de côtés ; mais la recherche de cette arête exige la considération des termes du troisième ordre des équations de la courbe.

(*) A proprement parler, une même courbe à double courbure a une infinité de développées, toutes situées sur la surface développable lieu de ses axes de courbure ; mais nous ne mentionnons ici que la développée principale, en renvoyant, pour le surplus, à l'*Application de l'analise à la géométrie de* MONGE.

Ax

$$Ax+By+Cz=0\,, \tag{2}$$

et celles de la normale correspondante

$$\frac{x}{A}=\frac{y}{B}=\frac{z}{C}\,. \tag{3}$$

Nous avons vu en outre que, pour un autre point quelconque (x', y', z') de la même surface, l'équation du plan tangent était

$$\left.\begin{array}{l} 0=A(x+x')+D(yz'+zy')+2Gxx'+\ldots \\ +B(y+y')+E(zx'+xz')+2Hyy'+\ldots \\ +C(z+z')+F(xy'+yx')+2Kzz'+\ldots \end{array}\right\} \tag{10}$$

et celles de la normale

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-x'}{A+Ez'+Fy'+2Gx'+\ldots} \\ =\dfrac{y-y'}{B+Fx'+Dz'+2Hy'+\ldots} \\ =\dfrac{z-z'}{C+Dy'+Ex'+2Kz'+\ldots} \end{array}\right\} \tag{11}$$

le tout sous la condition

$$\left.\begin{array}{l} 0=Ax'+D'yz'+Gx'^2+\ldots \\ +By'+Ez'x'+Hy'^2+\ldots \\ +Cz'+Fx'y'+Kz'^2+\ldots \end{array}\right\} \tag{9}$$

Si d'abord nous supposons que le plan tangent passe par l'axe des x, auquel cas cet axe sera une tangente quelconque à la surface,

x ne devra point entrer dans l'équation (2), et par conséquent on devra avoir $A=0$; l'équation (1) deviendra donc

$$\left.\begin{aligned} 0=By+Dyz+Gx^2+\ldots\ldots \\ +Cz+Ezx+Hy^2+\ldots\ldots \\ +Fxy+Kz^2+\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

celle du plan tangent

$$By+Cz=0, \qquad (13)$$

et celles de la normale

$$x=0, \quad \frac{y}{B}=\frac{z}{C}: \qquad (14)$$

Faisons tourner le système des plans coordonnés autour de la tangente, c'est-à-dire, autour de l'axe des x; en posant

$$\left.\begin{aligned} y=u\,\mathrm{Cos}.p-v\,\mathrm{Sin}.p\ , \\ z=u\,\mathrm{Sin}.p+v\,\mathrm{Cos}.p\ ; \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

p étant l'angle de l'axe des u avec celui des y. Il viendra en substituant dans (12) et ordonnant,

$$\left.\begin{aligned} 0=(C\,\mathrm{Sin}.p+B\,\mathrm{Cos}.p)u+\{D(\mathrm{Cos}.^2p-\mathrm{Sin}.^2p)-2(H-K)\mathrm{Sin}.p\,\mathrm{Cos}.p\}uv \\ +(C\,\mathrm{Cos}.p-B\,\mathrm{Sin}.p)v \qquad\qquad +(E\,\mathrm{Cos}.p-F\,\mathrm{Sin}.p)vx \\ +(E\,\mathrm{Sin}.p+F\,\mathrm{Cos}.p)xu \\ +Gx^2+\ldots. \\ +(H\,\mathrm{Cos}.^2p+K\,\mathrm{Sin}.^2p+D\,\mathrm{Sin}.p\,\mathrm{Cos}.p)u^2+\ldots \\ +(H\,\mathrm{Sin}.^2p+K\,\mathrm{Cos}.^2p-D\,\mathrm{Sin}.p\,\mathrm{Cos}.p)v^2+\ldots. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Si, dans cette équation, nous faisons $u=0$, l'équation résultante en v et x sera celle de l'intersection de la surface par le plan des vx, c'est-à-dire, par un plan quelconque passant par la tangente x, si nous laissons p indéterminé. Cette équation est

$$\left.\begin{array}{r} 0=(C\text{Cos}.p-B\text{Sin}.p)v+(E\text{Cos}\,p-F\text{Sin}.p)vx+Gx^2+\ldots\\ +(H\text{Sin}.^2p+K\text{Cos}.^2p-D\text{Sin}.p\text{Cos}.p)v^2+\ldots \end{array}\right\} \quad (17)$$

en la comparant aux formules (24, 25) du premier § de la présente section, et désignant par r son rayon de courbure à l'origine nous aurons

$$r=\frac{C\text{Cos}.p-B\text{Sin}.p}{2G}. \qquad (18)$$

Quant à son centre de courbure, ses équations seront évidemment

$$x=0\,,\quad u=0\,,\quad v=\frac{C\text{Cos}.p-B.\text{Sin}.p}{2G}. \qquad (19)$$

Mais des équations (15) on tire

$$\left.\begin{array}{r} u=z\text{Sin}.p+y\text{Cos}.p\ ;\\ v=z\text{Cos}.p-y\text{Sin}.p\ ; \end{array}\right\} \quad (20)$$

donc, en repassant au système primitif, on pourra dire que le centre de courbure, à l'origine, d'une section faite par un plan passant par l'axe des x, supposé une tangente à la courbe, et faisant un angle quelconque p avec le plan des xz, est donné par les trois équations

$$x=0,\ z\text{Sin}.p+y\text{Cos}.p=0,\ z\text{Cos}.p-y\text{Sin}.p=\frac{C\text{Cos}.p-B\text{Sin}.p}{2G}; \qquad (21)$$

desquelles on tire

$$x=0,\ y=-\frac{C\text{Cos}\,p-B\text{Sin}.p}{2G}\text{Sin}.p\,,\ z=+\frac{C\text{Cos}.p-B\text{Sin}\,p}{2G}\text{Cos}.p\,. \qquad (22)$$

Si, entre les deux dernières on élimine p, l'équation résultante en y et z sera, sur le plan des yz, celle du lieu des centres de courbure, à l'origine, de toutes les sections planes faites par la tangente x : cette équation est

$$2G(y^2+z^2)=By+Cz, \qquad (23)$$

c'est-à-dire, celle d'un cercle passant par l'origine, ayant pour tangente en ce point l'intersection de son plan avec le plan tangent à la surface, et ayant pour diamètre $\frac{\sqrt{B^2+C^2}}{2G}$.

Ainsi, *de toutes les sections faites à une surface courbe quelconque, par des plans passant par une même tangente quelconque à cette surface, celle qui a, au point du contact de cette tangente, le plus grand rayon de courbure est celle qui est faite par le plan normal. De plus, les centres de courbure de toutes les autres pour le même point, sont sur une même circonférence, ayant pour tangente, en ce point, une nouvelle tangente à la surface perpendiculaire à la première; d'où il suit que les cercles osculateurs de toutes ces sections, pour le point de contact de la tangente, appartiennent à une même sphère, tangente en ce point à la courbe.*

De ce beau théorème, dû à Meusnier, il résulte en particulier, que *connaissant seulement, pour un même point quelconque d'une surface courbe, les centres de courbure de deux sections faites dans cette courbe, par des plans passant par une même tangente, on peut facilement avoir le centre de courbure de toute autre section faite par un nouveau plan passant également par cette tangente.* Ce centre sera, en effet, l'intersection du plan coupant avec une circonférence passant par le point de contact et par les deux centres déjà donnés.

Nous venons de voir de quelle manière les sections planes obliques sont liées entre elles et à la section normale, lorsque les plans coupant passent par une même tangente. Examinons présentement la relation qui existe entre les diverses sections normales.

Nous pouvons, dans cette nouvelle recherche, admettre une simplification de plus : nous pouvons supposer qu'on a pris pour plan des xy le plan tangent lui-même, en prenant son point de contact pour origine ; ce qui fera coïncider la normale avec l'axe des z; l'équation (2) devra donc simplement se réduire à $z=0$, on aura donc, à la fois $A=0$, $B=0$, ce qui réduira l'équation (1) à

$$\left.\begin{array}{l} 0=Cz+Dyz+Gx^2+\ldots \\ \quad +Ezx+Hy^2+\ldots \\ \quad +Fxy+Kz^2+\ldots \end{array}\right\} \quad (24)$$

Afin d'obtenir une section normale quelconque, faisons tourner le système des plans coordonnés d'une quantité indéterminée p autour de l'axe des z. Posons pour cela

$$\left.\begin{array}{l} x=t\text{Cos}.p-u\text{Sin}.p\ ; \\ y=t\text{Sin}.p+u\text{Cos}.p \end{array}\right\} \quad (25)$$

d'où

$$\left.\begin{array}{l} t=y\text{Sin}.p+x\text{Cos}.p\ , \\ u=y\text{Cos}.p-x\,\text{Sin}.p\ ; \end{array}\right\} \quad (26)$$

par la substitution des valeurs (25) dans l'équation (24), la surface se trouvera rapportée aux axes des t, u, z; si ensuite on veut avoir son intersection avec le plan des tz, que l'on peut considérer ici, à raison de l'indétermination de p, comme un plan normal quelconque, il faudra, dans cette équation transformée, supposer $t=0$; mais il revient au même, et il est en même temps plus court de faire immédiatement cette supposition dans les formules (25), c'est-à-dire, de faire dans (24)

$$x=t\text{Cos}.p\ , \quad y=t\text{Sin}.p\ ;$$

ce qui donne, en ordonnant,

$$\left.\begin{array}{r} 0 = Cz+(D\mathrm{Sin}.p+E\mathrm{Cos}.p)tz+Kz^2+\ldots\ldots \\ +(G\mathrm{Cos}.^2p+H\mathrm{Sin}.^2p+F\mathrm{Sin}.p\mathrm{Cos}.p)t^2+\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (27)$$

telle est donc l'équation de la section faite dans la surface (24) par un plan normal tz, faisant avec le plan des tx un angle quelconque p.

En comparant cette équation (27) aux formules (24, 25) du premier § de la présente section, on aura pour le rayon r de courbure de cette courbe à l'origine,

$$r=\frac{C}{2(G\mathrm{Cos}.^2p+H\mathrm{Sin}.^2p+F\mathrm{Sin}.p\mathrm{Cos}.p)}. \qquad (28)$$

Si l'on fait varier la valeur de p, celle de r variera aussi; afin donc de savoir comment ces deux variables sont liées entre elles, concevons que, pour chaque position du plan normal, on porte sur la tangente correspondante, dont l'équation est

$$y\mathrm{Cos}.\,p-x\mathrm{Sin}.p=0\,, \qquad (29)$$

de part et d'autre du point de contact, des parties proportionnelles à la racine quarrée de r, c'est-à-dire, des parties moyennes proportionnelles entre r et une longueur constante et arbitraire λ; et cherchons la courbe sur laquelle les points ainsi déterminés se trouveront situés; en désignant par x, y les coordonnés de cette courbe, nous devrons avoir les deux équations

$$x=\sqrt{\lambda r}.\mathrm{Cos}.p\,, \qquad y=\sqrt{\lambda r}.\mathrm{Sin}.p\,, \qquad (30)$$

exprimant à la fois que le point $(x,\ y)$ est sur la tangente (29) et que sa distance au point de contact, c'est-à-dire, à l'origine est égale à $\sqrt{\lambda r}$.

Prenant donc, dans ces deux dernières équations, les valeurs de Sin. p, Cos. p, pour les substituer dans la formule (28), nous aurons pour l'équation de la courbe demandée

$$Gx^2+Hy^2+Fxy=\tfrac{1}{2}\lambda C\ ; \qquad (31)$$

équation d'une ligne du second ordre rapportée à son centre.

Ainsi, *Si ayant fait à une surface quelconque, par un quelconque de ses points, une suite de sections normales, coupant le plan tangent suivant une suite de tangentes à ces sections, on prend sur chacune de ces tangentes, de part et d'autre du point de contact, des longueurs proportionnelles aux racines carrées de rayons de courbure qu'ont au point de contact les sections qui leur correspondent; les points ainsi déterminés sur le plan tangent appartiendront à une ligne du second ordre, dont le point du contact sera le centre.*

Cette courbure a été remarquée pour la première fois par M. Dupin, qui l'a nommée *indicatrice*; il a appelé *tangentes conjuguées* et *tangentes principales*, les tangentes dirigées suivant ses diamètres conjugués et principaux, et il a de même appelé *sections conjuguées* et *principales*, *rayons de courbure conjugués et principaux* les sections et rayons de courbure qui répondent aux tangentes conjuguées et principales.

Il suit de cet élégant théorème que tout ce qui est vrai du rapport des quarrés des diamètres conjugués ou principaux d'une ligne du second ordre et des angles que forment entre eux ces diamètres doit être vrai aussi du rapport des rayons de courbure des sections normales, conjuguées et principales, et des angles que forment entre eux les plans de ces sections; ainsi, 1.° *les rayons de courbure qui répondent aux sections principales sont l'un plus grand et l'autre plus petit que tous ceux qui répondent aux autres sections normales;* 2.° *la somme de deux rayons de courbure conjugués, pris avec leurs signes, est toujours constante et égale à la somme des rayons de courbure principaux*; 3.° *le produit de deux rayons de courbure conjugués et du quarré du sinus de l'angle des plans qui les contiennent est aussi constant et égal au produit des rayons de courbure principaux.* 4.° *Les rayons de courbure des sections qui font, de* *part et d'autre, avec les plans des sections principales des angles égaux sont égaux ;* etc, etc, etc.

Il avoit déjà été remarqué par Euler que les sections normales de plus grande et de moindre courbure se coupaient perpendiculairement ; il avait même montré que les rayons de courbure de ces deux sections étant connus, on en pouvait déduire celui de toute autre section normale donnée de position ; mais il était réservé à M. Dupin de ramener toute cette théorie à une autre extrêmement simple et beaucoup plus généralement connue.

A raison de l'indétermination de λ, une même surface a, en l'un quelconque de ces points, une infinité d'indicatrices différentes ; mais la forme de l'équation (31) montre que toutes ces indicatrices sont semblables et concentriques ; et conséquemment elles ne cessent pas d'avoir leurs diamètres proportionnels aux racines quarrés des rayons de courbure des sections correspondantes. Si en particulier on suppose $\lambda=0$, l'équation (31) devient simplement

$$Gx^2+Hy^2+Fxy=0$$

et exprime alors un point ou deux droites, c'est-à-dire, une section conique de dimensions infiniment petites ; mais, comme c'est aussi à cela que se réduit l'équation (24), lorsqu'après avoir supposé z tout à fait nuls, on suppose ensuite x, y infiniment petits, il en faut conclure que *le point de contact d'une surface quelconque avec son plan tangent est une section conique de dimensions infiniment petites, dans laquelle les diamètres sont proportionnels aux racines quarrées des rayons de courbure des sections normales correspondantes.* Cette remarque est due à M. Dupin.

Si l'on prend les deux sections principales pour plans des xz et des yz, le terme en xy ne devra point se trouver dans l'équation (31) ; on devra donc avoir $F=0$; en sorte que l'équation (24) de a surface deviendra

$0=$

$$\left.\begin{aligned} 0=Cz+Dyz+Gx^2+\ldots\\ +Ezx+Hy^2+\ldots\\ +Kz^2+\ldots \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

dans les mêmes circonstances le rayon r de courbure d'une section normale formant un angle p avec le plan des xz, aura (28) pour expression

$$r=\frac{C}{2(G\mathrm{Cos.}^2p+H\mathrm{Sin.}^2p)}\ ; \qquad (33)$$

on en conclura les deux rayons principaux en y faisant successivement $p=0$, $p=\frac{1}{2}\varpi$; désignant donc ces deux rayons par a, b, on aura

$$a=\frac{C}{2G}\ ; \qquad b=\frac{C}{2H}\ ; \qquad (34)$$

en éliminant donc G, H de la formule (33), au moyen de ces deux-là, il viendra

$$\frac{1}{a}\mathrm{Cos.}^2p+\frac{1}{b}\mathrm{Sin.}^2p=\frac{1}{r}\ ; \qquad (35)$$

équation donnée par Euler. (*)

(*) Tant que G, H sont inégaux et de mêmes signes, l'indicatrice étant une ellipse, toutes les courbures sont plus grandes que la moindre et moindres que la plus grande des deux courbures principales. Si $G=H$, l'indicatrice devient un cercle et conséquemment toutes les courbures sont égales, comme il arrive au pôle d'un sphéroïde ; l'origine est dite alors un ombilic. Si G et H sont de signes contraires, l'indicatrice devient une hyperbole, les deux courbures prin-

Dans le cas de l'équation (32), l'équation (10) du plan tangent par le point (x', y', z') devient simplement

$$\left.\begin{aligned} 0=C(z+z')+D(yz'+zy')+2Gxx'+\ldots\ldots \\ +E(zx'+xz')+2Hyy'+\ldots\ldots \\ +2Kzz'+\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

ce plan tangent coupe le plan tangent à l'origine, c'est-à-dire, le plan des xy, suivant une droite dont on obtiendra l'équation en égalant z à zéro dans celle-ci; cette équation sera donc

$$(Ez'+2Gx'+\ldots\ldots)x+(Dz'+2Hy'+\ldots\ldots)y+Cz'=0\ , \qquad (37)$$

sous la condition

$$\left.\begin{aligned} 0=Cz'+Dy'z'+Gx'^2+\ldots\ldots \\ +Ez'x'+Hy'^2+\ldots\ldots \\ +Kz'^2+\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

mais, à mesure que le point (x', y', z') se rapprochera de l'origine, elle tendra à se réduire à

$$(Ez'+2Gx')x+(Dz'+2Hy')y+Cz'=0\ ; \qquad (39)$$

---

cipales ont leur convexité tournées en sens inverses; les courbures des autres sections normales peuvent prendre tous les degrés possibles de petitesse; et en particulier ces courbures sont tout-à-fait nulles, lorsque les sections sont faites suivant les asymptotes de l'hyperbole, qui sont ainsi osculatrices de la surface. Enfin, si l'un des deux coefficiens G, H est nul, l'indicatrice se réduit au système de deux parallèles, et la courbure *minimum*, parallèle à ces droites, est seule nulle.

et, dans les mêmes circonstances, l'equation de condition tendra à se reduire à $Cz'=0$ ou $z'=0$; donc à mesure que le point (x', y', z') tendra à devenir l'origine, les deux plans tangens en ce point et à l'origine tendront à se couper suivant une droite ayant pour équation

$$Gx'x+Hy'y=0\ ; \qquad (40)$$

mais en même temps la droite joignant ces deux points tendra continuellement vers sa projection sur le plan des xy, c'est-à-dire, vers la droite, ayant pour équation

$$x'y-y'x=0\ , \qquad (41)$$

désignant donc par p et q les angles de ces deux droites avec l'axe des x on aura

$$\text{Tang.}p=-\frac{Gx'}{Hy'}\ , \quad \text{Tang.}q=+\frac{y'}{x'}\ , \qquad (42)$$

d'où

$$G+H\text{Tang.}p\text{Tang.}q=0\ ;$$

ou (34)

$$b+a\text{Tang.}p\text{Tang.}q=0\ ; \qquad (43)$$

relation entre deux tangentes conjuguées.

Ainsi, *deux points marchant l'un vers l'autre sur une surface courbe, la sécante qui joint ces deux points et l'intersection des plans tangens dont ils sont les points de contact tendent sans cesse à devenir deux tangentes conjuguées, et le deviennent en effet lorsqu'enfin ces deux points se confondent, quelle que puisse être d'ailleurs, sur la surface courbe, la route suivie par l'un d'eux pour joindre l'autre.* Cette remarque est encore de M. Dupin.

Cela revient, au surplus, à dire que *deux courbes qui se coupent sur une surface courbe ne peuvent être l'une et l'autre des lignes de contact de cette surface avec deux surfaces développables, circonscrites qu'autant que l'élément rectiligne de chaque surface développable au point d'intersection des deux courbes est tangent à la ligne de contact de l'autre.* Ce qui avait déja été implicitement remarqué par Monge.

La surface étant toujours située par rapport aux axes des coordonnées comme le comporte l'équation (32), les équations de sa normale par le point (x', y', z') sont (11)

$$\frac{x-x'}{Ez'+2Gx'+\ldots}=\frac{y-y'}{Dz'+2Hy'+\ldots}=\frac{z-z'}{C+Dy'+Ex'+2Kz'+\ldots}, \qquad (44)$$

de sorte que l'équation de la projection de cette normale sur le plan des xy est

$$(Dz'+2Hy'+\ldots)(x-x')=(Ez'+2Gx'+\ldots)(y-y'),$$

ou encore

$$(Dz'+2Hy'+\ldots)x-(Ez'+2Gx'+\ldots)y=Dx'z'-Ey'z'-2(G-H)x'y'. \qquad (45)$$

Puisque, généralement parlant, cette projection ne passe pas par l'origine, il faut en conclure que la normale au point (x', y', z') ne rencontre point l'axe des z, qui est ici la normale à l'origine. Ainsi, généralement parlant, deux normales à une surface courbe ne sont pas dans un même plan.

Pour que la normale par le point (x', y', z') coupât l'axe des z, il faudrait qu'on eût la condition

$$Dx'z'-Ey'z'-2(G-H)x'y'=0;$$

d'où l'on peut conclure que l'équation

$$Dxz - Eyz - 2(G-H)xy = 0 , \qquad (46)$$

est celle d'une surface qui coupe la surface (32) en tous les points desquels les normales rencontrent l'axe des z.

Or, cette équation est celle d'une surface conique passant par les trois axes, d'où l'on peut conclure que la courbe dont il s'agit a deux branches qui se coupent à l'origine suivant les directions des axes des x et des y. Ainsi, plus deux normales qui se coupent approchent de se confondre et plus aussi le plan normal qui les contient tend à se confondre avec le plan de l'une des sections principales, et il se confond rigoureusement avec lui lorsqu'enfin la seconde normale a atteint la première.

Cela revient évidemment à dire qu'*en partant de l'un quelconque des points d'une surface courbe, il n'y a, en général, que deux directions suivant lesquelles on puisse cheminer sur cette surface de manière que la normale en ce point soit rencontrée par celle qui la suit immédiatement; et ces deux directions, toujours perpendiculaires l'une à l'autre, sont celles des sections principales qui répondent à ce point.* Cette remarque est due à Monge.

Concevons que l'on trace, sur une surface courbe, une courbe telle que la tangente en chacun de ses points soit dirigée suivant la section principale de plus grande courbure qui repond à ce point; une telle courbe sera dite une *ligne de plus grande courbure* de cette surface; et il est clair qu'on peut concevoir de telles lignes par chacun de ses points. Si, au contraire, la tangente en chacun des points de la courbe est dirigée suivant la section principale de moindre courbure, cette courbe sera dite *ligne de moindre courbure;* et on pourra également en concevoir une pareille par chacun des points de la surface proposée. Les lignes de plus grande et de moindre courbures d'une surface courbe sont appelées d'un nom commun les *lignes de courbure principales* ou simplement les *lignes de courbure* de cette surface. Celles d'une série coupent donc perpendiculairement toutes celles de l'autre série ; de sorte qu'en quelque nombre qu'elles soient, elles divisent toujours la surface dont il s'agit en quadrilatères courbes dont tous les angles sont droits.

Si, sur une surface courbe, on trace une courbe quelconque, les normales menées à la surface par tous les points de cette courbe appartiendront généralement à une surface gauche ; mais, si la courbe dont il s'agit est une ligne de courbure, la surface gauche se changera en une surface développable, ayant pour arète de rebroussement l'ensemble des centres de courbure qui répondent à cette ligne. L'ensemble des arètes de rebroussement des surfaces gauches qui répondent à toutes les lignes de courbure d'une surface donnée forme une nouvelle surface à deux nappes, lieu des centres de plus grande et de moindre courbure de tous les points de cette surface, et à laquelle toutes ses normales sont tangentes.

Après avoir ainsi étudié la courbure d'une surface, en la rapportant à la normale et aux deux tangentes principales de l'un de ses points, il ne nous reste plus qu'à généraliser nos résultats, afin de les rendre facilement applicables à tout point d'une surface courbe quelconque, autre que l'origine des coordonnées.

Reprenons pour cela l'équation générale

$$\left.\begin{aligned} 0=Ax+Dyz+Gx^2+\ldots\\ +By+Ezx+Hy^2+\ldots\\ +Cz+Fxy+Kz^2+\ldots \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

d'une surface passant par l'origine; celle

$$\frac{x}{A}=\frac{y}{B}=\frac{z}{C}, \quad (3)$$

de sa normale par ce point; et enfin celle

$$\left.\begin{aligned}&\frac{x-x'}{A+Ez'+Fy'+2Gx'+\ldots}\\=&\frac{y-y'}{B+Fx'+Dz'+2Hy'+\ldots}\\=&\frac{z-z'}{C+Dy'+Ex'+2Kz'+\ldots}\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

de sa normale par un autre quelconque (x', y', z') de ses points, soumis à la condition

$$\left.\begin{aligned}o=&Ax'+D'yz'+Gx'^2+\ldots..\\&+By'+Ez'x'+Hy'^2+\ldots..\\&+Cz'+Fx'y'+Kz'^2+\ldots..\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

Concevons que, par un point (x, y, z) de la normale qui répond à l'origine, distant de cette origine de la quantité R, on mène à la surface courbe une seconde normale, dont le pied soit (x', y', z') et la longueur R'; pour les deux points dont il s'agit, les équations (3, 9, 11) auront lieu, et l'on aura en outre

$$R^2 = x^2+y^2+z^2\,, \qquad (47)$$

$$R'^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\,; \qquad (48)$$

ce qui fera en tout sept équations au moyen desquelles une des huit quantités qu'on y considère étant connue, on pourra déterminer les sept autres. En outre, le plan qui contiendra les deux normales R, R', aura pour équation

$$(Bz'-Cy')x+(Cx'-Az')y+(Ay'-Bx')z=0\ ,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(Bz-Cy)x'+(Cx-Az)y'+(Ay-Bx)z'=0\ ; \tag{49}$$

Enfin, en chassant les dénominateurs, dans les équations (3, 11), et supprimant dans les dernières les termes qui se détruisent en vertu des premières, on aura

$$Cx=Az\ ; \qquad Cy=Bz\ ; \tag{50}$$

$$\left.\begin{aligned}
&x(Dy'+Ex'+2Kz'+\ldots)-z\,(Ez'+Fy'+2Gz'+\ldots\\
&=x'(C+Dy'+Ex'+2Kz'+\ldots)-z'(A+Ez'+Fy'+2Gx'+\ldots)\,,\\
&y(Dy'+Ex'+2Kz'+\ldots)-z\,(Fx'+Dz'+2Hy'+\ldots)\\
&=y'(C+Dy'+Ex'+2Kz'+\ldots)-z'(B+Fx'+Dz'+2Hy'+\ldots)\,.
\end{aligned}\right\}\tag{51}$$

Cela posé, si l'on conçoit que le point (x, y, z) glisse sur R, de manière à se rapprocher de plus en plus de l'un ou l'autre des deux centres de courbure qui répondent à l'origine, R', que nous supposons dans ce mouvement, demeurer toujours normale, se rapprochera de plus en plus de cette première normale. Son pied (x', y', z'), qui se rapprochera continuellement de l'origine, décrira sur la surface, d'après ce que nous avons dit précédemment, une courbe passant par cette origine et ayant pour tangente en ce point l'une des deux tangentes principales; d'où il suit que pareillement le plan normal (49) tendra sans cesse à devenir celui de l'une des sections principales.

Mais lorsque x', y', z' sont très-petits, on doit avoir sensiblement

R^2

$$R^2=R'^2=x^2+y^2+z^2\ ; \qquad (52)$$

de plus, on peut alors, sans erreur sensible, remplacer les équations (9, 51) par les suivantes

$$Ax'+By'+Cz'=0\ ; \qquad (53)$$

$$\left.\begin{array}{l} x(Dy'+Ex'+2Kz')-z(Ez'+Fy'+2Gx')=Cx'-Az'\ , \\ y(Dy'+Ex'+2Kz')-z(Fx'+Dz'+2Hy')=Cy'-Bz'\ ; \end{array}\right\} (54)$$

en y joignant les deux équations (50), on aura en tout six équations entre lesquelles on pourra néanmoins éliminer x, y, z, x', y', z', puisque ces dernières se trouvent affecter tous les termes des équations où elles entrent.

En chassant d'abord x, y des équations (52, 54), au moyen des équations (50), elles deviennent

$$\frac{z}{C}=\pm\frac{R}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\ ; \qquad (55)$$

$$\{(AE-2CG)z-C^2\}x'+(AD-CF)zy'-\{(CE-2AK)z-AC\}z'=0,$$

$$\{(BD-2CH)z-C^2\}y'+(BE-CF)zx'-\{(CD-2BK)z-BC\}z'=0.$$

En représentant par λ une indéterminée, on satisfait aux deux dernières, en posant

$$\frac{x'}{\lambda}=\{(BD-2CH)z-C^2\}\{(CE-2AK)z-AC\}-(AD-CF)\{(CD-2BK)z-BC\}\ ,$$

$$\frac{y'}{\lambda}=\{(AE-2CG)z-C^2\}\{(CD-2BK)z-BC\}-(BE-CF)\{(CE-2AK)z-AC\}\,,$$

$$\frac{z'}{\lambda}=\{(AE-2CG)z-C^2\}\{(BD-2CH)z-C^2\}-(AD-CF)(BE-CF)z^2\;;$$

c'est-à-dire, en développant, réduisant et ordonnant

$$\left.\begin{aligned}
\frac{x'}{\lambda C^3}&=\{B(DE-2FK)+C(DF-2EH)-A(D^2-4HK)\}\frac{z^2}{C^2}\\
&\quad-\{(BF+CE)-2A(H+K)\}\frac{z}{C}+A\,,\\
\frac{y'}{\lambda C^3}&=\{C(EF-2DG)+A(ED-2FK)-B(E^2-4KG)\}\frac{z^2}{C^2}\\
&\quad-\{(CD+AF)-2B(K+G)\}\frac{z}{C}+B\,,\\
\frac{z'}{\lambda C^3}&=A\{(FD-2EH)+B(FE-2DG)-C(F^2-4GH)\}\frac{z^2}{C^2}\\
&\quad-\{(AE+BD)-2C(G+H)\}\frac{z}{C}+C\,,
\end{aligned}\right\}\quad(56)$$

substituant toutes ces valeurs dans l'équation (53) et y introduisant pour $\frac{z}{C}$ sa valeur, on aura, toutes réductions faites,

$$\left\{\begin{array}{r}
2AB(DE-2FK)-A^2(D^2-2HK)\\
+2BC(EF-2DG)-B^2(E^2-4KG)\\
+2CA(FD-2EH)-C^2(F^2-4GH)
\end{array}\right\}R^2$$

$$\pm2\sqrt{A^2+B^2+C^2}\left\{\begin{array}{r}
BCD-A^2(H+K)\\
+CAE-B^2(K+G)\\
+ABF-C^2(G+H)
\end{array}\right\}R+(A^2+B^2+C^2)^2=A.\quad(57)$$

équation qui donnera rigoureusement pour la surface (1) les valeurs des deux rayons de courbure principaux qui répondent à l'origine, puisque x', y', z' ayant disparu, peuvent être supposés tout à fait nuls.

R étant déterminé, par cette équation, on tirera des équations (50, 52)

$$x=\frac{AR}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,\quad y=\frac{BR}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,\quad z=\frac{CR}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,\qquad (58)$$

qui seront les coordonnées du centre de courbure. Quant aux plans des deux sections principales on en obtiendra la double équation, en introduisant dans (49) les valeurs (56), et y mettant ensuite pour $\frac{z}{C}$ la valeur (55); cela donne, toutes réductions faites,

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}[B(DE-2FK)+C(FD-2EH)-A(D^2-4HK)]R\\ \pm[(BF+CE)-2A(H+K)]\sqrt{A^2+B^2+C^2}\end{array}\right\}(Bz-Cy)\\ +\left\{\begin{array}{l}[C(EF-2DG)+A(DE-2FK)-B(E^2-4KG)]R\\ \pm[(CD+AF)-2B(K+G)]\sqrt{A^2+B^2+C^2}\end{array}\right\}(Cx-Az)\\ +\left\{\begin{array}{l}[A(FD-2EH)+B(EF-2DG)-C(F^2-4GH)]R\\ \pm[(AE+BD)-2C(G+H)]\sqrt{A^2+B^2+C^2}\end{array}\right\}(Ay-Bx)\end{array}\right\}=0.\ (59)$$

S'agit-il présentement de déterminer, pour un point quelconque (x', y', z') d'une surface quelconque, les centres et rayons de courbure et les plans des sections principales, on changera respectivement x, y, z en $x'+x$, $y'+y$, $z'+z$; on développera, en arrêtant le développement aux termes de deux dimensions en x, y, z, inclusivement; on égalera à zéro l'ensemble des termes indépendans de ces variables, ce qui donnera l'équation de condition ; on comparera terme à terme l'équation restante à l'équation (1) ; afin d'obtenir les valeurs de ses neuf premiers coefficiens ; on substituera enfin ces valeurs dans les formules (57, 58, 59), en changeant dans les dernières, x, y, z, en $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$.

Si, entre les trois équations du centre de courbure pour le point (x', y', z') et l'équation de condition qui exprime que ce point appartient à la surface courbe, on élimine x', y', z', l'équation résultante en x, y, z sera celle du lieu des centres de courbure de cette surface ou de sa développée, c'est-à-dire, de la surface à laquelle toutes ses normales sont tangentes.

Appliquons ce procédé à l'ellipsoïde donnée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,; \qquad (60)$$

nous aurons d'abord

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1\,; \qquad (61)$$

et ensuite

$$\begin{aligned} 0=\frac{2x'}{a^2}x&+\frac{1}{a^2}x^2 \\ +\frac{2y'}{b^2}y&+\frac{1}{b^2}y^2 \\ +\frac{2z'}{c^2}z&+\frac{1}{c^2}z^2 \end{aligned}$$

qu'il faudra comparer à l'équation (1).

Nous aurons donc, en premier lieu

$$D=0\,,\quad E=0\,,\quad F=0\,;$$

au moyen de quoi la formule (57) deviendra simplement

$$\left.\begin{array}{l}4(A^2HK+B^2KG+C^2GH)R^2\\ \pm 2\sqrt{A^2+B^2+C^2}[A^2(H+K)+B^2(K+G)+C^2(G+H)]R\\ +(A^2+B^2+C^2)^2=0\,.\end{array}\right\}\ (62)$$

Nous aurons ensuite

$$A=\frac{2x'}{a^2}\,,\quad B=\frac{2y'}{b^2}\,,\quad C=\frac{2z'}{c^2}\,,\quad G=\frac{1}{a^2}\,,\quad H=\frac{1}{b^2}\,,\quad K=\frac{1}{c^2}$$

d'où nous conclurons, en ayant égard à la condition (61)

$$A^2+B^2+C^2=4\left(\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}+\frac{z'^2}{c^4}\right)\,,$$

$$A^2HK+B^2KG+C^2GH=\frac{4}{a^2b^2c^2}\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}\right)=\frac{4}{a^2b^2c^2}\,;$$

$$A^2(H+K)+B^2(K+G)+C^2(G+H)=\frac{4}{a^2b^2c^2}\left\{(b^2+c^2)\frac{x'^2}{a^2}+(c^2+u^2)\frac{y'^2}{b^2}+(a^2+b^2)\frac{z'^2}{c^2}\right\}$$

$$=\frac{4}{a^2b^2c^2}\{(a^2+b^2+c^2)-(x'^2+y'^2+z'^2)\}\,.$$

En conséquence, l'équation qui donnera les deux rayons de courbure au point (x', y', z') sera

$$R^2 \pm \{(a^2+b^2+c^2)-(x'^2+y'^2+z'^2)\}\sqrt{\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}+\frac{z'^2}{c^4}}.R$$

$$+a^2b^2c^2\left(\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}+\frac{z'^2}{c^4}\right)^2=0.$$

Tout ce qui précède pourrait être susceptible de développemens beaucoup plus amples ; mais nous les abandonnons à la sagacité du lecteur, en le priant de considérer que nous n'avons pu ni dû nous proposer ici d'écrire un traité élémentaire ; mais seulement de montrer comment l'analyse élémentaire pouvait être employée à traiter des questions pour la solution desquelles on a coutume de recourir au calcul différentiel. La vérité est qu'il n'y a proprement d'un peu compliqué ici que ce qui concerne les courbes à double courbure ; mais cela tient à la nature même du sujet.

A la vérité nos formules finales sont moins simples que celles que fournit le calcul différentiel ; mais on doit remarquer que la simplicité de ces dernières est plus apparente que réelle ; elle tient uniquement à ce que ces formules ne sont au fond que des symboles d'opérations à effectuer, tandis que les nôtres au contraire n'exigent que de simples substitutions, dans chacune des applications qu'on se proposera d'en faire.

Nous pensons toutefois que la manière très-simple dont nous sommes parvenus aux beaux résultats d'Euler, de Monge, de Meusnier et de M. Dupin, sur la courbure des surfaces courbes, n'aura pas échappé au lecteur. Si donc quelqu'un désirait seulement de se mettre à peu de frais au courant de ces résultats, il pourrait passer, à la lecture, les deuxièmes § tant de la première que de la seconde section, qui sont tout-à-fait indépendans de tout le reste. Il pourrait en outre supposer, dès l'abord, dans le § premier de la seconde section, que l'axe des x est tangent à la courbe, ou que $A=0$; et ne lire ensuite que la première partie du présent §.

Nous n'ajouterons plus qu'un mot, et ce sera pour faire remarquer l'analogie entre les principes qui nous ont dirigés dans ce qui précède et ceux que nous avons exposés à la page 183 du V.e volume de ce recueil. Ici, comme là, tout se réduit, en dernière analise, à obtenir d'abord du problème proposé une solution approximative, dont la précision soit subordonnée à la petitesse de certaines quantités, à éliminer ensuite du résultat ces mêmes quantités qui, du moment qu'elles ont disparu, ne sauraient plus influer sur ce même résultat qu'on doit dès-lors regarder comme tout-à-fait exact. Il n'est probablement aucune des questions dans lesquelles on emploie la doctrine des infiniment petits ou toute autre doctrine équivalente qui ne puisse être ramenée à ces principes qui nous paraissent non moins simples qu'ils sont lumineux.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de géométrie transcendante.

On sait que le lieu de toutes les tangentes à une courbe à double courbure est une surface développable dont cette courbe est l'arète de rebroussement.

La courbe étant donnée, la surface développable l'est aussi, et, si on l'étend sur un plan, son arète de rebroussement deviendra une courbe plane qui sera également donnée.

Mais si, au contraire, la courbe plane est donnée, elle pourra être considérée comme l'arète de rebroussement d'une infinité de surfaces développables toutes différentes les unes des autres ; mais ayant toutefois un caractère commun, et que, par leur développement on a appliqué sur un plan.

Ces remarques donnent lieu aux deux questions suivantes :

I. Quelle courbe plane devient une courbe à double courbure donnée, lorsqu'on applique sur un plan la surface développable dont cette courbe est l'arète de rebroussement ?

II. Quelle est l'équation générale de toutes les surfaces développables telles qu'en les appliquant sur un plan, leur arète de rebroussement devient une courbe plane donnée ?

ANALISE ALGÉBRIQUE.

De la résolution de l'équation générale du 3.me degré ;

Par M. de STAINVILLE, répétiteur d'analise à l'école royale polytechnique.

LA méthode que l'on suit ordinairement pour résoudre les équations du 3.me degré diffère peu de celle que les analistes du XVI.e siècle ont imaginée les premiers pour parvenir au but ; et on peut apporter pour raison de la ressemblance entre leurs procédés et les nôtres la simplicité des calculs qu'exigent leurs méthodes, simplicité que sans doute les modernes n'ont pas espéré de pouvoir surpasser. Mais on peut, sans rien perdre de cette simplicité, parvenir aux formules finales par une route un peu différente, et cela sans rien supposer au-delà de ce que savaient les anciens géomètres, tant sur la composition des équations que sur la grandeur et la nature de leurs racines. La méthode que nous nous proposons d'indiquer ici a de plus l'avantage de porter une plus grande lumière dans l'esprit, de mieux faire voir sous quelles conditions les parties qui composent l'expression générale des racines sont réelles ou imaginaires, et de mieux faire concevoir enfin pourquoi le cas où les trois racines sont impliquées d'imaginaires est précisément le seul où elles puissent être toutes trois réelles.

Si l'on considère l'équation

$$y^3+Ay^2+By+C=0\,,$$

on pourra regarder les deux premiers termes du premier membre comme étant les deux premiers termes du cube d'un binome, dont y serait la première partie et $\frac{A}{3}$ la seconde. Si donc il arrivait qu'il existât entre les coefficiens la relation nécessaire pour que les deux autres termes complétassent le cube de $y+\frac{A}{3}$, on pourrait, par une simple extraction de racine cubique en déduire une équation du premier degré qui donnerait y en fonction des coefficiens. Cela aurait encore lieu, quand bien même le premier membre ne différerait du cube d'un binome que par une quantité constante; car, en ajoutant à chaque membre ce qu'il manquerait au premier pour le rendre un cube, l'extraction de la racine cubique des deux membres ramenerait également l'équation au premier degré (*).

Si l'équation ne se trouve dans aucun des deux cas que nous venons d'examiner, on pourra la mettre sous la forme suivante

$$\left(y+\frac{A}{3}\right)^3+y\left(B-\frac{A^3}{3}\right)+\left(C-\frac{A^3}{27}\right)=0,$$

ou encore sous celle-ci

$$\left(y+\frac{A}{3}\right)^3+\left(B-\frac{A^2}{3}\right)\left(y+\frac{A}{3}\right)+\left(C-\frac{AB}{3}+\frac{2A^3}{27}\right)=0.$$

Par conséquent, si l'on pose

$$y+\frac{A}{3}=x\,,\quad B-\frac{A^2}{3}=p\,,\quad C-\frac{AB}{3}+\frac{2A^3}{27}=q\,,$$

la question sera réduite à résoudre l'équation

$$x^3+px+q=0\,.$$

(*) C'est le cas résolu par les Indous; voyez à ce sujet un article de M. Terquem, dans le III.e volume de la *Correspondance sur l'école polytechnique*, page 275.

Pour résoudre cette équation, nous partirons d'un principe fort simple, et qui consiste en ce que la somme de deux cubes se compose du double du cube de la demi-somme de leurs racines et du triple de la somme de ces mêmes racines, multiplié par le quarré de leur demi-différence ; ce qui résulte évidemment de l'équation

$$(a+b)^3+(a-b)^3=2a^3+6ab^2 .$$

Cela posé, si l'on fait passer le terme tout connu du premier membre dans le second, on aura

$$x^3+px=-q .$$

Or, le premier membre de cette équation étant composé de deux parties, on peut faire en sorte qu'il devienne la somme de deux cubes; c'est ce qu'on voit aisément, car on a

$$x^3+px=2\frac{x^3}{8}+6\frac{x^3}{8}+px=2\left(\frac{x}{2}\right)^3+6\frac{x}{2}\left\{\frac{x^2}{4}+\frac{p}{3}\right\} ;$$

or, le dernier membre de cette double égalité est, d'après ce qui précède, égal à la somme de deux cubes ; et, comme le premier est d'ailleurs égal à $-q$, on aura, en formant les deux cubes,

$$\left\{\frac{x+\sqrt{x^2+\frac{4}{3}p}}{2}\right\}^3+\left\{\frac{x-\sqrt{x^2+\frac{4}{3}p}}{2}\right\}^3=-q .$$

Mais, le premier cube du premier membre de cette dernière équation étant égal à

$$\frac{x^3+px}{2}+\frac{1}{2}\left\{x^2+\frac{p}{3}\right\}\sqrt{x^2+\frac{4}{3}p} ,$$

sera aussi égale à

$$\frac{x^3+px}{2}+\sqrt{\left(x^2+\frac{p}{3}\right)^2\left(x^2+\frac{4}{3}p\right)} .$$

D'ailleurs, la partie rationnelle est égale à $-\frac{q}{2}$, et la quantité, sous le radical, revient à

$$\frac{x^6+2px^4+p^2x^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\left(\frac{x^3+px}{2}\right)^2+\frac{p^3}{27};$$

ainsi, puisque la partie affectée de x sous le radical est le quarré de la partie rationnelle, qui est elle-même égale à $-\frac{q}{2}$, il en résulte que le radical est égal à $-q+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$; et, comme le second cube ne diffère du premier que par le signe du radical, ce second cube sera égal à $-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$.

Si l'on tire les racines cubiques de chacun des deux cubes dont il s'agit, on aura les deux équations

$$\frac{x+\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{p}{3}}}{2}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^2}{27}}}.$$

$$\frac{x-\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{p}{3}}}{2}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}};$$

lesquelles étant ajoutées donneront

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Cette formule présente neuf combinaisons, parmi lesquelles trois seulement se rapportent à l'équation proposée. Il est facile de distinguer celles qui représentent les racines de cette équation, et quelles sont les équations auxquelles les six autres satisfont; et pour cette raison, nous nous dispenserons d'entrer dans cette discussion.

Il y a un cas qui a beaucoup exercé les géomètres, et qu'on désigne sous le nom de *cas irréductible* : c'est celui où chacune des deux quantités dont il faut extraire la racine cubique est imaginaire. Lorsque cette circonstance a lieu, les trois racines sont réelles. C'est ce qu'on peut démontrer très-facilement. Désignons, en effet, par a, b, respectivement, les racines cubiques des quantités qui sont sous les radicaux cubes, et qui sont propres, par leur addition, à donner une quantité réelle, en designant par α l'une quelconque des deux racines cubiques imaginaires de l'unité, les deux autres racines de la proposée seront

$$\alpha a+\alpha^2 b\,,\quad \alpha^2 a+\alpha b\,.$$

En mettant pour α sa valeur, ces deux racines prendront la forme

$$-\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\sqrt{-3}\,,\quad -\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\sqrt{-3}\,;$$

mais $a+b$ est supposé une racine réelle de la proposée; et nous avons vu ci-dessus que

$$a-b=\sqrt{x^2+\tfrac{4}{3}p}\,;$$

en représentant donc par r la racine déja supposée réelle, on aura

$$a-b=\sqrt{r^2+\tfrac{4}{3}p}\,;$$

mais on a vu plus haut que

$$\left(x^2+\frac{p}{3}\right)^2\left(x^2+\frac{4}{3}p\right)=4\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)$$

donc

$$\sqrt{x^2+\tfrac{4}{3}p}=\frac{2\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}{x^2+\frac{p}{3}}\,.$$

Ainsi, l'une des racines étant r, les deux autres seront données par la formule

$$-\frac{r}{2}\pm\frac{\sqrt{-3\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}}{r^2+\frac{p}{3}}\,;$$

et par conséquent elles seront toutes trois réelles.

Si l'on veut avoir une idée bien nette du cas irréductible, on observera que la quantité qui est sous le radical quarré, et qui est égale à

$$\left(x^2+\frac{p}{3}\right)^2\left(x^2-\frac{4}{3}p\right)$$

ne peut être négative qu'autant que le second facteur l'est lui-même, puisqu'on peut toujours supposer que l'une des valeurs de x est réelle. Ainsi, il faut que p soit négatif, ce qui est d'ailleurs évident, et que cette valeur de x soit moindre que $2\sqrt{\frac{p}{3}}$. On pourra donc toujours représenter cette valeur de x par $2\sqrt{\frac{p}{3}}\,\text{Cos.}\,\varphi$. Si l'on substitue cette expression pour x dans l'équation

$$x^3-px+q=0\ ,$$

on aura une équation qui, étant divisée par $2\sqrt{\frac{p^3}{27}}$, deviendra

$$4\text{Cos.}^3\varphi-3\text{Cos.}\varphi=-\sqrt{\frac{27q^2}{4p^3}}\ ;$$

or,

$$4\text{Cos.}^3\varphi-3\text{Cos.}\varphi=\text{Cos.}3\varphi\ ;$$

donc

$$\text{Cos.}3\varphi=-\sqrt{\frac{27q^2}{4p^3}}\ ;$$

cette équation servira à trouver l'angle φ, et par suite $\text{Cos.}\varphi$.

L'équation entre $\text{Cos.}\varphi$ et $\text{Cos.}3\varphi$ ayant lieu encore en remplaçant 3φ par $3\varphi+nc$ ou φ par $\varphi+\frac{n}{3}c$, n étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif, et c désignant la circonférence; il s'ensuit que les valeurs de x peuvent toutes être représentées par la formule

$$x=\sqrt{\frac{p}{3}}.\text{Cos.}\left(\varphi+\frac{nc}{3}\right)\ ;$$

laquelle, par les diverses suppositions faites pour n, ne donne que ces trois formes distinctes

$$2\sqrt{\frac{p}{3}}.\mathrm{Cos}.\varphi\,,$$

$$2\sqrt{\frac{p}{3}}.\mathrm{Cos}.\left(\varphi+\frac{c}{3}\right),$$

$$2\sqrt{\frac{p}{3}}.\mathrm{Cos}.\left(\varphi-\frac{c}{3}\right),$$

les valeurs de x, au nombre de trois, sont donc toutes réelles, et peuvent s'obtenir par les tables de sinus.

Nous terminerons ici ce que nous nous étions proposé de dire sur les équations du troisième degré; nous y ajouterons seulement qu'on aurait pu évaluer les deux cubes qui composent le premier membre de l'équation

$$\left\{\frac{x+\sqrt{x^2+\frac{p}{3}}}{2}\right\}^3+\left\{\frac{x-\sqrt{x^2+\frac{p}{3}}}{2}\right\}^3=-q\,;$$

en fonction des coefficiens p, q, d'une autre manière que nous ne l'avons fait; car le produit des deux cubes qui composent le premier membre, étant égal au cube du produit des racines, sera conséquemment égal à $-\frac{p^3}{27}$; et, comme leur somme est égale à $-q$, il en résulte que ces cubes sont les racines d'une équation du second degré dont le coefficient du second terme est égal à q, et dont le dernier terme est égal à $-\frac{p^3}{27}$; mais nous n'avons point voulu faire usage de ce moyen, afin d'éviter l'emploi d'une équation auxiliaire.

GÉOMÉTRIE APPLIQUÉE.

De la résolution des équations numériques du 3.me degré, par la parabole ordinaire;

Par M. GERGONNE.

ON a souvent besoin de résoudre des équations numériques du troisième degré; et il est très-utile dans ce cas de savoir, au moins, à l'avance, si l'équation proposée a deux racines imaginaires ou si, au contraire, ses trois racines sont réelles. Dans ce dernier cas, les formules générales refusant le service, il peut être commode d'avoir quelque procédé graphique qui fasse connaître les signes des racines, et qui en donne à peu près les valeurs. Monge (*) et antérieurement M. Bérard (**), ont indiqué, pour parvenir à ce but, l'usage de la parabole cubique; la méthode que je vais exposer, et qui n'emploie que la parabole ordinaire, ne paraît pas être connue.

On sait que, par un point donné comme on voudra sur le plan d'une parabole, on ne peut jamais lui mener que trois normales au plus; que deux de ces normales peuvent se confondre en une seule;

(*) *Correspondance sur l'école polytechnique*, tom. III, n.° 2, mai 1815; page 201.

(**) *Opuscules mathématiques* et *Méthodes nouvelles pour déterminer les racines des équations numériques*, page 33.

seule, et qu'enfin elles peuvent être toutes deux imaginaires; de sorte qu'alors il n'y a, par le point dont il s'agit, qu'une seule normale possible et réelle. Ainsi, les trois normales à une parabole présentent exactement les mêmes circonstances qu'offrent les trois racines d'une équation du troisième degré.

Ces circonstances dépendent, comme l'on sait, de la situation du point de départ des normales, par rapport à la développée de la courbe; c'est-à-dire que les trois normales sont réelles et inégales, ou que deux d'entre elles se confondent, ou enfin que ces deux sont imaginaires, suivant que ce point de départ est dans l'intérieur de l'angle curviligne formé par les deux branches de la développée ou sur un des côtés de cet angle ou enfin hors de ce même angle.

D'un autre côté; de même qu'en la supposant privée de second terme, ce qui est permis, une équation du troisième degré ne dépend que de deux données seulement, arbitraires l'une et l'autre; la position du point de départ des normales à la parabole dépend également de deux données arbitraires; savoir, les deux coordonnées de ce point.

Ainsi, tout concourt à établir la plus parfaite analogie entre le problème des normales à la parabole par un de ses points et la recherche des racines d'une équation numérique du troisième degré; voici la méthode qui nous a paru la plus propre à ramener la solution du dernier de ces deux problèmes à celle du premier.

Soit

$$x^2=4cy\,, \tag{1}$$

l'équation d'une parabole rapportée à la tangente à son sommet et à son diamètre principal, comme axe des x et des y; on sait que l'équation de sa développée sera

$$c\left(\frac{x}{2}\right)^2=\left(\frac{y-2c}{3}\right)^3\,; \tag{2}$$

de sorte qu'un point (a, b) sera dans l'angle curviligne formé par les deux branches de cette développée ou hors de cet angle, suivant qu'on aura

$$c\left(\frac{a}{2}\right)^2<\left(\frac{b-2c}{3}\right)^3\ , \qquad (3)$$

ou

$$c\left(\frac{a}{2}\right)^2>\left(\frac{b-2c}{3}\right)^3\ ; \qquad (4)$$

de sorte que, dans le premier cas, on pourra, par le point (a, b) mener à la courbe trois normales réelles, tandis que, dans le second, deux de ces normales seront imaginaires ; en particulier, deux des trois normales réelles seront égales, si l'on a précisément

$$c\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{b-2c}{3}\right)^3\ . \qquad (5)$$

Cela posé, cherchons les normales par le point (a, b). La tangente à la courbe, par un point (x', y') pris sur son périmètre, a, comme l'on sait, pour équation

$$x'x=2c(y+y')\ , \qquad (6)$$

avec la condition

$$x'^2=4cy'\ . \qquad (7)$$

La normale par le même point aura donc pour équation

$$2c(x-x')+x'(y-y')=0\ . \qquad (8)$$

Si donc on veut que cette normale soit la normale partant du point (a, b), il faudra que l'équation (8) soit satisfaite par les coordonnées de ce point, ce qui donnera

$$2c(a-x')+x'(b-y')=0\ . \qquad (9)$$

Nous aurons donc, entre les coordonnées x', y' du pied de la normale les deux équations (7, 9) au moyen desquelles il sera facile de les déterminer, et par suite, de construire ces normales.

On peut présentement supprimer les accens, dans ces deux équations, lesquelles deviendront ainsi

$$x^2=4cy\ , \qquad x(y-b)+2c(x-a)=0\ , \qquad (10)$$

et remplacer l'élimination par la construction des courbes exprimées par les équations (10); or, la première est la parabole donnée elle-même; donc la seconde est une courbe qui coupera la parabole donnée en trois points qui seront les pieds des normales partant du point (a, b). On voit d'ailleurs que cette seconde courbe est une hyperbole équilatère, ayant pour asymptotes l'axe des y et une parallèle à l'axe des x située à une distance $b-2c$ de cet axe. Cette hyperbole coupe d'ailleurs l'axe des x en un point pour lequel on a $x=\dfrac{2ac}{2c-b}$; ainsi on a tout ce qu'il faut pour la construire par points (*).

Si l'on élimine y entre les équations (10) on obtiendra l'équation

---

(*) Dans la recherche des pieds des normales partant du point (a, b), l'hyperbole peut être remplacée par une infinité d'autres courbes. Les équations (10), en effet, ayant lieu en même temps pour ces points, toute combinaison qu'on en pourra faire aura lieu en même temps qu'elles, et exprimera conséquemment une courbe coupant la parabole donnée aux points cherchés.

On peut, en particulier, remplacer l'hyperbole par un cercle. Si, en effet, on multiplie la dernière des équations (10) par x, en remplaçant x^2 par $4cy$, en vertu de la première, et divisant par $4c$, il viendra

$$y^2+(2c-b)y-\tfrac{1}{2}ax=0\ ;$$

ajoutant à cette équation la première des équations (10), il viendra enfin

$$x^2+y^2-\tfrac{1}{2}ax-(2c+b)y=0\ ;$$

$$x^3+4c(2c-b)x-8c^2a=0\,; \qquad (11)$$

qui fera connaître les abscisses des pieds des normales (*).

Cette équation étant du troisième degré et sans second terme, on peut la comparer à l'équation générale

$$x^3+px+q=0\,; \qquad (12)$$

ce qui donne

$$4c(2c-b)=p\,, \qquad -8c^2a=q\,;$$

d'où on tire

équation d'un cercle qui passe par l'origine, c'est-à-dire, par le sommet de la courbe, et dont le centre est donné par les deux équations

$$x=\tfrac{1}{4}a\,, \qquad y=c+\tfrac{1}{4}b\,.$$

Cette solution est exactement celle qu'a donnée M. BÉRARD, dans ses *Opuscules mathématiques*, page 109, et à laquelle il est parvenu d'une manière un peu différente.

(*) De ce que cette équation est sans second terme il en résulte que *les trois normales partant d'un même point du plan d'une parabole ne sauraient jamais se terminer d'un même côté de son axe*, et que *la somme des distances à l'axe des pieds des normales qui tombent d'un même côté de cet axe est égale à la distance à l'axe du pied de la troisième normale.* On pourra donc, avec la règle et le compas seulement, résoudre ce problème : *Étant données deux normales à une parabole, mener, par leur point de concours, une troisième normale à la courbe ?* Si deux des normales se confondent, auquel cas elles doivent être tangentes à la développée, la distance de leur pied à l'axe sera moitié de la distance de la troisième au même axe ; ce qui fournit un moyen simple de résoudre ce problème : *Étant donnée une normale à la parabole, trouver en quel point elle coupe la développée de cette courbe*, développée que l'on suppose d'ailleurs n'être point encore tracée. On a donc ainsi une méthode fort simple pour déterminer rigoureusement tant de points qu'on voudra de la développée d'une parabole donnée, ainsi que la tangente à cette développée en chacun de ces points.

$$a=-\frac{q}{8c^2}\,, \qquad b=\frac{8c^2-p}{4c}=2c-\frac{p}{4c}\,. \qquad (13)$$

Ainsi, on pourra facilement construire le point duquel menant des normales à la parabole, les abscisses de leurs pieds seront les trois racines de l'équation (12).

Suivant que ce point tombera dans l'angle formé par les deux branches de la développée, ou sur l'une de ces deux branches ou hors de cet angle, l'équation (12) aura ses trois racines réelles et inégales ou deux racines égales ou enfin une seule racine réelle. En substituant les valeurs (13) dans les inégalités (3, 4) et dans l'équation (5), on trouve d'ailleurs, en transposant

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0\,, \quad \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0\,, \quad \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0\,,$$

conformément aux théories connues.

Une fois le point de départ des normales déterminé, si l'on veut connaître à peu près les valeurs et les signes des racines, il faudra mener ces normales, et déterminer les abscisses de leurs pieds qui seront les racines cherchées. Ces normales seront faciles à tracer par tâtonnement, puisqu'il ne s'agira que de chercher à décrire de leur point de départ, comme centre commun, des arcs de cercles tangens à la parabole ; leurs points de contact seront les pieds des normales. S'il arrivait que l'un d'eux touchât et coupât à la fois la courbe, l'équation (12) aurait deux racines égales ; et il n'y aurait plus qu'une seconde normale à chercher. Au surplus, si la développée était tracée, en remarquant que les normales cherchées doivent lui être tangentes, on leverait tout-à-fait l'espèce d'incertitude qui pourrait rester sur le point de contact de la parabole avec chaque arc de cercle (*).

(*) On pourra aussi mener ces normales par le procédé direct de l'avant-dernière note.

Pour faire usage de ce procédé, il faut avoir une feuille de carton ou de cuivre sur laquelle on tracera avec soin une parabole, dont la distance c du sommet au foyer soit divisée en 10, 100, 1000, ... parties égales suivant sa grandeur; et l'on prendra pour unité l'une de ces divisions. On fera bien de tracer aussi sur le même carton ou cuivre la développée de la courbe (*); et il ne s'agira plus alors que d'opérer ainsi qu'il a été prescrit ci-dessus.

Au surplus, comme, dans des cas particuliers, le point (a, b) pourrait tomber hors du carton, ou avoir des coordonnées trop petites; on fera bien de substituer à l'équation (12) l'equation

$$x^3+\lambda^2px+\lambda^3q=0\ , \qquad (14)$$

dans laquelle λ est une indéterminée, plus grande ou plus petite que l'unité; on aura alors

$$a=-\frac{\lambda^3q}{8c^2}\ , \qquad b=\frac{8c^2-\lambda^2p}{4c}\ ;$$

on disposera de l'indéterminée λ de manière à rendre a et b d'une grandeur telle qu'on les désirera, et, lorsqu'on aura obtenu les racines de l'équation (14), il ne s'agira que de les diviser par λ, pour en conclure celles de l'équation (12).

Nous ne donnons, au reste, cette méthode qu'en faveur des géomètres à qui ces sortes de spéculations offrent quelque intérêt. Nous estimons que de toutes les méthodes de résolution des équations numériques du 3.me degré, celles qu'on déduit de la considération des fonctions circulaires sont incomparablement les plus courtes et les plus simples.

(*) On pourra la tracer par points, par le procédé de la dernière note.

ANALISE INDÉTERMINÉE.

Théorème sur les puissances des nombres ;

Par M. Frégier, professeur de mathématiques au collége de Troye, ancien élève de l'école polytechnique.

Théorème. « Toute puissance a^m d'un nombre quelconque a » est égale à la somme des termes d'une progression par différences ; » dont le premier terme est 1, dont le nombre des termes est a, » et dont la raison est égale à la somme des termes de la pro- » gression géométrique $2+2a+2a^2+2a^3+\ldots\ldots+2a^{m-2}$. »

Démonstration. Designons par S la somme des termes de la progression arithmétique dont il s'agit, et par d la raison de cette progression ; puisque son premier terme est 1, et le nombre de ses termes a, son dernier terme sera $1+(a-1)d$, d'où il suit qu'on aura

$$S=[1+(a-1)d]\frac{a}{2}\,;$$

mais, par hypothèse, on a

$$d=2a+2a^2+\ldots\ldots\ldots+2a^{m-2}=2\frac{a^{m-1}-1}{a-1}\,;$$

donc

$$(a-1)d=2(a^{m-1}-1)\,;$$

ce qui donne, en substituant

$$S=a^m,$$

comme l'énonce le théorème.

Si $m=2$, on aura $2+2a+\ldots+2a^{m-2}=2$, d'où

$$a^2=1+3+5+7+\ldots\ldots+(2a-1),$$

propriété connue.

Mais, si $m=3$, ce qui donne $2+2a+\ldots+2a^{m-2}=2(1+a)$; on aura

$$a^3=1+(3+2a)+(5+4a)+(7+6a)+\ldots+[(2a-1)+2(a-1)a];$$

propriété curieuse des nombres cubes, qu'il est d'ailleurs facile de vérifier immédiatement.

En faisant successivement $a=1, 2, 3, 4, \ldots$, on a

$$1=1^3=1;$$

$$8=2^3=1+7;$$

$$27=3^3=1+9+17,$$

$$64=4^3=1+11+21+31;$$

$$125=5^3=1+13+25+37+49;$$

$$216=6^3=1+15+29+43+57+71;$$

$$343=7^3=1+17+33+49+65+81+107,$$

. . . .

Chacun de ces cubes forme donc une progression arithmétique dont le premier terme est l'unité, dont le nombre des termes est la racine du cube, et dont la raison est double de cette racine augmentée d'une unité.

ANALISE

ANALISE ALGÉBRIQUE.

Sur la méthode de M. Wronski, pour la résolution générale des équations;

Par M. Gergonne.

A la page 51 du troisième volume de ce recueil, j'ai donné une idée succincte de la méthode proposée par M. Wronski, pour la résolution générale des équations de tous les degrés. J'ai remarqué que la forme que ce géomètre supposait devoir être celle des racines était exactement celle que Bezout, long-temps avant lui, leur avait déjà assignée ; et qu'en conséquence son procédé ne présentait autre chose de nouveau sinon que, pour parvenir à la réduite, il substituait à la méthode de Bezout une méthode à peu près impraticable, au-delà du troisième degré. J'ai indiqué, pour parvenir à cette même réduite, un procédé fort simple qui permet de la former directement sans aucune élimination, et par des calculs constamment symétriques. Ce procédé mettant dans le plus grand jour tout le mécanisme du calcul, il m'a été facile d'en déduire cette conséquence que la méthode de M. Wronski devait, comme celle de Bezout, se trouver en défaut dès le quatrième degré, du moins tant qu'on ne faisait pas entrer en considération qu'une quatrième puissance est le quarré d'un quarré.

A la page 137 du même volume, j'ai dit qu'au contraire, en ayant égard à cette circonstance, particulière au quatrième degré, la méthode de M. Wronski pourrait bien s'étendre jusque-là, et j'ai même donné la réduite à laquelle je pensais que son application à ce degré devait conduire.

Enfin, à la page 206 du même volume, j'ai employé un troisième article à repondre à une réclamation contre les deux premiers que M. Wronski avait fait insérer dans plusieurs journaux.

J'ai reconnu posterieurement que mes calculs de la page 138 étaient fautifs, et que les coefficiens

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3\ ,$$

$$\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3\ ,$$

$$\xi_1\xi_2\xi_3\ ,$$

ne sauraient être tous trois des fonctions symétriques de x_1, x_2, x_3, x_4, et, comme tels, exprimables rationnellement en p, q, r; que dans le seul cas où $\rho=1$; ce que je n'avais dû ni eu l'intention d'admettre.

La vérité est que je n'avais point exécuté les calculs indiqués en cet endroit, et que, trop prévenu en faveur de la méthode de M. Wronski, j'avais voulu tout au moins la signaler comme applicable au quatrième degré. Je m'étais figuré que, substituant, comme il le fait, dans l'expression des racines, des racines quatrièmes à des racines quarrées, il devait obtenir une réduite ayant pour ses racines les quarrés des racines de la réduite ordinaire. Cela arriverait en effet, s'il n'y avait que cette unique substitution; mais l'introduction de la quantité ρ empèche qu'il en soit ainsi.

Voilà donc cette méthode si fastueusement annoncée qui ne saurait seulement soutenir l'épreuve jusqu'au 4.me degré; même en ayant égard à des circonstances individuellement propres à ce degré. Tout en continuant donc de rendre hommage à la vaste érudition de M. Wronski en mathématiques, il faut attendre, pour lui accorder quelque confiance, à titre d'inventeur, qu'il ait prouvé sa mission par d'autres prodiges.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration de la fausseté d'un théorème d'analise, énoncé aux pages 36 et 71 de ce volume ;

Par M. TÉDENAT, correspondant de l'académie royale des sciences.

Au Rédacteur des Annales ;

MON CHER PROFESSEUR,

POUR occuper les loisirs que me laisse abondamment, sur-tout dans cette saison, ma résidence dans un pays qui ne saurait offrir de nombreux sujets de distraction, je m'étais imposé, par forme de tâche, la démonstration du théorème énoncé aux pages 36 et 71 du présent volume; mais un examen un peu sérieux de son énoncé m'a bientôt convaincu que, du moins au-delà du quatrième degré, lors même que les sommets de la courbe parabolique qui correspond à l'équation proposée sont tous réels, ce théorème peut se trouver en défaut dans un si grand nombre de cas que l'on serait tout aussi bien fondé à adopter la proposition contraire. Persuadé comme je le suis, et comme vous l'êtes sans doute vous-même, qu'on ne sert pas les sciences d'une manière moins utile en repoussant, dès leur abord, les doctrines erronées qu'en établissant des vérités nouvelles, je m'empresse de vous administrer la preuve de mon assertion.

Le théorème dont il s'agit de démontrer la fausseté, réduit à son énoncé le plus simple, revient à ce qui suit :

Soit $X=0$ *une équation en* x *d'un degré quelconque* m, *et soit* $X'=0$ *sa dérivée. Si, entre* $X=y$ *et* $X'=0$, *on élimine* x, *on parviendra à une équation* $Y=0$ *en* y, *dont le degré sera* $m-1$; *soient* v *et* p, *respectivement, le nombre de ses variations et celui de ses permanences; ce qui donnera* $v+p=m-1$.

Si la proposée $X=0$ *est de degré impair, le nombre de ses racines imaginaires sera*

$$\pm(v-p)\ ;$$

et si, au contraire, elle est d'un degré pair, le nombre de ses racines imaginaires sera

$$\pm(v-p+1)\ .$$

Cela posé, soit l'équation du cinquième degré

$$x^5-5x^4-290x^3+890x^2+25025x-25621=0\ , \qquad (X=0)$$

elle peut être mise successivement sous les diverses formes que voici :

$$(x-1)(x^4-4x^3-294x^2+596x+25621)=0\ ,$$

$$(x-1)(x^2-2x-149+6\sqrt{-95})(x^2-2x-149-6\sqrt{-95})=0\ ;$$

$$(x-1)\{x-1+\sqrt{150+6\sqrt{-95}}\}\{x-1+\sqrt{150-6\sqrt{-95}}\}\times$$
$$\{x-1-\sqrt{150+6\sqrt{-95}}\}\{x-1-\sqrt{150-6\sqrt{-95}}\}=0\ ;$$

ainsi, elle a bien incontestablement une seule racine réelle et quatre racines imaginaires. Appliquons-lui le procédé indiqué dans l'énoncé du théorème en discussion.

Sa dérivée est

$$5x^4-20x^3-870x^2+1780x+25025=0\ ;$$

ou, en simplifiant,

$$x^4-4x^3-174x^2+356x+5005=0\ ; \qquad (X'=0)$$

équation qui revient à

$$(x-13)(x-7)(x+5)(x+11)=0\ ;$$

les abscisses des quatre sommets de la courbe parabolique

$$(x-1)(x^4-4x^3-294x^2+596x+25621)=y\ ; \qquad (X=y)$$

sont donc $+13$, $+7$, -5, -11; on aura donc les ordonnées de ces mêmes sommets, en mettant successivement ces valeurs pour x dans l'équation $(X=y)$. En conséquence, on trouvera pour les équations des quatre sommets, tous réels,

$$\begin{array}{ll} x=+13\ ; & y=+16417\ ; \\ x=+\ 7\ ; & y=+\ 6913\ ; \\ x=-\ 5\ , & y=-\ 6911\ ; \\ x=-11\ ; & y=-16415\ ; \end{array}$$

l'équation $(Y=0)$ sera donc

$$(y-16417)(y-6913)(y+6911)(y+16415)=0\ ;$$

c'est-à-dire,

$$\left.\begin{array}{r} y^4 \\ -4y^3 \\ -317260794y^2 \\ +6345215969y \\ +1287848730020865 \end{array}\right\} = 0\ ; \qquad (Y=0)$$

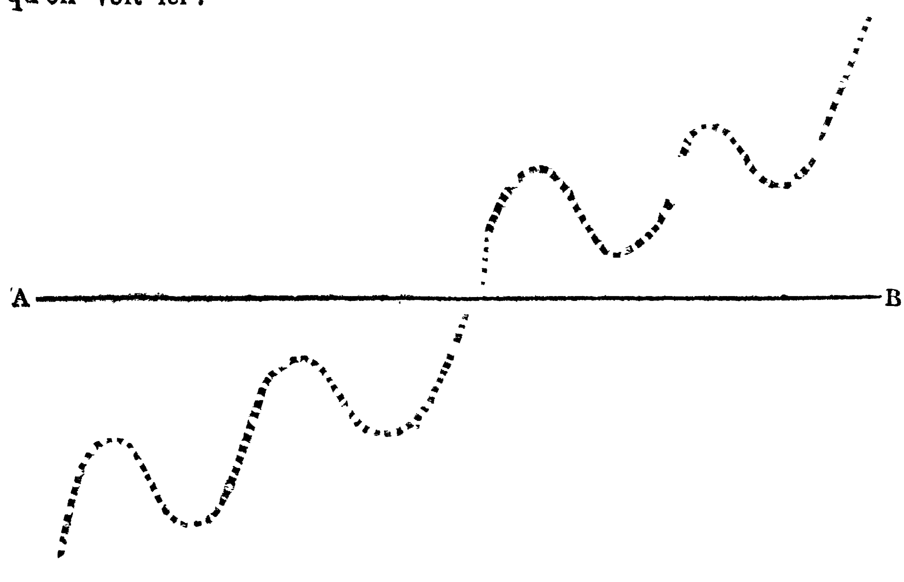
On a donc ici $\nu=2$, $p=2$; puis donc que le degré de la proposée est impair, le nombre de ses racines imaginaires, suivant le théorème, devrait être

$$\pm(2-2)=0\ ;$$

tandis que nous avons vu que les racines de cette sorte y sont au nombre de *quatre*.

Nous pourrions très-bien terminer ici ; car il y a entre la démonstration de la vérité d'une proposition et celle de sa fausseté cette différence très-remarquable que la première ne saurait être établie que par un raisonnement général, très-souvent difficile à découvrir, et souvent plus difficile encore à énoncer clairement ; tandis qu'au contraire, pour prouver qu'une proposition est fausse, il suffit simplement, ainsi que nous venons de le faire, de la trouver en défaut dans un cas particulier quelconque. Cependant, pour ne rien laisser à désirer sur ce sujet, nous allons montrer que, sans exécuter aucun calcul, rien n'est plus aisé que de s'assurer que, passé le quatrième degré, le théorème dont il s'agit sera en défaut tout autant et tout aussi souvent qu'on le voudra.

Soit l'équation $X=o$ d'un degré impair quelconque ; et supposons que la courbe parabolique dont l'équation est $y=X$ ait le cours qu'on voit ici :



AB étant l'axe des x, et l'origine étant quelconque sur cette droite.

Nous n'avons pu figurer que quatre sommets positifs et quatre négatifs ; mais les uns comme les autres peuvent être en nombres pairs quelconques. Soient donc, en général, $2p$ le nombre des premiers, et $2q$ le nombre des derniers ; le degré de la proposée sera ainsi $2p+2q+1$; et, comme elle n'aura évidemment qu'une seule racine réelle, le nombre de ses racines imaginaires sera nécessairement

$$2p+2q\,.$$

D'un autre côté, l'équation $Y=0$ du degré $2p+2q$ ayant $2p$ racines positives, et $2q$ racines négatives, aura conséquemment $2p$ variations et $2q$ permanences ; donc, suivant le théorème, le nombre des racines imaginaires de la proposée, $X=0$, devrait être

$$\pm 2(p-q)\ ;$$

nombre qui pourra différer du véritable autant qu'on le voudra.

Mais la courbe, toujours supposée de degré impair, après avoir coupé l'axe des x, et avoir eu, au-dessous de cet axe, un nombre impair quelconque de sommets négatifs, pourrait, en remontant, le couper de nouveau, avoir au-dessus un nombre impair quelconque de sommets positifs, redescendre encore, en coupant une troisième fois l'axe des x, et ainsi de suite. Supposons qu'elle le coupe $2n+1$ fois ; nous aurons ainsi $2n$ séries de sommets positifs dont ceux de la première série seulement seront en nombre pair ; de manière que nous pourrons représenter les nombres de sommets successifs de ces séries par

$$2p_1\ ,\quad 2p_2+1\ ;\quad 2p_3+1\ ,\ldots\ldots 2p_{2n}+1\ .$$

Nous aurons pareillement $2n$ séries de sommets négatifs dont ceux de la dernière série seulement seront en nombre pair, de sorte que nous pourrons représenter successivement les nombres des sommets de ces dernières séries par

$$2q_1+1\ ,\quad 2q_2+1\ ,\quad 2q_3+1\ ,\ldots\ldots\ldots 2q_{2n}\ ;$$

le nombre total des sommets des deux séries sera donc

$$2(p_1+p_2+\dots+p_{2n})+2(q_1+q_2+\dots+q_{2n})+2(2n-1)\ ;$$

le degré de la proposée $X=0$ sera donc

$$2(p_1+p_2+\dots+p_{2n})+2(q_1+q_2+\dots+q_{2n})+4n-1\ ;$$

et puisqu'elle est supposée n'avoir que $2n+1$ racines réelles, le nombre de ses racines imaginaires sera

$$2(p_1+p_2+\dots+p_{2n})+2(q_1+q_2+\dots+q_{2n})+2(n-1)\ .$$

Mais, d'un autre côté, le nombre des variations de l'équation $Y=0$ étant ici

$$2(p_1+p_2+p_3+\dots+p_{2n})+(2n-1)\ ;$$

et le nombre de ses permanences

$$2(q_1+q_2+q_3+\dots+q_{2n})+(2n-1)\ ;$$

le nombre des racines imaginaires de la proposée $X=0$, devrait être, suivant le théorème

$$\pm 2\{(p_1+p_2+\dots+p_{2n})-(q_1+q_2+\dots+q_{2n})\}\ ;$$

nombre qui pourra différer du véritable autant qu'on le voudra.

Dans les degrés pairs, les choses se passeront encore à peu près de la même manière. Seulement les branches extrêmes de la courbe seront toutes deux situées au-dessus de l'axe des x ; de sorte qu'en désignant par $2n$ le nombre des racines réelles de la proposée, on aura $n+1$ séries de sommets positifs telles que ceux des deux séries extrêmes seront en nombre pair et tous les intermédiaires en nombre impair ; on aura ensuite n séries de sommets négatifs, en nombre impair dans chaque série ; de manière que les nombres de la première série pourront être représentés par

$2p_1$

$$2p_1\ ;\quad 2p_2+1\ ,\quad 2p_3+1\ ,\ldots\ldots\ldots\ldots 2p_{n+1}\ ,$$

et ceux de la seconde par

$$2q_1+1\ ,\quad 2q_2+1\ ,\quad 2q_3+1\ ,\ldots\ldots\ldots 2q_n+1\ ;$$

le nombre total des sommets, tant positifs que négatifs, sera donc

$$2(p_1+p_2+\ldots\ldots+p_{n+1})+2(q_1+q_2+\ldots\ldots+q_n)+(2n-1)\ ;$$

de sorte que le degré de la proposée $X=0$ sera

$$2(p_1+p_2+\ldots\ldots+p_{n+1})+2(q_1+q_2+\ldots\ldots+q_n)+2n\ ;$$

puis donc que nous lui avons supposé $2n$ racines réelles, le nombre de ses racines imaginaires devra être

$$2(p_1+p_2+p_3+\ldots\ldots+p_{n+1})+2(q_1+q_2+q_3+\ldots\ldots+q_n)\ .$$

D'un autre côté, le nombre des variations de l'équation $Y=0$ étant ici

$$2(p_1+p_2+p_3+\ldots\ldots\ldots+p_{n+1})+(n-1)\ ,$$

et le nombre de ses variations

$$2(q_1+q_2+q_3+\ldots\ldots+q_n)+n\ ;$$

le nombre des racines imaginaires de la proposée devrait être, suivant le théorème,

$$\pm 2\{(p_1+p_2+\ldots\ldots+p_{n+1})-(q_1+q_2+\ldots\ldots+q_n)\}\ ;$$

nombre qui diffèrera du véritable tout autant qu'on le voudra.

Nous pensons qu'en voilà bien suffisamment pour établir qu'au-delà du quatrième degré, ce théorème ne saurait pas plus être admis que toute autre règle arbitraire et de pure imagination que l'on voudrait lui substituer.

La moralité à déduire de tout ceci ; car, pourquoi les fables en seraient-elles seules susceptibles ? c'est que les plus habiles peuvent faillir, tout aussi bien que les plus faibles ; que conséquemment on ne doit jamais refuser à autrui l'indulgence que l'on peut être bientôt dans le cas de réclamer pour soi-même ; qu'il faut soigneusement se garder de toute précipitation et bien mûrir ses idées avant de les faire éclore ; et qu'enfin on ne doit jamais affirmer et admettre comme *fait* certain que cela seulement qui est rigoureusement et généralement démontré.

Agréez, etc.

St-Geniez (de l'Aveyron), le 25 d'octobre 1818.

Examen du même théorème, pour les quatre premiers degrés;

Par M. Servois, conservateur du Muséum d'artillerie. (*)

On ne saurait se refuser à regarder le théorème énoncé aux pages 36 et 71 du présent volume des *Annales*, comme étant d'une importance tout-à-fait majeure ; et, s'il était vrai, son invention ferait époque dans l'histoire de la résolution des équations numériques ; car, malgré la longueur des calculs qu'il nécessite, il réduit à $m-1$ les conditions de réalité des racines d'une équation du degré m; tandis que Lagrange, par deux voies différentes, trouve que le nombre de ces conditions est $\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}$.

J'élimine x entre $X=y$ et $X'=0$: le résultat, $Y=0$, est, sans contredit, une équation dont les racines sont les ordonnées des différens *sommets* (points auxquels la tangente est parallèle à l'axe des x) de la courbe parabolique qu'exprime l'équation $X=y$; points dont les abscisses sont les racines de l'équation $X'=0$.

Supposons que les racines de $X=0$ soient *toutes réelles*; celles de l'équation $X'=0$ seront *toutes réelles* aussi ; ainsi que celles de $Y=0$ qui, dans ce cas, seront alternativement positives et négatives. Supposons ensuite que les racines de $X=0$ ne soient *pas toutes réelles* : celles de $X'=0$ *seront* ou ne *seront*

(*) Ceci est extrait d'une lettre de M. Servois au *Rédacteur des Annales* et n'avait point été destiné pour l'impression.

J. D. G.

pas toutes réelles. Dans le premier cas, la discussion que présente le mémoire de la page 60 est lumineuse et me satisfait ; ainsi j'admets le théorème jusqu'ici.

Dans le second cas, c'est-à-dire, lorsqu'à la fois la proposée et sa dérivée $X'=0$ ont toutes deux des racines imaginaires, la chose me semble encore problématique, pour ne pas dire plus.

1.° Quand $X'=0$ a des racines imaginaires, généralement parlant, $Y=0$ en a aussi et autant qu'elle ; car à des sommets imaginaires doivent répondre en général des coordonnées imaginaires (*).

2.° L'application du *Théorème de Descartes* à une équation suppose, comme l'on sait, que cette équation a toutes ses racines réelles ; on s'impose donc ici le travail d'induction ou de démonstration *à priori* qui puisse établir la correspondance entre les cas de réalité de toutes les racines de $Y=0$ et ceux de la non réalité de tout ou partie de ces mêmes racines : c'est un travail de la première sorte que paraît avoir commencé l'auteur du mémoire déjà cité : suivons le un instant.

Au troisième degré ; supposons que $X=0$ ait deux racines imaginaires ; et admettons d'abord que $X'=0$ ait ses deux racines réelles ; il est visible que $Y=0$ aura ses deux racines réelles et de même signe, c'est-à-dire, toutes deux positives ou toutes deux négatives ; et par conséquent, par le théorème de Descartes ou deux variations ou deux permanences. Si, au contraire, les deux racines de l'équation $X'=0$ sont imaginaires, celles de $Y=0$ le seront aussi, et parce que l'équation est de degré pair, son dernier terme sera positif ; on n'aura donc, pour la succession des signes de ses termes, que les deux formes possibles

(*) Il ne pourrait guère y avoir d'exception que pour le cas où l'équation $X=0$ ne renfermant que des puissances paires de x, l'équation $X'=0$ aurait quelques racines imaginaires de la forme $x=a\sqrt{-1}$; mais, en posant $x^2=z$, on ferait sortir l'équation de ce cas d'exception, et l'on en ramenerait la discussion à celle d'une équation d'un degré moitié moindre.

J. D. G.

$$+\,,\,-\,,\,+\,;$$
$$+\,,\,+\,,\,+\,;$$

qui donnent encore deux variations ou deux permanences, comme dans le cas des racines réelles de $X'=0$; donc le théorème vaut pour le troisième degré.

Au quatrième degré. Supposons d'abord que $X=0$ ait deux racines imaginaires, et admettons en outre que $X'=0$ ait ses trois racines réelles ; $Y=0$ aura aussi ses trois racines réelles, deux positives et une négative, ou bien trois négatives; ce qui sera indiqué par deux variations et une permanence, ou bien par trois permanences ; si, au contraire, nous admettons que X' ait deux racines imaginaires; $Y=0$ en aura en même nombre ; mais sa racine réelle est *négative* ; et, comme d'ailleurs le produit des deux racines imaginaires est positif, le produit de ses trois racines sera négatif ; le dernier terme de $Y=0$ doit donc être positif, ce qui ne permet, pour la succession des signes de ses termes, que les quatre formes suivantes

$$+\,,\,+\,,\,+\,,\,+\,;\ \textit{trois permanences}\,;$$

$$\left.\begin{array}{l} +\,,\,-\,,\,+\,,\,+\,; \\ +\,,\,-\,,\,-\,,\,+\,; \\ +\,,\,+\,,\,-\,,\,+\,; \end{array}\right\}\ \textit{deux variations et une permanence}\,;$$

donc encore le théorème a lieu jusqu'ici.

Supposons présentement que $X=0$ ait ses quatre racines imaginaires, et admettons que $X'=0$ a ses trois racines réelles : celles de $Y=0$ le seront aussi et seront de plus toutes trois positives, ce qui correspond à trois variations, et justifie conséquemment le théorème. Admettons ensuite deux racines imaginaires dans $X'=0$. Il y en aura également deux dans $Y=0$; et sa racine réelle sera positive ; ce qui exige que son dernier terme soit négatif ; on aura donc, pour les formes possibles, dans la succession des signes de ses termes

$$\left.\begin{array}{l}+\,,+\,,+\,,-\,;\\+\,,+\,,-\,,-\,;\\+\,,-\,,-\,,-\,;\end{array}\right\}$$ *une variation et deux permanences ;*

$+\,,-\,,+\,,-\,;$ *trois variations* ;

Ces indices sont donc plus étendus que ceux du cas précédent ; car le premier, *une variation et deux permanences* est celui de la réalité des quatre racines de la proposée $X=0$; donc, si je ne m'abuse (et je désire que cela soit) le théorème est en défaut dès le quatrième degré. Du moins est-il certain que l'induction qui est l'objet du mémoire cité n'est ni assez développée ni assez prolongée, et qu'elle n'arrache pas l'assentiment du lecteur pour le cas général (*).

(*) Tout se réduit évidemment, dans cette question, à savoir si les trois premières formes sont purement hypothétiques, ou si, au contraire, quelqu'une d'entre elles peut réellement s'offrir au calculateur ; or, pour cela, il suffit d'un seul exemple ; car c'est ici, et ici seulement qu'il est permis de s'appuyer des *faits*, et d'invoquer en sa faveur le témoignage de l'experience.

Soit donc prise l'équation

$$x^4+7656x^2-61504x+11955852=0\,; \qquad (X=0$$

qui revient à

$$(x^2+16x+5878)(x^2-16x+2034)=0\,,$$

ou encore à

$$\{(x+8)^2+5814\}\{(x-8)^2+1970\}=0\,;$$

et qui a ainsi, bien certainement ses quatre racines imaginaires ; sa dérivée est

$$x^3+3828x-15376=0\,, \qquad (X'=0)$$

ou

$$(x^2+4x+3844)(x-4)=0\,,$$

ou encore

$$\{(x+2)^2+3840\}(x-4)=0\,.$$

Les abscisses des sommets de la courbe parabolique dont l'equation est

Au surplus, il me semble que le théorème serait encore assez important quand on lui imposerait pour limite ou condition de vérité la réalité des racines de l'équation $X'=0$; car je crois qu'on pourrait traiter $X'=0$ comme la proposée, par le moyen de $X''=0$, et ainsi de suite; et recueillir de l'ensemble des résultats les caractères de réalité des racines de la proposée; cette voie serait encore plus courte que celle que propose Lagrange, d'après de Gua, dans la note VIII de la *Résolution des équations numériques* (*).

$$\{(x+8)^2+5814\}\{(x-8)^2+1970\}=y\,, \qquad (X=y)$$

sont donc

$$x=4\,; \qquad x=-2\pm16\sqrt{-15}\,,$$

d'où l'on conclura, pour les ordonnées des mêmes sommets

$$y=11832588\,, \qquad y=-2636100\pm982040\sqrt{-15}\,;$$

l'équation (Y=o) sera donc ici

$$(y+2636100+983040\sqrt{-15})(y+2636100-983040\sqrt{-15})(y-11832588)=0$$

ou

$$(y^2+5272200y+21444537834000)(y-11832588)=0\,;$$

ou enfin

$$\left.\begin{array}{r} +y^3 \\ -6560388y^2 \\ -40939232619600y \\ -253744381040134392000 \end{array}\right\}=0\,; \qquad (Y=0)$$

équation qui répond à la troisième des quatre formes du texte, et d'où, par l'application du théorème, on se trouverait faussement induit à conclure que la proposée a ses quatre racines réelles.

Il demeure donc avéré que le théorème dont il s'agit ici ne saurait même se soutenir au-delà du troisième degré.

(*) Malheureusement il demeure établi par la discussion à laquelle s'est livré M. Tédenat, dans le précédent article, que, même avec cette limitation, le théorème ne saurait être admis au-delà du quatrième degré.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. QUEL est le lieu des centres de toutes les sections circulaires faites dans une surface donnée du second ordre ?

II. Quel est le lieu des foyers de toutes les sections faites dans une surface donnée du second ordre par des plans parallèles à un plan fixe donné ?

III. Quel est le lieu des foyers de toutes les sections faites dans une surface donnée du second ordre, par des plans parallèles à une droite fixe donnée ?

IV. Quel est le lieu des foyers de toutes les sections faites dans une surface donnée du second ordre par des plans passant par un point fixe donné ?

Problème d'analise indéterminée.

Démontrer que la formule $(1+2a)^{2^n \cdot k}-1$, dans la quelle le nombre entier n n'est pas nul, est toujours exactement divisible par 2^{n+2} ?

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstration d'un fait de calcul algébrique très-important et très-remarquable, et des principales consequences qui en resultent ;

Par M. de Stainville, répétiteur d'analise à l'école royale polytechnique.

Soit la série indéfinie

$$1+a\frac{z}{1}+a(a+k)\frac{z^2}{1.2}+a(a+k)(a+2k)\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots;$$

et soit une autre série

$$1+b\frac{z}{1}+b(b+k)\frac{z^2}{1.2}+b(b+k)(b+2k)\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots,$$

ne différant uniquement de celle-là qu'en ce que b y a pris la place de a. Nous nous proposons, en premier lieu, de démontrer que le produit de ces deux séries est une série composée en $(a+b)$ de la même manière que la première l'est en a et la seconde en b; c'est-à-dire, que ce produit est

$$1+(a+b)\frac{z}{1}+(a+b)(a+b+k)\frac{z^2}{1.2}+(a+b)(a+b+k)(a+b+2k)\frac{z^3}{1.2.3}+\dots$$

Pour y parvenir, assurons-nous d'abord de la forme des premiers termes du développement de ce produit ; nous trouverons, pour ces premiers termes

$$\begin{array}{l|l|l|l}
1+a & \frac{z}{1}+a(a+k) & \frac{z^2}{1.2}+a(a+k)(a+2k) & \frac{z^3}{1.2.3}+\dots \\
+b & \quad + \quad 2ab & \quad + \quad 3ab(a+k) & \quad +\dots \\
 & \quad +b(b+k) & \quad + \quad 3ab(b+k) & \quad +\dots \\
 & & \quad +b(b+k)(b+2k) & \quad +\dots \\
 & & & \quad +\dots
\end{array}$$

On voit d'abord que le coefficient de $\frac{z}{1}$ est $a+b$. Celui de $\frac{z^2}{1.2}$ peut se décomposer en ces deux parties

$$a[(a+k)+b] \qquad \text{ou} \qquad a(a+b+k)\ ,$$

$$b[(b+k)+a] \qquad \text{ou} \qquad b(a+b+k)\ ;$$

dont la somme sera conséquemment

$$(a+b)(a+b+k)\ .$$

Le coefficient de $\frac{z^3}{1.2.3}$ peut également se décomposer en ces deux parties

$$a\{(a+k)(a+2k)+2b(a+k)+b(b+k)\}$$

$$b\{(b+k)(b+2k)+2a(b+k)+a(a+k)\}$$

or, le multiplicateur de a, dans la première partie, est évidemment ce que devient le coefficient de $\frac{z^2}{1.2}$, lorsqu'on y change a en $a+k$; et le multiplicateur de b dans la seconde est ce que devient ce même coefficient, lorsqu'on y change b en $b+k$; puis donc que nous avons trouvé que le coefficient de $\frac{z^2}{1.2}$ revenait à $(a+b)(a+b+k)$, il en résulte que le multiplicateur de a, dans la première partie du coefficient de $\frac{z^3}{1.2.3}$ et celui de b dans la seconde sera également

$$(a+b+k)(a+b+2k)\ ;$$

l'ensemble de ces deux parties, ou le coefficient de $\frac{z^3}{1.2.3}$, sera donc

$$a(a+b+k)(a+b+2k)+b(a+b+k)(a+b+2k)\ ;$$

c'est-à-dire,

$$(a+b)(a+b+k)(a+b+2k)\ ;$$

Il demeure donc prouvé, par ce qui précède, que du moins la loi dont il s'agit se soutient pour les quatre premiers termes du produit de nos deux séries; et il ne serait pas difficile de s'assurer qu'elle a également lieu pour un plus grand nombre de termes de ce produit.

Il n'est donc plus question, pour compléter notre démonstration, que de prouver que si cette même loi se soutient jusqu'au coefficient de $\frac{z^{p-1}}{1.2....(p-1)}$ inclusivement, elle aura lieu également pour celui de $\frac{z^p}{1.2....p}$; or, on trouve, pour le premier de ces deux coefficiens,

$$a(a+k)(a+2k)(a+3k) \ldots\ldots\ldots [a+(p-2)k]$$

$$+\frac{p-1}{1} b.a(a+k)(a+2k) \ldots\ldots\ldots\ldots [a+(p-3)k]$$

$$+\frac{p-1}{1}\cdot\frac{p-2}{2} b(b+k).a(a+k) \ldots\ldots\ldots [a+(p-4)k]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{p-1}{1}\cdot\frac{p-2}{2} a(a+k).b(b+k) \ldots\ldots\ldots [b+(p-4)k]$$

$$+\frac{p-1}{1} a.b(b+k)(b+2k) \ldots\ldots\ldots\ldots [a+(p-3)k]$$

$$+b(b+k)(b+2k)(b+3k) \ldots\ldots [b+(p-2)k]$$

et pour le second

$$a(a+k)(a+2k)(a+3k) \ldots\ldots\ldots [a+(p-1)k]$$

$$+\frac{p}{1} b.a(a+k)(a+2k) \ldots\ldots\ldots\ldots [a+(p-2)k]$$

$$+\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2} b(b+k).a(a+k) \ldots\ldots\ldots\ldots [a+(p-3)k]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2} a(a+k).b(b+k) \ldots\ldots\ldots\ldots [b+(p-3)k]$$

$$+\frac{p}{1} a.b(b+k)(b+2k) \ldots\ldots\ldots\ldots [b+(p-2)k]$$

$$+b(b+k)(b+2k)(b+3k) \ldots\ldots\ldots [b+(p-1)k]$$

Or, en remarquant que

$\frac{p}{1}$

$$\frac{p}{1}=\frac{p-1}{1}+1\,,$$

$$\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}=\frac{p-1}{1}\cdot\frac{p-2}{2}+\frac{p-1}{1}\,;$$

$$\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-2}{3}=\frac{p-1}{1}\cdot\frac{p-2}{2}\cdot\frac{p-3}{3}+\frac{p-1}{1}\cdot\frac{p-2}{2}\,,$$

. . . .

on verra que ce coefficient peut se décomposer en deux parties, dont la première est

$$a\left\{\begin{array}{l}
\quad a(a+k)(a+2k)(a+3k)\ \ldots\ldots\ [a+(p-1)k] \\
+\frac{p-1}{1}b\,.(a+k)(a+2k)\ \ldots\ldots\ [a+(p-2)k] \\
+\frac{p-1}{1}\cdot\frac{p-2}{2}b(b+k)\,.(a+k)\ \ldots\ldots\ [a+(p-3)k] \\
+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+\frac{p-1}{1}(a+k)\,.(b+k)\ \ldots\ldots\ [b+(p-3)k] \\
+b(b+k)(b+2k)\ \ldots\ldots\ [b+(p-2)k]
\end{array}\right\}$$

et la seconde

$$b\left\{\begin{array}{l}
a(a+k)(a+2k)\ldots\ldots\ldots\ldots[a+(p-2)k] \\
+\frac{p-1}{1}(b+k).a(a+k)\ldots\ldots\ldots\ldots[a+(p-3)k] \\
+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+\frac{p}{1}\frac{p-2}{2}a(a+k).(b+k)\ldots\ldots\ldots\ldots[b+(p-3)k] \\
+\frac{p-1}{1}a.(b+k)(b+2k)\ldots\ldots\ldots\ldots[b+(p-2)k] \\
+(b+k)(b+2k)(b+3k)\ldots\ldots[b+(p-1)k]
\end{array}\right\}$$

Or, il est aisé de voir que le multiplicateur de a, dans la première de ces deux parties, est ce que devient le coefficicient de $\frac{z^{p-1}}{1.2\ldots.(p-1)}$, lorsqu'on y change a en $a+k$, et que le multiplicateur de b, dans la seconde, est ce que devient ce même coefficient, lorsqu'on y change b en $b+k$; si donc, comme nous le supposons, le coefficient de $\frac{z^{p-1}}{1.2\ldots.(p-1)}$ est en effet réductible à la forme

$$(a+b)(a+b+k)(a+b+2k)\ldots..[a+b+(p-2)k] \;;$$

le multiplicateur de a, dans la première de ces deux parties, et celui de b dans la seconde, sera également

$$(a+b+k)(a+b+2k)(a+b+3k)\ldots..[a+b+(p-1)k] \;;$$

en réunissant donc ces deux parties, et ayant égard au facteur commun qui les affecte, on aura, pour le coefficient de $\frac{z^p}{1.2\ldots p}$

$$(a+b)(a+b+k)(a+b+2k)\ldots..[a+b+(p-1)k] \;;$$

comme nous l'avions annoncé. Il est donc prouvé, par ce qui précède, que, si la loi dont il s'agit se soutient jusqu'à un terme quelconque du produit, elle aura lieu également pour le terme qui le suivra immédiatement; puis donc que nous nous sommes assurés de son existence pour les quatre premiers termes, il s'ensuit qu'elle a lieu pour tous, et qu'ainsi le théorème est démontré en toute rigueur.

Pour abréger, désignons par $\mathrm{f}a$ notre première série, c'est-à-dire, posons

$$\mathrm{f}a=1+a\frac{z}{1}+a(a+k)\frac{z^2}{1.2}+a(a+k)(a+2k)\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots;$$

nous aurons pareillement

$$\mathrm{f}b=1+b\frac{z}{1}+b(b+k)\frac{z^2}{1.2}+b(b+k)(b+2k)\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots;$$

et encore

$$\mathrm{f}(a+b)=1+(a+b)\frac{z}{1}+(a+b)(a+b+k)\frac{z^2}{1.2}+\ldots;$$

en conséquence, le théorème qui vient d'être démontré pourra être écrit sous cette forme très-simple

$$\mathrm{f}a.\mathrm{f}b=\mathrm{f}(a+b)\,. \qquad \text{(I)}$$

On remarquera que, d'après cette notation, on doit évidemment avoir $\mathrm{f}o=1$.

Si dans l'équation (I) on change b en $b+c$, elle deviendra

$$\mathrm{f}a.\mathrm{f}(b+c)=\mathrm{f}(a+b+c)\;;$$

mais, en vertu de la même équation,

$$\mathrm{f}(b+c)=\mathrm{f}b.\mathrm{f}c\;;$$

substituant donc, on aura

$$fa.fb.fc = f(a+b+c) \ .$$

En supposant que c se change en $c+d$, et se conduisant de la même manière, on prouvera pareillement que

$$fa.fb.fc.fd = f(a+b+c+d) \ ;$$

et en poursuivant toujours ainsi, on se convaincra qu'en général

$$fa.fb.fc.fd \ldots\ldots = f(a+b+c+d+\ldots\ldots) \ ;$$

c'est-à-dire, que le produit de tant de série qu'on voudra, de la forme de la série fa; et ne différant les unes des autres qu'en ce que a s'y trouve successivement changé en b, c, d, ... est une série composée exactement en $a+b+c+d+$ ..... de la même manière que l'est la première en a, la seconde en b, la troisième en c, la quatrième en d, et ainsi de suite.

Si dans la dernière équation ci-dessus on suppose les quantités a, b, c, d,...... égales entre elles et à la première a, et leur nombre égal à m; elle deviendra

$$(fa)^m = fma \ ; \qquad \text{(II)}$$

c'est-à-dire qu'une puissance entière et positive quelconque m de la série fa, est une série composée en ma de la même manière que celle-là l'est en a.

Suivant l'équation (I) on a

$$fb.fc = f(b+c) \ ;$$

posons $b+c=a$, d'où $c=a-b$; il viendra, en substituant

fb

$$\mathrm{f}b.\mathrm{f}(a-b)=\mathrm{f}a\;;$$

d'où

$$\frac{\mathrm{f}a}{\mathrm{f}b}=\mathrm{f}(a-b)\;; \qquad \text{(III)}$$

c'est-à-dire que le quotient de la division de la série $\mathrm{f}a$ par la série $\mathrm{f}b$ est une série composée en $(a-b)$ de la même manière que le dividende l'est en a et le diviseur en b.

Par l'équation (II), on a

$$(\mathrm{f}b)^m=\mathrm{f}mb\;;$$

posant $mb=a$, d'où $b=\frac{a}{m}$, il viendra

$$\left(\mathrm{f}\,\frac{a}{m}\right)^m=\mathrm{f}a\;;$$

d'où on tirera, en extrayant la racine et renversant

$$\sqrt[m]{\mathrm{f}a}=\mathrm{f}\,\frac{a}{m}\;; \qquad \text{(IV)}$$

c'est-à-dire que la racine d'un degré quelconque m, entier et positif, de la série $\mathrm{f}a$ n'est autre chose qu'une série composée en $\frac{a}{m}$ de la même manière que la puissance l'est en a.

On aura, d'après cela

$$(\mathrm{f}a)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(\mathrm{f}a)^m}=\sqrt[n]{\mathrm{f}ma}=\mathrm{f}\,\frac{m}{n}\,a\;;$$

c'est-à-dire,

$$(\mathrm{f}a)^{\frac{m}{n}}=\mathrm{f}\,\frac{m}{n}\,a\,.$$

m et n étant deux nombres positifs quelconques. L'équation (II)

$$(\mathrm{f}a)^m=\mathrm{f}ma$$

a donc lieu, quelque nombre positif, entier ou fractionnaire qu'on représente par m. Il serait ensuite aisé de prouver, à l'aide des raisonnemens usités en pareil cas, qu'il en sera encore de même lorsque m sera un incommensurable positif quelconque.

On aura encore, quel que soit le nombre positif m,

$$(\mathrm{f}a)^{-m}=\frac{1}{(\mathrm{f}a)^m}=\frac{\mathrm{f}0}{(\mathrm{f}a)^m},$$

ou, d'après ce qui précède et le théorème (II)

$$(\mathrm{f}a)^{-m}=\frac{\mathrm{f}0}{\mathrm{f}ma}=\mathrm{f}(0-ma)=\mathrm{f}(-m)a\ .$$

Ainsi, quelque nombre entier ou fractionnaire, positif ou négatif, commensurable ou incommensurable qu'on représente par m, il est toujours vrai de dire qu'on a

$$(\mathrm{f}a)^m=\mathrm{f}ma\ ,$$

c'est-à-dire,

$$\left\{1+a\frac{z}{1}+a(a+k)\frac{z^2}{1.2}+a(a+k)(a+2k)\frac{z^3}{1.2.3}+\dots\right\}^m$$

$$=1+ma\frac{z}{1}+ma(ma+k)\frac{z^2}{1.2}+ma(ma+k)(ma+2k)\frac{z^3}{1.2.3}+\dots$$

et cela quels que soient d'ailleurs a et k.

Si, dans cette équation, on fait $a=1$ et $k=-1$, elle deviendra

$$(1+z)^m=1+\frac{m}{1}z+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}z^2+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}z^3+\dots;$$

la formule du *binome* se trouve donc ainsi démontrée, quel que soit l'exposant m.

Si, dans la même équation, on suppose $k=0$, $a=1$, $z=1$, $m=Ax$, elle deviendra

$$\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots\right)^{Ax}=1+\frac{Ax}{1}+\frac{A^2x^2}{1.2}+\frac{A^3x^3}{1.2.3}+\ldots$$

La série du premier membre est, comme l'on sait, un nombre incommensurable (*), compris entre 2 et 3 : c'est la base du système de logarithmes néperiens; en le représentant par e, suivant l'usage, on aura

$$e^{Ax}=1+\frac{Ax}{1}+\frac{A^2x^2}{1.2}+\frac{A^3x^3}{1.2.3}+\ldots;$$

Si l'on fait $e^A=a$, auquel cas A sera le logarithme néperien de a, on aura

$$a^x=1+\frac{x\mathrm{l}a}{1}+\frac{x^2\mathrm{l}^2a}{1.2}+\frac{x^3\mathrm{l}^3a}{1.2.3}+\ldots.$$

formule qui donne le développement des exponentiels en séries ou, ce qui revient au même, le développement d'un nombre a, en fonction de son logarithme.

Si, dans cette dernière formule, on change x en m et a en $1+x$, elle deviendra

$$(1+x)^m=1+\frac{m\mathrm{l}(1+x)}{1}+\frac{m^2\mathrm{l}^2(1+x)}{1.2}+\frac{m^3\mathrm{l}^3(1+x)}{1.2.3}+\ldots.$$

mais on a, d'un autre côté,

(*) Voyez la page 50 du présent volume.

$$(1+x)^m=1+m\frac{x}{1}+m(m-1)\frac{x^2}{1.2}+m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots$$

égalant donc entre elles ces deux valeurs, en supprimant l'unité de part et d'autre, et divisant par m, il viendra

$$\mathrm{l}(1+x)+\frac{m\mathrm{l}^2(1+x)}{1.2}+\frac{m^2\mathrm{l}^3(1+x)}{1.2.3}+\ldots$$

$$=\frac{x}{1}+(m-1)\frac{x^2}{1.2}+(m-1)(m-2)\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots$$

faisant enfin, dans cette dernière équation, $m=0$, on aura

$$\mathrm{l}(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

formule qui donne le logarithme néperien de $1+x$, en fonction du nombre x.

Ceux qui désireront de plus amples détails sur ce sujet pourront consulter nos *Mélanges d'analise algébrique et de géométrie* (veuve Courcier, Paris, 1815).

Dans un prochain article, nous nous occuperons du développement des fonctions circulaires en séries.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Théorèmes nouveaux, sur les lignes et surfaces de tous les ordres;

Par M. Frégier, professeur de mathématiques au collége de Troyes, ancien élève de l'école polytechnique.

J'AI démontré aux pages 229 et 321 du VI.e volume de ce recueil, et à la page 95 du VII.e, quatre théorèmes assez remarquables sur les lignes et surfaces du second ordre. J'avais dès-lors entrevu que ces théorèmes avaient leurs analogues dans les lignes et surfaces des ordres supérieurs : ce sont ces derniers dont je vais m'occuper ici.

THÉORÈME I. « Soit une ligne quelconque de l'ordre m et » une ligne du second ordre, ayant son centre en un quelconque » des points du périmètre de la première. Soient menés à cette ligne » du second ordre deux diamètres conjugués, dont l'un soit tangent » à la ligne de l'ordre m; ce dernier coupera cette courbe en » $m-2$ points. Par chacun de ces points, concevons une parallèle » au conjugué de ce diamètre, chacune de ces parallèles pouvant » couper la ligne de l'ordre m en $m-1$ nouveaux points, elles » auront avec cette ligne $(m-1)(m-2)$ points d'intersection fixes, » non situés sur la tangente.

» Cela posé, soient menés à la ligne du second ordre deux nouveaux » diamètres conjugés quelconques, chacun d'eux aura, avec la ligne » de l'ordre m, outre le centre de celle du second ordre $m-1$, » points d'intersection; ce qui fera, pour les deux $2(m-1)$ nou- » veaux points, variables avec la direction des diamètres conjugués » arbitraires.

» On aura donc en tout, sur la ligne de l'ordre m, $(m-1)(m-2)$ » $+2(m-1)$ ou $m(m-1)$ points, dont $(m-1)(m-2)$ fixes et » $2(m-1)$ variables.

» Or, bien qu'une ligne de l'ordre $m-1$ se trouve complètement » déterminée par $\frac{1}{2}(m-1)(m+2)$ points seulement de son périmètre, » il arrivera néanmoins que les $m(m-1)$ points dont il s'agit, soit » réels, soit imaginaires, se trouveront constamment appartenir à » une ligne de cet ordre. En outre, cette ligne variable de l'ordre » $m-1$, qui ne passera pas par le point pris arbitrairement sur » la ligne de l'ordre m, coupera constamment le conjugué du dia- » mètre tangent à cette dernière ligne en ce point, aux $m-1$ » mêmes points; de sorte que toutes les lignes de l'ordre $m-1$ qui » pourront naître ainsi des changemens de direction des diamètres » conjugués de celle du second, passeront constamment par un » même nombre $(m-1)(m-2)+(m-1)$ ou $(m-1)^2$ de points fixes.

» Et, attendu que deux lignes de cet ordre ne sauraient se » couper en un plus grand nombre de points, ces lignes n'auront » aucune autre intersection que ces points fixes eux-mêmes ».

Ainsi, par exemple, s'il s'agit d'une ligne du 3.^{e} ordre, le diamètre tangent la coupera en un seul point, par lequel menant une parallèle à son conjugué, cette parallèle déterminera deux nouveaux points fixes sur la courbe. les deux diamètres conjugués arbitraires en détermineront quatre autres variables et ces six points, quelles que soient d'ailleurs les directions des deux derniers diamètres, appartiendront constamment à une ligne du second ordre, ne passant pas par le point de contact de la tangente, mais coupant constamment cette tangente aux deux mêmes points qui, joints aux deux points fixes de la ligne du 3.^e ordre seront les quatre points communs à toutes les lignes du second ordre auxquelles les changemens de direction des diamètres conjugués arbitraires pourront donner naissance.

Démonstration. Soient pris pour origine le centre de la ligne du second ordre, pour axe des x le diamètre de cette courbe tangent à la ligne de l'ordre m, et pour axe des y le conjugué de ce diamètre.

Pour que l'axe des x soit une tangente à une courbe ayant son point de contact à l'origine, il est nécessaire et il suffit que l'équation de cette courbe ne renferme ni le terme tout connu ni le terme du premier degré en x; afin qu'en y posant $y=o$, elle devienne divisible par x^2. Ainsi, d'après les conventions énoncées ci-dessus, l'équation de notre ligne de l'ordre m ne saurait être que de la forme suivante :

$$\left.\begin{array}{r} ax^m \\ +(a'+b'y)x^{m-1} \\ +(a''+b''y+c''y^2)x^{m-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +(p''+q''y+r''y^2+\ldots\ldots+t''y^{m-2})x^2 \\ +(q'y+r'y^2+s'y^3+\ldots\ldots\ldots+u'y^{m-1})x \\ +(y+ry^2+sy^3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+vy^m) \end{array}\right\} =o\,; \qquad (1)$$

En y faisant $y=o$, et divisant par x^2 l'équation résultante

$$ax^{m-2}+a'x^{m-3}+a''x^{m-4}+\ldots\ldots\ldots+p''=o \qquad (2)$$

sera celle des parallèles menées à l'axe des y, par les $m-2$ points où la tangente à l'origine, c'est-à-dire, l'axe des x, coupe la courbe (1).

Si présentement on mène à la ligne du second ordre deux diamètres conjugués quelconques, les équations de ces diamètres seront de la forme

$$x-gy=0\ ,\qquad x-hy=0\ ;\tag{3}$$

g, h étant deux nombres arbitraires, dépendant des directions de ces diamètres, mais liés entre eux par la condition

$$gh=k\ ,\tag{4}$$

dans laquelle le nombre constant k ne dépend uniquement que des dimensions de la ligne du second ordre, et de sa situation par rapport aux axes des coordonnées.

Si l'on prend le produit des équations (3), en ayant égard à la condition (4), on obtiendra, pour l'équation du système de deux diamètres conjugués quelconques

$$x^2-(g+h)xy+ky^2=0\ .\tag{5}$$

Si ensuite on multiplie l'équation (2) par cette dernière, il viendra pour l'équation du système tant des diamètres conjugués que des parallèles à l'axe des y menées par les $m-2$ points ou l'axe des x coupe la courbe (1)

$$\begin{gathered}ax^m+a'x^{m-1}+a''x^{m-2}+\ldots\ldots+p''\\ -(a^{m-2}+a'x^{m-3}+a''x^{m-4}+\ldots\ldots+p'')[(g+h)xy-ky^2]=0\,.\end{gathered}\tag{6}$$

Si présentement on veut savoir en quels points le système de droites exprimé par l'équation (6), coupe la courbe exprimée par l'équation (1); il faudra considérer ces deux équations comme celles du même problème déterminé en x, y. Mais, il est clair que, dans cette recherche, il sera permis de substituer à l'une ou à l'autre des équations (1, 6) une combinaison quelconque de ces deux équations

équations ; on pourra donc, en particulier, remplacer l'équation (1) par sa différence avec l'équation (6), laquelle étant divisée par y, ce qui revient à en ôter l'équation de l'axe des x, devient

$$\left.\begin{array}{r} b'x^{m-1} \\ +(b''+c''y)x^{m-2} \\ +(b''+c''y+d''y^2)x^{m-3} \\ +\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ +(q''+r''y+\ldots\ldots+t''y^{m-3})x^2 \\ +(q'+r'y+s'y^2+\ldots+u'y^{m-2})x \\ +(1+ry+sy^2+\ldots\ldots+vy^{m-1}) \\ +(ax^{m-2}+a'x^{m-3}+a''x^{m-4}+\ldots+p'')[(g+h)x-ky] \end{array}\right\}=0. \qquad (7)$$

Cette équation est donc celle d'une courbe qui est coupée par le système des droites (6) aux mêmes points où ces droites coupent la courbe (1) ; or, cette courbe est du degré $m-1$, quels que soient g, h ; ainsi la première partie du théorème se trouve démontrée. Il est d'ailleurs évident que la courbe (7) ne passe point par l'origine.

Si, dans la vue de savoir où cette courbe est coupée par l'axe des y, c'est-à-dire, par le conjugué du diamètre tangent à l'origine, on fait, dans son équation, $x=0$; elle deviendra

$$vy^{m-1}+\ldots\ldots\ldots+sy^2+(r-p'k)y+1=0\,, \qquad (8)$$

équation qui fera connaître les ordonnées des intersections demandées; mais, puisque cette équation est indépendante de g, h, ces $m-1$ points d'intersection seront toujours les mêmes, quelles que soient les directions des deux diamètres conjugués donnés par les équations (3), ce qui démontre la seconde partie du théorème.

Remarque. Supposons présentement que les axes des coordonnées soient rectangulaires ; c'est-à-dire, supposons que le diamètre de la ligne du second ordre tangent à l'origine à la courbe (1) en soit un des diamètres principaux ; alors l'axe des y sera une normale à cette courbe (1) et contiendra conséquemment son centre de courbure répondant à l'origine ; soit R le rayon de courbure pour ce point ; il est facile de se convaincre qu'on aura

$$R=-\frac{1}{2p''}\,.\ (*) \qquad (9)$$

Supposons présentement que l'on ait $m=3$, l'équation (8) deviendra

$$p'''x^3+(p''+q''y)x^2+(q'y+r'y^2)x+(y+ry^2+sy^3)=0\ ; \qquad (10)$$

on trouvera les intersections de la courbe proposée avec l'axe des y, en faisant, dans cette équation $x=0$, ce qui donnera, en divisant par y,

$$sy^2+ry+1=0\ ; \qquad (11)$$

de sorte qu'en désignant par Y, Y' les distances de ces intersections à l'origine, on aura

$$sY^2+rY+1=0\ ;$$

$$sY'^2+rY'+1=0\ ;$$

d'où on tirera

$$s=\frac{1}{YY'}\,,\quad r=-\frac{Y+Y'}{YY'}\,. \qquad (12)$$

d'un autre côté l'équation (7) devient, dans la même hypothèse,

---

(*) Voyez sur cela la page 154 du présent volume.

$$q''x^2+(q'+r'y)x+(1+ry+sy^2)+(p'''x+p'')[(g+h)x-ky]=0\ ;$$

en y faisant $x=0$, l'équation (8) se trouve remplacée par celle-ci

$$sy^2+(r-p''k)y+1=0\ ;$$

si nous supposons de plus que la ligne du second ordre qui a son centre à l'origine soit un cercle, nous aurons $k=-1$, ce qui réduira cette dernière équation à

$$sy^2+(r+p'')y+1=0\ ; \qquad (13)$$

mais la formule (9) donne $p''=-\frac{1}{2R}$; substituant donc cette valeur, ainsi que les valeurs (12) de s et r, dans l'équation (13), elle deviendra

$$2Ry^2-\{2R(Y+Y')+YY'\}y+2RYY'=0\ ;$$

d'où

$$R=\frac{y}{2}\cdot\frac{Y}{Y-y}\cdot\frac{Y'}{Y'-y}\ ; \qquad (14)$$

formule qui va nous fournir, pour la construction du rayon de courbure, en un quelconque des points d'une ligne du troisième ordre, un procédé tout-à-fait analogue à celui que nous avons déjà indiqué pour celles du second, à la page 232 du VI.^e volume de ce recueil : voici en quoi il consiste.

On menera d'abord la tangente et la normale au point dont il s'agit ; la normale coupera la courbe en deux nouveaux points dont on prendra les distances au point de contact de la tangente pour Y, Y'.

La tangente coupera la courbe en un point par lequel on menera à la normale une parallèle qui, par sa rencontre avec la courbe, déterminera *deux points* sur son périmètre. On menera aussi, par le point de contact, deux droites arbitraires et indéfinies, perpendiculaires entre elles déterminant, par leurs intersections avec la courbe, *quatre* nouveaux points sur son périmètre.

Par cinq de ces *six points* on fera passer une ligne du second ordre, laquelle passera aussi par le sixième, et coupera la normale en deux points. la distance de l'un ou de l'autre de ces deux points au point de contact pourra être prise pour y.

Tout sera alors connu dans la formule (14) qu'il ne sera plus question que de construire.

THÉORÊME II. « Par un quelconque des points d'une ligne » quelconque de l'ordre m, soit fait passer deux droites l'une » tangente et l'autre non tangente et de direction arbitraire mais » fixe; la première coupera de nouveau la courbe en $m-2$ points, » par chacun desquels menant une parallèle à la droite non tan- » gente, cette parallèle déterminera, par sa rencontre avec la » courbe, $m-1$ points sur son périmètre; de sorte qu'on aura sur » cette courbe $(m-1)(m-2)$ nouveaux points fixes, non situés sur » sa tangente.

» Soit construit ensuite arbitrairement un triangle dont le sommet » soit au point de contact, dont la base soit parallèle à la tangente, » et qui ait le milieu de cette base situé sur la droite non tangente; » ses deux autres côtés, considérés comme droites indéfinies, déter- » mineront sur la courbe $2(m-1)$ points de son périmètre, variables, » comme le triangle arbitraire qui aura servi à leur détermination.

» On se trouvera donc avoir en tout, hors de la tangente, » $(m-1)(m-2)+2(m-1)$ ou $m(m-1)$ points de la courbe, dont » $(m-1)(m-2)$ fixes et $2(m-1)$ variables.

» Or, bien qu'une ligne de l'ordre $m-1$ se trouve complètement » déterminée par $\frac{1}{2}(m-1)(m+2)$ points de son périmètre, il arri- » vera néanmoins que les $m(m-1)$ points dont il s'agit, soit » réels, soit imaginaires, se trouveront constamment appartenir

» à une ligne de cet ordre. En outre, cette ligne variable de l'ordre
» $m-1$, qui ne passera pas par le point de contact, coupera la
» tangente en $m-1$ points fixes; de sorte que toutes les lignes
» de l'ordre $m-1$ qui pourront naître du changement de grandeur
» et de dimensions du triangle arbitraire, passeront constamment
» par un même nombre $(m-1)(m-2)+(m-1)$ ou $(m-1)^2$ de
» points fixes.

» Et, attendu que deux lignes de cet ordre ne sauraient se
» couper en un plus grand nombre de points; ces lignes n'auront
» aucune autre intersection que ces points fixes eux-mêmes. »

Démonstration. Ce théorème ayant beaucoup d'analogie avec le précédent, se démontre d'une manière à peu près semblable.

D'abord, en prenant respectivement les deux droites tangente et non tangente pour axes des x et des y; pour les mêmes raisons que ci-dessus, on pourra prendre pour équation de la courbe proposée l'équation (1), c'est-à-dire,

$$\left.\begin{array}{r} ax^m \\ +(a'+b'y)x^{m-1} \\ +(a''+b''y+c''y^2)x^{m-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +(p''+q''y+r''y^2+\ldots\ldots+t''y^{m-2})x^2 \\ +(q'y+r'y^2+s'y^3+\ldots\ldots+u'y^{m-1})x \\ +(y+ry^2+sy^3+\ldots\ldots\ldots\ldots+vy^m) \end{array}\right\}=0\,; \qquad (1)$$

Cette courbe coupera encore l'axe des x, c'est-à-dire, la tangente à l'origine, en des points déterminés par l'équation

$$ax^{m-2}+a'x^{m-3}+a''x^{m-4}+\ldots\ldots+p''=0\,; \qquad (2)$$

laquelle sera aussi l'équation commune des parallèles à l'axe des y menées par ces points.

D'un autre côté, l'équation commune aux deux côtés du triangle qui passent par le point de contact, sera, d'après les conditions de la construction de ce triangle,

$$x^2 - ky^2 = 0\;; \qquad (15)$$

k étant une quantité variable et tout-à-fait arbitraire.

Voilà donc en tout m droites dont on aura l'équation commune en multipliant les deux dernières, ce qui donnera

$$\left.\begin{array}{l} ax^m + a'x^{m-1} + a''x^{m-2} + \ldots\ldots + p''x^2 \\ -k(ax^{m-2} + a'x^{m-3} + a''x^{m-4} + \ldots\ldots + p'')y^2 \end{array}\right\} = 0. \qquad (16)$$

Si présentement on veut connaître en quels points ces m droites coupent la courbe (1), il faudra considérer comme équations d'un même problème déterminé à deux inconnues x, y, soit les deux équations (1, 16), soit toute combinaison qu'on voudra faire de ces deux-là.

On pourra donc, en particulier, substituer à l'équation (1) sa différence avec l'équation (16) qui est, en divisant par y, ce qui revient à ôter l'équation de l'axe des x du résultat,

$$\left.\begin{array}{r} b'x^{m-1} \\ +(b''+c''y)x^{m-2} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ +(q''+r''y+\ldots\ldots+t''y^{m-3})x^2 \\ +(q'+r'y+s'y^2+\ldots\ldots+u'y^{m-2})x \\ +(1+ry+sy^2+\ldots\ldots+vy^{m-1}) \\ +k(ax^{m-2}+a'x^{m-3}+a''x^{m-4}+\ldots\ldots+p'')y \end{array}\right\} = 0\;; \qquad (17)$$

On aura donc les points d'intersection demandés en combinant entre elles les équations (16, 17) ; ce qui prouve que l'équation (17) est celle d'une ligne de l'ordre $m-1$, qui passe par ces $m(m-1)$ points quel que soit k ; ce qui démontre déjà la première partie du théorème.

Si, pour savoir en quels points la ligne (17) coupe l'axe des x, c'est-à-dire, la tangente à l'origine, on fait, dans son équation $y=0$, elle deviendra

$$b'x^{m-1}+b''x^{m-2}+\dots\dots+q''x^2+q'x+1=0\ ; \qquad (18)$$

équation indépendante de k ; ce qui prouve, conformément à la seconde partie de l'énoncé du théorème, que ces points, dont aucun n'est l'origine, sont fixes sur la tangente, quel que soit d'ailleurs le triangle construit sous les conditions indiquées.

THÉORÊME III. « A une surface quelconque de l'ordre m, » soit mené un plan tangent, par un point tel que la ligne intersection de ce plan avec la surface ne passe pas par ce point. Par » ce même point, soient menées, sur le même plan tangent, les » deux tangentes principales.

» Considérons la courbe intersection de la surface donnée avec » son plan tangent comme une section faite par ce plan à une » surface cylindrique, ayant sa génératrice parallèle au diamètre » conjugué de ce plan tangent ; cette surface cylindrique coupera » la surface proposée suivant un certain nombre de courbes fixes.

» Soit fait du point de contact le centre d'une surface quelconque » du second ordre ; le plan tangent en sera un plan diamétral ; soit » mené, à la surface du second ordre le diamètre conjugué de » ce plan ;

» Soit ensuite construite arbitrairement une surface conique du » second ordre, de manière pourtant qu'elle ait son sommet ou centre » au point de contact ; qu'elle passe par trois diamètres conjugués » de la surface du second ordre qui a son centre en ce point ; que

» ses sections parallèles au plan tangent aient leurs diamètres prin-
» cipaux respectivement parallèles aux tangentes principales dont
» il a été question ci-dessus, et en outre proportionnels aux racines
» quarrées des rayons de courbure répondant à ces mêmes tangentes
» principales; cette surface conique coupera la surface courbe dont
» il s'agit suivant plusieurs lignes courbes, variables comme la
» surface conique qui leur aura donné naissance.

» Or, tant ces courbes variables que les courbes fixes dont il a
» été question ci-dessus, se trouveront toujours appartenir à une
» même surface de l'ordre $m-1$ qui, dans toutes les variations
» qu'elle pourra subir, coupera toujours le diamètre conjugué du
» plan tangent en $m-1$ points fixes, differens du point de contact. »

Démonstration. Soient pris le point de contact du plan tangent pour origine et les deux tangentes principales pour axes des x et des y, lesquels seront ainsi perpendiculaires l'un à l'autre; le plan des xy sera un des plan diamétraux de la surface conique qui a son centre à l'origine. Soit pris le diamètre conjugué de ce plan pour axe des z, l'équation de la surface donnée de l'ordre m sera de la forme

$$F_m(x,y)+z.F_{m-1}(x,y)+z^2.F_{m-2}(x,y)+z^3.F_{m-3}(x,y)+\ldots$$

$$\ldots+z^{m-2}.F_2(x,y)+z^{m-1}.F_1(x,y)+z^mF_0(x,y)=0\,; \quad (19)$$

dans laquelle nous supposons que, en général, $F_k(x,y)$ désigne une fonction rationnelle et entière en x,y du degré k; de sorte que $F_0(x,y)$ doit être une quantité indépendante de ces deux variables.

Si, pour savoir suivant quelle ligne la surface (19) est coupée par le plan des xy, on fait, dans son équation, $z=0$, il viendra, pour l'équation de cette ligne

$$F_m(x,y)=0\,; \quad (20)$$

mais, puisqu'on suppose que le plan des xy est tangent à l'origine, les

les axes des x et des y doivent être respectivement tangens aux ntersections de la surface (19) par les plans des xz et des yz ; d'où il suit que la fonction F_m ne doit renfermer ni le terme constant ni les termes du premier ordre en x et y.

De plus, puisque nous supposons que la courbe intersection de la surface avec son plan tangent ne passe pas par le point de contact ; le premier membre de l'équation (20) doit renfermer un facteur du second degré, en x, y, exprimant ce point de contact, c'est-à-dire, l'origine des coordonnées.

Enfin, puisque les axes des x et des y sont supposé dirigés suivant les tangentes principales ; ce facteur du second degré, qui ne doit d'ailleurs contenir ni termes constans ni termes du premier ordre, ne doit pas non plus renfermer de terme en xy (*), et doit conséquemment être de la forme Px^2+Qy^2 ; au moyen de quoi l'équation (20) devient

$$(Px^2+Qy^2)f_{m-2}(x,y)=0\,; \tag{21}$$

f_{m-2} désignant une fonction rationnelle et entière en x et y du degré $m-2$; d'où l'on voit que

$$f_{m-2}(x,y)=0\,, \tag{22}$$

sera l'équation de l'intersection de la surface (19) par son plan tangent ; ce sera donc aussi l'équation d'une surface cylindrique ayant sa génératrice parallèle à l'axe des z, et coupant le plan des xy suivant cette courbe.

Supposons que, dans F_{m-1}, le terme indépendant de x et y soit l'unité, ce qui est permis, puisque nous donnons des coefficiens à tous les autres termes ; si alors nous représentons par R, R' le

---

(*) Voyez là dessus la page 179 de ce volume.

plus grand et le moindre rayons de courbure à l'origine ; nous aurons (9)

$$R=-\frac{1}{2P}\,; \qquad R'=-\frac{1}{2Q}\,;$$

d'où

$$P=-\frac{1}{2R}\,, \qquad Q=-\frac{1}{2R'}\,;$$

on aura donc

$$\mathrm{F}_m(x\,,y)=-\frac{R'x^2+Ry^2}{2RR'}.f_{m-2}(x\,,y)\ ;$$

au moyen de quoi l'équation (19) deviendra

$$(R'x^2+Ry^2).f_{m-2}(x,y)-2RR'z[\mathrm{F}_{m-1}(x\,,y)+z\mathrm{F}_{m-2}(x\,,y)$$

$$+z^2.\mathrm{F}_{m-3}(x\,,y)+\ldots\ldots+z^{m-2}.\mathrm{F}_1(x\,,y)+z^{m-1}.\mathrm{F}_0(x\,,y)]=0. \qquad (23)$$

Considérons présentement la surface du second ordre que nous avons supposé avoir son centre à l'origine. Puisque nous avons supposé que l'axe des z était le conjugué du plan diamétral qui coïncide avec le plan des xy, il s'ensuit que les sections de cette surface par les plans des xz et des yz doivent être des lignes du second ordre rapportées à leurs centres et à leurs diamètres conjugués ; et que par conséquent l'équation de cette surface ne saurait être que de la forme

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Fxy=k\,, \qquad (24)$$

Soient

$$\left\{\begin{array}{l} x=gz\,, \\ y=hz\,; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x=g'z\,, \\ y=h'z\,; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x=g''z\,; \\ y=h''z\,; \end{array}\right. \qquad (25)$$

les équations de trois de ses diamètres, conjugués les uns aux autres. L'équation de son plan tangent en un point $(x'\,,y'\,,z')$ sera

$$2Axx'+2Byy'+2CCz'+F(xy'+x'y)=2k\ , \qquad (26)$$

sous la condition

$$Ax'^2+By'^2+Cz'^2+Fx'y'=k\ ; \qquad (27)$$

et le plan diamétral parallèle à ce plan tangent aura pour équation

$$2Axx'+2Byy'+2Czz'+F(xy'+x'y)=0\ . \qquad (28)$$

Pour que le premier des diamètres (25) soit conjugué au plan des deux autres, il suffira que, ces deux-ci étant dans le plan (28), le premier passe par le point (x', y', z'), ce qui donnera les quatre conditions

$$x'=gz'\ , \qquad y'=hz'\ ;$$

$$(2Ag+Fh')x'+(2Bh'+Fg')y'+2Cz'=0\ ;$$

$$(2Ag''+Fh'')x'+(2Bh''+Fg'')y'+2Cz'=0\ .$$

Eliminant x', y' des deux dernières, au moyen des deux premières; et divisant par z', il viendra

$$(2Ag'+Fh')g+(2Bh'+Fg')h+2C=0\ ,$$

$$(2Ag''+Fh'')g+(2Bh''+Fg'')h+2C=0\ .$$

Pour que les trois diamètres fussent conjugués les uns aux autres, il faudrait qu'on eût trois systèmes de deux pareilles équations; mais il est aisé de voir que les six équations qu'on obtiendrait ainsi seraient deux à deux identiquement les mêmes; de sorte qu'elles se réduiraient aux trois suivantes.

$$\left.\begin{array}{l}2Agg'+2Bhh'+F(gh'+hg')+2C=0\ ,\\ 2Ag'g''+2Bh'h''+F(g'h''+h'g'')+2C=0\ ,\\ 2Ag''g+2Bh''h+F(g''h+h''g)+2C=0\ ;\end{array}\right\}\quad(29)$$

Ce sont donc là les équations nécessaires et suffisantes pour exprimer que les diamètres (25) sont conjugués les uns aux autres. On voit que des six quantités g, g', g'', h', h', h'', il y en a trois qui demeurent tout-à-fait indéterminées.

Considérons présentement la surface conique du second ordre, ayant pour équation

$$R'x^2+Ry^2+rz^2+pxz+qyz=0\ : \qquad (30)$$

Cette surface conique a évidemment son sommet ou centre à l'origine; en outre, puisque son équation ne renferme point le terme en xy, toutes ses sections parallèles au plan des xy sont des lignes du second ordre ayant leurs diamètres principaux parallèles aux axes des x et des y, c'est-à-dire, aux tangentes principales menées à la surface (19) par l'origine; enfin, à cause des coefficiens R', R, de x^2, y^2 les longueurs de ces diamètres principaux sont proportionnelles aux racines quarrées des rayons de plus grande et de moindre courbure de la surface (19) à l'origine.

Remarquons présentement que, quels que soient p, q, r, que nous supposons ici tout-à-fait indéterminés, on pourra toujours assujettir la surface conique (30) à passer par trois diamètres conjugués de la surface (24), puisque, pour déterminer les six coefficiens g, g', g'', h, h', h'' des équations (25) de ces diamètres, on aura seulement, outre les trois équations (29), les trois équations

$$\left.\begin{array}{l}R'g^2+Rh^2+K+pg+qh\ ,\\ R'g'^2+Rh'^2+K+pg'+qh'\ ,\\ R'g''^2+Rh''^2+K+pg''+qh''\ ,\end{array}\right\}\quad(31)$$

qui expriment que les diamètres (25) sont sur la surface (30)

Ainsi, en supposant, dans l'équation de cette surface conique, que p, q, r sont tout-à-fait indéterminés, cette surface sera exactement conditionnée comme l'exige l'énoncé du théorème. Elle coupera la surface (19) suivant un système de courbes, variables comme les coefficiens p, q, r, qui la déterminent.

Veut-on avoir l'équation commune à cette surface conique et à la surface cylindrique (22); il ne s'agira pour cela que de prendre le produit des équations de ces deux surfaces; ce qui donnera

$$(R'x^2+Ry^2+rz^2+pxz+qyz).f_{m-2}(x,y)=0\ . \qquad (32)$$

Si l'on veut présentement savoir suivant quelles courbes le système de ces surfaces conique et cylindrique coupe la surface donnée de l'ordre m, il ne s'agira que de considérer comme équations d'un même problème indéterminé à trois variables, soit les deux équations (23, 32), soit toutes combinaisons de ces deux équations qu'on voudra leur substituer; on pourra donc, en particulier, substituer à l'équation (23) sa différence avec l'équation (32), qui est, en divisant par z, ce qui revient à exclure le plan des xy,

$$2RR'[F_{m-1}(x,y)+z.F_{m-2}(x,y)+\dots+z^{m-2}.F_1(x,y)+z^{m-1}.F_0(x,y)]$$
$$(rz+px+qy).f_{m-2}(x,y)=0\ ; \qquad (33)$$

d'où il suit que ces courbes seront toutes situées sur la surface (33), c'est-à-dire, sur une surface du degré $m-1$, laquelle ne passe ni par l'origine ni par la courbe (22), conformément à l'énoncé du théorème.

Si, dans la vue de savoir en quels points cette surface coupe l'axe des z, on suppose, à la fois, dans l'équation (33) $x=0$, $y=0$, l'équation résultante en z ne renfermera plus les indéterminées p, q, r, ce qui prouve que, la surface conique variant, ces points restent fixes sur l'axe des z; ce qui est encore conforme à l'énoncé du théorème, qui se trouve ainsi complètement démontré.

Il est aisé de voir, au surplus, que, pour chaque surface conique, en particulier, la condition de passer par les intersections tant de cette surface que de la surface cylindrique avec la surface proposée déterminera complètement la surface (33). Concevons, en effet, un plan quelconque passant par l'axe des z; ce plan coupera la surface proposée suivant une ligne de l'ordre m, et la surface (33) suivant une ligne de l'ordre $m-1$; il coupera de plus la surface cylindrique (22) suivant $m-2$ droites, toutes parallèles à l'axe des z, lesquelles couperont la courbe de l'ordre m en $(m-1)(m-2)$ points; il coupera enfin la surface conique suivant deux droites qui seront deux diamètres conjugués de la section faite dans la surface du second ordre qui a son centre à l'origine; et ces deux droites détermineront, sur la ligne de l'ordre m, $2(m-1)$ nouveaux points; ce qui fera en tout $m(m-1)$ points, lesquels se trouveront aussi sur la ligne de l'ordre $m-1$. Or, nous avons vu (*Théor. I*) que, par la condition de passer par ces $m(m-1)$, points, cette courbe est complètement déterminée; toutes les sections faites dans la surface (33) sont donc déterminées; cette surface est donc elle-même déterminée.

THÉORÈME IV. « A une surface quelconque de l'ordre m;
» soit mené un plan tangent, par un point tel que la ligne, in-
» tersection de ce plan avec la surface, ne passe pas par ce point.
» Par ce même point, soient menées, sur le même plan tangent,
» les deux tangentes principales.

» Considérons la courbe insersection de la surface donnée avec
» son plan tangent comme une section faite par ce plan à une surface
» cylindrique ayant sa génératrice parallèle à une droite fixe, menée
» par le point de contact, dans une direction quelconque; cette
» surface cylindrique coupera la surface proposée suivant un certain
» nombre de courbes fixes.

» Soit ensuite construit arbitrairement une surface conique du
» second ordre, de manière pourtant qu'elle ait son sommet ou
» centre au point de contact, et que ses sections, par des plans
» parallèles au plan tangent, aient leur centre sur la droite fixe
» dont il vient d'être question, leurs diamètres principaux parallèles

» aux tangentes principales, et les longueurs de ces diamètres proportionnelles aux racines quarrées des rayons de plus grande et de moindre courbure qui répondent au point de contact; cette surface conique coupera la surface proposée suivant un certain nombre de courbes, variables comme la surface conique qui leur aura donné naissance.

» Or, tant ces courbes variables que les courbes fixes dont il a été question ci-dessus, se trouveront toujours appartenir à une surface de l'ordre $m-1$ qui, dans toutes les variations qu'elle pourra subir, coupera toujours le plan tangent suivant une même ligne fixe de l'ordre $m-1$, qui ne passera pas par le point de contact. »

Démonstration. Soient pris encore, comme ci-dessus, pour axes des x et des y les deux tangentes principales; et soit prise pour axe des z la droite fixe, menée par le point de contact; si l'on représente toujours par R, R' les deux rayons de plus grande et de moindre courbure en ce point, on pourra prendre de nouveau pour équation de la surface proposée l'équation (23), c'est-à-dire, l'équation

$$(R'x^2+Ry^2)f_{m-2}(x,y)-2RR'z[\mathrm{F}_{m-1}(x,y)+z.\mathrm{F}_{m-2}(x,y)+z^2.\mathrm{F}_{m-3}(x,y) + \ldots\ldots+z^{m-2}.\mathrm{F}_1(x,y)+z^{m-1}.\mathrm{F}_0(x,y)]=0\ ; \qquad (23)$$

et le plan des xy, c'est-à-dire, le plan tangent à l'origine sera encore coupé par cette surface suivant une ligne de l'ordre $m-2$, ayant pour équation

$$f_{m-2}(x,y)=0\ , \qquad (22)$$

laquelle sera aussi l'équation d'une surface cylindrique ayant sa directrice parallèle à l'axe des z, et coupant le plan tangent suivant cette courbe.

Quant à la surface conique du second ordre, ayant les centres de toutes ses sections parallèles au plan des xy sur l'axe des z, et les diamètres principaux de ces mêmes sections respectivement parallèles aux axes des x et des y, et proportionnels aux racines quarrées des rayons de plus grande et de moindre courbure de la surface (23) à l'origine; il est clair que l'équation de cette surface conique sera

$$R'x^2+Ry^2+rz^2=0\ ; \qquad (34)$$

dans laquelle r sera une quantité tout-à-fait arbitraire. L'équation du système de cette surface conique et de la surface cylindrique (22) sera donc

$$(R'x^2+Ry^2+rz^2).f_{m-2}(x,y)=0. \qquad (35)$$

Si, présentement, on veut savoir suivant quelles courbes ce système de surfaces conique et cylindrique coupe la surface proposée, tout se réduira à considérer comme équations d'un même problème indéterminé à trois variables, soit les deux équations (23, 35) soit toute combinaison qu'on voudra faire de ces deux-là. On pourra donc, en particulier, dans cette recherche, substituer à l'équation (23) sa différence avec l'équation (35), qui est, en divisant par z, ce qui revient à exclure le plan des xy,

$$2RR'[\mathrm{F}_{m-1}(x,y)+z.\mathrm{F}_{m-2}(x,y)+\ldots+z^{m-2}.\mathrm{F}_1(x,y)+z^{m-1}.\mathrm{F}_0(x,y)]$$
$$+rz.f_{m-2}(x,y)=0\ ; \qquad (36)$$

d'où il suit que ces courbes seront toutes situées sur la surface (36); c'est-à-dire, sur une surface de l'ordre $m-1$, laquelle ne passe ni par l'origine ni par la courbe (22), conformément à l'énoncé du théorème.

Si, dans la vue de savoir suivant quelle ligne cette surface coupe le plan des xy, c'est-à-dire le plan tangent, on fait, dans cette équation, $z=0$; l'équation résultante en x, y, qui sera

$$\mathrm{F}_{m-1}(x,y)=0,$$

ne renfermant plus l'indéterminée r, sera celle d'une ligne de l'ordre $m-1$ tout-à-fait fixe, quelle que soit la surface conique (34), et ne passant pas par le point de contact; ce qui est encore conforme à l'énoncé du théorème qui se trouve ainsi complètement démontré.

En se fondant sur le *Théorème II*, on démontrera aisément, comme nous l'avons fait pour le *Théorème III*, que, pour chaque surface conique en particulier, la condition de passer par les intersections tant de cette surface conique que de la surface cylindrique (22) avec la surface proposée, détermine complètement la surface (36).

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

Recherches sur les fractions continues ;

Par M. GERGONNE.

MALGRÉ les travaux d'un grand nombre d'illustres géomètres, la théorie des fractions continues est loin encore d'être aussi avancée que son importance pourrait le faire désirer. Nous savons développer une fonction en fraction continue ; nous savons, dans quelques cas, revenir d'une fraction continue à la fonction génératrice ; nous savons aussi, dans quelques cas, reconnaître qu'une fraction continue est incommensurable ; mais personne encore n'a établi la limite précise qui sépare les fractions continues rationnelles de celles qui ne le sont pas. On ne saurait douter non plus que les fractions continues ne doivent affecter certaines formes particulières, suivant qu'elles sont racines d'équations de tel ou de tel autre degré, mais, passé le second degré, pour lequel nous savons que les racines se développent en fractions continues périodiques, nous ne connaissons plus les caractères qui distinguent les racines soumises à un pareil développement, ce qui serait pourtant d'autant plus important qu'à cette connaissance se rattacherait immédiatement la recherche des diviseurs commensurables de tous les degrés des équations numériques. Nous ne savons pas même former immédiatement la somme ou la différence de deux fractions continues, leur produit ou le quotient de leurs divisions ; et, à plus forte raison, ne savons-nous pas en assigner les puissances et les racines.

Dans cet état d'indigence où nous nous trouvons relativement à ce genre de fonctions, toute recherche qui les concerne semble devoir être accueillie avec quelque intérêt ; et c'est, en particulier, ce qui doit recommander aux yeux des géomètres le mémoire de M. Bret, à la page 37 de ce volume ; mémoire dans lequel, après avoir donné plus de généralité à des théorèmes qu'on ne démontre communément que pour les fractions continues dans lesquelles les numérateurs sont égaux à l'unité, il a donné, pour le développement des fonctions en fractions continues, une méthode qui lui est propre et qu'il a appliquée ensuite à la recherche de plusieurs résultats non moins curieux qu'ils sont élégants.

Ces résultats, au surplus, ainsi que beaucoup d'autres du même genre, avaient déjà été déduits par Lagrange de l'application des fractions continues à l'intégration par approximation des équations différentielles à deux variables (*). Mais, la méthode de Lagrange, comme celle de M. Bret, peut paraître longue et laborieuse ; et ni l'une ni l'autre n'ont une marche assez uniforme et régulière pour qu'il soit permis d'asseoir solidement une induction sur les résultats qu'on en obtient.

Il nous a paru qu'on pouvait parvenir simplement à ces mêmes résultats, de manière à ne laisser aucun doute sur la loi qui les régit, et qu'on pouvait en même temps établir plusieurs théorèmes curieux sur certaines classes de fractions continues ; en développant en fraction de cette sorte la série très-remarquable dont M. de Stainville s'est occupé à la page 229 du présent volume. C'est ce que nous nous proposons de montrer ici.

Soit donc la série

(*) Voyez les *Mémoires de l'académie de Berlin*, pour 1776, page 236 ; voyez aussi le *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, de M. LACROIX, deuxième édition, tome II, pag. 427.

$$1+a\frac{z}{1}+a(a+k)\frac{z^2}{1.2}+a(a+k)(a+2k)\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots \qquad (1)$$

qu'il soit question de développer en fraction continue ; pour procéder à ce développement, nous emploîrons la méthode indiquée par Euler ; c'est-àdire que nous poserons successivement

$$1+a\frac{z}{1}+a(a+k)\frac{z^2}{1.2}+a(a+k)(a+2k)\frac{z^3}{1.2.3}+a(a+k)(a+2k)(a+3k)\frac{z^4}{1.2.3.4}+\ldots=\frac{1}{1-A},$$

$$A=az.\frac{1+\frac{1}{2}(a+k)\frac{z}{1}+\frac{1}{3}(a+k)(a+2k)\frac{z^2}{1.2}+\frac{1}{4}(a+k)(a+2k)(a+3k)\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots}{1+a\frac{z}{1}+a(a+k)\frac{z^2}{1.2}+a(a+k)(a+2k)\frac{z^3}{1.2.3}+a(a+k)(a+2k)(a+3k)\frac{z^4}{1.2.3.4}+\ldots}=\frac{az}{1+B},$$

$$B=(a-k)z.\frac{1+\frac{2}{3}(a+k)\frac{z}{1}+\frac{2}{4}(a+k)(a+2k)\frac{z^2}{1.2}+\frac{2}{5}(a+k)(a+2k)(a+3k)\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots}{2+\frac{1.2}{2}(a+k)\frac{z}{1}+\frac{1.2}{3}(a+k)(a+2k)\frac{z^2}{1.2}+\frac{1.2}{4}(a+k)(a+2k)(a+3k)\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots}=\frac{(a-k)z}{2-C},$$

$$C=(a+k)z.\frac{1+\frac{2.3}{3.4}(a+k)\frac{z}{1}+\frac{2.3}{4.5}(a+2k)(a+3k)\frac{z^2}{1.2}+\frac{2.3}{5.6}(a+2k)(a+3k)(a+4k)\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots}{3+\frac{2.3}{3}(a+k)\frac{z}{1}+\frac{2.3}{4}(a+k)(a+2k)\frac{z^2}{1.2}+\frac{2.3}{5}(a+k)(a+2k)(a+3k)\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots}=\frac{(a+k)z}{3+D},$$

$$D=2(a-2k)z.\frac{1+\frac{3.4}{4.5}(a+2k)\frac{z}{1}+\frac{3.4}{5.6}(a+2k)(a+3k)\frac{z^2}{1.2}+\frac{3.4}{6.7}(a+2k)(a+3k)(a+4k)\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots}{4+\frac{2.3.4}{3.4}(a+2k)\frac{z}{1}+\frac{2.3.4}{4.5}(a+2k)(a+3k)\frac{z^2}{1.2}+\frac{2.3.4}{5.6}(a+2k)(a+3k)(a+4k)\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots}=\frac{2(a-2k)z}{4-E},$$

$$E=2(a+2k)z.\frac{1+\frac{3.4.5}{4.5.6}(a+3k)\frac{z}{1}+\frac{3.4.5}{5.6.7}(a+3k)(a+4k)\frac{z^2}{1.2}+\ldots}{5+\frac{3.4.5}{4.5}(a+2k)\frac{z}{1}+\frac{3.4.5}{5.6}(a+2k)(a+3k)\frac{z^2}{1.2}+\ldots}=\frac{2(a+2k)z}{5+F},$$

$$F=3(a-3k)z.\frac{1+\frac{4.5.6}{5.6.7}(a+3k)\frac{z}{1}+\frac{4.5.6}{6.7.8}(a+3k)(a+4k)\frac{z^2}{1.2}+\ldots}{6+\frac{3.4.5.6}{4.5.6}(a+3k)\frac{z}{1}+\frac{3.4.5.6}{5.6.7}(a+3k)(a+4k)\frac{z^2}{1.2}+\ldots}=\frac{3(a-3k)z}{6-G},$$

$$G=3(a+3k)z.\frac{1+\frac{4.5.6.7}{5.6.7.8}(a+4k)\frac{z}{1}+\frac{4.5.6.7}{6.7.8.9}(a+4k)(a+5k)\frac{z^2}{1.2}+\ldots}{7+\frac{4.5.6.7}{5.6.7}(a+3k)\frac{z}{1}+\frac{4.5.6.7}{6.7.8}(a+3k)(a+4k)\frac{z^2}{1.2}+\ldots}=\frac{3(a+3k)z}{7+H};$$

. . . .

Nous remarquerons qu'il n'y a point d'induction dans tout ceci, attendu que, d'une part, on peut toujours calculer le terme général soit du numérateur, soit du dénominateur de chacune de ces fractions et que de l'autre on peut prouver que, si la loi qui se manifeste pour les valeurs successives de A, B, C, D, ... se soutient jusqu'à une quelconque de ces quantités, elle aura également lieu pour celle qui la suivra immédiatement.

En représentant donc, comme l'a fait M. de Stainville, par fa la série proposée, nous tirerons de tout cela

$$fa=\cfrac{1}{1-\cfrac{az}{1+\cfrac{(a-k)z}{2-\cfrac{(a+k)z}{3+\cfrac{2(a-2k)z}{4-\cfrac{2(a+2k)z}{5+\cfrac{3(a-3k)x}{6-\ldots}}}}}}} \qquad (2)$$

formule fondamentale pour toutes les recherches qui vont nous occuper.

1.° On a vu (pag. 235) que

$$fa.fb=f(a+b)\,;$$

donc, si l'on a les deux fractions continues

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{az}{1+\cfrac{(a-k)z}{2-\cfrac{(a+k)z}{3+\cfrac{2(a-2k)z}{4-\ldots}}}}}\,,$$

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{bz}{1+\cfrac{(b-k)z}{2-\cfrac{(b+k)z}{3+\cfrac{2(b-2k)z}{4-\ldots}}}}}\,;$$

leur produit sera la fraction continue

$$\frac{1}{1}-\frac{(a+b)z}{1}+\frac{(a+b-k)z}{2}-\frac{(a+b+k)z}{3}+\frac{2(a+b-2k)z}{4}-\frac{2a(a+b+2k)z}{5}+\ldots\ ;$$

voilà donc du moins des fractions continues dont on sait immédiatement assigner le produit.

2.° On a vu aussi (pag. 236) que

$$(\text{f}a)^m=\text{f}ma\ ;$$

donc, la $m.^{me}$ puissance de la fraction continue

$$\frac{1}{1}-\frac{az}{1}+\frac{(a-k)z}{2}-\frac{(a+k)z}{3}+\frac{2(a-2k)z}{4}-\frac{2(a+2k)z}{5}+\ldots,$$

est la fraction continue

$$\frac{1}{1}-\frac{maz}{1}+\frac{(ma-k)z}{2}-\frac{(ma+k)z}{3}+\frac{2(ma-2k)z}{4}-\frac{2(ma+2k)z}{5}+\ldots\ ;$$

voilà donc du moins une fraction continue dont nous savons assigner immédiatement une puissance d'un degré quelconque.

3.° Nous avons vu encore (pag. 237) que

$$\frac{\text{f}a}{\text{f}b}=\text{f}(a-b)\ ;$$

donc, si l'on a les deux fractions continues

$$\frac{1}{1}-\frac{az}{1}+\frac{(a-k)z}{2}-\frac{(a+k)z}{3}+\frac{2(a-2k)z}{4}-\frac{2(a+2k)z}{5}+\ldots\ ;$$

$$\frac{1}{1}-\frac{bz}{1}+\frac{(b-k)z}{2}-\frac{(b+k)z}{3}+\frac{2(b-2k)z}{4}-\frac{2(b+2k)z}{5}-\ldots\,;$$

le quotient de la division de la première par la seconde sera

$$\frac{1}{1}-\frac{(a-b)z}{1}+\frac{(a-b-k)z}{2}-\frac{2(a-b+k)z}{3}+\frac{2(a-b-2k)z}{4}-\frac{2(a-b+2k)z}{5}+\ldots\,;$$

voilà donc du moins des fractions continues que l'on sait immédiatement diviser l'une par l'autre.

4.° Nous avons vu enfin (pag. 237) que

$$\sqrt[m]{\mathrm{f}a}=\mathrm{f}\frac{a}{m}\quad;$$

donc la racine m.me de la fraction continue

$$\frac{1}{1}-\frac{az}{1}+\frac{(a-k)z}{2}-\frac{(a+k)z}{3}+\frac{2(a-2k)z}{4}-\frac{2(a+2k)z}{5}+\ldots\,;$$

est la fraction continue

$$\frac{1}{1}-\frac{\frac{m}{a}z}{1}+\frac{\left(\frac{a}{m}-k\right)z}{2}-\frac{\left(\frac{a}{m}+k\right)z}{3}+\frac{2\left(\frac{a}{m}-2k\right)z}{4}-\frac{z\left(\frac{a}{m}+2k\right)z}{5}+\ldots$$

ou encore, en réduisant

$$\frac{1}{1}+\frac{az}{m}+\frac{m(a-mk)z}{2m}-\frac{m(a+mk)z}{3m}+\frac{2m(a-2mk)z}{4m}-\frac{2m(a+2mk)z}{5m}+\ldots$$

voilà donc du moins une fraction continue dont nous savons assigner immédiatement une racine d'un degré quelconque.

5.° Si, dans notre série, on fait $a=1$, $k=-1$, elle se réduira à $1+z$; faisant donc les mêmes substitutions dans la fraction continue équivalente à sa $m.^{me}$ puissance, il viendra, en changeant z en x,

$$(1+x)^m=\frac{1}{1}-\frac{mx}{1}+\frac{(m+1)x}{2}-\frac{(m-1)x}{3}+\frac{2(m+2)x}{4}-\frac{2(m-2)x}{5}+\ldots$$

de là on conclura

$$\frac{1}{(1+x)^m}=(1+x)^{-m}=1-\frac{mx}{1}+\frac{(m+1)x}{2}-\frac{(m-1)x}{3}+\frac{2(m+2)x}{4}-\frac{2(m-2)x}{5}+\ldots;$$

ce qui, en changeant le signe de m, donnera cette autre expression

$$(1+x)^m=1+\frac{mx}{1}-\frac{(m-1)x}{2}+\frac{(m+1)x}{3}-\frac{2(m-2)x}{4}+\frac{2(m+2)x}{5}-\ldots.$$

6.° Si, dans notre série, on suppose simplement $k=0$ elle devient, en changeant az en x

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\ldots.$$

que l'on sait être égal à e^x, e étant la base des logarithmes népériens ; faisant donc la même substitution dans la fraction continue équivalente, nous aurons

$$e^x=\cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{2-\cfrac{x}{3+\cfrac{2x}{4-\cfrac{2x}{5+\cfrac{3x}{6-\cfrac{3x}{7+\dotsb}}}}}}}}$$

ou, en simplifiant

$$e^x=\cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{2-\cfrac{x}{3+\cfrac{x}{2-\cfrac{x}{5+\cfrac{x}{2-\cfrac{x}{7+\dotsb}}}}}}}}$$

de là on conclut

$$\frac{1}{e^x}\text{ ou }e^{-x}=1-\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{2-\cfrac{x}{3+\cfrac{x}{2-\cfrac{x}{5+\cfrac{x}{2-\cfrac{x}{7+\dotsb}}}}}}}$$

ce qui, en changeant le signe de x, donne cette nouvelle expression

$$e^x=1+\cfrac{x}{1-\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{3-\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{5-\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{7-\dotsb}}}}}}}$$

on en conclut, en posant $x=1$,

$$e=\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{7+\dotsb}}}}}}}}$$

ou bien,

$e=1$

$$e=1+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7-\ldots}}}}}}}$$

résultats déjà obtenus par M. Bret, à la page 50 de ce volume ; mais dont notre procédé rend la loi beaucoup plus manifeste.

7.° On sait que

$$(1+x)^m=1+\frac{m\mathrm{l}(1+x)}{1}+\frac{m^2\mathrm{l}^2(1+x)}{1.2}+\frac{m^3\mathrm{l}^3(1+x)}{1.2.3}+\ldots$$

égalant cette valeur de $(1+x)^m$ au dernier des deux développemens que nous en avons obtenus ci-dessus, il viendra, en supprimant l'unité de part et d'autre et divisant ensuite par m

$$\frac{\mathrm{l}(1+x)}{1}+\frac{m\mathrm{l}^2(1+x)}{1.2}+\ldots=\cfrac{mx}{1-\cfrac{(m-1)x}{2+\cfrac{(m+1)x}{3-\cfrac{2(m-2)x}{4+\cfrac{2(m+2)x}{5-\ldots}}}}}$$

faisant enfin l'indéterminée $m=0$, nous aurons

$$\mathrm{l}(1+x)=\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{2-\cfrac{x}{3+\cfrac{4x}{4-\cfrac{4x}{5+\cfrac{9x}{6-\cfrac{9x}{7+\cfrac{16x}{8-\cfrac{16x}{9+\ldots}}}}}}}}}$$

et par conséquent

$$\mathrm{l}2=\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3-\cfrac{4}{4+\cfrac{4}{5-\cfrac{9}{6+\cfrac{9}{7-\ldots}}}}}}}$$

8.° Si dans notre série fondamentale et dans le développement de sa $m.^{me}$ puissance, on fait $k=0$, $a=-1$; on aura

$$\left(1-\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}-\frac{z^3}{1.2.3}+\frac{z^4}{1.2.3.4}-\ldots\right)^m$$

$$=\frac{1}{1}+\frac{mz}{1}-\frac{mz}{2}+\frac{mz}{3}-\frac{2mz}{4}+\frac{2mz}{5}-\ldots$$

Si, au contraire, on fait, à la fois, $a=1$, $k=1$, il viendra

$$(1-z+z^2-z^3+z^4-z^5+\ldots..)^m$$

$$=\frac{1}{1}+\frac{mz}{1}-\frac{(m-1)z}{2}+\frac{(m+1)z}{3}-\frac{2(m-2)z}{4}+\frac{2(m+2)z}{5}-\ldots$$

Comme ces recherches ne présentent rien de difficile, nous croyons pouvoir nous dispenser de les pousser plus loin.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstration de quelques propriétés de l'angle plan, du triangle, de l'angle trièdre et du tétraèdre;

Par un ABONNÉ.
GERGONNE

DANS ce qui va suivre, nous adopterons les idées de Bertrand de Genève, sur la nature de l'angle ; c'est-à-dire, que nous considérerons l'angle plan comme la portion indéfinie du plan où il est tracé comprise entre ses côtés ; et l'angle dièdre ou trièdre comme la portion indéfinie de l'espace comprise entre ses faces. Nous dirons, en conséquence, qu'une droite tracée sur un plan le divise en deux parties égales, qu'un plan tracé dans l'espace le divise aussi en deux parties égales, que tout plan vaut quatre angles droits plans, et que l'espace vaut quatre angles droits dièdres ou huit angles droits trièdres.

I. Soient A, B les deux côtés d'un angle plan que nous désignerons par (AB); soient p, q les prolongemens de ces côtes au-delà du sommet de l'angle ; désignons par (pq) l'angle de ces prolongemens, et par (Aq), (pB) les angles formés par chaque côté avec le prolongement de l'autre.

Parce que chacune des deux droites Ap, Bq divise le plan où elle est tracée en deux parties égales, on aura

$$(AB)+(\gamma B)=(\gamma g)+(Ag) \, ,$$

$$(AB)+(Ag)=(\gamma g)+(\gamma B) \; ;$$

prenant successivement la demi-somme et la demi-différence de ces deux équations, il viendra, en réduisant,

$$(AB)=(\gamma g) \; , \qquad (Ag)=(\gamma B) \; ;$$

c'est-à-dire, *deux droites qui se coupent sur un plan forment des angles opposés par le sommet, égaux entre eux.* C'est la XV.^e proposition d'EUCLIDE, de laquelle on peut facilement conclure que *deux plans qui se coupent dans l'espace forment des angles opposés par l'arète, égaux entre eux.*

II. Soient trois droites indéfinies, tracées sur un même plan, et se coupant deux à deux ; elles diviseront ce plan en *sept* régions; dont une seule limitée et triangulaire, que nous désignerons par T; trois autres seront les opposés au sommet des trois angles du triangle, nous les désignerons par A, B, C; enfin, les trois derniers seront les espaces indéfinis compris entre chaque côté du triangle et les prolongemens des deux autres ; nous les représenterons par A', B', C', respectivement opposés à A, B, C.

Exprimant que les angles opposés au sommet sont égaux, nous aurons d'abord

$$A=A'+T \, ,$$

$$B=B'+T \, ,$$

$$C=C'+T \; ;$$

d'où, en ajoutant,

$$A+B+C=A'+B'+C'+3T \; ;$$

représentant ensuite par Δ l'angle droit plan ; et exprimant que tout le plan en vaut quatre, nous aurons

$$A+B+C+A'+B'+C'+T=4\Delta\ ;$$

prenant la demi-somme de ces deux équations et transposant, il viendra, en réduisant et divisant par Δ,

$$\frac{A}{\Delta}+\frac{B}{\Delta}+\frac{C}{\Delta}=2+\frac{T}{\Delta}\ .$$

mais la fraction $\dfrac{T}{\Delta}$ dont le numérateur seul est fini, peut être négligée vis-à-vis du nombre entier 2 ; en la supprimant donc et chassant le dénominateur Δ, il viendra finalement

$$A+B+C=2\Delta\ ;$$

c'est-à-dire, *la somme des trois angles de tout triangle vaut deux angles droits.* C'est la XXXII.e proposition d'EUCLIDE.

III. Soient A, B, C les trois arètes d'un même angle trièdre T, dont les angles dièdres soient respectivement désignés par (A), (B), (C). Soient désignés par $∀$, $ᗺ$, $Ɔ$ les prolongements de ces arètes au-delà du sommet de l'angle. Les trois droites $A∀$, $Bᗺ$, $CƆ$, seront les arètes de huit angles trièdres que nous désignerons, d'après leurs arètes, par

$$(ABC)\ ,\quad (ABƆ)\ ,\quad (AᗺC)\ ,\quad (∀BC)\ ,$$
$$(∀ᗺƆ)\ ,\quad (∀ᗺC)\ ,\quad (∀BƆ)\ ,\quad (AᗺƆ)\ ,$$

et qui seront tels que ceux de la seconde ligne seront les opposés au sommet de leurs correspondans dans la première, et leur seront conséquemment égaux par ce qui précède ; de sorte qu'on aura

$$(ABC)=(\forall\text{ꓭ}\text{Ɔ}), \quad (A\text{ꓭ}C)=(\forall B\text{Ɔ}),$$

$$(AB\text{Ɔ})=(\forall\text{ꓭ}C), \quad (\forall BC)=(A\text{ꓭ}\text{Ɔ}).$$

Présentement, chacun de nos trois angles dièdres (A), (B), (C), considéré comme indéfini, se trouvant composé de deux angles trièdres, on doit avoir, en ayant égard aux relations ci-dessus,

$$(ABC)+(\forall BC)=(A),$$

$$(ABC)+(A\text{ꓭ}C)=(B),$$

$$(ABC)+(AB\text{Ɔ}) \quad \text{ou} \quad (ABC)+(\forall\text{ꓭ}C)=(C);$$

d'où, en ajoutant,

$$2(ABC)+(ABC)+(\forall BC)+(A\text{ꓭ}C)+(\forall\text{ꓭ}C)=(A)+(B)+(C);$$

mais, la somme des angles trièdres de même sommet situés d'un même côté d'un plan devant valoir quatre angles droits trièdres; on aura, en représentant l'angle droit trièdre par Δ

$$(ABC)+(\forall BC)+(A\text{ꓭ}C)+(\forall\text{ꓭ}C)=4\Delta,$$

retranchant cette équation de la précédente, il viendra en divisant par 2Δ

$$\frac{(ABC)}{\Delta}=\frac{(A)}{2\Delta}+\frac{(B)}{2\Delta}+\frac{(C)}{2\Delta}-2.$$

Si l'on représente par D l'angle droit dièdre, on aura $2\Delta=D$, et par conséquent

$$\frac{(ABC)}{\Delta}=\frac{(A)}{D}+\frac{(B)}{D}+\frac{(C)}{D}-2;$$

c'est à-dire, en prenant respectivement les angles droits dièdre et trièdre pour mesures des angles dièdres et trièdres, *un angle trièdre quelconque a pour mesure la somme de ses trois angles dièdres diminuée de deux unités :* C'est le théorème de CAVALLERI, sur la mesure du triangle sphérique.

IV. Soit présentement $ABCD$ un tétraèdre quelconque. Désignons par (A), (B), (C), (D) les rapports de ses angles trièdres à l'angle droit trièdre, et par (AB), (AC), (BC), (AD), (BD), (CD) les rapports de ses angles dièdres à l'angle dièdre droit ; nous aurons, par ce qui précède,

$$(A)=(AB)+(AC)+(AD)-2\ ;$$

$$(B)=(AB)+(BC)+(BD)-2\ ,$$

$$(C)=(AC)+(BC)+(CD)-2\ ,$$

$$(D)=(AD)+(BD)+(CD)-2\ .$$

En ajoutant d'abord toutes ces équations et transposant, nous aurons

$$2\{(AB)+(AC)+(BC)+(AD)+(BD)+(CD)\}-(A)-(B)-(C)-(D)=8\ ;$$

c'est-à-dire, *la somme des angles dièdres d'un tétraèdre, moins la somme de ses angles trièdres vaut huit angles droits trièdres, ou l'espace entier.*

Si l'on ajoute seulement les trois premières équations, il viendra, en transposant,

$$2[(AB)+(AC)+(BC)]-(A)-(B)-(C)=6-(AD)-(BD)-(CD)\ ;$$

c'est-à-dire, *l'excès de six angles droits trièdres ou des trois quarts de l'espace sur la somme des trois angles dièdres d'un même* *angle d'un tétraèdre est égal à l'excès du double de la somme des trois angles dièdres adjacens à la face opposée sur les angles trièdres de la même face.*

Si l'on prend seulement la somme des deux premières, il viendra

$$2(AB)-(A)-(B)=4-(AC)-(AD)-(BC)-(BD) \;;$$

c'est-à-dire, *le double de l'excès de l'un des angles dièdres d'un tétraèdre sur les deux angles trièdres adjacens est égal à l'excès de huit angles droits trièdres ou de l'espace entier sur la somme des quatre angles dièdres adjacens à celui-là.*

Si de la somme des trois premières on retranche le triple de la dernière, il viendra

$$(A)+(B)+(C)-3(D)=2\{(AB)+(AC)+(BC)-(AD)-(BD)-(CD)\} \;;$$

c'est-à-dire, *l'excès de la somme de trois des angles trièdres d'un tétraèdre sur le triple du quatrième est égal à l'excès de la somme des trois angles dièdres adjacens à la face opposée à ce dernier sur la somme des trois autres.*

Si de la somme des deux premières on retranche celle des deux dernières, il viendra

$$2[(AB)-(CD)]=(A)+(B)-(C)-(D) \;;$$

c'est-à-dire, *la différence entre deux angles dièdres opposés d'un tétraèdre est égale à l'excès de la somme des deux angles trièdres adjacens au premier sur la somme des deux angles trièdres adjacens au dernier.*

La plupart de ces propositions ont été démontrées par l'abbé DE GUA, dans les *Mémoires de l'académie royale des sciences de Paris*, pour 1783; on pourrait en augmenter indéfiniment le nombre; mais toutes celles qu'on obtiendrait se trouvent implicitement comprises dans les quatre équations fondamentales d'où nous avons déduit celles que nous venons d'énoncer.

QUESTIONS

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration des deux théorèmes de géométrie énoncés à la page 116 de ce volume ;

Par MM. Vecten, licencié ès sciences,
Durrande, professeur de mathématiques au collége royal de Cahors,
Frégier, professeur de mathématiques au collége de Troyes, ancien élève de l'école polytechnique,
Fabry, aussi ancien élève de l'école polytechnique,
Et Gergonne.

Les démonstrations données par MM. Durrande, Vecten et Frégier de ces deux théorèmes étant exactement les mêmes, nous allons les confondre dans une seule rédaction.

THÉORÈME I. Un point P *étant pris arbitrairement dans l'intérieur d'un triangle quelconque* ABC ; *et* A', B', C' *étant respectivement les points où les côtés* BC, CA, AB *de ce triangle sont rencontrés par les prolongemens des droites* AP, BP, CP, *menées des sommets opposés au point* P, *on aura*

$$\frac{PA'}{AA'}+\frac{PB'}{BB'}+\frac{PC'}{CC'}=1 .$$

Démonstration. Des sommets A, B, C, soient abaissées des perpendiculaires AA'', BB'', CC'' sur les directions des côtés respectivement opposés ; et du point P soient abaissées , sur les mêmes directions , les perpendiculaires PA''' , PB''' , PC'''.

A cause des parallèles , on a les trois équations

$$\frac{PA'}{AA'}=\frac{PA'''}{AA''}\,,\quad \frac{PB'}{BB'}=\frac{PB'''}{PB''}\,,\quad \frac{PC'}{CC'}=\frac{PC'''}{CC''}\,;$$

mais , d'un autre côté , les triangles BPC , CPA , APB se trouvant avoir une base commune avec le triangle ABC , le rapport de leurs aires à la sienne doit être le même que celui des hauteurs ; c'est-à-dire , qu'on doit avoir

$$\frac{PA'''}{AA''}=\frac{BPC}{BAC}\,,\quad \frac{PB'''}{BB''}=\frac{CPA}{CBA}\,,\quad \frac{PC'''}{CC''}=\frac{APB}{ACB}\,;$$

au moyen de quoi les équations ci-dessus deviennent

$$\frac{PA'}{AA'}=\frac{BPC}{BAC}\,,\quad \frac{PB'}{BB'}=\frac{CPA}{CBA}\,,\quad \frac{PC'}{CC'}=\frac{APB}{ACB}\,;$$

ajoutant donc ces trois dernières équations membre à membre , en observant que

$$BPC+CPA+APB=ABC\,,$$

on aura

$$\frac{PA'}{AA'}+\frac{PB'}{BB'}+\frac{PC'}{CC'}=1\,;$$

c'est-à-dire le théorème énoncé.

On a évidemment

$$\frac{AA'}{AA'}+\frac{BB'}{BB'}+\frac{CC'}{CC'}=3\,;$$

retranchant donc de cette équation celle du théorème , il viendra

$$\frac{PA}{AA'}+\frac{PB}{BB'}+\frac{PC}{CC'}=2\ ;$$

équation qui peut aussi avoir son utilité. Cette remarque est due à M. Vecten.

THÉORÈME II. Un point P *étant pris arbitrairement dans l'intérieur d'un tetraèdre quelconque* ABCD ; *et* A′ , B′ , C′ , D′ *étant respectivement les points où les faces* BCD , CDA , DAB , ABC *de ce tetraèdre sont rencontrées par les prolongemens des droites* AP, BP, CP , DP , *menées des sommets opposés au point* P ; *on aura*

$$\frac{PA'}{AA'}+\frac{PB'}{BB'}+\frac{PC'}{CC'}+\frac{PD'}{DD'}=1\ .$$

Démonstration. Des sommets A , B , C , D , soient abaissées, sur les plans des faces opposées , les perpendiculaires AA″, BB″ , CC″ , DD″ ; et du point P soient abaissées , sur les mêmes plans , les perpendiculaires PA‴ , PB‴ , PC‴ , PD‴.

A cause des parallèles , on a les quatre équations

$$\frac{PA'}{AA'}=\frac{PA'''}{AA''}\ ,\quad \frac{PB'}{BB'}=\frac{PB'''}{BB''}\ ,\quad \frac{PC'}{CC'}=\frac{PC'''}{CC''}\ ,\quad \frac{PD'}{DD'}=\frac{PD'''}{DD''}\ ;$$

mais , d'un autre côté , chacun des tétraèdres PBCD , PCDA , PDAB , PABC se trouvant avoir une base commune avec le tétraèdre ABCD , le rapport de leurs volumes doit être le même que celui de leurs hauteurs ; c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$\frac{PA'''}{AA''}=\frac{PBCD}{ABCD}\ ,\ \frac{PB'''}{BB''}=\frac{PCDA}{BCDA}\ ,\ \frac{PC'''}{CC''}=\frac{PDAB}{CDAB}\ ,\ \frac{PD'''}{DD''}=\frac{PABC}{DABC}\ ;$$

au moyen de quoi les équations ci-dessus deviennent

$$\frac{PA'}{AA'}=\frac{PBCD}{ABCD},\ \frac{PB'}{BB'}=\frac{PCDA}{BCDA},\ \frac{PC'}{CC'}=\frac{PDAB}{CDAB},\ \frac{PD'}{DD'}=\frac{PABC}{DABC}\ ;$$

ajoutant donc ces dernières membre à membre, en observant que

$$PBCD+PCDA+PDAB+PABC=ABCD\ ;$$

on aura

$$\frac{PA'}{AA'}+\frac{PB'}{BB'}+\frac{PC'}{CC'}+\frac{PD'}{DD'}=1\ ;$$

c'est-à-dire le théorème énoncé.

On a évidemment

$$\frac{AA'}{AA'}+\frac{BB'}{BB'}+\frac{CC'}{CC'}+\frac{DD'}{DD'}=4\ ;$$

retranchant donc de cette équation celle du théorème, il viendra

$$\frac{PA}{AA'}+\frac{PB}{BB'}+\frac{PC}{CC'}+\frac{PD}{DD'}=3\ ;$$

équation qui peut aussi avoir son utilité. Cette remarque est due à M. Vecten.

Les démonstrations de M. Fabry ne diffèrent de celles-ci qu'en ce que, par le point P, il mène une droite ou un plan parallèle à l'un des côtés du triangle ou à l'une des faces du tétraèdre, ce qui établit des proportions faciles à reconnaître, et dont la combinaison conduit au résultat cherché; ses démonstrations ont ainsi l'avantage de ne dépendre aucunement des théorèmes sur la mesure des aires et des volumes.

Nous sommes tombés très-simplement sur ces deux théorèmes, en cherchant à décomposer une masse, supposée réduite à un point, en trois ou quatre autres situées aux sommets d'un triangle ou d'un tétraèdre, dans l'intérieur duquel la masse dont il s'agit se trouve située. Cette manière d'envisager les deux théorèmes en fournira une nouvelle démonstration fort simple, ainsi qu'on va le voir.

I. Soit p une masse située en P, dans l'intérieur d'un triangle ABC, et qu'il s'agit de décomposer en trois autres masses a, b, c, situées à ses sommets. Le problème est évidemment déterminé ; et conséquemment, de quelque manière d'ailleurs qu'on le résolve, on doit constamment parvenir au même résultat.

Or, la manière la plus simple et la plus naturelle de résoudre ce problème est la suivante : soit menée PA, prolongée jusqu'à la rencontre de BC en A′ ; et soit décomposée la masse p en deux autres, l'une a située en A, et l'autre a' située en A′ ; il ne s'agira plus alors que de décomposer cette dernière en deux autres b, c, situées en B, C.

Or, par le principe des forces parallèles ou des centres de gravité, on aura

$$p.\frac{\mathrm{PA'}}{\mathrm{AA'}}=a\ ;$$

d'où l'on voit qu'en menant PB, PC, dont les prolongemens rencontrent respectivement CA, AB en B′, C′, on aura

$$p.\frac{\mathrm{PA'}}{\mathrm{AA'}}=a\ ;\quad p.\frac{\mathrm{PB'}}{\mathrm{BB'}}=b\ ,\quad p.\frac{\mathrm{PC'}}{\mathrm{CC'}}=c\ ;$$

ajoutant donc, et remarquant que $a+b+c=p$, il viendra

$$\frac{\mathrm{PA'}}{\mathrm{AA'}}+\frac{\mathrm{PB'}}{\mathrm{BB'}}+\frac{\mathrm{PC'}}{\mathrm{CC'}}=1\,.$$

II. Soit p une masse située en P, dans l'intérieur d'un tétraèdre ABCD, et qu'il s'agisse de décomposer en quatre autres masses a, b, c, d, situées à ses sommets. Le problème est évidemment déterminé ; et conséquemment, de quelque manière d'ailleurs qu'on le résolve, on doit constamment parvenir au même résultat.

Or, la manière la plus simple et la plus naturelle de résoudre ce problème est la suivante : soit menée PA dont le prolongement rencontre en A′ le plan de la face BCD ; et soit decomposée la masse p en deux autres a et a' situées respectivement en A et A′; il ne s'agira plus ensuite que de decomposer cette dernière en trois autres b, c, d, situées respectivement en B, C, D.

Or, par le principe des forces parallèles ou des centres de gravité, on aura

$$p\cdot\frac{\mathrm{PA'}}{\mathrm{AA'}}=a\,;$$

d'où l'on voit qu'en menant PB, PC, PD, dont les prolongemens rencontrent respectivement CDA, DAB, ABC en B′, C′, D′, on aura

$$p\cdot\frac{\mathrm{PA'}}{\mathrm{AA'}}=a,\quad p\cdot\frac{\mathrm{PB'}}{\mathrm{BB'}}=b,\quad p\cdot\frac{\mathrm{PC'}}{\mathrm{CC'}}=c,\quad p\cdot\frac{\mathrm{PD'}}{\mathrm{DD'}}=d\,;$$

ajoutant donc, et remarquant que $a+b+c+d=p$, il viendra.

$$\frac{\mathrm{PA'}}{\mathrm{AA'}}+\frac{\mathrm{PB'}}{\mathrm{BB'}}+\frac{\mathrm{PC'}}{\mathrm{CC'}}+\frac{\mathrm{PD'}}{\mathrm{DD'}}=1\,.$$

III. Cette manière d'envisager les deux théorèmes, nous permet de trouver facilement l'analogue du premier pour le triangle sphérique. Soit, en effet, une puissance p agissant sur le centre S d'une sphère, et dont la direction passe par un point P de la surface de cette sphère, situé dans l'intérieur d'un triangle sphérique ABC ; et proposons nous de decomposer cette puissance en trois autres a, b, c, ayant respectivement les directions SA, SB, SC. Soit mené par A et P un arc de grand cercle coupant en A′ le côté BC ; et soit d'abord décomposée la puissance p en deux autres

a, a' respectivement dirigées suivant SA, SA'; il ne s'agira plus ensuite que de décomposer cette dernière en deux autres bc, dirigées suivant SB, SC.

Or, par le principe du parallélogramme des forces, on aura

$$p.\frac{Sin.PA'}{Sin.AA'}=a\,;$$

d'où l'on voit qu'en menant les arcs de grands cercles PB, PC, rencontrant respectivement en B', C' les côtés CA, AB, on aura

$$p.\frac{Sin\,PA'}{Sin.AA'}=a\,,\quad p.\frac{Sin.PB'}{Sin.BB'}=b\,,\quad p.\frac{Sin.PC'}{Sin.CC'}=c\,.$$

Mais, par le principe du parallelipipède des forces, on a (Voyez la pag. 55 du présent volume.)

$$a^2+b^2+c^2+2bc\,Cos.BC+2ca\,Cos.CA+2ab\,Cos.AB=p^2\,;$$

substituant donc, et divisant par p^2, on aura,

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{Sin.PA'}{Sin.AA'}\right)^2+2.\frac{Sin.PB'}{Sin.BB'}.\frac{Sin.PC'}{Sin.CC'}Cos.BC\\+&\left(\frac{Sin.PB'}{Sin.BB'}\right)^2+2.\frac{Sin.PC'}{Sin.CC'}.\frac{Sin.PA'}{Sin.AA'}Cos.CA\\+&\left(\frac{Sin.BC'}{Sin.CC'}\right)^2+2.\frac{Sin.PA'}{Sin.AA'}.\frac{Sin.PB'}{Sin.BB'}Cos.AB\end{aligned}\right\}=1\,;$$

équation d'où il serait facile ensuite de déduire celle qui est relative au triangle rectiligne, en supposant le rayon de la sphère infini.

IV. Dans tout ce qui précède, nous avons formellement supposé que le point P était intérieur au triangle ou au tétraèdre. S'il lui était exterieur, il en résulterait de simples changemens de signes dans nos formules ; et l'on trouverait, soit par les raisonnemens de MM. Vecten et Durrande, soit par les nôtres que ces changemens de signes sont assujettis à cette seule règle, savoir qu'un terme du premier membre de l'équation relative, soit au triangle rectiligne, soit au tétraèdre, doit être positif ou négatif, suivant que le point P regarde l'intérieur ou l'extérieur du côté du triangle ou de la face du tétraèdre auquel ce terme se rapporte.

V. D'après cela, si dans le cas du triangle, et du point P, toujours supposé intérieur, on considère successivement et respectivement les points A, B, C comme points extérieurs aux triangles BPC, CPA, APB ; outre l'équation

$$\frac{PA'}{AA'}+\frac{PB'}{BB'}+\frac{PC'}{CC'}=1\,,$$

on devra encore avoir

$$\frac{AA'}{PA'}-\frac{AC'}{BC'}-\frac{AB'}{CB'}=1\,,$$

$$\frac{BB'}{PB'}-\frac{BA'}{CA'}-\frac{BC'}{AC'}=1\,,$$

$$\frac{CC'}{PC'}-\frac{CB'}{AB'}-\frac{CA'}{BA'}=1\,;$$

équations auxquelles on peut joindre d'ailleurs toutes celles que donne la théorie des transversales.

On pourrait parvenir, pour le tétraèdre à des relations analogues.

Démonstration

Démonstration du théorème d'analise indéterminée énoncé à la page 228 de ce volume ;

Par M. Frégier, professeur de mathématiques au collége de Troye, ancien élève de l'école polytechnique.

THÉORÈME. Toute puissance paire d'un nombre impair, diminué d'une unité, est toujours divisible par une puissance de deux supérieure de deux unités à celle qui divise son exposant.

Démonstration. Tout se réduit évidemment à démontrer que, quels que soient d'ailleurs les trois nombres entiers positifs a, k, n, l'expression

$$\frac{(1+2a)^{2^n.k}-1}{2^{n+2}}$$

est toujours un nombre entier.

D'abord, comme on a

$$(1+2a)^{2^n.k}=\{(1+2a)^k\}^{2^n},$$

et comme d'ailleurs $(1+2a)^k$ est nécessairement un nombre impair, que l'on peut représenter par $1+2A$; tout se réduit à démontrer que l'expression

$$\frac{(1+2A)^{2^n}-1}{2^{n+2}}$$

est un nombre entier.

On a, en second lieu,

$$(1+2A)^{2^n}=\{(1+2A)^2\}^{2^{n-1}} ;$$

mais

$$(1+2A)^2=1+4A+4A^2=1+4A(1+A) ;$$

et comme, quel que soit A, $A(1+A)$ est nécessairement un nombre pair, que l'on peut représenter par $2B$, on aura

$$(1+2A)^2=1+8B ,$$

et, par suite

$$(1+2A)^{2^n}=(1+8B)^{2^{n-1}} ;$$

tout se réduit donc à démontrer que la formule

$$\frac{(1+8B)^{2^{n-1}}-1}{2^{n+2}}$$

est un nombre entier.

Cela est d'abord évident, pour le cas où $n=1$; puisqu'alors elle se réduit à B. On trouve de plus

$$(1+8B)^2=1+16B+64B^2=1+16B(1+4B) ,$$

que l'on peut représenter par $1+16B'$

$$(1+8B)^4=(1+16B')^2=1+32B'+256B'^2=1+32B'(1+8B') ,$$

que l'on peut représenter par $1+32B''$, et ainsi de suite, ce qui est déjà conforme à l'énoncé du théorème. Or, si, en général, suivant cet énoncé, on a

$$(1+8B)^{2^{k-1}}=1+2^{k+2}G ,$$

on aura

$$(1+8B)^{2^k}=(1+2^{k+2}G)^2 ,$$

ou

$$(1+8B)^{2^k}=1+2^{k+3}G+2^{2k+4}G^2$$

ou encore

$$(1+8B)^{2^k}=1+2^{k+3}G(1+2^{k+1}G)$$

quantité de la forme $1+2^{k+3}G'$. Il demeure donc établi que, si la puisssance 2^{k-1} de $1+8B$, diminuée d'une unité, est divisible par 2^{k+2}, sa puissance 2^k, diminuée également d'une unité, le sera par 2^{k+3}, puis donc que ces puissances 2^0, 2^1, 2^2, diminuées d'une unité, le sont respectivement par 2^3, 2^4, 2^5, il s'ensuit que sa puissance du degré 2^{n-1}, diminuée d'une unité, le sera par 2^{n+2} ; l'expression

$$\frac{(1+8B)^{2^{n-1}}-1}{2^{n+2}}$$

est donc un nombre entier ; l'expression

$$\frac{(1+2A)^{2^n}-1}{2^{n+2}}$$

en sera donc un aussi, et, conséquemment, il en sera de même de

$$\frac{(1+2a)^{2^n \cdot k}-1}{2^{n+2}} ;$$

le théorème est donc démontré en toute rigueur.

Soient les deux formules

$$\frac{(1+2a)^{2^p \cdot g}-1}{2^{p+2}} , \qquad \frac{(1+2b)^{2^q h}-1}{2^{q+2}} ,$$

elles seront l'une et l'autre des nombres entiers, par ce qui précède. Si p n'est pas moindre que q, à plus forte raison la formule

$$\frac{(1+2a)^{2^p g}-1}{2^{q+2}}$$

sera aussi un nombre entier, d'où il suit que sa différence avec la seconde des deux ci-dessus sera également un nombre entier. Ainsi, la formule

$$\frac{(1+2a)^{2^p \cdot g}-(1+2b)^{2^q h}}{2^{q+2}},$$

dans laquelle on suppose $p>q-1$ est nécessairement un nombre entier; et l'on prouverait évidemment la même chose de la formule

$$\frac{(1+2a)^{2^p g}-(1+2b)^{2^q h}}{2^{p+2}},$$

dans laquelle on aurait $q>p-1$.

Si l'on suppose $p=q=1$, on aura la formule

$$\frac{[(1+2a)^g]^2-[(1+2b)^h]^2}{8},$$

ou, plus simplement, la formule

$$\frac{(1+2A)^2-(1+2B)^2}{8},$$

qui devra être un nombre entier; c'est-à-dire, que *la différence de deux quarrés impairs est toujours divisible par huit.*

Donc, *la somme de deux nombres impairs multipliés par leur différence donne un produit divisible par huit;* d'où il suit encore que *la somme ou la différence de deux nombres impairs doit nécessairement être divisible par quatre* (*).

(*) Cette vérité s'aperçoit immédiatement en observant que tout nombre impair est compris dans la double formule $4n\pm1$; ou, ce qui revient au même, que tout nombre impair, augmenté ou diminué d'une unité, devient divisible par quatre.

J. D. G.

QUESTIONS PROPOSEES.

Théorèmes appartenant à la géométrie de la règle.

I. Soient pris arbitrairement, soit sur un plan, soit dans l'espace, n points que l'on numérotera et désignera par (1), (2), (3)....(n).

Soit joint chacun de ces points à celui qui porte le numéro immédiatement supérieur par $n-1$ droites indéfinies, dont chacune soit désignée par les deux points qui la déterminent en cette manière : $\overline{(1)(2)}$, $\overline{(2)(3)}$, $\overline{(3)(4)}$, ... $\overline{(n-1)(n)}$.

Sur la direction de chacune de ces droites, soit pris arbitrairement un point ; et soit désigné chacun des $n-1$ points ainsi choisis par les numéros qui désignent la droite sur laquelle il se trouve situé ; ainsi qu'il suit : (12), (23), (34), ... $(n-1\,,\,n)$.

Soient joints deux à deux, par des droites, ceux de ces points et des premiers dont les indices ne portent ni la répétition d'un même nombre ni interruption dans les nombres, du plus petit au plus grand ; et soient désignées ces droites par l'ensemble des indices des deux points qui les déterminent, en cette manière $\overline{(1)(23)}$, $\overline{(12)(3)}$, $\overline{(2)(34)}$, $\overline{(23)(4)}$..... ; les droites dont les indices renfermeront les mêmes nombres se couperont en un certain point que l'on pourra simplement désigner par l'ensemble de ces nombres ; ainsi, par exemple, l'intersection de $\overline{(1)(23)}$ avec $\overline{(12)(3)}$ sera désignée par (123) ; celle de $\overline{(2)(34)}$ avec $\overline{(23)(4)}$ le sera par (234) ; et ainsi de suite ; et ces nouveaux points seront un nombre de $n-2$.

Soient de même joints deux à deux, par des droites, ceux des points de ces trois séries dont les indices ne portent ni la répétition d'un même nombre, ni interruption dans les nombres, du plus petit au plus grand ; et soient désignées ces nouvelles droites par l'ensemble des indices des deux points qui auront servi à les déterminer en cette manière $\overline{(1)(234)}$, $\overline{(12)(34)}$, $\overline{(123)(4)}$, $\overline{(2)(345)}$, $\overline{(23)(45)}$, $\overline{(234)(5)}$, ...; il arrivera que les droites dont les indices renfermeront les mêmes nombres, lesquelles seront au nombre de trois, pour chaque série de nombres, se couperont en un même point, que l'on pourra simplement désigner par l'ensemble de ces nombres; ainsi, par exemple, l'intersection des trois droites $\overline{(1)(234)}$, $\overline{(12)(34)}$, $\overline{(123)(4)}$ sera simplement désignée par (1234), et ainsi des autres; ils seront au nombre de $n-3$.

En continuant le même procédé, on obtiendra des points, au nombre de $n-4$, dont l'indice portera cinq nombres, et qui seront les points de concours de quatre droites ; puis des points au nombre de $n-5$, dont l'indice portera six nombres, et qui seront des points de concours de cinq droites, et ainsi de suite; et enfin, un point unique qui sera le point de concours de $n-1$ droites, et sera désigné par (123.....n).

II. Soient n droites arbitraires indéfinies numérotées dans un ordre quelconque et désignées par $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, ...$\bar{n}$, se coupant consécutivement. Désignons l'intersection de chaque droite avec celle qui porte le numéro immédiatement supérieur par l'ensemble de leurs indices, en cette manière $(\bar{1}, \bar{2})$, $(\bar{2}, \bar{3})$, $(\bar{3}, \bar{4})$, ... $(\overline{n-1}, \bar{n})$.

Par ces points d'intersection, soient menées des droites indéfinies, que nous désignerons simplement par l'ensemble des deux nombres qui forment l'indice de chacun d'eux, en cette manière : $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$, ... $\overline{n-1}$, $\bar{n}$.

Considérons les intersections deux à deux, au nombre de $n-2$, de celles de ces droites dont les indices ne présentent ni répétition ni discontinuité de nombres, du plus petit au plus grand ; et soient désignés ces points par l'ensemble des indices des deux droites qui les déterminent en cette manière $(\bar{1}, \overline{23})$, $(\overline{12}, \bar{3})$, $(\bar{2}, \overline{34})$, $(\overline{23}, \bar{4})$.....; les points dont les indices renfermeront les mêmes nombres appartiendront à certaines droites, au nombre de $n-2$, que l'on pourra simplement désigner par l'ensemble de ces nombres ; ainsi, par exemple, la droite passant par $(\overline{1}, \overline{23})$ et $(\overline{12}, \overline{3})$ sera désignée par $\overline{123}$; celle qui passera par $(\overline{2}, \overline{34})$ et $(\overline{23}, \overline{4})$ sera désignée par $\overline{234}$; et ainsi des autres.

Soient de même considérées les intersections deux à deux de celles des droites de ces trois séries dont les indices ne portent ni répétition ni discontinuité de nombres, du plus petit au plus grand ; et soient désignés ces nouveaux points par l'ensemble des indices des deux droites qui auront servi à les déterminer, en cette manière $(\overline{1}, \overline{234})$, $(\overline{12}, \overline{34})$, $(\overline{1}, \overline{234})$, ... ; il arrivera que les points dont les indices renfermeront les mêmes nombres, lesquels seront au nombre de trois, pour chaque série de nombres, appartiendront à une même droite, que l'on pourra simplement désigner par l'ensemble de ces nombres ; ainsi, par exemple, la droite qui contiendra les trois points $(\overline{1}, \overline{224})$, $(\overline{12}, \overline{34})$, $(\overline{123}, \overline{4})$ sera simplement désignée par $\overline{1234}$; les droites de cette série seront d'ailleurs au nombre de $n-3$.

En continuant le même procédé, on obtiendra des droites, au nombre de $n-4$, dont l'indice portera cinq nombres, et sur chacune desquelles quatre points se trouveront situés ; puis des droites, au nombre de $n-5$, dont l'indice portera six nombres, et sur chacune desquelles cinq points se trouveront situés, et ainsi de suite ; et enfin, une droite unique, sur laquelle $n-1$ points se trouveront situés ; et qui sera désignée par $\overline{123......n}$.

Ces deux théorèmes ont également lieu sur la sphère, pourvu qu'on substitue aux droites des arcs de grands cercles, il arrive seulement que les points y sont, dans les mêmes circonstances, en nombre deux fois plus grand que sur un plan.

Problème d'analise algébrique.

Soit $X=0$ une équation numérique d'un degré quelconque, dont x soit l'inconnue.

Soit l la limite inférieure des racines positives de cette équation; soit changé x en $x+l$, ce qui donnera une nouvelle équation $X'=0$.

Soit l' la limite inférieure des racines positives de cette équation; en y changeant x en $x+l'$, on aura une nouvelle équation $X''=0$.

Soit l'' la limite inférieure des racines positives de cette équation; en y changeant x en $x+l''$, on aura une quatrième équation $X'''=0$, et ainsi de suite.

Cela posé,

1.° On demande de démontrer que, si la proposée $X=0$ a une ou plusieurs racines positives, la série $l+l'+l''+\ldots\ldots$ sera convergente, et aura pour limite de la somme de ses termes la plus petite de ces racines?

2.° On demande ce que deviendrait cette même série, dans le cas où la proposée, n'ayant aucune racine positive, aurait néanmoins des variations (*).

(*) La résolution de ces questions est nécessaire pour compléter la théorie de la méthode publiée récemment par M. Bérard, pour la résolution des équations numériques.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Recherches diverses de géométrie plane;

Par M. VECTEN, licencié ès sciences, ancien professeur de mathématiques spéciales.

PROBLÈME. *Etant données les trois hauteurs d'un triangle; construire le triangle?* (*)

Solution. Ce problème a été traité par M. Carnot dans sa *Géométrie de position* (pag. 371 et suiv., prob. XXXVI). On va voir qu'on peut en obtenir une solution beaucoup plus simple que la sienne.

Pour parvenir à cette solution, considérons les deux triangles ABC, *abc* (fig. 1), dont le premier est supposé le triangle inconnu qu'il s'agit de construire, au moyen de ses trois hauteurs connues AA', BB', CC', tandis que l'autre est un triangle de dimensions arbitraires, supposé seulement semblable à celui-là; et dont les trois hauteurs sont aa', bb', cc'.

A cause de la similitude des deux triangles, et parce que, de plus, dans un même triangle, les hauteurs sont en raison inverse des bases, on aura

(*) Ce problème est un des 95 qui ont été proposés à la page 315 du VIII.e volume de ce recueil.

J. D. G.

$$\mathrm{AA'}:\mathrm{CC'}::aa':cc'::ab:bc=ab.\frac{\mathrm{CC'}}{\mathrm{AA'}}\ ,$$

$$\mathrm{BB'}:\mathrm{CC'}::bb':cc'::ab:ac=ab.\frac{\mathrm{CC'}}{\mathrm{BB'}}\ ;$$

or, les rapports $\frac{\mathrm{CC'}}{\mathrm{AA'}}$, $\frac{\mathrm{CC'}}{\mathrm{BB'}}$ sont connus; prenant donc arbitrairement le côté ab du triangle acb, on pourra, par des quatrièmes proportionnelles, déterminer les deux autres; ce triangle acb pourra donc être construit; et, par suite, on pourra construire ses trois hauteurs aa', bb', cc'; ces hauteurs, une fois connues, on déterminera les trois côtés du triangle ABC par ces proportions,

$$aa':bc::\mathrm{AA'}:\mathrm{BC}=\mathrm{AA'}.\frac{bc}{aa'}\ ,$$

$$bb':ca::\mathrm{BB'}:\mathrm{CA}=\mathrm{BB'}.\frac{ca}{bb'}\ ,$$

$$cc':ab::\mathrm{CC'}:\mathrm{AB}=\mathrm{CC'}.\frac{ab}{cc'}\ ;$$

le problème se trouvera donc ainsi complètement résolu (*).

(*) Soient a, a', a'' les trois hauteurs données, et x, x', x'' les trois côtés inconnus du triangle cherché. Nous aurons

$$ax=a'x'=a''x''\ .$$

Avec ces trois hauteurs, prises comme côtés, soit construit un triangle $aa'a''$, dont les hauteurs soient b, b', b''; nous aurons encore

$$ab=a'b'=a''b''\ .$$

Enfin, avec les trois hauteurs b, b', b'' de celui-ci, construisons-en un troisième $bb'b''$, dont les trois hauteurs soient c, c', c'', ce qui nous donnera

$$bc=b'c'=b''c''\ ;$$

THÉORÈME. Soient A , A′, A″ *les trois sommets d'un triangle ; et* AP , A′P′ , A″P″ *ses trois hauteurs, se coupant, comme l'on sait, en un même point* C, *on aura cette suite de rapports égaux*

$$\frac{AA'.A'A''.A''A}{A'P''.AP.A'P'}=\frac{AC.A'C.A''C}{A''P'.AP''.A'P}=\frac{AC.A'C.A''C}{A'P''.A''P.AP'}.$$

Démonstration. Les triangles

APA′ , APA″ , A′P′A″ , A′P′A , A″P″A ; A″P″A′ ;

sont respectivement semblables aux triangles

En divisant l'une par l'autre, les deux premières suites d'égalités, on aura

$$\frac{x}{b}=\frac{x'}{b'}=\frac{x''}{b''};$$

le triangle $bb'b''$ est donc semblable au triangle $xx'x''$; ses hauteurs c, c', c'', doivent donc être proportionnelles aux hauteurs $aa'a''$ de celui-là, on doit donc avoir

$$\frac{x}{a}=\frac{b}{c}, \quad \frac{x'}{a'}=\frac{b'}{c'}, \quad \frac{x''}{a''}=\frac{b''}{c''};$$

d'où

$$x=\frac{ab}{c}, \quad x'=\frac{a'b'}{c'}, \quad x''=\frac{a''b''}{c''},$$

ce qui fournit une construction assez élégante. Au surplus, la construction peut être réduite à ce qui suit :

Avec les trois hauteurs données, prises pour côtés, formez un triangle, dont vous menerez les trois hauteurs ; avec ces trois nouvelles hauteurs, prises également pour côtés, formez un second triangle, dont vous menerez une seule hauteur quelconque ; et prolongez-là au-dessous de la base, de manière qu'elle devienne égale à la hauteur correspondante du triangle cherché. En menant, par l'extrémité de ce prolongement, une parallèle à la base, elle formera, avec les deux autres côtés prolongés, le triangle demandé.

J. D. G.

$$AP''C\,,\quad AP'C\,,\quad A'PC\,,\quad A'P''C\,,\quad A''P'C\,,\quad A''PC\,,$$

(fig. 2) puisque les uns et les autres sont rectangles et ont de plus un angle commun ; on a donc

$$\frac{AA'}{AP}=\frac{AC}{AP''}\,,\quad \frac{A''A}{AP}=\frac{AC}{AP'}\,,\quad \frac{A'A''}{A'P'}=\frac{A'C}{A'P}\,,$$

$$\frac{AA'}{A'P'}=\frac{A'C}{A'P''}\,,\quad \frac{A''A}{A''P''}=\frac{A''C}{A''P'}\,,\quad \frac{A'A''}{A''P''}=\frac{A''C}{A''P}\,.$$

équations qui, étant multipliées membre à membre, donneront

$$\frac{\overline{AA'}^2.\overline{A'A''}^2.\overline{AA''}^2}{\overline{AP}^2.\overline{A'P'}^2.\overline{A''P''}^2}=\frac{\overline{AC}^2\,\overline{A'C}^2.\overline{A''C}^2}{AP'.A'P''.A''P.A'P.A''P'.AP''}\,;$$

mais, d'après un théorème connu (Voyez, en particulier, la *Théorie des transversales* de M. Carnot), on a

$$AP'.A'P''.A''P=A'P.A''P'.AP''\,;$$

donc

$$\frac{\overline{AA'}^2.\overline{A'A''}^2.\overline{A''A}^2}{\overline{A''P''}^2.\overline{AP}^2.\overline{A'P'}^2}=\frac{\overline{AC}^2.\overline{A'C}^2.\overline{A''C}^2}{\overline{A'P''}^2.\overline{A''P}^2.\overline{AP'}^2}=\frac{\overline{AC}^2.\overline{A'C}^2.\overline{A''C}^2}{\overline{A''P'}^2.\overline{AP''}^2.\overline{A'P}^2}\,;$$

d'où, en extrayant la racine quarrée, on conclura le théorème énoncé.

THÉORÈME. Soit pris arbitrairement sur le plan d'un triangle ABC *un point* P, *par lequel soient menées les droites* AP, BP, CP, *dont les prolongemens rencontrent respectivement en* A′, B′, C′ *les directions* BC, CA, AD ; *soit formé le triangle* A′B′C′ *dont les côtés* B′C′, C′A′, A′B′, *sont coupés respectivement en* A″, B″, C″, *par* PA, PB, PC ; *soit formé le triangle* A″B″C″, *dont les côtés* B″C″, C″A″, A″B″, *sont coupés respectivement en* A‴, B‴, C‴, *par les droites* PA, PB, PC, *et ainsi de suite.*

1.° *Les droites* BC, B′C′, B″C″, B‴C‴,...... *concourront en un même point* a; *les droites* CA, C′A′, C″A″, C‴A‴,...... *concourront en un même point* b; *et les droites* AB, A′B′, A″B″, A‴, B‴,..... *concourront en un même point* c.

2.° *Les trois points de concours* a, b, c, *appartiendront à une même ligne droite.*

Démonstration. Par un théorème connu, si a, b, c sont respectivement les points de concours de BC et B′C′, de CA et C′A′, de AB et A′B′, ces trois points a, b, c seront en ligne droite. En outre, chacun des triangles de la série indéfinie ABC, A′B′C′, A″B″C″, A‴B‴C‴, ... se trouvant dépendre de la même manière de celui qui le précède, tout se réduira à prouver que B″C″ passe par a, C″A″ par b, et A″B″ par c; ou plutôt à démontrer simplement que B″C″ passe par a, puisque les trois côtés du triangle A″B″C″ se trouvent dans des circonstances absolument semblables.

Il s'agit simplement de prouver qu'une droite menée par B″ et par a (fig. 3) doit passer par A″. Pour y parvenir, remarquons que les deux droites CBa et B′C′a, qui se coupent en a, d'après l'hypothèse, forment, avec les deux droites BB′, C′A′, le quadrilatère complet B′C′aBA′B″B′, dont les trois diagonales sont B″a, BC′, A′B′; or, il est connu que l'une quelconque des diagonales d'un quadrilatère complet est coupée harmoniquement par les deux autres (Voyez la *Theorie des transversales* de M Carnot); donc le point de rencontre c de BC′ ou BA avec A′B′, et le point de rencontre du prolongement de aB″ avec la même droite A′B′, sont ceux où la diagonale A′B′ est divisée harmoniquement. Mais la figure AB′CA′BPA est aussi un quadrilatère complet, dont les trois diagonales sont A′B, A′B′, CP; par conséquent, la diagonale A′B′ est divisée harmoniquement aux points c et C″; donc la droite

aB$''$ doit passer par le point C$''$, et l'on démontrerait la même chose pour les deux autres (*).

THÉORÈME. Soit un quadrilatère complet dont les quatre côtés soient ABC$'$, BCA$'$, CAB$'$, A$'$B$'$C$'$, *et dont les trois diagonales soient conséquemment* AA$'$, BB$'$, CC$'$. *Soient de plus*, a *l'intersection de* BB$'$ *et* CC$'$, b *l'intersection de* CC$'$ *et* AA$'$, c *celle de* AA$'$ *et* BB$'$; *concevons, en outre, que les trois diagonales soient indéfiniment prolongées; et soit enfin une droite fixe et indéfinie* MN, *donnée arbitrairement sur le plan du quadrilatère.*

Par les deux extrémités de chacune des diagonales soient menées des parallèles à la droite fixe MN, *prolongées jusqu'à leur rencontre avec les deux autres diagonales.*

Chaque diagonale, les parallèles partant de ses deux extrémités et l'une quelconque des deux autres diagonales seront quatre droites dont l'ensemble formera un quadrilatère simple, dont on pourra mener les deux diagonales, lesquelles se couperont en un certain point.

(*) On peut aussi parvenir, assez simplement, à la démonstration de ce théorème à l'aide des considérations suivantes.

Soient considérés le triangle ABC comme la perspective d'un triangle équilatéral, et le P comme la perspective de son centre, ce qui est permis; les droites BC, B$'$C$'$, B$''$C$''$,.... seront des perspectives de droites parallèles, et devront conséquemment concourir en un même point a. Pour la même raison, les droites CA, C$'$A$'$, C$''$A$''$,.... concourent en un même point b; et les droites AB, A$'$B$'$, A$''$B$''$,..... concourent en un même point c.

Soient présentement considérés les deux triangles ABC, A$''$B$''$C$''$ comme les perspectives des deux bases d'un tronc de tétraèdre, à bases non parallèles; P étant la perspective de son sommet. Alors les points a, b, c seront les perspectives de ceux où les côtés de la base supérieure du tronc rencontrent leurs correspondans dans la base inférieure; ce sera donc les perspectives de trois points de l'intersection des plans des deux bases; et conséquemment ils devront être en ligne droite, comme ces trois points eux-mêmes.

J. D. G.

Or, comme chacune des trois diagonales AA′, BB′, CC′ *du quadrilatère complet, combinée tour-à-tour avec les deux autres, donnera naissance à deux de ces quadrilatères simples ; il arrivera qu'ils seront en tout au nombre de six.*

Cependant les intersections des diagonales de ces six quadrilatères simples ne seront qu'au nombre de trois seulement, c'est-à-dire, que pour les deux quadrilatères dont un côté sera segment d'une même diagonale et dont les côtés opposés seront les deux autres diagonales entières, les quatre diagonales se couperont au même point.

Soit x *le point commun d'intersection des quatre diagonales des deux quadrilatères simples qui, s'appuyant sur* AA′, *ont pour leurs côtés opposés* BB′, CC′.

Soit y *le point commun d'intersection des quatre diagonales des deux quadrilatères simples qui, s'appuyant sur* BB′, *ont pour leurs côtés opposés* CC′, AA′.

Soit enfin z *le point commun d'intersection des quatre diagonales des deux quadrilatères simples qui, s'appuyant sur* CC′, *ont pour leurs côtés opposés* AA′, BB′.

Si l'on mène les droites ax, by, cz, *elles seront parallèles entre elles et à la droite fixe* MN.

En outre, les points a, b, c *seront respectivement en ligne droite avec* y *et* z, z *et* x, x *et* y (*).

(*) M. Vecten aurait pu considérer aussi les trois quadrilatères simples que forme chaque couple de diagonales avec les parallèles à MN menées par les extrémités de la troisième.

Appelant x' l'intersection des diagonales de celui dont les côtés parallèles passent par A, A′; appelant y' l'intersection des diagonales de celui dont les côtés parallèles passent par B, B′, et appelant enfin z' l'intersection des deux diagonales de celui dont les côtés parallèles passent par CC′ ; il arrive que x', y', z' sont respectivement sur les droites yza, zxb, xyc.

M. Vecten aurait pu ajouter encore que tout ce qui précède ne cesse pas

Démonstration. On s'assurera facilement de la vérité de ce théorème en remarquant que la détermination de chacun des points x, y, z, du point x, par exemple, revient à celle que donne M. Brianchon, dans son *Mémoire sur les lignes du second ordre*, où il propose (Art. LIV) de *décrire une hyperbole qui touche quatre droites données ; et qui ait l'une de ses asymptotes parallèle à une droite donnée de position* ; car, si nous supposons que les quatre droites B'C', CB', BC, BC' (fig. 4) soient les tangentes données à l'hyperbole cherchée, qui doit avoir en outre, une de ses asymptotes parallèle à la droite MN ; la parallèle à cette dernière droite conduite par B, rencontrera la courbe cherchée en un point que nous représenterons par U, et qui sera situé à l'infini ; on connaîtra donc quatre tangentes et un point de l'hyperbole cherchée ; on pourra donc la construire d'après l'article LI de l'ouvrage cité. Pour cela, il faudra joindre le point a au point U, c'est-à-dire, mener par a une parallèle ax à MN, puis mener par B l'une des diagonales du quadrilatère simple qui, ayant BB' pour l'un de ses deux côtés non parallèles, a son opposé sur AA' ; et le point x de rencontre de cette droite avec la première sera un des points de la courbe. Or, on aurait tout aussi bien pu mener l'autre diagonale du quadrilatère ; et son intersection avec ax aurait été également un point de la courbe ; or, cette cette courbe, ayant déjà un point U sur ax n'en saurait avoir deux autres sur cette droite ; donc, l'autre diagonale doit également passer par le point x, qui est évidemment le milieu de la portion de la parallèle à MN conduite par a, interceptée entre AA' et BB' ; ce qui démontre la première partie de

---

d'être vrai, lorsque les droites, au lieu d'être parallèles à une droite fixe MN, concourent en un point fixe quelconque.

Tout cela paraît pouvoir se démontrer facilement, au moyen de ce qui a été dit à la page 183 du VII.^e volume de ce recueil.

J. D. G.

notre

notre théorème, et en même temps le théorème LIV de l'ouvrage de M. Brianchon. Il est clair, d'ailleurs, qu'on pourrait faire le même raisonnement sur l'intersection des deux diagonales du quadrilatère simple qui, ayant CC′ pour l'un de ses côtés, a aussi son opposé sur AA′, et qu'ainsi cette intersection doit se confondre avec le point x qui se trouve ainsi l'intersection des quatre diagonales de deux quadrilatères simples et d'une parallèle à MN conduite par a. On demontrerait évidemment des choses analogues des points y, z. Quant à la seconde partie du théorème, on voit que les trois points x, y, z appartenant avec le point U à la section conique qui touche à la fois les quatre droites B′C′, B′C, BC, CB′, il résulte de l'article XXIII de l'ouvrage cité que deux quelconques de ces trois points sont toujours en ligne droite avec un des trois points a, b, c.

§ *THÉORÈME. Si l'on prolonge, dans un même sens, les trois côtés d'un triangle* ABC, *des quantités* BC′, CA′, AB′, *respectivement égales aux côtés consécutifs* BC, CA, AB; *que l'on prolonge les mêmes côtés en sens inverse, des quantités* AC″, CB″, BA″ *respectivement égales aux côtés consécutifs* AC, CB, BA; *que l'on mène les six droites* AA′, BB′, CC′, AA″, BB″, CC″, *et qu'enfin on mène les trois droites* Aa, Bb, Cc *divisant les angles du triangle en deux parties égales, et se terminant en* a, b, c, *aux côtés opposés, on aura*

$$\frac{AA'.BB'.CC'}{Aa.Bb.Cc}=\frac{AA''.BB''.CC''}{Aa.Bb.Cc}=\frac{BC+CA}{AB}\cdot\frac{CA+AB}{BC}\cdot\frac{AB+BC}{CA}.$$

Démonstration. Par la construction (fig. 5), les droites AA′, BB′, CC′ sont respectivement parallèles aux droites BB″, CC″, AA″; d'où il résulte que les triangles ACA′, BAB′, CBC′ sont respectivement semblables aux triangles BCB″, CAC″, ABA″, et qu'ainsi on a

$$\frac{AA'}{BB''}=\frac{CA}{BC}\,,\quad \frac{BB'}{CC''}=\frac{AB}{CA}\,,\quad \frac{CC'}{AA''}=\frac{BC}{AB}\,;$$

ce qui donne, en multipliant,

$$\frac{AA'.\,BB'.\,CC'}{AA''.BB''.CC''}=1\,,$$

ou

$$AA'.BB'.CC'=AA''.BB''.CC''\,;$$

et démontre ainsi la première partie de la double égalité ci-dessus.

Par la même construction, les droites Aa, Bb, Cc sont respectivement parallèles aux droites BB', CC', AA'; d'où il résulte que les triangles CBB', BAA', ACC' sont respectivement semblables aux triangles CaA, BcC, AbB, et qu'ainsi on a

$$\frac{BB'}{Aa}=\frac{CB'}{CA}\,,\quad \frac{AA'}{Cc}=\frac{BA'}{BC}\,,\frac{CC'}{Bb}=\frac{AC'}{AB}\,;$$

ce qui donne, en multipliant

$$\frac{AA'.BB'.CC'}{Aa.Bb.Cc}=\frac{BA'.CB'.AC'}{AB.BC.CA}\,,$$

mais, d'après la construction, on a

$$BA'=BC+CA\,,\quad CB'=CA+AB\,,\quad AC'=AB+BC\,;$$

donc enfin

$$\frac{AA'.BB'.CC'}{Aa.Bb.Cc}=\frac{BC+CA}{AB}\cdot\frac{CA+AB}{BC}\cdot\frac{AB+BC}{CA}\,;$$

ce qui démontre la seconde partie de notre double égalité.

Soient B, B', B'', respectivement, les points où les côtés A'A'', A''A, AA' d'un triangle AA'A'' sont rencontrés par les droites qui, partant de ses sommets, divisent ses angles en deux parties égales. Suivant un théorème connu (Voyez la *Géométrie* de M. LEGENDRE), on aura

$$AA'.AA''=\overline{AB}^2+A'B.A''B\ ;$$

on aura de plus, par un autre théorème connu,

$$AA':AA''::A'B:A''B\ ,$$

et par suite

$$AA'+AA'':A'B+A''B::AA':A'B::AA'':A''B\ ;$$

ou

$$AA'+AA'':A'A''::AA':A'B::AA'':A''B$$

de cette double proportion on tirera

$$A'B=\frac{AA'.A'A''}{AA'+AA''}\ ,\qquad A''B=\frac{AA''.A'A''}{AA'+AA''}\ ;$$

substituant ces deux valeurs dans la première équation ci-dessus on en tirera

$$\overline{AB}^2=AA'.AA''-\frac{AA'.AA''.\overline{A'A''}^2}{(AA'+AA'')^2}\ ;$$

ou encore

$$\overline{AB}^2=AA'.AA''.\frac{(AA'+AA'')^2-\overline{A'A''}^2}{(AA'+AA'')^2}$$

$$=AA'.AA''.\frac{(AA'+AA''+A'A'')(AA'+AA''-A'A'')}{(AA'+AA'')^2}\ .$$

Cela posé, désignons simplement par c, c', c'' les trois côtés d'un triangle et par d, d', d'' les droites qui, divisant ses angles en deux parties égales, se terminent aux côtés opposés; nous aurons, par ce qui précède

$$d^2=c'c''.\frac{(c+c'+c'')(c'+c''-c)}{(c'+c'')^2},$$

$$d'^2=c''c.\frac{(c+c'+c'')(c''+c-c')}{(c''+c)^2},$$

$$d''^2=cc'.\frac{(c+c'+c'')(c+c-c'')}{(c+c')^2};$$

prenant donc la racine quarrée du produit de ces trois équations, il viendra

$$\frac{dd'd''}{cc'c''}=\frac{c+c'+c'')\sqrt{(c+c'+c'')(c'+c''-c)(c''+c-c')(c+c'-c'')}}{(c'+c'')(c''+c)(c+c')}; \qquad (1)$$

équation qui donne, sous une forme élégante, le produit des droites qui divisent les angles d'un triangle en deux parties égales, en fonction des côtés de ce triangle.

On peut simplier cette équation en remarquant que le radical du second membre est le quadruple de l'aire du triangle. En représentant ainsi cette aire par T, il vient

$$\frac{dd'd''}{cc'c''}=\frac{4(c+c'+c'')T}{(c'+c'')(c''+c)(c+c')}. \qquad (2)$$

On peut, dans cette dernière expression, introduire le rayon du cercle circonscrit; on sait, en effet, qu'en représentant ce rayon par R, on a $cc'c''=4TR$, ce qui donne, en substituant,

$$dd'd''=\frac{16(c+c'+c'')RT^2}{(c'+c'')(c''+c)(c+c')}. \qquad (3)$$

Si l'on veut y introduire, au contraire, le rayon du cercle inscrit, en le désignant par r, il suffira de se rappeler que $2T=r(c+c'+c'')$, ce qui donnera

$$dd'd''=\frac{32RT^3}{r(c'+c'')(c''+c)(c+c')}\;. \qquad (4)$$

Si l'on désigne par p, p', p'' les trois hauteurs du triangle, on aura

$$2T=cp\;,\quad 2T=c'p'\;,\quad 2T=c''p''\;,$$

d'où

$$8T^3=cc'c''pp'p''=4pp'p''TR\;;$$

substituant donc, dans la dernière expression, elle deviendra

$$dd'd''=\frac{16pp'p''TR^2}{r(c'+c'')(c''+c)(c+c')}\;. \qquad (5)$$

En comparant cette dernière formule à la formule (3), on en déduit

$$(c+c'+c'')r\;,\quad T=pp'p''R\;;$$

et par suite

$$2T^2=Rpp'p''\;; \qquad (6)$$

relation remarquable par sa simplicité.

Il est d'ailleurs connu qu'en désignant par r, r', r'', r''' les rayons des quatre cercles qui touchent à la fois les trois côtés du triangle, on a $rr'r''r'''=T^2$; substituant donc, dans cette dernière formule, elle deviendra

$$2rr'r''r'''=pp'p''R\;; \qquad (7)$$

formule également digne d'être remarquée.

ARITHMÉTIQUE APPLIQUÉE.

Examen critique de quelques dispositions de notre code d'instruction criminelle ;

Par M. Gergonne (*).

Les ouvrages sortis de la main des hommes, quelque soin qu'ils apportent d'ailleurs à les perfectionner, décèlent toujours, par quelque côté, les bornes étroites de l'intelligence de leurs auteurs.

La législation compliquée d'un grand état, d'un état parvenu à

(*) Les réflexions que l'on va lire avaient été adressées à M. le baron Pasquier, peu après son avènement au ministère de la justice : l'auteur n'en a eu depuis aucune nouvelle. Il ne serait pas sans exemple que quelque commis se les fût appropriées et les eût présentées sous son nom au ministre. S'il en était ainsi, l'auteur n'en concevrait aucun regret ; car, après tout, pourvu que le bien s'opère, il importe assez peu que ce soit par telle voie ou par telle autre.

Cependant, comme il se pourrait, en toute rigueur, que la note adressée à M. le garde des sceaux eût été égarée, on a pensé qu'à une époque où l'on paraît songer sérieusement à la réforme de notre législation criminelle, il pouvait n'être pas sans intérêt et sans utilité de la reproduire ici ; non toutefois que les hommes chargés de ce soin lisent des recueils de la nature de celui-ci ; mais soit parce que ceux qui les lisent peuvent éclairer, sur l'objet en question, un très-haut degré de civilisation, doit peut-être, plus que toutes autres créations humaines, offrir la preuve de cette vérité.

Toutefois, lorsque les imperfections dont la législation d'un pays se trouve entachée sont de nature à pouvoir être supportées, on ne doit songer à les faire disparaître qu'avec une prudente lenteur, en ne perdant jamais de vue que le mieux n'est que trop souvent l'ennemi du bien, et qu'*à côté de l'avantage de perfectionner se trouve aussi le danger d'innover*.

Mais, lorsque des dispositions législatives offrent un caractère de contradiction des plus manifestes; lorsqu'elles font vouloir d'un côté à la loi ce que d'un autre elle déclare formellement ne vouloir pas; lorsqu'il est évident que la discordance choquante qui se trouve exister entre ces dispositions n'a pu sérieusement entrer dans la pensée du législateur, et n'a sa source que dans une de ces distractions auxquelles il est presque impossible de se soustraire, dans un travail de quelque étendue; lorsqu'enfin, et sur-tout la partie de la législation qui se trouve entachée de disparates aussi évidentes est celle qui décide chaque jour, sur tous les points d'un vaste empire, de la liberté, de l'honneur de la vie même des citoyens; il est alors du devoir de l'autorité d'en provoquer la réforme, dès qu'elles lui sont signalées; comme il est du devoir de chacun de les signaler à l'autorité dès qu'il les a aperçues.

C'est dans la vue de remplir ce dernier devoir, autant qu'il est en nous, que nous consignons ici les réflexions suivantes.

Le *Code d'instruction criminelle* statue (art. 347, 350, 351),

---

ceux qui ne les lisent pas, soit encore parce que cet article, n'exigeant pour être compris que les notions de calcul les plus élémentaires, peut, à ce titre, être transporté, sans inconvénient, dans des ouvrages périodiques plus accessibles au commun des lecteurs.

1.° Que, lorsqu'un accusé est déclaré coupable par un jury, à la majorité de 8 voix au moins contre 4 au plus, il y a lieu à lui appliquer la peine.

2.° Que, dans le cas d'un partage égal de suffrages, dans le jury, pour et contre l'accusé, l'avis favorable à cet accusé doit prévaloir.

3.° Que, dans l'un et dans l'autre de ces deux cas, la décision du jury ne peut être soumise à aucun recours.

4.° Mais que, dans le cas où l'accusé n'a été déclaré coupable du fait principal, par le jury, qu'à la simple majorité de 7 voix contre 5, les juges (qui, comme l'on sait, sont, dans nos cours d'assises, au nombre de 5) délibèrent entre eux sur ce même fait; et qu'alors, si la simple majorité des juges et des jurés réunis estime que l'accusé n'est point coupable, l'avis favorable à cet accusé doit prévaloir.

Une conséquence forcée de cette dernière disposition est que, lorsque la simple majorité des juges et des jurés réunis estime l'accusé coupable, l'avis favorable à cet accusé ne doit point prévaloir; et telle est, en effet, la jurisprudence uniforme de nos cours d'assises.

La loi statue donc que, dans le cas du recours aux juges, l'accusé sera déclaré coupable, s'il réunit seulement 9 voix contre lui, tant dans la cour que dans le jury.

Mais le recours aux juges ne peut avoir lieu que dans le seul cas où l'accusé n'a rencontré dans le jury que 7 voix seulement qui lui soient contraires.

La loi statue donc que, dans ce cas, l'accusé sera déclaré coupable, pourvu qu'il se trouve seulement dans la cour deux voix contre lui.

Mais lorsque, dans le sein de la cour, deux voix seulement sont contraires à l'accusé, trois voix lui sont nécessairement favorables, et conséquemment la cour doit être réputee le reconnaître innocent.

La

La loi statue donc que l'accusé sera reconnu coupable, si, ayant été déclaré tel par le jury, à une majorité jugée d'abord insuffisante, il est ensuite déclaré innocent par les juges, c'est-à-dire, par des hommes à qui, à raison d'un trop grand penchant présumé à la sévérité, la même loi n'a pas cru devoir confier exclusivement le destin de cet accusé.

La loi statue donc qu'un premier jugement dont l'expression lui semble trop équivoque peut recevoir d'un jugement tout contraire le complément de force qui lui manque; elle statue qu'un nouveau poids, ajouté dans le bassin le plus élevé d'une balance inégalement chargée, la fera pencher davantage du côté du bassin le plus bas.

La loi, en donnant son attache à une décision prononcée par un jury, à la majorité de 8 voix contre 4, déclare par là qu'elle trouve, dans cette majorité, une garantie suffisante de la culpabilité de l'accusé. Mais, lorsqu'au contraire elle en appelle aux juges de la décision de ce même jury, dans le cas où elle n'est rendue qu'à la simple majorité de 7 voix contre 5, c'est qu'elle ne trouve plus, dans cette faible majorité, la garantie que l'autre lui offrait, et qu'elle veut lui trouver ailleurs un supplément qu'elle juge lui être nécessaire.

Mais, ce supplément de garantie, ce n'est, certes, pas dans une décision toute opposée de la part de la cour qu'elle doit se promettre de l'obtenir; et c'est pourtant là qu'elle déclare le rencontrer.

L'opinion des juges, à raison de leurs habitudes, peut bien être suspectée, lorsqu'ils condamnent; mais, par là même, lorsqu'ils absolvent, cette opinion doit recevoir de surcroit toute la confiance qu'on aura cru devoir lui refuser dans l'autre cas.

Et c'est pourtant par une sentence d'absolution d'un si grand poids que la loi prétend corroborer une condamnation prononcée par le jury, à une majorité équivoque.

Lorsque les opinions sont également partagées dans le jury, il peut souvent arriver que la cour, qu'on ne consulte pas alors, soit unanimement d'avis que l'accusé est coupable ; cet accusé a donc alors 11 voix contre lui, et 6 seulement qui lui sont favorables, et cependant il est absout de droit ; d'où l'on pourrait inférer que la loi ne pense pas que même une majorité de 11 voix contre 6 soit toujours suffisante pour condamner.

Et pourtant elle condamne, dans d'autres cas, à une simple majorité de 9 voix contre 8.

Et qu'on ne dise pas que le cas du recours aux juges est une sorte de cas d'exception, une sorte de hors-d'œuvre qui sort tout-à-fait de la règle commune ; car, outre que lorsqu'il est question des plus chers intérêts des citoyens, les cas d'exception ne doivent pas être moins soigneusement combinés que le principe général auquel ils dérogent ; il n'est malheureusement que trop connu aujourd'hui que, par l'effet d'une faiblesse tout au moins très-blâmable, ce que le législateur avait pu en effet n'envisager que comme une ressource pour des cas extraordinaires est devenu d'une application presque journalière ; attendu que les jurés, en dépit de leur conviction, arrangent communément leur déclaration de manière à rendre obligatoire l'intervention de la cour.

Nous préssentons une objection ; et nous nous hâtons d'y répondre. On dira peut-être qu'un accusé déclaré coupable par un jury ne peut que trouver avantageuse pour lui la ressource du recours aux juges, dont la décision qui, dans aucun cas, ne saurait aggraver sa situation, peut quelquefois la rendre meilleure.

Ce raisonnement pourrait tout au plus être admis, si, le recours à la décision des juges étant purement facultatif de la part de l'accusé, la loi avait statué que, faute par lui d'en faire usage, la déclaration du jury, bien que rendue à une faible majorité, réglera son sort ; mais, encore un coup, la loi, qui reconnaît une majorité de 7 voix contre 5 trop faible pour condamner, doit, à plus forte raison, lui refuser sa confiance, lorsque la déclaration qui en résulte se trouve infirmée par une déclaration contraire de la cour.

On a peine à comprendre qu'une inconséquence aussi palpable ait pu se glisser dans notre législation ; on doit présumer du moins qu'elle n'aurait pas résisté à la lumière de la discussion, dans une assemblée législative qui n'aurait pas été réduite au silence. Voici pourtant de quelle manière elle aura pu passer sans être aperçue.

Si, comme nous venons de le faire, et comme on en a incontestablement le droit, on avait considéré la déclaration de la cour et celle du jury comme deux jugemens distincts et successifs relatifs au même fait, l'inconséquence que nous venons de signaler aurait probablement frappé tous les esprits. Mais on s'est sans doute contenté d'envisager les choses en masse ; on a considéré la cour et le jury comme formant un tribunal unique, composé de 17 juges ; et on s'est apparemment figuré qu'une majorité de 9 voix contre 8, dans un tel tribunal, offrait plus de garantie que celle de 7 voix contre 5, dans un autre tribunal, formé de 12 juges seulement.

Mais il est pourtant visible que c'est précisément le contraire ; et que les nombres 9 et 8, étant plus voisins de l'égalité que ne le sont les nombres 7 et 5, décèlent par là même une plus grande probabilité d'erreur dans le jugement qui en émane.

Ainsi, sous quelque point de vue que l'on veuille envisager la question, on parvient toujours aux mêmes conséquences finales.

Mais, pour réparer une erreur si grave et si manifeste, faudra-t-il donc bouleverser tout notre système de législation criminelle ? non, sans doute. Le remède pourrait certainement être appliqué de bien des manières diverses ; mais, si l'on veut atteindre au but par le moindre changement possible, il suffira simplement de remplacer l'article 351 du code, dont la rédaction est d'ailleurs d'une obscure prolixité, par un article conçu à peu près en ces termes.

351. *Si néanmoins l'accusé n'est déclaré coupable du fait principal, par le jury, qu'à la simple majorité, les juges délibéreront entre eux sur ce même fait, aussi à la simple majorité ; et,*

si leur décision n'est pas conforme à celle du jury ; l'avis favorable à l'accusé prévaudra.

Au moyen d'une disposition si sage et si simple, la dignité de la cour ne sera jamais compromise, puisque son avis, toutes les fois qu'il aura été manifesté, sera inévitablement prépondérant; l'accusé, dont le recours à la délibération de ses juges, pourra souvent améliorer la situation, sans que, dans aucun cas, il puisse la rendre plus fâcheuse, ne verra plus en eux qu'une autorité tutélaire et protectrice ; et il ne courra pas le risque d'être condamné à une majorité moindre que celle de 10 voix contre 7.

A la vérité, la garantie provenant de cette majorité se trouvera un peu inférieure à celle qu'offre une majorité de 8 voix contre 4, qui interdit le recours aux juges ; mais rien n'empêchera de considérer la première comme la véritable limite que la loi s'interdit de franchir, et en dedans de laquelle il lui sera, à plus forte raison, permis de se tenir dans certains cas. En un mot, on aura fait ainsi tout ce que la raison et l'équité peuvent rigoureusement exiger.

Que si, méditant une réforme générale de nos lois criminelles, on croyait pouvoir ajourner jusque là le changement partiel que nous venons de proposer ; nous nous croirions fondés à observer que les grandes réformes sont d'ordinaire et doivent même être longuement méditées ; tandis que tout délai, tout ajournement est un crime contre l'humanité, lorsqu'il s'agit de réparer une erreur évidente, qui peut chaque jour mettre en péril tout ce que les citoyens ont de plus cher et de plus précieux (*).

Veut-on savoir ce que dit le calcul sur la question qui nous occupe? M. Laplace va nous l'apprendre (**) : suivant cet illustre

(*) Ici se termine la note à M. le garde des sceaux.

(**) *Théorie analitique des probabilités*, premier supplément, page 33.

géomètre, si, dans un tribunal composé de $p+q$ juges, un accusé est condamné à une majorité de p voix contre $q<p$; l'erreur probable de ce jugement sera exprimée par la formule

$$\frac{1}{2^{p+q+1}}\left\{\begin{array}{l}1+\dfrac{p+q+1}{1}+\dfrac{p+q+1}{1}\cdot\dfrac{p+q}{2}+\dfrac{p+q+1}{1}\cdot\dfrac{p+q}{2}\cdot\dfrac{p+q-1}{3}+\ldots\ldots \\ \ldots\ldots+\dfrac{p+q+1}{1}\cdot\dfrac{p+q}{2}\cdot\dfrac{p+q-1}{3}\cdot\dfrac{p+q-2}{4}\cdots\cdots\dfrac{p+2}{q}\end{array}\right\}.$$

Cela posé, soit d'abord $p=8$, $q=4$; cette formule se réduira à $\frac{17472}{131072}$; puis donc que la loi reconnaît la majorité de 8 voix contre 4 suffisante pour condamner, elle déclare tacitement qu'elle consent à ce que, sur 131072 jugemens, pris au hasard, il puisse s'en trouver 17472 qui soient erronés. C'est beaucoup, sans doute; mais c'est un motif de plus pour ne pas s'exposer à des chances d'erreur plus probables.

Soit ensuite $p=7$, $q=5$; la formule deviendra $\frac{22064}{131072}$; puis donc que la loi reconnaît insuffisante une majorité de 7 voix contre 5, elle déclare tacitement qu'elle n'entend pas exposer les citoyens au risque de 22064 jugemens erronés, sur 131072 jugemens pris au hasard ; elle ne doit donc, dans aucun cas, exposer les citoyens à un risque plus considérable.

Soit encore $p=9$, $q=8$; la formule deviendra $\frac{53381}{131072}$; puis donc que, dans l'état actuel de notre législation criminelle, une condamnation est souvent prononcée à la majorité de 9 voix contre 8 ; il s'ensuit que la loi, après avoir prétendu garantir les citoyens du risque de 22064 jugemens erronés sur 131072 pris au hasard, les expose ensuite au risque, plus que double, de 53381 jugemens erronés, pris sur le même nombre.

Soit enfin $p=10$; $q=7$; la formule deviendra $\frac{31502}{131072}$; ainsi, dans le système que nous proposons, le risque ne serait jamais, dans le cas même le plus défavorable, que celui de 31502 jugemens erronés, sur 131072 jugemens pris au hasard.

Nous devons observer, au surplus, pour rassurer ceux de nos lecteurs qui pourraient être effrayés d'un semblable risque, que la formule de M. Laplace suppose que la probabilité de la rectitude de l'opinion de chaque juge peut avoir indistinctement tous les degrés de valeur entre $\frac{1}{2}$ et 1; tandis que, dans des matières criminelles sur-tout, des hommes d'élite ne se décident guère à se prononcer contre un accusé, à moins que la probabilité de sa culpabilité ne leur paraisse fort au-dessus de $\frac{1}{2}$ et très-voisine de l'unité; à quoi on peut ajouter encore que, fort souvent, les juges ou les jurés font, dans l'intérêt de l'accusé, une déclaration contraire à leur véritable opinion, quelque fondée que cette opinion puisse d'ailleurs leur paraître.

Il faut pourtant excepter de ceci les jugemens relatifs à ce qu'on est convenu d'appeler *délits politiques*. Il n'arrive malheureusement que trop, en effet, que, dans ces sortes de jugemens, l'esprit de parti aveugle les juges et leur fausse la conscience à tel point que tantôt les indices les plus fugitifs suffisent pour les déterminer, et que tantôt, au contraire, les preuves les plus manifestes ne sauraient trouver accès dans leur esprit; heureux encore lorsqu'ils ne votent pas contre leur conviction. Si l'on joint à cette considération que, dans de telles affaires, la crainte impose silence à la plupart des témoins soit à charge soit à décharge, ou leur fait supposer des faits, et que le moins qu'il puisse arriver est qu'ils exagèrent ou pallient des faits réels; on sentira qnel fond on doit faire, en général, sur des sentences, soit d'absolution soit de condamnation, prononcées au milieu des troubles civils.

On se tromperait grossièrement si l'on se figurait que la question de législation qui vient de nous occuper est la seule où l'application du calcul soit nécessaire; ces sortes de questions sont, au contraire, excessivement nombreuses. Pour en donner un nouvel exemple, sans sortir toutefois de ce qu'il y a de plus élémentaire, arrêtons-nous un moment sur la question des *appels*.

Considérons une suite de tribunaux subordonnés les uns aux autres, de telle manière que l'on puisse appeler devant chacun d'eux d'un jugement rendu par le tribunal qui lui est immédiatement inférieur. Soient $2n+1$, $2n'+1$, $2n''+1$, ... respectivement le nombre des juges de ces divers tribunaux, du plus inférieur au plus élevé; soient p, p', p'', ... des nombres abstraits représentant le poids moyen de l'opinion de chaque juge dans chacun de ces tribunaux, respectivement.

Si l'on suppose d'abord qu'il n'y ait qu'un seul tribunal, il est clair qu'il sera suffisant, pour qu'un jugement soit rendu qu'il obtienne une majorité de $n+1$ voix contre n; mais il se pourra aussi que ce jugement soit rendu à l'unanimité.

Supposons, en second lieu, qu'il en soit ainsi; mais que la voie de l'appel à un second tribunal soit ouverte à la partie lésée. Il lui suffira, pour obtenir gain de cause devant ce nouveau tribunal, d'y réunir une majorité de $n'+1$ voix contre n'. Il y aura donc, en faveur du second jugement, un poids $(n'+1)p'$, et contre ce même jugement un poids $(2n+1)p+n'p'$. Afin donc de ne point tomber dans l'absurde, il faudra qu'on ait

$$(n'+1)p'>(2n+1)p+n'p' ,$$

ou bien

$$p'=(2n+1+\omega)p ;$$

ω étant une fraction positive si petite qu'on voudra. On tire de là

$$\frac{p'}{p}=2n+1+\omega ,$$

ainsi, *quel que soit d'ailleurs le nombre des juges du second tribunal, il faut que le poids de l'opinion de chacun des juges qui* *le composent soit supérieure à autant de fois le poids de l'opinion d'un juge du premier qu'il y a des juges dans celui-ci.*

Si l'on suppose que le premier des deux tribunaux n'a qu'un seul juge, on voit qu'alors, pour si peu que les juges du second tribunal soient plus éclairés que ce juge unique, nos conditions se trouveront remplies; c'est le cas des appels, devant les tribunaux de première instance, des jugemens rendus par nos juges de paix.

Nos tribunaux de première instance étant eux-mêmes composés de trois juges, on voit, par notre formule que, pour qu'un jugement rendu sur appel de ces tribunaux par nos cours royales puisse, dans tous les cas, être réputé conforme à l'équité, il faut admettre que les juges de ces cours ont une capacité plus que triple de celle des juges de première instance. C'est au lecteur à décider s'il pense qu'il en soit toujours ainsi.

Nous avons eu, durant plusieurs années, en France, un système de tribunaux civils, égaux en attribution, et tribunaux d'appel, les uns à l'égard des autres. Il est clair qu'alors on n'avait aucun motif de préférer l'opinion des juges de l'un de ces tribunaux à celle des juges de tout autre. Un tel ordre judiciaire était donc essentiellement vicieux, bien qu'on eût pris la précaution, autant que nous pouvons du moins nous en rappeler, de faire prononcer les jugemens sur appel par cinq juges. On voit, en effet, qu'après avoir gagné un procès en première instance à l'unanimité de 3 voix, on pouvait ensuite le perdre en appel, à la simple majorité de 3 voix contre 2; de sorte qu'on se trouvait condamné, bien qu'on eût eu 5 voix en sa faveur, et 3 seulement contre soi. Voilà à quoi peuvent être exposés les citoyens, avec des législateurs étrangers, pour la plupart, aux premières notions du calcul; et il continuera d'en être ainsi tout aussi long-temps qu'on persistera à ne considérer l'étude des sciences exactes que comme propre seulement à former des artilleurs, des ingénieurs, des astronomes et des marins.

J'ai supposé tout-à-l'heure que le jugement du second tribunal n'était rendu qu'à la simple majorité. Supposons présentement qu'il

le

le soit à l'unanimité, et dans le même sens que celui du premier, mais que la voie de l'appel à un troisième tribunal soit ouverte à la partie perdante. Supposons enfin que, devant celui-ci, elle obtienne gain de cause à la simple majorité ; alors le poids de l'opinion, en faveur de l'arrêt définitif, aura pour expression

$$(n''+1)p'' ,$$

et le poids de l'opinion contraire sera exprimé par

$$(2n+1)p+(2n'+1)p'+n''p'' ;$$

afin donc que l'opinion du plus grand poids ne se trouve pas être l'opinion contraire à cet arrêt, on devra avoir

$$(n''+1)p''>(2n+1)p+(2n'+1)p'+n''p'' ;$$

qui devient, en réduisant,

$$p''>(2n+1)p+(2n'+1)p' ,$$

ou encore

$$p''=(2n+1)p+(2n'+1+\omega')p' ,$$

ω' étant une nouvelle fraction positive si petite qu'on voudra. Eliminant donc p entre cette équation et l'équation

$$p'=(2n+1+\omega)p ,$$

trouvée ci-dessus, on obtiendra

$$\frac{p''}{p'}=\frac{2n+1}{2n+1+\omega}+2n'+1+\omega'.$$

La fraction qui commence le second membre de cette équation pouvant être si peu au-dessous de l'unité qu'on voudra, peut être représentée par $1-\lambda$, λ étant une fraction positive si petite qu'on voudra ; représentant ensuite $\omega'-\lambda$ par λ' qui pourra être une très-petite fraction, positive ou négative, ou même zéro, on aura

$$\frac{p''}{p'}=2(n'+1)+\lambda' ;$$

ce qui nous apprend que *le poids moyen de l'opinion de chacun des juges du troisième tribunal doit être au moins autant de fois plus grand que le poids de l'opinion de chacun des juges du second qu'il y a d'unités dans le double du nombre des juges qui forment la majorité de celui-ci.*

Ainsi, par exemple, nos cours royales rendant communément leurs arrêts à 7 juges, dont la majorité est 4 ; pour que, dans le cas du recours en cassation, on ne soit jamais exposé à craindre que l'opinion contraire à l'arrêt définitif soit d'un plus grand poids que celle qui lui est favorable, on est contraint d'admettre qu'un juge en cassation est communément 8 fois plus éclairé qu'un juge en cour royale, et conséquemment au moins 24 fois plus qu'un juge de première instance.

Nous ne pousserons pas plus loin cette analise, qui ne saurait offrir de difficulté d'après ce qui précède. Nous nous bornerons seulement à observer que d'une part nous avons tacitement supposé que toutes les requêtes en cassation étaient indistinctement admises, tandis que leur admission est le résultat d'un jugement préalable, ce qui complique encore la question ; et que d'une autre, la cour de cassation jugeait, comme les cours royales, du fond même de l'affaire, et en jugeait souverainement ; tandis qu'elle ne juge réellement que de la forme ; et que l'opposition de son opinion avec celle d'une cour royale n'entraîne qu'un renvoi devant une autre cour.

Ne négligeons pas cependant une dernière considération : c'est qu'il ne suffirait pas, pour justifier le système des appels, système très-coûteux pour le gouvernement et pour les plaideurs, d'organiser les tribunaux de telle sorte que l'opinion en faveur du dernier arrêt eût constamment plus de poids que l'opinion opposée; il faudrait, en outre, que ce dernier arrêt fût plus probablement conforme à la vérité qu'aucun de ceux qui l'auraient précédé; mais ceci entraînerait des recherches très-délicates, dans lesquelles nous ne saurions nous engager pour le présent.

QUESTIONS PROPOSÉES.

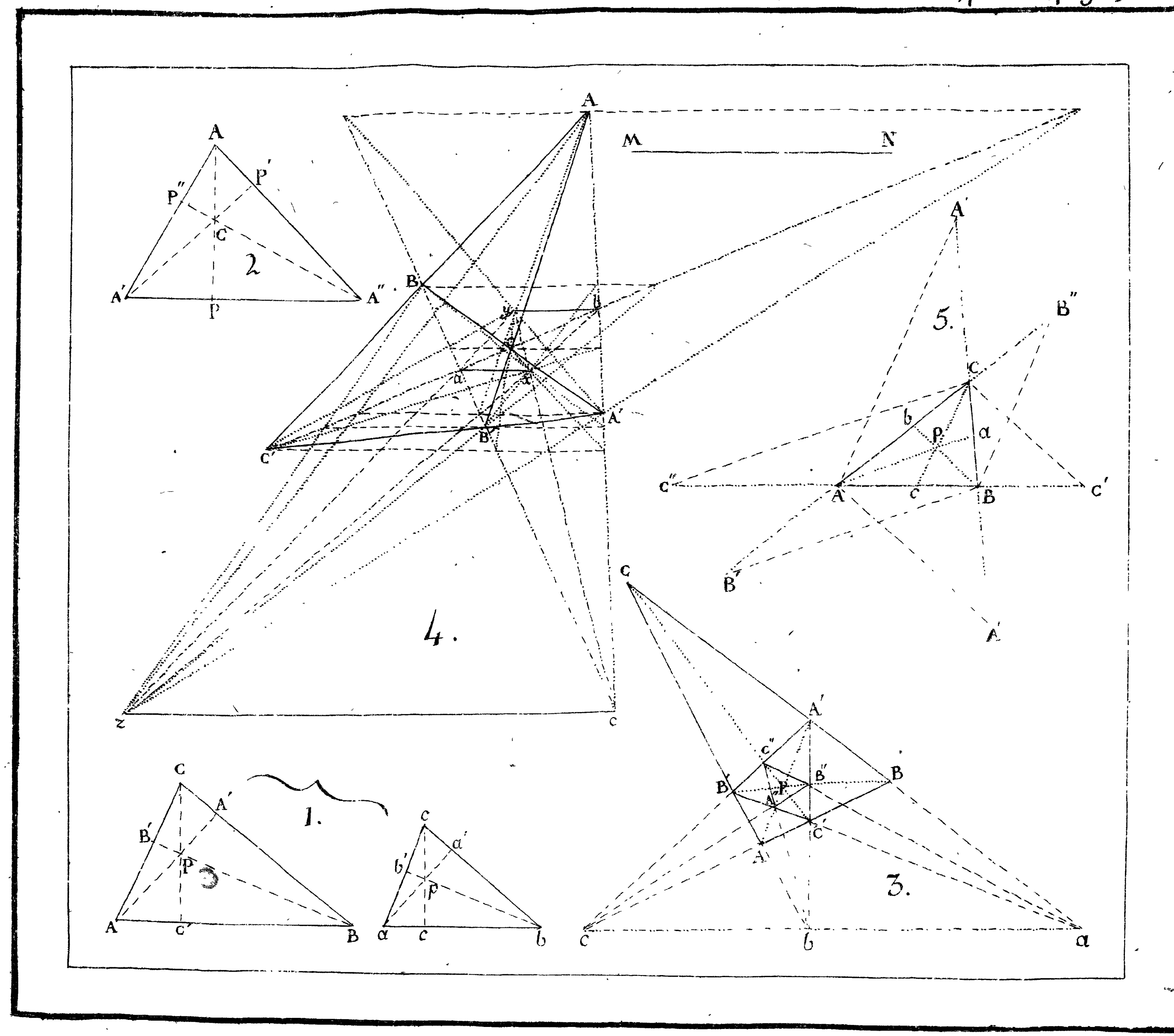
Problème de probabilité.

On doit projeter au hasard sur un plan horizontal un tétraèdre donné, pesant et homogène ; quelle probabilité y a-t-il qu'il tombe sur une face désignée.

Théorème d'analise indéterminée.

Un nombre impair $2n+1$ est ou n'est pas premier, suivant que l'un des deux nombres $2^n \pm 1$ est ou n'est pas divisible par n (*).

(*) Si la méthode que fournit ce théorème, pour discerner si un nombre est ou n'est pas premier, est laborieuse, elle l'est pourtant incomparablement moins que celle qu'on déduirait du *Théorème de Wilson*.



J. D. G. fecit.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Recherches sur les polyèdres, renfermant en particulier un commencement de solution du problème proposé à la page 256 *du VII.e volume des* Annales;

Par un ABONNÉ.

ON donne le nom de *polygone régulier* à un polygone dont tous les angles et tous les côtés sont égaux; et il suit clairement de cette définition que, même en faisant abstraction des *polygones étoilés* de M. Poinsot, les polygones réguliers sont en nombre infini, et que le nombre de leurs côtés peut être quelconque.

Il a d'ailleurs déjà été remarqué, dans ce recueil (tom. VI, pag. 199), qu'au nombre de ces polygones on ne peut se dispenser de comprendre la ligne droite, considérée comme double : c'est un polygone de deux côtés, ayant deux angles nuls, et pour lequel le cercle circonscrit a pour diamètre l'un des côtés, tandis que le cercle inscrit se réduit à un point

Les limites extrêmes des polygones réguliers de cette sorte sont d'une part le point, pour lequel les cercles inscrit et circonscrit se confondent, et deux parallèles indéfinies qui ont un cercle circonscrit d'un diamètre infini, tandis que le cercle inscrit a pour diamètre la distance entre les deux parallèles.

Nous ajouterons qu'au nombre des polygones réguliers on doit encore comprendre le cercle, considéré comme polygone régulier d'une infinité de côtés infiniment petits, et pour lequel, comme pour le point, les cercles inscrit et circonscrit se confondent.

Nous dirons que deux *polygones* sont *conjugués l'un à l'autre*, lorsque chacun d'eux aura autant de sommets que l'autre aura de côtés ; et comme, dans tout polygone, le nombre des sommets est égal au nombre des côtés ; il s'ensuit que tout polygone est conjugué à lui-même.

Si l'on fait des côtés d'un polygone régulier les bases d'autant de triangles isocèles et égaux, ayant leurs sommets hors du polygone, ces triangles, avec le polygone donné, formeront un nouveau polygone, dont le nombre des côtés pourra indistinctement, suivant la nature des triangles ajoutés, être égal au nombre de ceux du premier ou en être double ; et qui, dans l'un et dans l'autre cas, pourra être régulier comme lui.

Un polygone régulier étant donné, si l'on en retranche tous les sommets par des perpendiculaires aux droites qui divisent ses angles en deux parties égales, de telle sorte que les parties retranchées soient des triangles isocèles égaux ; ce qui restera du polygone sera un nouveau polygone, dont le nombre des côtés pourra indistinctement, suivant la grandeur des triangles retranchés, être égal au nombre de ceux du premier ou en être double ; et qui, dans l'un et dans l'autre cas, pourra être régulier comme lui.

On donne le nom d'*angle polyèdre régulier* à tout angle polyèdre dans lequel les angles plans et les angles dièdres sont égaux entre eux ; et il suit clairement de cette définition que, même en faisant abstraction des angles polyèdres étoilés que l'on pourrait former, à l'imitation des polygones étoilés de M. Poinsot, les angles polyèdres réguliers sont en nombre infini, et que le nombre de leurs faces peut être quelconque (*),

(*) Il y a, au surplus, cette distinction à établir entre les angles polyèdres réguliers et les polygones réguliers que ces derniers sont donnés d'espèce, dès

Il faut remarquer qu'au nombre des angles polyèdres réguliers on doit comprendre l'angle plan, considéré comme double ; c'est en effet un angle polyèdre à deux faces, ayant deux angles dièdres nuls, et pour lequel le cône circonscrit a un angle générateur, moitié de l'un des angles plans, tandis que le cône inscrit se réduit à une droite.

Les limites extrêmes des angles polyèdres réguliers de cette sorte sont d'une part la ligne droite, pour laquelle les cônes inscrit et circonscrit se confondent, et l'angle dièdre dont le cône circonscrit est un plan, tandis que son cône inscrit a un angle générateur, moitié de l'angle dièdre.

Nous ajouterons qu'au nombre des angles polyèdres réguliers on doit comprendre aussi le cône de révolution, considéré comme un angle polyèdre ayant une infinité d'angles plans infiniment petits, et pour lequel, comme pour le point, les cônes inscrit et circonscrit se confondent.

Nous dirons que deux *angles polyèdres* sont *conjugués l'un à l'autre*, lorsque chacun d'eux aura autant d'arètes que l'autre aura de faces ; et comme, dans tout angle polyèdre, le nombre des faces est égal au nombre des arètes, il s'ensuit que tout angle polyèdre est conjugué à lui-même.

Si l'on fait des faces d'un angle polyèdre régulier les bases d'autant d'angles trièdres isocèles et égaux, de même sommet que lui, ayant l'arète opposée à la base hors de l'angle polyèdre ; ces angles trièdre, avec l'angle polyèdre donné, fermeront un nouvel angle polyèdre, dont le nombre des faces pourra indistinctement, suivant la nature des angles trièdres ajoutés, être égal au nombre de celles du premier ou en être double ; et qui, dans l'un et dans l'autre cas, pourra être régulier comme lui.

---

qu'on donne le nombre de leurs côtés ; tandis qu'avec un nombre de faces donné on peut faire des angles polyèdres réguliers d'une infinité d'espèces différentes.

Un angle polyèdre régulier étant donné, si l'on en retranche toutes les arètes, par des plans passant par son sommet et respectivement perpendiculaires aux plans qui divisent ses angles dièdres en deux parties égales ; de telle sorte que les parties retranchées soient des angles trièdres isocèles et égaux ; ce qui restera de l'angle polyèdre sera un nouvel angle polyèdre, dont le nombre des faces pourra indistinctement, suivant la grandeur des angles trièdres retranchés, être égal au nombre de celles du premier ou en être double ; et qui, dans l'un et dans l'autre cas, pourra être régulier comme lui.

Les notions que nous venons de présenter, ou plutôt de rappeler, sont extrêmement élémentaires, et pourraient même passer pour triviales. Nous pensons toutefois qu'elles sont une utile introduction à ce que nous nous proposons de dire sur les polyèdres.

Nous dirons, à l'avenir de *deux polyèdres* qu'ils sont *conjugués l'un à l'autre*, lorsqu'ayant le même nombre d'arètes, le nombre des faces de chacun sera égal au nombre des sommets de l'autre, et qu'en outre le nombre des côtés de chaque face de l'un quelconque sera égal au nombre des faces du sommet homologue de l'autre. Nous ne donnons, pour le moment, aucun exemple de ces sortes de polyèdre, la suite devant en fournir d'assez nombreux.

On est convenu de n'appeler *polyèdres réguliers* que les polyèdres dont toutes les faces sont des polygones réguliers égaux et dont, en outre, tous les sommets présentent des angles polyèdres réguliers égaux ; d'où l'on voit qu'un polyèdre régulier peut fort bien avoir pour *conjugué* un autre polyèdre régulier.

Mais, attendu l'excessive exigeance de cette définition, on est raisonnablement fondé à se demander s'il peut réellement exister des polyèdres réguliers. Avant de traiter cette question, on peut s'en proposer une autre moins circonscrite, et se demander s'il peut exister des polyèdres, réguliers ou non, dans lesquels toutes les faces aient le même nombre de sommets, et tous les sommets le même nombre de faces.

La manière la plus naturelle de traiter cette dernière question paraît être la suivante : Soient A le nombre des arètes du polyèdre, F le nombre de ses faces, et S le nombre de ses sommets ; supposons, en outre, que chacune de ses faces ait s sommets et conséquemment s côtés, et que chacun de ses sommets ait f faces et conséquemment f arètes.

Si l'on compte, tour-à-tour, les côtés de toutes les faces, on les trouvera au nombre de sF ; mais, de cette manière, on aura compté deux fois chacune des arètes du tétraèdre, puisque chacune d'elles sert de côté à deux faces consécutives ; donc

$$sF=2A\,.$$

Si ensuite, on compte, tour-à-tour, les arètes de tous les sommets ; on les trouvera au nombre de fS, mais, de cette manière, on aura encore compté deux fois chacune des arètes du tétraèdre, puisque chacune d'elles sert d'arète à deux sommets consécutifs ; donc

$$fS=2A\,.$$

Enfin, par le théorème d'Euler (*Annales*, tom. III, pag. 169) ; on aura, en outre

$$F+S=A+2\,.$$

Voilà donc trois équations, au moyen desquelles on peut déterminer A, F, S, en fonction de f, s.

Avant d'aller plus loin, nous ferons remarquer que, ces équations restant les mêmes lorsqu'on y permute à la fois f et s, F et S ; il s'ensuit que, s'il existe des polyèdres dont toutes les faces aient le même nombre de sommets et tous les sommets le même nombre de faces ; à chacun d'eux il en doit répondre un autre, qui en sera le conjugué.

De ces trois équations on tire

$$F=\frac{4f}{2(f+s)-fs}\,,\qquad S=\frac{4s}{2(f+s)-fs}\,,$$

$$A=\frac{2f}{2(f+s)-fs}\,.$$

Il s'agit donc présentement de savoir s'il y a des nombres entiers positifs, plus grands que l'unité, qui, mis pour f et s dans ces formules, donnent pour F, S, A des valeurs entières et positives. Nous disons plus grands que l'unité, et non pas plus grands que deux, puisque, suivant les remarques faites ci-dessus, un polygone peut fort bien n'avoir que deux sommets, et un angle polyèdre deux faces seulement.

Il faut donc, en premier lieu, que le dénominateur commun de ces trois formules ne soit point négatif; or, si l'on pose, à la fois,

$$f=6+f'\,,\qquad s=3+s'\,,$$

on aura

$$2(f+s)-fs=-f'-4s'-f's'\,;$$

qui sera négatif, toutes les fois qu'on n'aura pas en même temps $f'=0$, $s'=0$. Pareillement, si l'on pose, à la fois,

$$f=3+f'\,,\qquad s=6+s'\,;$$

on aura

$$2(f+s)-fs=-s'-4f'-f's'\,;$$

quantité qui est pareillement négative, toutes les fois que f' et s' ne sont pas tous deux nuls.

Ainsi, les deux nombres f et s ont une limite de grandeur qui est 6, et encore ne faut-il pas, lorsque l'un d'eux a atteint cette limite, que l'autre soit supérieur à 3.

Si, dans le même dénominateur commun, on fait f ou $s=5$, il deviendra

$$10-3s \quad \text{ou} \quad 10-3f,$$

et, pour qu'il ne soit point négatif, il faudra encore que s ou f ne soit pas plus grand que 3.

Si, dans le même dénominateur, on fait f ou $s=4$, il deviendra

$$2(4-s) \quad \text{ou} \quad 2(4-f);$$

et, pour qu'il ne soit point négatif, il faudra que s ou f n'excède pas 4.

Si nous supposons $f=2$, nos formules deviennent

$$F=2, \quad S=s, \quad A=s;$$

valeurs qui seront toujours entières et positives, quelque valeur entière et positive qu'on donne à s. C'est qu'en effet, tout polygone peut être considéré comme un polyèdre à deux faces, dans lequel les faces ont le même nombre de sommets, et où les sommets ont le même nombre de faces qui est ici *deux*; mais c'est un polyèdre qui renferme un espace nul.

Si nous supposons $s=2$, nos formules deviendront

$$F=f, \quad S=2, \quad A=f;$$

valeurs qui seront toujours entières et positives; quelque valeur entière et positive qu'on prenne pour f. C'est qu'en effet tout prisme indéfini peut être comme un polyèdre à deux sommets, dans lequel les sommets ont le même nombre de faces, et où les faces ont le même nombre de sommets qui est ici *deux*; mais c'est un polyèdre qui renferme un espace infini.

On peut remarquer de plus qu'un polygone et un prisme tels que le nombre des sommets du premier soit égal au nombre des faces du second, considérés comme polyèdres, sont des polyèdres conjugués l'un à l'autre.

Ces cas ainsi écartés, il ne nous restera plus à faire que les suppositions suivantes.

$$f=3\ ,\ f=3\ ,\ f=4\ ,\ f=4\ ,\ f=3\ ,\ f=5\ ,\ f=3\ ,\ f=6\ ,$$
$$s=3\ ,\ s=4\ ,\ s=3\ ,\ s=4\ ,\ s=5\ ,\ s=3\ ,\ s=6\ ,\ s=3\ ;$$

lesquelles donneront, pour les valeurs correspondantes de F, S, A,

$$F=4,\ F=6,\ F=8,\ F=\infty,\ F=12,\ F=20,\ F=\infty,\ F=\infty,$$
$$S=4,\ S=8,\ S=6,\ S=\infty,\ S=20,\ S=12,\ S=\infty,\ S=\infty,$$
$$A=6,\ A=12,\ A=12,\ A=\infty,\ A=30,\ A=30,\ A=\infty,\ A=\infty,$$

Ainsi, en écartant les valeurs infinies, sur lesquelles nous reviendrons tout-à-l'heure, nous trouvons

1.° Un polyèdre de 6 arètes ayant 4 faces triangulaires et 4 sommets trièdres; c'est le tétraèdre qui est ainsi conjugué à lui-même.

2.° Deux polyèdres de 12 arètes, dont l'un a 6 faces quadrangulaires et 8 sommets trièdres, tandis que l'autre a 8 faces triangulaires et 6 sommets tétraèdres. L'un est un tronc de pyramide quadrangulaire, à bases non parallèles; l'autre est formé de deux pyramides quadrangulaires opposées base à base; ils sont conjugués l'un à l'autre.

3.° Enfin, deux polyèdres de 30 arètes, dont l'un a 12 faces pentagonales et 20 sommets trièdres, tandis que l'autre a 20 faces triangulaires et 12 sommets pentaèdres; ils sont donc aussi conjugués l'un à l'autre.

Quant aux trois cas pour lesquels nous trouvons des valeurs infinies, il est clair que, si nous supposons les faces d'une grandeur finie,

finie, le polyèdre sera d'une grandeur infinie ; si donc on le suppose convexe, une portion finie de sa surface pourra être considérée comme un plan ; ces trois cas nous indiquent donc de combien de manières on peut couvrir un plan avec des polygones, de telle sorte que tous ces polygones aient le même nombre de côtés et qu'ils soient réunis en même nombre autour de chaque sommet ; on peut donc parvenir à ce but, savoir ;

1.° En couvrant le plan, soit de triangles se réunissant au nombre de 6 autour de chaque sommet, soit d'hexagones se réunissant au nombre de 3 autour de chaque sommet ; et ces deux systèmes de polygones seront conjugués l'un à l'autre.

2.° En couvrant le plan de quadrilatères, se réunissant au nombre de 4 autour de chaque sommet ; et un tel système sera conjugué à lui-même.

On peut encore envisager la chose sous un autre point de vue ; on peut supposer les polygones infiniment petits et alors le polyèdre, qui sera d'une grandeur finie deviendra un corps terminé par une surface courbe. Ainsi, une surface courbe se refermant d'elle-même, telle, par exemple, qu'un ellipsoïde peut être découpée en portions infiniment petites, soit triangulaires se réunissant au nombre de 6 autour de chaque sommet, soit hexagonales se réunissant au nombre de 3 autour de chaque sommet, soit enfin quadrangulaires se réunissant au nombre de 4 autour de chaque sommet.

On voit donc que, s'il peut exister des polyèdres réguliers, ce ne saurait être que parmi ceux que nous venons de rencontrer ; et la manière la plus simple de s'assurer qu'ils existent en effet, et en même nombre, est celle qu'emploie M. le professeur Lhuilier (*Annales*, tom. III, pag. 233), et qui consiste à rechercher de combien de manières on peut réunir, par leurs sommets, des pyramides régulières égales entre elles, assemblées en même nombre autour de chaque arète latérale, de telle sorte que ces pyramides remplissent l'espace entier autour de leur sommet commun, et forment ainsi, par leur réunion, un polyèdre unique qui sera évidemment régulier.

Soit F le nombre des faces du polyèdre, lequel sera en même temps le nombre des pyramides; soient S le nombre de ses sommets et A le nombre de ses arètes; soient enfin s le nombre des sommets de la base de chaque pyramide; et f le nombre des pyramides qui se réunissent autour de chaque arète latérale; désignons enfin par x chacun des angles dièdres latéraux de ces pyramides, rapporté à l'angle droit dièdre; l'angle polyèdre du sommet aura pour expression (pag. 275 de ce volume) $sx-2(s-2)$ ou $s(x-2)+4$, l'angle droit trièdre étant l'unité. Il faudra donc, d'une part, que la somme des angles dièdres, autour de chaque arète latérale, fasse quatre angles droits, ce qui donnera

$$fx=4\;;$$

et il faudra, en outre, que la somme des angles polyèdres autour du sommet commun fasse 8 angles droits trièdres; ce qui donnera encore

$$F[s(x-2)+4]=8\;;$$

éliminant x entre ces deux équations, on en tirera, comme ci-dessus,

$$F=\frac{4f}{2(f+s)-fs}\;;$$

et, comme d'ailleurs on aura encore, comme alors

$$sF=2A\;,\qquad F+S=A+2\;,$$

les valeurs de S et A seront aussi les mêmes que ci-dessus.

Ainsi, les polyèdres réguliers sont,

1.° Le *tètraèdre*, conjugué à lui-même ;

2.° L'*hexaèdre* et l'*octaèdre*, conjugués l'un à l'autre ;

3.° Le *dodécaèdre* et l'*icosaèdre*, conjugués l'un à l'autre ;

4.° La sphère divisée en *compartimens triangulaires équilatéraux* infinimens petits, et la sphère divisée en *compartimens hexagonaux réguliers* infiniment petits, conjuguées aussi l'une à l'autre, et auxquelles on pourrait substituer deux plans indéfinis, en donnant aux compartimens une grandeur finie ;

5.° Enfin la sphère divisée en *quarrés* infiniment petits, conjuguée à elle-même, et à laquelle on peut subtituer un plan indéfini, en donnant aux quarrés une grandeur finie.

Mais il faut encore joindre à cela, 1.° tous les polygones réguliers, à partir de la ligne droite et à finir par le cercle ; 2.° tous les prismes réguliers, à partir de deux plans parallèles et à finir par le cylindre de révolution ; ces derniers étant les conjugués des premiers ; ce sont en effet de véritables polyèdres réguliers, dont les premiers embrassent une étendue nulle, tandis que l'étendue, embrassée par les derniers, est infinie.

Il est donc vrai de dire que, rigoureusement parlant, et même en faisant abstraction des polyèdres étoilés de M. Poinsot, les polyèdres réguliers sont en nombre infini, et constamment conjugués soit à eux-mêmes soit deux à deux, ce qui n'avait pas encore été remarqué ; mais parmi ces polyèdres il n'y en a que 8 seulement qui renferment un espace réel et fini ; et parmi ces 8 il en est 5 seulement dont les faces ont une grandeur finie.

Deux polyèdres réguliers conjugués peuvent être inscrits ou circonscrits l'un à l'autre ; et même le problème de l'inscription ou de la circonscription d'un polyèdre régulier à son conjugué est un problème indéterminé, à moins pourtant qu'on ne demande le plus petit des inscrits ou le plus grand des circonscrits ; auquel cas les sommets de l'uu devraient être les centres des faces de l'autre.

L'indétermination du problème dans les autres cas donne lieu aux deux questions suivantes.

PROBLÈME I. Quel est, sur les faces d'un polyèdre régulier donné, le lieu des sommets de tous les polyèdres réguliers conjugués qui peuvent lui être inscrits?

PROBLÈME II. Quelle est, pour un polyèdre donné, la surface enveloppe de l'espace parcouru par les faces d'un autre polyèdre régulier, conjugué à celui-là, et variable de grandeur, qui lui est constamment circonscrit?

Le premier de ces deux problèmes, résolu seulement pour le cas du cube et de l'octaèdre, par Mairan, dans le volume de l'académie royale des sciences pour 1725, a été déjà proposé dans le présent recueil : l'autre ne l'a encore été nulle part.

Concevons que l'on érige sur chacune des faces d'un polyèdre régulier quelconque, comme sur autant de bases, des pyramides régulières et égales, ayant leurs sommets hors de ce polyèdre; ces pyramides, jointes au polyèdre donné, formeront un nouveau polyèdre qui, généralement parlant, ne sera pas régulier. Si, dans deux pyramides consécutives, on considère les deux faces latérales qui ont pour base commune une même arète du polyèdre primitif; suivant la hauteur commune qu'on aura donné aux pyramides, ces deux faces pourront être dans un même plan ou dans des plans différens; dans le premier cas, les faces du nouveau polyèdre, en nombre égal à celui des arètes du premier, et ayant ses arètes pour diagonales seront des rhombes; dans le second, elles seront en nombre double de celui de ses arètes et seront toutes triangulaires. Dans ce dernier cas, on pourra même donner aux pyramides une hauteur telle que tous les sommets du nouveau polyèdre soient réguliers; mais ils n'auront pas tous, en général, un même nombre de faces.

Concevons ensuite qu'au contraire on retranche tous les sommets du polyèdre primitif, par des plans tellement dirigés que les parties retranchées soient des pyramides régulières égales entre elles; ce qui restera du polyèdre donné sera un nouveau polyèdre qui, généralement parlant, ne sera pas régulier. Les plans coupant s'avanceront ou ne s'avanceront pas jusqu'aux milieux des arètes du polyèdre primitif; dans le premier cas, les sommets du nouveau polyèdre, en nombre égal à celui des arètes du premier seront tétraèdres; dans le second, ces sommets seront en nombre double et seront tous trièdres. Dans ce dernier cas, on pourra même faire en sorte que toutes les faces du nouveau polyèdre soient des polygones réguliers; mais, en général, ces polygones n'auront pas tous le même nombre de côtés.

Ces sortes de polyèdres, ou plutôt ceux de la première sorte; car il n'est pas à notre connaissance qu'on se soit encore occupé de ceux de la seconde, ont été désignés par quelques géomètres sous la dénomination de *Polyèdres semi-réguliers*; et nous adopterons cette dénomination; mais, puisque nous en reconnaissons de deux sortes, afin de nous rendre plus facilement intelligibles, nous dirons des premiers qu'ils sont semi-réguliers *par excès*, et des derniers qu'ils le sont *par défaut.* En outre, puisque nous avons distingué deux cas, pour les uns comme pour les autres, nous en aurons de *première classe* qui auront le moindre nombre de faces ou de sommets, et de *seconde classe*, pour lesquels le nombre de ces faces ou sommets, sera double.

Cela posé, conservons aux lettres A, F, S, f, s, pour le polyèdre primitif, la signification qu'elles ont déjà reçue, et voyons quels seront, en général, le nombre et la nature des faces, sommets et arètes des quatre polyèdres semi-réguliers auxquels un polyèdre régulier quelconque pourra donner naissance.

SEMI-RÉGULIER PAR EXCÈS. *Première classe.*

A faces, toutes rhombes;

$F+S$ ou $A+2$ sommets, dont F de s faces et S de f faces;

Fs ou $2A$ arètes.

Seconde classe.

$2A$ faces, toutes triangulaires;
$F+S$ ou $A+2$ sommets, dont F de s faces et S de $2f$ faces;
$Fs+A$ ou $3A$ arètes.

SEMI-RÉGULIERS PAR DÉFAUT. *Première classe.*

A sommets, tous tétraèdres;
$F+S$ ou $A+2$ faces, dont S de f sommets et F de s sommets;
Sf ou $2A$ arètes.

Seconde classe.

$2A$ sommets, tous trièdres;
$F+S$ ou $A+2$ faces, dont S de f sommets et F de $2s$ sommets;
$Sf+A$ ou $3A$ arètes.

Faisons d'abord l'application de ces formules aux cinq corps réguliers qui, ayant des faces d'une grandeur finie, enferment une portion finie de l'espace.

Pour le *tétraèdre*, on a $A=6$, $S=4$, $F=4$, $s=3$, $f=3$; ce polyèdre fournira donc

1.° Un hexaèdre régulier.

2.° Un corps à 12 faces triangulaires, ayant 8 sommets dont 4 trièdres et 4 hexaèdres, et 18 arètes.

3.° Un octaèdre régulier.

4.° Un corps à 12 sommets trièdres, ayant 8 faces, dont 4 triangulaires et 4 hexagonales, et 18 arètes.

Pour l'*hexaèdre*, on a $A=12$, $S=8$, $F=6$, $s=4$, $f=3$; ce polyèdre fournira donc

1.° Un corps à 12 faces rhombes, ayant 14 sommets, dont 6 trièdres et 8 tétraèdres, et 24 arètes.

2.° Un corps à 24 faces triangulaires, ayant 14 sommets, dont 6 tétraèdres et 8 hexaèdres, et 36 arètes.

3.° Un corps à 12 sommets tétraèdres, ayant 14 faces, dont 8 triangulaires et 6 quadrangulaires, et 24 arètes.

4.° Un corps à 24 sommets trièdres, ayant 14 faces, dont 8 triangulaires et 6 octogonales, et 36 arètes.

Pour l'*octaèdre*, on a $A=12$, $S=6$, $F=8$, $s=3$, $f=4$; ce corps fournira donc

1.° Un corps à 12 faces rhombes, ayant 14 sommets, dont 8 trièdres et 6 tétraèdres, et 24 arètes.

2.° Un corps à 24 faces triangulaires, ayant 14 sommets, donc 8 trièdres et 6 octaèdres, et 36 arètes.

3.° Un corps à 12 sommets tous tétraèdres, ayant 14 faces, dont 6 quadrangulaires et 8 triangulaires, et 24 arètes.

4.° Un corps à 24 sommets trièdres, ayant 14 faces, dont 6 quadrangulaires et 8 hexagonales, et 36 arètes.

Pour le *dodécaèdre*, on a $A=30$, $S=20$, $F=12$, $s=5$, $f=3$; ce corps fournira donc

1.° Un corps à 30 faces, toutes rhombes, ayant 32 sommets, dont 12 pentaèdres et 20 trièdres, et 60 arètes.

2.° Un corps à 60 faces, toutes triangulaires, ayant 32 sommets, dont 12 pentaèdres et 20 hexaèdres, et 90 arètes.

3.° Un corps à 30 sommets, tous tétraèdres, ayant 32 faces, dont 20 triangulaires et 12 pentagonales, et 60 arètes.

4.° Un corps à 60 sommets, tous trièdres, ayant 32 faces, dont 20 triangulaires et 12 décagonales, et 90 arètes.

Enfin, pour l'*icosaèdre*, on a $A=30$, $S=12$, $F=20$, $s=3$, $f=5$; ce corps fournira donc

1.° Un corps à 30 faces, toutes rhombes, ayant 32 sommets, dont 20 trièdres et 12 pentaèdres, et 60 arètes.

2.° Un corps à 60 faces, toutes triangulaires, ayant 32 sommets, dont 20 trièdres et 12 décaèdres, et 90 arètes.

3.° Un corps à 30 sommets tétraèdres, ayant 32 faces, dont 12 pentagonales et 20 triangulaires, et 60 arètes.

4.° Un corps à 60 sommets trièdres, ayant 32 faces, dont 12 pentagonales et 20 hexagonales, et 90 arètes.

On aurait pu s'attendre que les corps réguliers que nous venons de considérer étant au nombre de 5, et chacun d'eux pouvant donner naissance à quatre corps semi-régulier, ces derniers auraient dû être au nombre de 20; mais d'abord nous avons rencontré parmi eux l'hexaèdre et l'octaèdre réguliers; de plus, en passant les autres en revue, on en rencontre qui sont répétés; de sorte qu'en ne tenant compte que de ceux qui sont essentiellement différens, sans être réguliers, leur nombre se réduit à dix; de telle sorte que ceux qui dérivent de polyèdres réguliers conjugués l'un à l'autre sont les mêmes. De plus ces dix polyèdres semi-réguliers sont, deux à deux, conjugués l'un à l'autre; de manière que le semi-régulier par excès de l'une quelconque des deux classes est conjugué avec le semi-régulier par défaut de même classe qui dérive du même polyèdre régulier, ainsi qu'on en peut juger par le résumé que voici.

1.° Un polyèdre à 18 arètes, ayant 12 $\left\{\begin{matrix}\text{faces triangulaires}\\ \text{sommets trièdres}\end{matrix}\right\}$ et 8 $\left\{\begin{matrix}\text{sommets}\\ \text{faces}\end{matrix}\right\}$ dont 4 $\left\{\begin{matrix}\text{trièdres}\\ \text{triangulaires}\end{matrix}\right\}$ et 4 $\left\{\begin{matrix}\text{hexaèdres}\\ \text{hexagonales}\end{matrix}\right\}$.

2.° Un polyèdre à 24 arètes, ayant 12 $\left\{\begin{matrix}\text{faces quadrangulaires}\\ \text{sommets tétraèdres}\end{matrix}\right\}$ et 14 $\left\{\begin{matrix}\text{sommets}\\ \text{faces}\end{matrix}\right\}$ dont 6 $\left\{\begin{matrix}\text{trièdres}\\ \text{triangulaires}\end{matrix}\right\}$ et 8 $\left\{\begin{matrix}\text{tétraèdres}\\ \text{quadrangulaires}\end{matrix}\right\}$.

3.° Un polyèdre à 36 arètes, ayant 24 $\left\{\begin{matrix}\text{faces triangulaires}\\ \text{sommets trièdres}\end{matrix}\right\}$ et 14 $\left\{\begin{matrix}\text{sommets}\\ \text{faces}\end{matrix}\right\}$ dont 6 $\left\{\begin{matrix}\text{tétraèdres}\\ \text{quadrangulaires}\end{matrix}\right\}$ et 8 $\left\{\begin{matrix}\text{hexaèdres}\\ \text{hexagonales}\end{matrix}\right\}$.

4.° Un polyèdre à 60 arètes, ayant 30 $\left\{\begin{matrix}\text{faces quadrangulaires}\\ \text{sommets tétraèdres}\end{matrix}\right\}$ et 32 $\left\{\begin{matrix}\text{sommets}\\ \text{faces}\end{matrix}\right\}$ dont 20 $\left\{\begin{matrix}\text{trièdres}\\ \text{triangulaires}\end{matrix}\right\}$ et 12 $\left\{\begin{matrix}\text{pentaèdres}\\ \text{pentagonales}\end{matrix}\right\}$.

5.° Un polyèdre à 90 arètes, ayant 60 $\left\{\begin{matrix}\text{faces triangulaires}\\ \text{sommets trièdres}\end{matrix}\right\}$ et 32 $\left\{\begin{matrix}\text{sommets}\\ \text{faces}\end{matrix}\right\}$ dont 20 $\left\{\begin{matrix}\text{hexaèdres}\\ \text{hexagonales}\end{matrix}\right\}$ et 12 $\left\{\begin{matrix}\text{pentaèdres}\\ \text{pentagonales}\end{matrix}\right\}$.

Si nous passons présentement aux trois cas de la sphère divisée

régulièrement

régulièrement en polygones infiniment petits, ou du plan indéfini divisé régulièrement en polygones finis ; nous rencontrerons des divisions semi-régulières analogues pour cette sphère ou pour ce plan, ainsi qu'on va le voir

La sphère ou le plan, divisé en *triangles*, nous donnera,

1.° Une sphère ou un plan divisé en rhombes, ayant leurs grands angles réunis 3 à 3 et les petits 6 à 6.

2.° Une sphère ou un plan, divisé en triangles isocèles, ayant leurs grands angles réunis 3 à 3 et leurs petits 12 à 12.

3.° Une sphère ou un plan, divisé en triangles équilatéraux et hexagones, présentant à chaque point de réunion deux angles de triangles et deux angles d'hexagones alternés.

4.° Une sphère ou un plan, divisé régulièrement en hexagones.

La sphère ou le plan, divisé en *hexagones*, nous donnera

1.° Une sphère ou un plan, divisé en rhombes, ayant leurs grands angles réunis 3 à 3 et les petits 6 à 6.

2.° Une sphère ou un plan, divisé régulièrement en triangles.

3.° Une sphère ou un plan, divisé en triangles et hexagones, présentant, à chaque point de réunion, deux angles de triangles et deux angles d'hexagones alternés.

4.° Une sphère ou un plan, divisé en triangles et dodécagones, présentant, à chaque point de réunion, un angle de triangle et deux de dodécagones.

La sphère ou le plan, divisé en *quarrés*, nous donnera

1.° Une sphère ou un plan, divisé régulièrement en quarrés.

2.° Une sphère ou un plan, divisé en triangles rectangles isocèles réunis 4 à 4, par leurs grands angles, et 8 à 8 par leurs petits.

3.° Une sphère ou un plan divisé régulièrement en quarrés.

4.° Une sphère ou un plan, divisé en quarrés et octogones, présentant, à chaque point de réunion un angle de quarré et deux angles d'octogones.

En examinant ces différens cas, on voit que nous n'avons pas 12 divisions semi-régulières, tant parce que, parmi elles, il s'en trouve de régulières, que parce qu'il en est qui, bien que d'origine differente, rentrent pourtant les unes dans les autres. Elles se réduisent toutes à six distinctes, conjuguées deux à deux, et telles que les conjuguées sont de même classe, l'une par excès et l'autre par défaut, et déduites de deux divisions régulières, conjuguées elles-mêmes l'une à l'autre, comme on le voit par le tableau suivant.

1.° Une surface dont les $\left\{\begin{array}{l}\text{compartimens}\\ \text{sommets}\end{array}\right\}$ sont $\left\{\begin{array}{l}\text{quadrangulaires}\\ \text{tétraèdres}\end{array}\right\}$ et dont les $\left\{\begin{array}{l}\text{sommets}\\ \text{compartimens}\end{array}\right\}$ sont alternativement $\left\{\begin{array}{l}\text{trièdres et hexaèdres}\\ \text{triangulaires et hexagonaux}\end{array}\right\}$.

2.° Une surface dont les $\left\{\begin{array}{l}\text{compartimens}\\ \text{sommets}\end{array}\right\}$ sont $\left\{\begin{array}{l}\text{triangulaires}\\ \text{trièdres}\end{array}\right\}$ et dont les $\left\{\begin{array}{l}\text{sommets}\\ \text{compartimens}\end{array}\right\}$ sont alternativement $\left\{\begin{array}{l}\text{trièdres et dodécaèdres}\\ \text{triangulaires et dodécagonaux}\end{array}\right\}$.

3.° Une surface dont les $\left\{\begin{array}{l}\text{compartimens}\\ \text{sommets}\end{array}\right\}$ sont $\left\{\begin{array}{l}\text{triangulaires}\\ \text{trièdres}\end{array}\right\}$ et dont les $\left\{\begin{array}{l}\text{sommets}\\ \text{compartimens}\end{array}\right\}$ sont alternativement $\left\{\begin{array}{l}\text{tétraèdres et octaèdres}\\ \text{quadrangulaires et octogonaux}\end{array}\right\}$.

Passons enfin aux polyèdres réguliers à faces de grandeur finie, enfermant un espace nul ou infini, c'est-à-dire aux polygones et prismes réguliers; chaque polygone régulier donnera, en désignant par m le nombre de ses sommets

1.° Un prisme régulier indéfini de m faces.

2.° Un corps formé de deux pyramides régulières opposées base à base, ayant $2m$ faces, $3m$ arètes et $m+2$ sommets.

3.° Un polygone du même nombre m de côtés.

4.° Un polygone d'un nombre de côtés double ou $2m$.

Quant au prisme régulier indéfini de m faces, on en déduira

1.° Un autre prisme régulier du même nombre m de faces.

2.° Un prisme régulier d'un nombre de faces double ou $2m$.

3.° Un polygone régulier de m côtés.

4.° Enfin, un prisme régulier d'une longueur finie, ayant $2m$ sommets, $3m$ arètes et $m+2$ faces dont m quadrangulaires.

On voit par là que ces deux dernières sortes de polyèdres réguliers ne donnent réellement naissance qu'à deux classes de polyèdres semi-réguliers, conjugués les uns aux autres, savoir;

$$\text{Des polyèdres de } 3m \text{ arètes, ayant } 2m \left\{\begin{array}{l}\text{faces triangulaires}\\ \text{sommets trièdres}\end{array}\right\}$$

$$\text{et } m+2 \left\{\begin{array}{l}\text{sommets}\\ \text{faces}\end{array}\right\} \text{dont } m \left\{\begin{array}{l}\text{tétraèdres}\\ \text{quadrangulaires}\end{array}\right\} \text{et } 2 \text{ de } m \left\{\begin{array}{l}\text{faces}\\ \text{côtés}\end{array}\right\}.$$

Voilà ce qu'on est convenu d'appeler jusqu'ici polyèdres semi-réguliers, et l'on voit qu'en rigueur ils sont, comme les réguliers, en nombre infini. Mais on pourrait concevoir d'autres polyèdres qui, peut-être à plus juste titre que ceux-ci, pourraient être appelés semi-réguliers; on pourrait concevoir, en effet,

1.° Des polyèdres dont toutes les faces seraient des polygones réguliers égaux, et dont les sommets, en nombre pair, présenteraient aussi des angles polyèdres réguliers; mais moitié d'une sorte et moitié d'une autre sorte.

2.° Des polyèdres dont tous les sommets présenteraient des angles polyèdres réguliers égaux, et dont les faces, en nombre pair, seraient aussi des polygones réguliers; mais moitié d'une sorte et moitié d'une autre.

3.° Enfin, des polyèdres dont à la fois les faces seraient des polygones régulisrs et les sommets des angles polyèdres réguliers; mais, où les uns et les autres, en nombre pair, seraient moitié d'une sorte et moitié d'une autre.

Parmi les polyèdres semi-réguliers précédemment considérés, nous en avons déjà rencontré quelques-uns de cette sorte; et tels sont notamment, 1.° le polyèdre à 18 arètes, ayant 12 faces triangulaires et 8 sommets, dont 4 trièdres et 4 hexaèdres; 2.° le polyèdre à 18 arètes, ayant 12 sommets trièdres et 8 faces, dont 4 triangulaires et 4 hexagonales. Mais on conçoit qu'il est possible qu'il en existe d'autres encore; et le problème de la recherche de leur totalité est un problème qui a été proposé à la page 256 du VII.e volume de ce recueil. Voyons quelles sont les formules qui doivent en donner la solution.

1.° Soient F le nombre des faces d'un polyèdre, toutes de s sommets; $2S$ le nombre de ses sommets, dont S de f et S de f' faces; et enfin A le nombre de ses arètes; en raisonnant comme nous l'avons fait dans la recherche des polyèdres réguliers, nous aurons les trois équations

$$sF=2A\,,$$

$$(f+f')S=2A\,,$$

$$F+2S=A+2\,;$$

desquelles nous tirerons

$$\left.\begin{aligned} A&=\frac{2s(f+f')}{4s-(s-2)(f+f')}\,;\\ F&=\frac{4(f+f')}{4s-(s-2)(f+f')}\,,\\ S&=\frac{4s}{4s-(s-2)(f+f')}\,. \end{aligned}\right\}\quad\text{(I)}$$

2.° Soient S le nombre des sommets d'un polyèdre, tous de f faces; $2F$ le nombre de ses faces, dont F de s et F de s' faces; et enfin A le nombre de ses arètes; nous aurons les équations

$$fS=2A\,,$$

$$(s+s')F=2A\,,$$

$$S+2F=A+2\,;$$

desquelles nous tirerons

$$\left.\begin{aligned}
A&=\frac{2f(s+s')}{4f-(f-2)(s+s')}\,,\\
S&=\frac{4(s+s')}{4f-(f-2)(s+s')}\,,\\
F&=\frac{4f}{4f-(f-2)(s+s')}\,.
\end{aligned}\right\}\quad\text{(II)}$$

3.° Soient enfin $2F$ le nombre des faces d'un polyèdre dont F de s et F de s' sommets ; $2S$ le nombre de ses sommets, dont S de f et S de f' faces ; et enfiu A le nombre de ses arètes ; nous aurons les équations

$$(s+s')F=2A\,,$$

$$(f+f')S=2A\,,$$

$$2F+2S=A+2\,;$$

desquelles nous tirerons

$$\left.\begin{aligned}
A&=\frac{2(f+f')(s+s')}{4[(f+f')+(s+s')]-(f+f')(s+s')}\,,\\
F&=\frac{4(f+f')}{4[(f+f')+(s+s')]-(f+f')(s+s')}\,,\\
S&=\frac{4(s+s')}{4[(f+f')+(s+s')]-(f+f')(s+s')}\,.
\end{aligned}\right\}\quad\text{(III)}$$

Il s'agit donc présentement de satisfaire à ces trois systèmes de formules avec des nombres entiers positifs ; mais auparavant nous remarquerons que les formules (I, II) se changeant les unes dans les autres, lorsqu'on y change F en S, f en s et f' en s' ; chaque solution des formules (I) nous donnera une solution des formules (II) ; et, de plus, ces solutions correspondantes appartiendront à deux polyèdres conjugués. En second lieu, les formules (III) demeurant les mêmes lorsqu'on y permute simultanément F avec S, f avec s, f' avec s'; chaque solution de ces formules pourra être considérée comme double, et nous fera connaître deux polyèdres conjugués. On voit par là que le travail se trouvera réellement réduit à moitié.

Mais ce travail sera plus difficile qu'il ne le paraît; il ne suffira pas, en effet, d'obtenir des nombres entiers positifs satisfaisant aux formules analitiques; il faudra savoir de plus si les polyèdres que ces nombres indiquent sont géométriquement possibles; et, au cas qu'ils le soient, il sera de plus nécessaire de savoir si les polygones et les angles polyèdres dont ils se composeront devront être réguliers ou irréguliers; comment les faces ou sommets de même nombre et d'espèces différentes devront être distribués et répartis sur le polyèdre, et enfin si ce polyèdre devra ou ne pourra pas être entièrement convexe.

Nous abandonnerons donc au lecteur cette discussion qui ne pourrait être que fort longue; et nous nous bornerons à indiquer la marche qui paraît la plus facile à suivre pour résoudre le problème numérique, qui est d'abord celui dont il convient de s'occuper.

Pour les formules (I), en posant, pour abréger, $f+f'=\varphi$, nous aurons

$$A=\frac{2s\varphi}{4s-(s-2)\varphi}\,,\quad F=\frac{4\varphi}{4s-(s-2)\varphi}\,,\quad S=\frac{4s}{4s-(s-2)\varphi}\,.$$

Si l'on veut des polyèdres effectifs, tels qu'on les conçoit ordinairement, c'est-à-dire, des polyèdres dont les faces, d'une grandeur finie et en nombre fini, n'aient pas moins de trois côtés, et dont les sommets n'aient pas moins de trois faces, il faudra chercher toutes les valeurs entières et positives de s, plus grandes que 2, qui, jointes à des valeurs entières et positives de φ, plus grandes que 3, donnent pour A, F, S des valeurs entières et positives; on pourra prendre, par exemple, $s=3$, $\varphi=9$, ce qui donnera

$$A=18\ ,\qquad F=12\ ,\qquad S=4\ .$$

Il s'agira ensuite de décomposer 9, valeur de φ, en deux parties f et f', dont aucune ne soit moindre que 3. Prenant, par exemple, $f=6$, d'où $f'=3$; on obtiendra un polyèdre de 12 faces triangulaires, ayant 4 sommets hexaèdres et 4 sommets trièdres, et 18 arètes, polyèdre possible ; car c'est un des deux que nous avons cité ci-dessus pour exemple.

Pour les formules (II), en posant $s+s=\sigma$, nous aurons

$$A=\frac{2f\sigma}{4f-(f-2)\sigma}\ ,\qquad S=\frac{4\sigma}{4f-(f-2)\sigma}\ ,\qquad F=\frac{4f}{4f-(f-2)\sigma}\ ;$$

et il faudra trouver des valeurs entières et positives de f, plus grandes que 2, qui, jointes à des valeurs entières et positives de σ, plus grandes que 3, donnent pour A, S, F des valeurs entières et positives : on pourra prendre, par exemple, $f=3$, $\sigma=9$, ce qui donnera

$$A=18\ ,\qquad S=12\ ,\qquad F=4\ .$$

Il s'agira ensuite de décomposer 9, valeur de σ, en deux parties s et s', dont aucune ne soit moindre que 3. Prenant, par exemple, $s=6$, d'où $s'=3$, on obtiendra un polyèdre de 12 sommets trièdres, ayant 4 faces triangulaires et 4 autres hexagonales, et 18 arètes. C'est précisément le conjugué du polyèdre que nous venons de signaler ci-dessus ; et que nous aurions pu même en déduire immédiatement.

Enfin, pour les formules (III), en posant à la fois $f+f=\varphi$, $s+s'=\sigma$, nous aurons

$$A=\frac{2\varphi\sigma}{4(\varphi+\sigma)-\varphi\sigma}\ ,\qquad F=\frac{4\varphi}{4(\varphi+\sigma)-\varphi\sigma}\ ,\qquad S=\frac{4\sigma}{4(\varphi+\sigma)-\varphi\sigma}\ .$$

Il faudra d'abord trouver des valeurs entières et positives de φ et σ, plus grande que 5, qui rendent A, F, S entiers positifs ; on peut poser, par exemple, $\varphi=7$, $\sigma=7$; il en résultera

$$A=14\,, \qquad F=4\,, \qquad S=4\,.$$

Il s'agira ensuite de décomposer 7, valeur de φ, en deux parties f et f', et 7, valeur de σ, en deux parties s et s', dont aucune ne soit moindre que 3. Prenant, par exemple, $f=4$, $s=4$, d'où $f'=3$, $s'=3$; on obtiendra un polyèdre ayant 4 faces quadrangulaires, 4 faces triangulaires, 4 sommets tétraèdres, 4 sommets trièdres et 14 arètes.

Ce polyèdre est possible, et, pour s'en convaincre, on peut concevoir d'abord deux prismes triangulaires égaux ayant des quarrés pour faces latérales. En appliquant en effet ces deux prismes l'un contre l'autre par deux faces latérales de telle sorte que les arètes latérales de chacun soient perpendiculaires aux arètes latérales de l'autre, on obtiendra ainsi le polyèdre dont il s'agit, et dont toutes les faces pourront être régulières.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de Géométrie.

TOUT polyèdre convexe a pour développement sur un plan un polygone convexe ou non convexe, divisé en compartimens polygonaux.

Mais un tel polygone ne peut être le développement d'un polyèdre que sous certaines conditions.

On propose d'assigner ces conditions ?

ANALISE ALGÉBRIQUE.

Sur le nombre des racines imaginaires des équations ; en réponse aux articles de MM. TÉDENAT et SERVOIS, insérés aux pages 215 *et* 223 *de ce volume ;*

Par M. BÉRARD, professeur de mathématiques, membre de plusieurs sociétés savantes.

LE problème de la détermination du nombre des racines imaginaires des équations est un des plus importans et des plus difficiles de l'analise. Ce problème est résolu depuis long-temps pour les quatre premiers degrés, parce que, pour ces degrés, la forme des racines étant connue, il a été possible d'assigner les conditions de leur réalité.

De Gua donna ensuite une très-belle méthode pour parvenir aux conditions de réalité de la totalité des racines, dans une équation de degré quelconque (*); mais cette méthode n'apprend rien sur le nombre des racines imaginaires, dans le cas où les conditions de réalité ne sont pas toutes satisfaites.

Lagrange résolut depuis, au moyen de son équation aux quarrés des différences, le problème qui était échappé à de Gua, et dont même il avait pour ainsi dire désespéré.

Enfin, M. Cauchy, ayant repris la méthode de de Gua et les observations consignées dans la note VIII de la *Résolution des*

(*) *Mémoires de l'académie des sciences*, pour 1741.

équations numériques de Lagrange, en a déduit une solution générale du problème où il s'agit d'assigner le nombre des racines réelles et imaginaires, positives et négatives qu'une équation quelconque peut renfermer (*). Malheureusement cette solution est si compliquée qu'elle n'est guère applicable à la pratique. Les racines nulles ou égales qui se rencontrent dans les équations auxiliaires la mettent en défaut; et il faut alors avoir recours à des artifices particuliers d'analise. Aussi n'a t-il pas fallu à l'auteur moins de 91 pages in-4.° de recherches pénibles pour surmonter complètement les difficultés que son sujet lui avait présentées (**).

J'ai cherché à mon tour une méthode qui fût plus simple que celle de M. Cauchy. J'ai cru l'avoir trouvée dans mon théorème énoncé à la page 36 de ce volume. A la page 60, un abonné a donné un semblable théorème, sous une forme un peu plus concise, et en a tenté la démonstration pour les quatre premiers degrés.

C'est ce même théorème que MM. Tédenat et Servois ont examiné, pages 215 et 223 du même volume, et qu'ils ont trouvé en défaut dès le 4.^{me} degré.

Je ne viens point contester l'exactitude des calculs de ces deux savans géomètres : je confesse qu'en effet mon théorème est en défaut dans les cas qu'ils ont énoncés et dans un grand nombre d'autres. Que ce soit de ma part précipitation ou défaut de lumières ; c'est un point assez indifférent à discuter. Il est d'ailleurs permis de se consoler d'une erreur, quand on songe que les plus grands géomètres ne s'en sont point toujours su entièrement garantir ; et, qu'en particulier, l'illustre Lagrange lui-même s'est mépris sur le sujet dont il s'agit, ainsi qu'on le verra plus loin (***). Mais, ce qu'il

(*) *Journal de l'école polytechnique*, XVII.^{e} cahier, pag. 457.

(**) Oui, mais aussi que de choses dans ces 91 pages ! et quelle large et élégante exposition ! *J. D. G.*

(***) On verra là en quoi consiste cette grave méprise. *J. D. G.*

n'est pas indifférent de faire voir, c'est que mon théorème, tout imparfait qu'il est, fournit encore, au moyen de certaines modifications, une solution, moins simple, en effet, que je ne l'avais pensé, mais du moins préférable, pour la facilité, à celle de M. Cauchy, la seule praticable que je connaisse.

Il faut, au surplus, distinguer, en mathématiques, trois sortes de propositions, 1.° celles qui sont toujours vraies, ou qui n'admettent ni restrictions ni exceptions; telles, par exemple, que celle-ci : *La somme des trois angles de tout triangle rectiligne vaut deux angles droits ;* 2.° celles qui, reposant sur un faux principe, ne peuvent en aucune sorte être admises. Par exemple, dans ses *Sections coniques*, n.° 172, Besout dit que si p est négatif, dans l'équation $y^2=px$, cette équation n'exprime aucune ligne possible; tandis qu'il est évident qu'alors elle exprime une parabole qui s'étend du côté des x négatifs; 3.° enfin, celles qui, bien qu'appuyées sur des principes vrais, admettent néanmoins, dans certains cas, des restrictions ou exceptions.

Les premières sont sans doute les plus précieuses : celles de la seconde sorte doivent, au contraire, être soigneusement bannies; mais quant aux dernières, quoiqu'elles ne puissent pas prétendre au rang des premières, elles ont néanmoins leur degré d'utilité; aussi les ouvrages de mathématiques en sont-ils remplis; et les géomètres en font journellement usage, sans le moindre scrupule : en voici des exemples.

Les formules qui, dans certains cas, deviennent $\frac{0}{0}$, ne font rien connaître et sont conséquemment en défaut pour ces mêmes cas; mais, par des considérations particulières, on leur rend leur utilité. C'est, en particulier, le cas de la formule $\int x^m dx=\frac{1}{m+1}x^{m+1}+C$, lorsque $m=-1$; et cependant cette formule n'en est pas moins employée, et même considérée comme fondamentale dans le calcul intégral.

Plusieurs des formules de la trigonométrie sphérique offrent des cas douteux : la trigonométrie rectiligne elle-même n'en est point exempte. Si c, c' représentent deux quelconques des côtés d'un triangle, et a, a' les angles opposés ; on a $\text{Sin}.a'=\frac{c'}{c}\text{Sin}.a$: cette formule présente un cas douteux, que quelques auteurs seulement ont signalé (*V. Trig. rect. de Bezout*, n.° 267) : l'angle a' peut être aigu ou obtus ; et il faut une considération particulière pour lever le doute. Ce n'est pas tout : l'incertitude cesse, et il n'y a plus qu'une solution dans trois cas, savoir ; 1.° si l'angle a est droit ou obtus ; 2.° si a étant aigu a' est droit ; 3.° enfin, si a étant aigu c n'est pas moindre que c'. Je rapporte ce dernier exemple, de préférence à d'autres, parce que la discussion à laquelle il donne lieu ne se trouve dans aucun de nos traités élémentaires, où cependant elle mériterait de trouver place (*).

(*) Nous prendrons la liberté d'observer à M. Bérard que ces exemples ne nous paraissent pas très-heureusement choisis relativement à ce qu'il se propose d'établir. De même, en effet, qu'on ne saurait réputer menteur celui qui se tait à certaines questions qu'on lui adresse ; on ne saurait dire pareillement qu'une formule n'est pas généralement vraie, parce que, dans certains cas, elle devient $\frac{0}{0}$; puisqu'alors même elle ne cesse pas d'être vraie. On dit bien que, pour de tels cas, elle se trouve *en défaut* ; mais il n'en demeure pas moins évident que, pour ces mêmes cas, elles ne sauraient induire en erreur celui qui les consulte.

Quant à la formule $\text{Sin}.a'=\frac{c'}{c}\text{Sin}.a$, elle n'est jamais en défaut. Ce n'est point, en effet, l'angle a' qu'elle est destinée à faire connaître, mais seulement son sinus ; et ce sinus, elle le donne toujours tel qu'il doit être. Mais, comme ce même sinus répond à deux angles distincts ; lorsque nous voulons passer de lui à l'angle auquel il répond, nous nous trouvons dans le même cas que si nous voulions résoudre une équation du second degré ; c'est-à-dire, dans le même cas où se trouve celui qui interrogeant quelqu'un en reçoit pour réponse : *ce que vous me demandez est telle chose ou telle autre* ; et certes, il n'y a encore rien là de contraire à la vérité.

J. D. G.

Ces exemples suffisent pour prouver qu'on ne doit point confondre un théorème faux avec un théorème sujet à restriction. D'Alembert a dit quelque part : *Les exceptions confirment la règle loin de la détruire* (*). Lagrange a dit (*Résolution des équations numériques*, dernière édition, note IX, page 105) : *Ce principe est généralement vrai ; mais j'ai remarqué depuis qu'il était sujet à de exceptions qui pouvaient mettre la démonstration précédente en défaut* (**).

(*) Il est peu de maximes plus dangereuses, et en même temps plus fréquemment employées, que celles dont M. Bérard cherche ici à s'étayer. Que peut, en effet, signifier cette maxime, si l'on veut lui donner un sens raisonnable? sinon que les hommes n'établissent des exceptions que là seulement où ils ont posé des règles ; et il est très-vrai de dire qu'alors *l'existence de l'exception prouve celle de la règle.* Que, par exemple, l'on soit en doute, dans deux mille ans d'ici, si, au dix-huitième siècle, on pouvait être admis, à l'âge de 19 ans, à l'académie des sciences de Paris ; et qu'alors on découvre l'acte de l'autorité royale qui autorise une exception en faveur de Clairaut, n'ayant encore que cet âge ; dès-lors le doute disparaîtra, et il sera vrai de dire que *l'exception prouve la règle*, *loin de la détruire.* Mais, si quelqu'un soutenait que les français ne sont pas propres à l'étude des sciences exactes, et qu'on lui objectât l'exemple de M. Bérard ; je le demande à M. Bérard lui-même, serait-il fondé à répondre que *l'exception confirme la règle.* Il ne peut donc être ici question que d'institutions humaines, et non de principes naturels ou métaphysiques. Autrement, autant voudrait dire que pour démontrer un théorème, il ne s'agit que de prouver qu'il est faux dans certains cas; et que ce qui prouve invinciblement que tous les nombres sont pairs, c'est qu'il y en a une multitude qui ne sont point divisibles par *deux* ; ce qui n'est certainement pas la pensée de M. Bérard.

J. D. G.

(**) L'autorité de Lagrange, que M. Bérard invoque ici, nous paraît, au contraire, prononcer contre lui. Il s'agit, en effet, en l'endroit cité, d'une démonstration de Foncenex que Lagrange rejette, uniquement parce que, quoiqu'exacte en général, elle est néanmoins sujette à certaines exceptions. Et, ce qui est très-remarquable, c'est que ces exceptions ne portent que sur la démonstration elle-même, et non sur le principe qui n'en souffre aucune.

J. D. G.

J'espère prouver que mon théorème est de l'espèce de ceux qui, bien qu'ils soient vrais, en général, sont néanmoins sujets à des exceptions. Il ne me restera plus alors que le tort, encore assez grave, je l'avoue, de n'avoir pas fait connaître ces exceptions (*); mais du moins mon théorème ne méritera plus la peine de mort prononcée contre lui par M. Tédenat.

Qu'on me permette encore, avant d'entrer en matière, de relever à mon tour certaines maximes avancées par M. Tédenat, et qui me paraissent, tout aussi bien que mon théorème, sujettes à quelques restrictions.

M. Tédenat dit : *Pour prouver qu'une démonstration est fausse, il suffit simplement de la trouver en défaut dans un cas particulier*. On voit, par ce qui précède, que cette maxime n'est rien moins que certaine (**).

Il ajoute plus loin : *Il faut soigneusement se garder de toute précipitation, et bien mûrir ses idées avant de les faire éclore*. Ce conseil est fort bon ; car il est certain que le plus sûr moyen de ne pas tomber est de ne pas marcher du tout (***) ; mais ce

---

(*) Il nous paraît que le tort de M. Bérard ne serait pas tant de n'avoir point fait connaître les exceptions nombreuses auxquelles son théorème est sujet que de l'avoir donné comme n'en souffrant aucune.

J. D. G.

(**) M. Tédenat dit : *Pour prouver qu*'une proposition *est fausse*, *il suffit de la trouver en défaut dans un cas particulier quelconque* ; ce qui est un peu différent. C'est exactement comme si M. Tédenat avait dit : *Pour prouver que les nombres ne sont* pas tous *pairs*, *il suffit d'en trouver* un seul *qui ne soit point divisible par deux ;* et nous ne voyons rien dans ce qui précède qui puisse infirmer cette proposition.

Au surplus, en admettant même la version de M. Bérard, M. Tédenat aurait encore pour lui l'autorité de Lagrange, qui rejette une démonstration de Foncenex, uniquement parce qu'elle ne s'étend pas à tous les cas.

J. D. G.

(***) Est-ce donc que ce serait ne pas marcher du tout que de chercher soigneusement si une proposition que l'on soupçonne être vraie, l'est en effet?

principe, s'il n'était restreint, serait-il bien favorable au progrès des lumières? On peut regarder les savans comme une société de voyageurs, parcourant à l'envi, et dans toutes sortes de directions, les champs immenses de la science. Les découvertes les plus précieuses sont souvent faites, les mines les plus riches sont souvent rencontrées par les plus heureux et non par les plus habiles. Ce qu'il y a de faux est bientôt séparé de ce qui est bon; et les erreurs même ne sont pas sans quelque utilité, parce qu'elles provoquent d'intéressantes discussions. Ces erreurs n'ont pas d'ailleurs, en géométrie, les mêmes dangers qu'elles pourraient offrir en politique (*).

PROBLÈME I. Trouver les conditions de réalité de toutes les racines d'une équation de degré quelconque?

Solution. La première solution de ce problème est due à de Gua. Soit $X=0$ la proposée : la courbe $X=y$ serpente de part et d'autre de l'axe des x : ses points d'intersection avec cet axe déterminent les racines réelles; on observe deux espèces de sommets : les uns qui tournent leur concavité vers l'axe, et pour lesquels y est un *maximum* : les autres qui tournent au contraire leur convexité vers le même axe, et pour lesquels, par conséquent, cette ordonnée est un *minimum*.

Qui empêche d'ailleurs de publier, pour ce qu'elle vaut, une proposition dont on n'a pu parvenir à se démontrer ni la vérité ni la fausseté?

J. D. G.

(*) Chacun ici bas agit suivant son caractère et avec son caractère. Ainsi, tandis que M. Bérard ne déguise que difficilement quelque peu d'humeur contre M. Tédenat, qui pourtant avait poussé le sentiment des convenances jusqu'à ne pas proférer son nom dans l'article où il le refutait; à peine cet article a-t-il été connu de l'anonyme qui avait aussi rencontré le théorème en discussion, qu'il s'est empressé de nous adresser des réflexions tendant à corroborer les raisonnemens de M. Tédenat contre la vérité de ce théorème.

J. D. G.

Cela posé, deux conditions sont nécessaires pour la réalité de toutes les racines; 1.° il faut que tous les sommets soient réels ou apparens, et par conséquent au nombre de $m-1$; et cette première condition est évidemment remplie, si la dérivée $X'=0$ a toutes ses racines réelles et inégales.

2.° Il faut de plus que tous les sommets soient concaves vers l'axe des x, ou que tous les y de ces sommets soient *maxima*. Or, on sait que, quand X est *maximum*, sa seconde dérivée X'' a un signe contraire au sien; donc, si l'on pose $XX''=z$, et qu'on élimine x entre cette dernière équation et $X'=0$, on obtiendra une équation $Z=0$ en z, dont toutes les racines devront être négatives et qui conséquemment n'aura que des permanences; c'est-à-dire, une équation dont tous les termes seront positifs.

La première condition exigera, à son tour, pour la réalité des racines de $X'=0$, deux conditions semblables; d'où l'on conclut que, pour la réalité des racines de $X=0$, il faut que les auxiliaires successives $Z=0$, $Z'=0$, $Z''=0$, ..., au nombre de $m-1$, aient toutes tous leurs termes positifs.

En formant ces auxiliaires sur des équations littérales, on en déduit, en fonction des coefficiens de la proposée, les conditions de réalité de ses racines, conditions qui sont au nombre de $m.\frac{m-1}{2}$.

La méthode de Lagrange exige la formation de son équation aux *quarrés des différences* des racines, laquelle, dans le cas dont il s'agit, ne doit avoir que des variations de signes (*).

La méthode de Lagrange n'exige, comme l'on voit, qu'une

(*) Il nous paraît que cette méthode n'est point de Lagrange, mais bien de Waring, comme cet illustre géomètre en convient lui-même, avec sa modestie accoutumée. (*Résolut. des équat. numériq.*, dernière édition, note III, pag. 110.)

J. D. G.

auxiliaire;

auxiliaire ; mais cette auxiliaire est du degré $m.\frac{m-1}{2}$: celle de de Gua en exige un nombre $m-1$; mais la plus élevée n'est que du degré $m-1$, et les calculs en sont moins difficiles. Au reste, elles conduisent toutes deux au même nombre $m.\frac{m-1}{2}$ de conditions. Lagrange s'étonne (*Résol. des équat. numériq.* , dernière édition , note VIII , pag. 165) de ce résultat ; mais je ferai voir que , parmi ces $m.\frac{m-1}{2}$ conditions, il s'en trouve qui sont comportées par le système des autres (*) ; et que , par exemple , pour le cinquième degré, ce nombre , qui devrait être *dix* , se réduit à m ou à cinq.

Il résulte de la théorie de de Gua ce beau théorème : savoir, que *Quand toutes les racines de* $X=0$ *sont réelles , si l'on fait disparaître l'un quelconque de ses termes , autre que les termes extrêmes , les deux termes entre lesquels celui-ci se trouverait s'il n'était pas nul devront être de signes contraires* ; d'où il suit que, quand cette condition n'a pas lieu , la proposée a nécessairement des racines imaginaires (**). (*Résolut. des équat. numériq.*, dernière édition, note VIII , pag. 169).

(*) C'est ce que Lagrange avait déjà insinué à la fin de la note III de l'ouvrage cité.

J. D. G.

(**) Cette dernière partie du théorème se déduit d'une manière tout autrement simple de la règle de Descartes. On en déduit, plus généralement, 1.° que toute équation dans laquelle il manque $2n+1$ termes consécutifs, entre deux termes de mêmes signes, a nécessairement au moins $2(n+1)$ racines imaginaires ; 2.° que toute équation dans laquelle il manque n termes consécutifs, a nécessairement au moins n ou $n+1$ racines imaginaires , suivant que n est *pair* ou *impair* ; 3.° enfin , que toute équation qui présente, en plusieurs endroits, de telles circonstances a au moins la totalité des racines imaginaires annoncées par chacune d'elles en particulier. *J. D. G.*

On peut parvenir, par des moyens plus élémentaires, au résultat de la méthode de Lagrange. Si, en effet, $X=0$ n'a que des racines réelles; en la divisant par le facteur essentiellement réel

$$x^2-2\alpha x+\alpha^2-V,$$

dans lequel V est supposé positif; on aura un reste composé de termes en x et des termes sans x. En égalant séparément à zéro la somme des uns et celle des autres, on aura deux équations en α et V, entre lesquelles éliminant α, l'équation résultante en V ne devra avoir que des variations, puisque V ne doit avoir que des valeurs positives. Cette équation sera d'ailleurs du degré $m.\frac{m-1}{2}$, nombre des diviseurs du second degré de l'équation $X=0$.

PROBLÈME II. Déterminer le nombre des racines imaginaires d'une équation d'un degré quelconque?

Solution. Ce second problème est beaucoup plus difficile que le premier, qui n'en est, au surplus, qu'un cas particulier. Il est résolu depuis long-temps, pour les degrés inférieurs au cinquième, soit par des considérations fondées sur la forme même des racines, soit par la discussion de l'équation appelée réduite. On peut encore le résoudre, pour les mêmes degrés, soit par l'équation aux quarrés des différences de Lagrange (Voyez les numéros 37, 38, 39 de son ouvrage), soit par la méthode de de Gua. Voici les conditions auxquelles on parvient par ces diverses méthodes.

Premier degré. L'équation ne saurait, dans aucun cas, admettre des racines imaginaires.

Deuxième degré. Soit la proposée $x^2+ax+b=0$. Ses deux racines seront *réelles* si l'on a a^2-4b *positives*; elles seront *égales* si cette quantité est *nulle*, et *imaginaires* si elle est *négative*. Ce sont là les trois seuls cas que ce degré soit susceptible d'offrir (*).

Troisième degré. Soit la proposée $x^3+ax^2+bx+c=0$; elle aura ses trois racines *réelles*, si la quantité $27c^2+2ac(2a^2-9b)+b^2(4b-a^2)$ est *négative* ou *nulle* ; dans ce dernier cas, deux de ses racines seront égales ; et, si cette même quantité est positive, l'équation aura deux racines imaginaires (**).

Je ferai, à ce sujet, une remarque qui ne sera pas inutile :

(*) Il nous paraît de beaucoup préférable d'admettre un coëfficient au premier terme, et de prendre pour la proposée $ax^2+bx+c=0$; la condition de réalité des racines est alors $b^2-4ac=0$. Or, sous cette forme elle présente divers avantages précieux ; car d'abord on peut y supposer a, b, c entiers, ce qui facilite les substitutions dans les cas particuliers, sur-tout lorsque les coefficiens sont polynomes. En second lieu, les erreurs de calcul ou de copie dans l'équation de condition sont beaucoup plus faciles à découvrir, attendu que, d'une part, cette équation devient homogène, et que de l'autre, les coefficiens également distans des extrêmes doivent y entrer symétriquement. Enfin, sa forme symétrique la rend plus facile à graver dans la mémoire, ce qui n'est pas à négliger.

J. D. G.

(**) Pour les mêmes raisons que dans la précédente note, il nous paraît préférable de mettre l'équation sous la forme

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

la condition de réalité des racines se trouve alors très-symétriquement exprimée par l'inégalité

$$(bc-9ad)^2-4(b^2-3ac)(c^2-3bd)<0\ ,$$

ce qui revient à dire qu'il faut que l'équation du second degré

$$(b^2-3ac)x^2+(bc-9ad)x+(c^2-3bd)=0\ ,$$

ait ses deux racines imaginaires.

J. D. G.

c'est que Lagrange s'est trompé en croyant que deux conditions distinctes étaient nécessaires pour la réalité des racines du 3.^{me} degré. Après avoir donné ces deux conditions (Voyez n.° 38 de son ouvrage), il ajoute même formellement : *si l'une de ces conditions manque, l'équation aura deux racines imaginaires*. Il est pourtant évident que, pour que les trois racines soient réelles, il suffit que le radical du second degré qui entre dans leurs expressions soit imaginaire ; ce qui ne fournit qu'une condition unique. Cette condition, que je viens de donner, est précisément l'une de celles de Lagrange ; d'où l'on doit conclure que l'autre doit y être implicitement comprise (*).

(*) M. Bérard donne cinq conditions pour la réalité des racines d'une équation du cinquième degré, en ayant soin d'observer que peut-être elles se réduisent à un moindre nombre. Si donc demain quelqu'un, ayant trouvé que ces conditions peuvent être réduites à quatre ou à un moindre nombre, s'en autorisait pour dire grossièrement que M. Bérard s'est trompé, M. Bérard aurait justement le droit de s'en plaindre.

C'est précisément là le cas de Lagrange ; d'une part, en donnant deux conditions pour le troisième degré, il a pu dire quelque chose de superflu, mais du moins il n'a rien dit de faux. En outre, il a observé qu'en général plusieurs des conditions pouvaient rentrer dans les autres ; il a donc prévenu le reproche que lui adresse M. Bérard.

Au surplus, lorsqu'on entreprend de redresser un homme tel que Lagrange, il faudrait du moins ne pas faire les choses à demi ; et en particulier, en cette rencontre, il eut été assez convenable de montrer qu'en effet sa première condition se trouve comportée par la seconde : voici comment on peut s'en assurer.

Suivant nos notations, les deux conditions assignées par Lagrange deviennent

$$b^2-3ac>0\ ,$$

$$(bc-9ad)^2-4(b^2-3ac)(c^2-3bd)<0\ .$$

Or, la dernière peut être mise sous cette forme

$$(2b^3-9abc+27a^2d)^2-4(b^2-3ac)^3<0\ ;$$

Quatrième degré. Soit la proposée $x^4+px^2+qx+r=0$. Les quatre racines seront réelles, si les trois conditions suivantes sont satisfaites

$$p<0\ ;\ p^2-4r>0\ ;\ 16r(p^2-4r)^2+q^2(144pr-4p^3-27q^2)>0\ .$$

Les quatre racines seront imaginaires si l'une ou l'autre des deux premières ou toutes les deux ne sont point remplies.

Enfin, deux racines seront réelles et les deux autres imaginaires, si la dernière condition n'est point satisfaite (*)

Cinquième degré. Soit la proposée $x^5+px^3+qx^2+rx+s=0$. Sa réciproque sera $x^5+\frac{r}{s}x^4+\frac{q}{s}x^3+\frac{p}{s}x^2+\frac{1}{s}=0$, ou, pour abréger, $x^5+r'x^4+q'x^3+p'x^2+s'=X=0$.

---

et l'on voit facilement alors qu'elle ne saurait être satisfaite qu'autant que la première sera remplie, puisqu'autrement la somme de deux quantités positives devrait être négative.

On pourrait également mettre cette seconde condition sous la forme

$$(2c^3-9bcd+27ad^2)^2-4(c^2-3bd)^3<0\ ;$$

et on en conclurait que la première de Lagrange peut être remplacée par celle-ci

$$c^2-3bd>0\ .$$

J. D. G.

(*) En prenant l'équation $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, et posant, pour abréger,

$$bc-6ad=A\ ,\ 3b^2-8ac=B\ ,\ bd-16ae=C\ ,\ 3d^2-8ce=D\ ,\ cd-6be=E\ ;$$

la dernière condition devient

$$(C^2-BD)^2-4(AD-CE)(BE-CA)>0\ ;$$

et la première $C>0$.

D'après la méthode de de Gua, exposée plus haut, $X=0$ aura toutes ses racines réelles, si $X'=0$ a toutes ses racines réelles, et si, en même temps, $Z=0$, résultat de l'élimination de x, entre $X'=0$ et $XX''=z$, n'a que des permanences.

On a d'abord $5x^4+4r'x^3+3q'x^2+2p'x=0$, qui donne $x=0$ et

$$5x^3+4r'x^2+3q'x+2p'=X',$$

$$20x^3+12r'x^2+6q'x+2p'=X''.$$

D'après cela, $XX''=z$ devient, en divisant X'' par 2,

$$(10x^3+6r'x^2+3q'x+p')(x^5+r'x^4+q'x^3+p'x^2+s')=z. \qquad (1)$$

La racine $x=0$ étant mise dans (1) donne d'abord cette première valeur de z, savoir $z=p's'$ ou $z-p's'=0$.

Si ensuite on substitue dans (1), autant de fois qu'on le pourra, pour x^3 sa valeur tirée de $X'=0$; en posant, pour abréger,

$$A=3680q'r'^4-512r'^6-4400p'r'^3-7050q'^2r'^2+12625p'q'r'$$
$$-6250r's'+2250q'^3-5625p'^2;$$

$$B=2400q'^2r'^3-385q'r'^5-4700p'q'r'^2-3375q'^3r+7125p'q'^2$$
$$+320p'r'^4+2250p'^2r'-9375q's';$$

$$C=1600p'q'r'^3-256p'r'^5-2000p'^2r'^2-2250p'q'^2r'+3750p'^2q'-9375p's';$$

on aura

$$Ax^2+Bx+C=-5^{-5}z=0; \qquad (2)$$

éliminant enfin x entre (2) et $X'=0$, et posant, pour abréger,

$a=5^{-6}B-4.5^{-5}r'A$; $b=4r'AC-5BC-2p'A^2$;

$c=5B^2-4r'AB-5AC-3q'A^2$; $d=5^{-6}A$;

$a'=2.5^{-5}cd-Aa^2-Bad-Cd^2$; $b'=5^{-5}c^2-2Aab-Bac-Bbd-2Ccd$;

$c'=-Ab^2-Bbc-Cc^2=c'$;

il vient

$$5^{-5}d^2z^3+a'z^2+b'z+c'=0 \; ; \qquad (3)$$

Réunissant le facteur $z-p's'$, trouvé plus haut, à l'équation (3), on a enfin, pour l'équation $Z=0$,

$$(z-p's')(5^{-5}d^2z^3+a'z^2+b'z+c')=0 \; ,$$

Pour que la proposée ait toutes ses racines réelles, il faudra

1.° Que $Z=0$ n'ait que des permanences, c'est-à-dire qu'on devra avoir, à la fois,

$$a'>0 \; , \quad b'>0 \; , \quad c'>0 \; , \quad p's'<0 \; ;$$

2.° Qu'en outre $X'=0$ ait toutes ses racines réelles ; ce qui exige qu'on ait

$$25.27p'^2+4p'r'(32r'^2-135q')+9q'^2(15q'-4r'^2)<0 \; .$$

La proposée n'aura que trois racines réelles dans deux cas ; savoir d'abord si, $X'=0$ ayant toutes ses racines réelles, $Z=0$ a une variation ; ensuite, si $X'=0$ ayant deux racines imaginaires, $Z=0$ n'a point de variations ou en a deux seulement.

Enfin, la proposée aura quatre racines imaginaires dans deux cas, savoir d'abord si, $X'=0$ ayant ses trois racines réelles, $Z=0$ a deux variations ; ensuite, si, $X'=0$ ayant deux racines imaginaires, $Z=0$ a une ou trois variations.

Pour comprendre ce qui vient d'être dit, relativement aux cas de deux ou de quatre racines imaginaires dans la proposée, il faut faire attention qne nous l'avons délivrée de son pénultième terme, pour faciliter l'élimination, et, en même temps, pour que la courbe $X=y$ aie toujours quatre sommets ou deux, et jamais aucun. Si l'on donne à l'axe des x toutes les positions dont il est susceptible, on se rendra facilement compte des conditions que nous avons assignées pour les trois cas de o, 2, 4 racines imaginaires.

On voit, au reste, que les conditions de réalité de toutes les racines sont ici au nombre de 5 ou m; et non pas au nombre de $m.\frac{m-1}{2}$ ou 10, comme l'a trouvé Lagrange, dans l'ouvrage déjà cité (note III) (*). Il est même à présumer, par ce qui a lieu pour le 3.me degré, que ce nombre de 5 peut encore être réduit.

Degrés supérieurs au cinquième. Les équations $X'=0$, $Z=0$, qui nous ont servi pour le 5.me degré, ne suffisent plus pour tous les cas au-delà de ce degré. Mais, avant d'aller plus loin, fixons bien les idées sur la signification de nos diverses équations.

$X'=0$ donne les abscisses des sommets de la courbe $X=y$: $Y=0$ résultat de l'élimination de x entre ces deux-là donne les ordonnées de ces mêmes sommets; ses racines réelles positives ou ses variations indiquant les sommets en dessus de l'axe des x, et les négatives ou les permanences indiquant les sommets en dessous du même axe. L'auxiliaire $Z=0$, résultat de l'élimination de x entre $X'=0$ et $XX''=z$, fait connaître, par ses racines réelles positives ou par ses variations, le nombre des sommets convexes vers l'axe des x, et par ses racines négatives ou par ses permanences, le

(*) Mais, encore un coup, Lagrange ajoute, à la fin de la même note: *Il est possible que quelques-unes de ces conditions se trouvent renfermées dans le système des autres, ce qui en diminuerait le nombre, comme nous l'avons vu pour le quatrième degré.*

J. D. G.

nombre

nombre des sommets concaves vers le même axe ; enfin ; chaque variation vraie, ou chaque sommet convexe, répond à un couple de racines imaginaires dans $X=0$.

Lorsqu'on demande le nombre des racines imaginaires de $X=0$, du degré m, on est censé savoir déterminer le nombre de celles d'une équation d'un degré inférieur. La courbe $X=y$ a un nombre $m-1$, $m-2$, $m-3$,...... de sommets réels, suivant que $X'=0$ a 0, 2, 4,..... racines imaginaires.

La courbe $X=y$ a des formes diverses, qu'on peut classer par le nombre des sommets apparens. Ainsi, pour le 4.me degré, il y a deux formes possibles : la première qui offre trois sommets, et la seconde qui n'en offre qu'un seul. Dans toutes deux, l'axe peut être placé de manière à laisser un sommet en dessus, en sorte que $Y=0$ a une variation dans les deux cas ; mais, dans le premier, l'axe coupant les quatre branches, il en résulte quatre racines réelles ; tandis que, dans le second, l'axe ne rencontrant aucune branche, les quatre racines sont imaginaires. Voilà donc un cas douteux, dont l'incertitude ne saurait être levée par l'équation $Y=0$: c'est le cas de l'équation de M. Servois ; mais on voit en même temps que le doute est levé par la dérivée $X'=0$; car, suivant que celle-ci *aura* ou *n'aura pas* ses trois racines réelles, la proposée aura *zéro* ou *quatre* racines imaginaires.

Dans le cinquième degré, la courbe a 4, 2 ou 0 sommets. Le cas de quatre sommets se subdivise en deux, dont l'un présente deux sommets concaves en dessus et deux en dessous, tandis que l'autre offre deux sommets, l'un concave et l'autre convexe, tant en dessus qu'en dessous. Ce dernier cas est celui de l'équation de M. Tédenat ; $Y=0$ a deux variations et deux permanences, et $X'=0$ a toutes ses racines réelles ; de sorte qu'on ne sait si $X=0$ doit avoir 0 ou 4 racines imaginaires. Pour lever le doute, il faut recourir à $Z=0$. La proposée aura *cinq* ou *une* racines réelles, suivant que $Z=0$ aura 4 ou 2 permanences. C'est ce qu'on vérifie facilement sur l'équation de M. Tédenat, pour laquelle on trouve deux valeurs positives et deux valeurs négatives de z.

Première méthode générale. A mesure que le degré de l'équation s'élève, le nombre des cas douteux s'accroît aussi. J'ai trouvé, par voie d'induction, que les seuls cas certains sont ceux qui répondent à 0, 1, $m-2$, $m-1$ variations de $Y=0$, pour les degrés impairs, et à 0, $m-2$, $m-1$ variations, pour les degrés pairs; en sorte qu'il n'y a que quatre cas certains dans les degrés impairs, et trois seulement dans les degrés pairs. Dans ces cas, le théorème contesté (*) donnera, avec certitude le nombre cherché des racines imaginaires : dans les autres, il faudra lever le doute, en consultant les équations $X'=0$, $Z=0$. Il est même quelque cas douteux où ces deux équations ne suffiront pas.

Deuxième méthode. Si l'on connaissait le nombre R_p des racines réelles positives de $Z=0$, ce serait aussi le nombre des sommets convexes de la courbe, dont chacun indique deux racines imaginaires dans $X=0$. Donc, en appelant I le nombre des racines imaginaires de $X=0$, I' celui des imaginaires de $X'=0$, lequel est le même pour $Z=0$, on aurait la relation $I=I'+2R_p$. Ce principe a aussi été employé par M. Cauchy (*Journ. de l'école polytech.*, cahier XVII, pag. 462).

La question est donc ramenée à celle-ci : étant donné une équation $Z=0$, dont on connaît le nombre I des racines imaginaires; trouver le nombre R_p de ses racines réelles positives ?

J'ai donné une solution de ce problème préliminaire dans mon ouvrage (*Méthodes nouvelles*, etc., pag. 71). Les calculs en sont

---

(*) Personne n'a jamais prétendu contester la vérité du théorème de M. Bérard, pour des cas particuliers. Ce que MM. Tédenat et Servois ont fait un peu plus que de *contester*, c'est l'universalité que, dans son ouvrage, M. Bérard avait cru devoir attribuer à ce théorème.

J. D. G.

prolixes; mai j'ai trouvé (pag. 65) un théorème qui fournit une solution très-simple pour les douze premiers degrés.

Remarquons d'abord qu'un facteur imaginaire du 2.me degré $z^2 \pm 2\alpha z + (\alpha^2 + \beta^2)$ multipliant un polynome réel P; le produit Z ne peut acquérir que deux variations ou deux permanences de plus que n'en avait P, et jamais une variation et une permanence. Ainsi, par exemple, dans une équation du 3.me degré, il y a toujours ou trois variations ou trois permanences, ou deux variations et une permanence, ou enfin une variation et deux permanences; or, dans le 3.me cas, c'est la permanence qui indique la racine réelle, tandis que les variations répondent aux racines imaginaires : dans le 4.me cas c'est l'inverse.

En combinant ce lemme avec la règle de Descartes, on peut assigner le nombre Rp des racines réelles positives de $Z=0$, et celui des négatives; à l'exception de certains cas douteux, pour lesquels il faut recourir au théorème suivant.

Lorsque, dans une équation

$$z^n + Az^{n-1} + Bz^{n-2} + Cz^{n-3} + \ldots\ldots = 0,$$

on connaît le nombre I des racines imaginaires, s'il arrive que, par la règle de Descartes, combinée avec le lemme précédent, on ne puisse discerner complètement le nombre des racines réelles positives et celui des négatives, en sorte qu'il en reste deux douteuses, qui soient toujours de mêmes signes, alors ces racines douteuses seront toutes deux *négatives* ou toutes deux *positives*, suivant que la fonction

$$(n-1)^2 A^3 - n(3n-4)AB + 3n^2 C \qquad \text{(F)}$$

sera positive ou négative.

Soit, par exemple, l'équation

$$z^7+4z^6+5z^5-4z^4-13z^3-4z^2+7z+4=0\,,$$

qui revient à

$$(z-1)^2(z+1)^3(z^2+3z+4)=0\,,$$

et dans laquelle nous supposons qu'on ait reconnu deux racines imaginaires. Comme elle a deux variations et cinq permanences, nous en conclurons, par le précédent lemme, qu'elle doit avoir au moins trois racines réelles négatives; mais que, si elle en a davantage, elles doivent être alors au nombre de cinq; cette équation a donc deux racines réelles de même signe, douteuses par rapport à leur signe commun, parce que le facteur imaginaire du second degré a pu également introduire ou deux variations ou deux permanences; mais le doute est complètement levé par l'inspection du signe de (F) qui, dans cet exemple, vaut -664, ce qui indique deux racines positives. La proposée, outre ses deux racines imaginaires, a donc trois racines réelles négatives et deux positives, comme on le voit d'ailleurs par sa seconde forme.

Revenons présentement au problème principal. Ayant trouvé, comme nous venons de le faire, le nombre R_p des racines positives de $Z=0$, on aura le nombre I des racines imaginaires de $X=0$, par l'équation $I=I'+2R_p$. Ainsi, dans l'exemple précédent, on a $I=2+2.2=6$.

Au surplus, rien ne sera plus facile que de construire, pour chaque degré, une table des valeurs de I qui répondent aux diverses valeurs de I' et du nombre v des variations de $Z=0$. Nous avons construit, pour les douze premiers degrés, une semblable table, qui ne nous a coûté que quelques heures de travail, et que nous plaçons à la suite de ce mémoire. Les cases blanches se rapportent aux cas impossibles; et celles qui renferment deux nombres se rapportent aux cas douteux, et pour lesquels on prend le plus petit ou le plus grand des deux nombres, suivant que (F) est positif ou négatif. On trouve une seule case qui renferme trois nombres ; et c'est dans le 12.me degré. Ce cas échappe donc à la méthode, puisqu'alors le signe de (F) ne suffit plus pour lever le doute. Il est à croire que le nombre de ces cas se multiplierait, à mesure que le degré de l'équation s'élèverait, et c'est pour cela que nous nous sommes arrêtés au 12.me.

Pour donner une idée de la manière de construire cette table, prenons le cas particulier ou $m=7$. On tracera au crayon, ou, mieux encore, on formera, avec un fil métallique flexible, la courbe $X=y$, en lui donnant successivement tous les aspects qu'elle peut avoir; alors,

1.° Pour le cas où les six sommets sont apparens, c'est-à-dire, où $I'=0$, on placera un axe mobile de manière à produire successivement 0, 1, 2, 3 sommets convexes; et l'on reconnaîtra que les valeurs correspondantes de I sont 0, 2, 4, 6.

2.° On fera ensuite $I'=2$; c'est-à-dire qu'on ne laissera à la courbe que quatre sommets seulement; on donnera à l'axe mobile toutes les situations dont il pourra être susceptible; et on se rappellera que chaque sommet convexe, ou chaque variation de $Z=0$, vaut deux imaginaires dans $X=0$, et que le nombre des intersections de l'axe avec la courbe étant retranché de 7 donne I. Ainsi, quand l'axe coupe toutes les cinq branches, on a $V=0$, $I=2+2.0=2$; ou bien on a cinq intersections, et $I=7-5=2$. Quand $V=1$; c'est-à-dire, lorsqu'on n'a qu'un sommet convexe, on a $I=2+2=4$. Quand $V=2$, on a deux sommets convexes réels ou aucun; parce que les deux variations peuvent être imaginaires; et on a $I=2$ ou 6; ce qui forme un cas douteux; et voilà pourquoi la case relative à ce cas contient ces deux nombres. On fait ensuite $V=3$; c'est-à-dire qu'on présente à l'axe un seul sommet convexe; parce que deux variations sont nécessairement imaginaires; attendu que la courbe n'en peut plus offrir que deux au plus; on a donc $I=4$. Enfin, pour $V=4$, on a nécessairement $2V$ imaginaire, ce qui donne $I=6$.

3.° On fait $I'=4$; c'est-à-dire que la courbe n'a plus que deux sommets apparens ; et l'on discute les différentes positions de l'axe comme nous venons de le faire.

4.° Enfin, on fait $I'=6$; c'est-à-dire que la courbe n'a plus de sommets ; et l'on raisonne comme dans les cas précédens.

Voyons donc, en résumé, ce qu'il y aura à faire pour déterminer le nombre des racines imaginaires d'une équation, du moins jusqu'au douzième degré. La proposée étant $X=0$, on écrira ses dérivées $X'=0$, $X''=0$, $X'''=0$,...... en s'arrêtant à celle qui sera du 5.me degré seulement. On formera les auxiliaires $Z=0$, $Z'=0$, $Z''=0$; en éliminant successivement x entre $X'=0$ et $XX''=z$, entre $X''=0$ et $X'X'''=z'$, entre $X'''=0$ et $X''X''''=z''$,......... la dernière de ces auxiliaires sera également du 5.me degré.

I étant le nombre des imaginaires de $X=0$, et I', I'', I''',..... celui des dérivées, ainsi que des auxiliaires, on opérera comme il suit :

Supposons, pour fixer les idées, que la proposée soit du 8.me degré. On déterminera, par les formules rapportées (*Prob. II*), le nombre I''' des racines imaginaires de la dérivée $X'''=0$ et de l'auxiliaire $Z'''=0$, lesquelles ne seront que du 5.me degré. Par le moyen de I''' et du nombre v'' des variations de $Z''=0$; on déterminera I'', nombre des imaginaires de la dérivée $X''=0$ et de l'auxiliaire $Z''=0$. Par le moyen de I'' et du nombre v' des variations de $Z'=0$, on déterminera I', nombre des imaginaires de la dérivée $X'=0$, et de l'auxiliaire $Z'=0$. Enfin, par le moyen de I' et du nombre v des variations de $Z=0$, on déterminera le nombre des imaginaires de la proposée. Dans toutes ces recherches, la table dont il vient d'être question ci-dessus sera d'un très-utile secours.

Au reste, il arrivera des cas où la méthode sera en défaut : ce sont ceux où, Z devenant *zéro*, les signes de $Z=0$ ne peuvent plus fournir de solution. Ces cas arriveront lorsque quelques-unes des racines des auxiliaires deviennent nulles ou égales. Par exemple, si la proposée était $x^6+1=0$, on aurait $6x^5=X'$, et $30x^4=X''$; d'où $XX''=x^{10}+x^4=z$. Eliminant x entre cette dernière et $6x^5=0$, on aura simplement $z=0$.

On élude la difficulté en multipliant la proposée par un facteur connu qui complète ses termes, et alors la méthode devient applicable. Au reste, la première méthode n'est point en défaut dans cet exemple.

M. Cauchy emploie deux espèces d'auxiliaires, qui ont une signification différente des miennes : leur nombre est $2(m-1)$; ainsi, pour $m=8$, ce nombre est 14 ; tandis que, pour la même valeur de m, il ne m'en faut que 3 seulement. En second lieu, les racines égales ou nulles mettent la méthode de M. Cauchy plus souvent en défaut que celle-ci ; et il faut alors recourir à des artifices de calcul très-embarrassans, et beaucoup plus pénibles que ceux qui suffisent à la nôtre (*). Nous pensons donc que ceux qui prendront la peine de comparer les deux méthodes n'hésiteront point à trouver celle-ci plus simple et moins laborieuse.

Au reste, il ne faut pas se dissimuler que la méthode de M. Cauchy, et même la mienne, sont plus précieuses en théorie qu'en pratique (**). Les calculs deviennent tout-à-fait rebutans, quand

(*) D'accord. Mais la méthode de M. Cauchy conduit à des formules générales pour des équations littérales, tandis que celle-ci ne saurait guère s'appliquer, telle qu'elle est, qu'à des équations numériques. Mais la méthode de M. Cauchy conduit au but, dans tous les cas ; tandis que celle-ci, en la supposant même inattaquable, sous le point de vue théorique, se trouve en défaut dès le 12.me degré.

J. D. G.

(**) En ce cas, ce n'est point la peine de chercher querelle à la méthode de M. Cauchy, et de lui reprocher la prolixité des calculs qu'elle exige. Dès qu'en effet il ne s'agit que de théorie, c'est là un objet de peu d'importance ; et c'est alors la considération de la généralité et de la pureté des principes qui doit régler les rangs entre les méthodes. Or, s'il en est ainsi, nous ne le degré est un peu élevé. Le moyen qui est alors le plus expéditif consiste à tracer la courbe $X=y$. Il peut se faire, à la vérité, que même le tracé de cette courbe laisse incertain si deux racines sont imaginaires ou seulement réelles et très-voisines ; mais, dans ces circonstances, assez rares d'ailleurs, on peut facilement lever l'incertitude, par la méthode que j'ai donnée pour l'approximation des racines réelles des équations numériques (*Méthodes nouvelles*, etc., chapitre III).

CONCLUSION.

1.° J'ai fait voir qu'une formule déduite de principes exacts, d'après une figure géométrique, peut, lorsque la figure change, par le changement des données, se trouver en défaut, et donner lieu à des cas douteux ; et qu'alors il n'est pas exact de dire que la formule est fausse (*). A cette occasion, j'ai rectifié le sens de la formule $c\text{Sin}.a'=c'\text{Sin}.a$ (**).

2.° En rapportant les conditions connues de la réalité des racines

voyons rien de préférable pour la détermination du nombre des racines imaginaires des équations numériques, que le recours à l'équation dont les racines sont les quarrés des différences des siennes prises deux à deux.

J. D. G.

(*) C'est aussi la doctrine que nous avons professée au commencement de cet article. Pour les points singuliers des courbes, par exemple, la formule $\frac{dy}{dx}$ est en défaut, parce qu'elle se tait ; mais, par cela même qu'elle se tait, on ne saurait dire qu'elle soit fausse dans ce cas. Il n'en est pas de même du théorème de M. Bérard ; son tort à lui est de parler dans les cas même où il devrait se taire, et de tromper ainsi ceux qui l'interrogent.

J. D. G.

(**) Nous croyons avoir prouvé que cette formule n'a pas besoin de rectification, et qu'elle est toujours parfaitement exacte.

J. D. G.

pour

pour les 2.^{me}, 3.^{me}, 4.^{me} degrés, j'ai relevé la méprise de l'illustre Lagrange, relative au 3.^{me} degré (*).

3.° J'ai donné, pour le 5.^{me} degré, des conditions analogues à celles que l'on connaissait déjà pour les trois précédens. Ces conditions ne se sont trouvées qu'au nombre de *cinq*, et non au nombre de *dix*, comme l'avait cru Lagrange (**). Ces formules me paraissent préférables à tout ce que l'on connaissait (***).

4.° J'ai donné, pour les degrés de 6 à 12, deux méthodes. Par la première, j'emploie, comme moyen principal, l'auxiliaire $Y=0$,

---

(*) C'est pour la troisième fois que M. Bérard revient là-dessus; et l'on serait presque tenté d'en inférer que c'est là la partie de son mémoire à laquelle il attache le plus d'importance.

On a vu plus haut à quoi se réduit cette grave méprise, et quelles peuvent en être les dangereuses conséquences. Certainement la plupart de ceux qui ont lu la *Résolution des équations numériques*, ont remarqué cette méprise tout aussi bien que M. Bérard; car tous savent aussi bien que lui qu'une seule condition est nécessaire pour la réalité des racines d'une équation du 3.^{me} degré, comme, en particulier, maints endroits de ce recueil pourraient en faire foi; mais loin de songer à se prévaloir d'une distraction, très-innocente d'ailleurs, de la part d'un homme si digne de leur respect, à l'exemple des pieux et pudiques enfans de Noë, ils se sont empressés, au contraire, de détourner leurs yeux. Que si pourtant quelqu'un d'entre eux avait pu croire que, dans l'intérêt de la science, il pouvait être bon de signaler cette petite inadvertance, il l'aurait fait sans ostentation, et se serait bien gardé sur-tout d'attendre une telle conjoncture pour accoler l'épithète d'*illustre* au nom du grand homme dont ils auraient eu à relever la faute.

J. D. G.

(**) Non, encore un coup, Lagrange n'a point cru cela; il a dit formellement, au contraire, que sans doute ces conditions devaient être en moindre nombre.

J. D. G.

(***) D'accord; mais qui répondra que M. Bérard n'a pas commis ici une méprise pareille à celle de *l'illustre Lagrange*, et que ces cinq conditions sont toutes nécessaires? Sa méprise porterait alors sur tous les degrés, puisqu'il les ramène tous au cinquième.

J. D. G.

dans trois ou quatre cas favorables de chaque degré. Mon théorème contesté fournit pour ces cas la solution la plus simple qu'on puisse espérer. Dans les autres, il y a du doute entre deux combinaisons; mais le doute peut être levé par des moyens que j'indique.

Dans la deuxième méthode, j'emploie un nombre $m-5$ d'auxiliaires, et une table dont l'usage est très-facile, ainsi qu'un théorème nouveau sur les signes des racines réelles. Cette seconde méthode méritera, je pense, l'attention des géomètres; et je remercie MM. Tédenat et Servois de m'avoir provoqué à de nouveaux efforts par leur judicieuse critique (*).

Ce mémoire aurait exigé plusieurs figures pour en faciliter l'intelligence, et en rendre l'exposé plus clair; mais les géomètres sauront les suppléer. Un reproche plus fondé sera celui de n'avoir pas suffisamment approfondi certains points et démontré certains autres (**). Mais je prie le lecteur de considérer que ce sont plutôt des vues que je propose qu'un traité que je prétends faire. Si elles sont jugées utiles, je n'aurai pas perdu ma peine, et les développemens deviendront faciles (***).

(*) Qu'est-ce pourtant qu'une méthode qui, de l'aveu même de l'auteur, est peu près inexécutable dans la pratique; et qui, de son aveu aussi, échoue en théorie dès le 12.me degré.

J. D. G.

(**) C'est là, à ce qu'il paraît, un péché d'habitude chez M. Bérard; il voit pourtant combien sont graves les désagrémens qu'il entraîne.

J. D. G.

(***) A la bonne heure. Si M. Bérard parlait toujours sur ce ton, son mérite, que personne ne lui conteste, paraîtrait dans un jour beaucoup plus brillant. On peut dire du talent ce qu'on a dit de l'esprit : *celui qu'on veut montrer fait tort à celui qu'on a*; et, d'ordinaire, les autres nous refusent des louanges, même méritées, en proportion de la part que nous nous en faisons nous-mêmes.

J. D. G.

	$m=6$			$m=7$				$m=8$			
$v=$	0	2	4	0	2	4	6	0	2	4	6
$V=$ 0	0	2	4	0	2	4	6	0	2	4	6
1	2	4	6	2	4	6		2	4	6	8
2	4	2,6	4	4	2,6	4	6	4	2,6	4,8	6
3	6	4	6	6	4	6		6	4,8	6	8
4		6	4		6	4	6	8	6	4,8	6
5			6			6			8	6	8
6							6			8	6
7											8

	$m=9$					$m=10$				
$v=$	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
$V=$ 0	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
1	2	4	6	8		2	4	6	8	10
2	4	2,6	4,8	6	8	4	2,6	4,8	6,10	8
3	6	4,8	6	8		6	4,8	6,10	8	10
4	8	6	4,8	6	8	8	6,10	4,8	6,10	8
5		8	6	8		10	8	6,10	8	10
6			8	6	8		10	8	6,10	8
7				8				10	8	10
8					8				10	8
9										10

	$m=11$						$m=12$					
$I=$	0	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10
$V=$ 0	0	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10
1	2	4	6	8	10		2	4	6	8	10	12
2	4	2,6	4,8	6,10	8	10	4	2,6	4,8	6,10	8,12	10
3	6	4,8	6,10	8	10		6	4,8	6,10	8,12	10	12
4	8	6,10	4,8	6,10	8	10	8	6,10	4,8,12	6,10	8,12	10
5	10	8	6,10	8	10		10	8,12	6,10	8,12	10	12
6		10	8	6,10	8	10	12	10	8,12	6,10	8,12	10
7			10	8	10			12	10	8,12	10	12
8				10	8	10			12	10	8,12	10
9					10					12	10	12
10						10					12	10
11												12

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème d'Analise algébrique.

ASSIGNER le nombre des conditions strictement nécessaires et suffisantes pour qu'une équation de degré quelconque ait toutes ses racines réelles ?

ANALISE TRANSCENDANTE.

Recherche des formules propres à intégrer, par approximation, entre deux limites données quelconques, toute fonction différentielle d'une seule variable ;

Par M. le professeur Kramp, correspondant de l'académie royale des sciences, doyen de la faculté des sciences de Strasbourg, Chevalier de l'Ordre royal de la Légion d'honneur.

(*Troisième Mémoire.*)

1. Dans un mémoire inséré à la page 372 du VI.e volume du présent recueil, j'ai donné douze différentes formules au moyen desquelles on peut intégrer, avec une approximation plus ou moins parfaite, entre deux limites données quelconques, toute fonction differentielle d'une seule variable. Je me propose de reprendre ici le calcul de ces formules, pour le présenter sous une forme qui me semble préférable ; et pour les soumettre ainsi à une verification qui leur imprime une sanction nouvelle, si elles sont exactes, et qui, dans le cas contraire, en fasse disparaître soit les fautes d'impression qui auraient pu s'y glisser, soit même les erreurs de calcul que l'on a soupçonné s'être introduites dans quelques-unes d'entre elles. Si j'avais besoin, au surplus, de me justifier, de

revenir de nouveau sur un sujet qui, aux yeux de quelques lecteurs, pourrait paraître déjà épuisé; je trouverais mon excuse dans l'importance des formules dont il s'agit; importance qui me paraît suffisamment établie par les applications qui déjà en ont été faites.

2. Soit ydx une fonction différentielle explicite de x; dans laquelle on suppose y donnée en x, par une équation de la forme

$$y=\psi x\ ;$$

ψ désignant une fonction d'une forme connue et déterminée quelconque; et proposons-nous d'obtenir une valeur approximative de l'intégrale $\int ydx$, entre deux limites données quelconques.

3. Considérons y comme l'ordonnée d'une courbe dont x est l'abscisse, et dont la nature est conséquemment déterminée par l'équation ci-dessus; la question proposée se réduira évidemment à quarrer l'espace mixtiligne compris entre la courbe, l'axe des x et les ordonnées qui répondent aux deux abscisses données pour limites de l'intégrale.

4. On peut toujours faire coïncider l'axe des y avec la première de ces deux ordonnées, et prendre, en outre, pour unité, la portion de l'axe des x qui la sépare de l'autre. On réduit ainsi le problème à déterminer l'intégrale $\int ydx$ entre les limites *zéro* et *un*.

5. Soit divisée la portion de l'axe des x comprise entre les ordonnées extrêmes en un nombre arbitraire n de parties égales, lequel devra être d'autant plus grand qu'on aspirera à une plus grande précision dans les résultats. Soit posé

$$a=\psi 0\ ,\ b=\psi\frac{1}{n}\ ,\ c=\psi\frac{2}{n}\ ,\ldots\ldots p=\psi\frac{n-1}{n}\ ,\ q=\psi 1\ ;$$

a, b, c, ... p, q seront ainsi les ordonnées des points de division de l'axe des x, et pourront être déterminés au moyen de l'équation de la courbe. Si nous imaginons une courbe parabolique passant par les extrémités supérieures de ces ordonnées, cette courbe différera d'autant moins de la courbe dont il s'agit que le nombre n des divisions de l'axe des x, de *zéro* à *un*, aura été pris plus grand; d'où il suit que, dans la recherche approximative de $\int y\mathrm{d}x$, il pourra être permis de substituer cette courbe à la courbe proposée. Alors l'intégrale cherchée ne dépendra uniquement que des quantités a, b, c, ...p, q, et du nombre n choisi pour nombre des divisions de la portion de l'axe des x prise pour unité.

6. On voit par là que, pour résoudre le problème, il n'est pas même nécessaire de connaître la relation générale qui lie y à x; et qu'il suffit seulement de connaître les valeurs de la première de ces variables qui répondent à des valeurs de la seconde croissant en progression arithmétique; et ce n'est point là un des moindres avantages de nos formules, qui peuvent ainsi être appliquées à des recherches d'expérience et d'observation où très-souvent la nature de la dépendance générale entre les deux variables est tout-à-fait inconnue.

7. Soient posés

$$\Delta a = b - a\,;$$

$$2!\Delta^2 a = c - 2b + a\,;$$

$$3!\Delta^3 a = d - 3c + 3b - a\,;$$

$$4!\Delta^4 a = e - 4d + 6c - 4b + a\,;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$m!$ étant, comme à l'ordinaire, le symbole de $1.2.3.....m$. Si, pour un moment, nous prenons pour unité l'intervalle constant entre deux ordonnées consécutives, nous aurons, comme l'on sait, pour l'équation de la courbe parabolique,

$$y=a+x\Delta a+x(x-1)\Delta^2 a+x(x-1)(x-2)\Delta^3 a+x(x-1)(x-2)(x-3)\Delta^4 a+\ldots;$$

de sorte qu'il s'agira d'intégrer

$$y\mathrm{d}x=a\mathrm{d}x+x\mathrm{d}x.\Delta a+x(x-1)\mathrm{d}x.\Delta^2 a+x(x-1)(x-2)\mathrm{d}x.\Delta^3 a+\ldots.$$

depuis o jusqu'à n.

8. Procédant donc à l'intégration ; et observant que l'intégrale doit s'évanouir en même temps que x, il viendra

$$\begin{aligned}\int y\mathrm{d}x=a.x&\\ +\Delta a.\frac{x^2}{2}&\\ +\Delta^2 a\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)&\\ +\Delta^3 a\ \frac{x^4}{4}-\frac{3x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}\Big)&\\ +\Delta^4 a\left(\frac{x^5}{5}-\frac{6x^4}{4}+\frac{11x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}\right)&\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\end{aligned}$$

résultat dans lequel il faudra supposer ensuite $x=n$.

9. Mais il est clair qu'en rendant n fois plus grand l'intervalle entre les ordonnées consécutives, on a aussi rendu n fois plus grande l'aire de la courbe à quarrer, c'est-à-dire, l'intégrale demandée ; d'où il suit que la véritable valeur de cette intégrale n'est que la n.me partie de celle que nous venons de lui assigner ; c'est-à-dire qu'elle est égale à cette intégrale divisée par x, et prise ensuite jusqu'à $x=n$. En posant donc, pour abréger,

$$A=\frac{1}{2}\,;$$

$$B=\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\,;$$

$$C=\frac{x^2}{4}-\frac{3x}{3}+\frac{2}{2}\,,$$

$$D=\frac{x^3}{5}-\frac{6x^2}{4}+\frac{11x}{3}-\frac{6}{2}\,;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,;$$

valeurs dans lesquelles il faudra supposer $x=n$, on aura

$$\int y\,\mathrm{d}x=x\left(\frac{a}{x}+A.\Delta a+B.\Delta^2 a+C.\Delta^3 a+D.\Delta^4 a+\ldots\ldots\right).$$

10. Si, dans cette dernière formule, on remet pour Δa, $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$, $\Delta^4 a$, ... leurs valeurs (7) en a, b, c, d, ..., en se rappelant que $x=n$, on pourra l'écrire sous cette forme

$$\begin{aligned}\frac{\int y\,\mathrm{d}x}{n}=&\left(\frac{1}{n}-\frac{A}{1}+\frac{B}{2}-\frac{C}{3!}+\frac{D}{4!}-\ldots\ldots\pm\frac{P}{n!}\right)a\\
&+\frac{1}{1}\left(A+\frac{B}{1}+\frac{C}{2}-\frac{D}{3!}+\ldots\mp\frac{P}{(n-1)!}\right)b\\
&+\frac{1}{2}\left(B-\frac{C}{1}+\frac{D}{2}-\ldots\pm\frac{P}{(n-2)!}\right)c\\
&\mp\frac{1}{3!}\left(C-\frac{D}{1}+\ldots\mp\frac{P}{(n-3)!}\right)d\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\pm\frac{P}{n!}\,q\,.\end{aligned}$$

11. Il est clair d'ailleurs que les ordonnées également distantes des extrêmes, telles que a et q, b et p, ..., doivent, dans cette formule être affectées du même coefficient, puisqu'en renversant l'aire mixtiligne à quarrer, de telle sorte que sa première ordonnée devienne la dernière, et *vice versâ*, sa surface doit toujours demeurer la même. On pourra donc réduire le calcul des coefficiens a, b, c, ... à la moitié de leur nombre, si ce nombre est pair, et à la moitié plus un, s'il est impair; et alors il conviendra de les calculer dans un ordre rétrograde, attendu que les derniers se présentent sous la forme la plus simple. A la vérité, en procédant ainsi, on se privera du moyen de vérification qui résulterait de l'égalité des coefficiens également distans des extrêmes; mais on en trouvera un autre dans l'égalité de la somme de tous les coefficiens à l'unité. Il est évident, en effet, que, si l'on supposait à la fois $a=1$, $b=1$, $c=1$, ..., l'aire à quarrer devrait, d'une part, être la simple somme de ces coefficiens, et que, d'une autre, elle devrait être égale à l'unité.

12. Le plan général ainsi tracé, il s'agit d'en venir à l'exécution, pour toutes les valeurs de n, depuis *un* jusqu'à *douze* inclusivement. Cherchons d'abord les valeurs de A, B, C, D, ... Il nous faut, pour cela, continuer le tableau commencé ci-dessus (9). Dans ce tableau, la loi des signes, exposans et dénominateurs, est manifeste. Quant à celle des numérateurs numériques, en remontant (7) à l'origine de ces nombres, on voit qu'en général l'un quelconque est égal à celui qui est immédiatement au-dessus; plus, le produit de celui qui est immédiatement à gauche de ce dernier par l'exposant de x dans le premier terme de la ligne que l'on calcule. Ainsi, par exemple, dans la valeur de D, on a $6=3+1.3$, $11=2+3.3$; et ainsi des autres.

13. Rien ne sera donc plus facile que de pousser ce tableau aussi loin qu'on voudra. En le poussant jusqu'à la lette M, et faisant d'abord abstraction des puissances de x et des dénominateurs, on aura

Pour *A*, 1 :

Pour *B*, 1—1 :

Pour *C*, 1—3

+2 :

Pour *D*, 1—6

+11—6 :

Pour *E*, 1—10

+35—50

+24.

Pour *F*, 1—15

+85—225

+274—120.

Pour *G*, 1—21

+175—735

+1624—1764

+720.

Pour *H*, 1—28

+322—1960

+6769—13132

+13068—5040.

Pour *I*, 1—36

+546—4536

+22449—67284

+118124—109584

+40320 ,

Pour K , 1—45

+870—9450

+63273—269325

+723680—1172700

+1026576—362880

Pour L , 1—55

+1320—18150

+157773—902055

+3416930—8409500

+12753576—10628640

+3628800 .

Pour M , 1—66

1925—32670

357423—2637558

13339535—45995730

105258076—150917976

120543840—39916800.

On s'assurera de l'exactitude de ces résultats, en observant que, dans chaque groupe, la somme des nombres positifs et celle des nombres négatifs doivent être égales entre elles, et moitié du dernier nombre nombe du groupe qui le suit immédiatement ; comme il est aisé de se convaincre que cela doit être en effet.

14. Si présentement on retablit les puissances de x et les dénominateurs, en simplifiant autant qu'il se pourra, il viendra

$$A=\frac{1}{2},$$

$$B=\frac{x}{3}-\frac{1}{2},$$

$$C=\frac{x^2}{4}-x+1,$$

$$D=\frac{x^3}{5}-\frac{3x^2}{2}+\frac{11x}{3}-3;$$

$$E=\frac{x^4}{6}-2x^3+\frac{35x^2}{4}-\frac{50x}{3}+12;$$

$$F=\frac{x^5}{7}-\frac{5x^4}{2}+17x^3-\frac{225x^2}{4}+\frac{274x}{3}-60,$$

$$G=\frac{x^6}{8}-3x^5+\frac{175x^4}{6}-147x^3+406x^2-588x+360;$$

$$H=\frac{x^7}{9}-\frac{7x^6}{2}+46x^5-\frac{980x^4}{3}+\frac{6769x^3}{5}-3283x^2+4356x-2520;$$

$$I=\frac{x^8}{10}-4x^7+\frac{273x^6}{4}-648x^5+\frac{7483x^4}{2}-\frac{67284x^3}{5}+29531x^2-36528x+20160;$$

$$K=\frac{x^9}{11}-\frac{9x^8}{2}+\frac{290x^7}{3}-\frac{4725x^6}{4}+9039x^5-\frac{89775x^4}{2}+144736x^3-293175x^2$$
$$+342192x-181440;$$

$$L=\frac{x^{10}}{12}-5x^9+132x^8-\frac{6050x^7}{3}+\frac{157773x^6}{8}-128865x^5+\frac{1708465x^4}{3}$$

$$-1681900x^3+3188394x^2-3542880x+1814400\ ,$$

$$M=\frac{x^{11}}{13}-\frac{11x^{10}}{2}+175x^9-3267x^8+\frac{119141x^7}{3}-\frac{1318779x^6}{4}+\frac{13339535x^5}{7}$$

$$-7665955x^4+\frac{105258076x^3}{5}-37729494x^2+40181280x-19958400.$$

15. En chassant les dénominateurs, ces formules deviennent

$$2A=1\ .$$

$$6B=2x-3\ .$$

$$4C=x^2-4x$$
$$+4\ .$$

$$30D=6x^3-45x^2$$
$$+110x-90\ ;$$

$$12E=2x^4-24x^3$$
$$+105x^2-200x$$
$$+144\ .$$

$$84F=12x^5-210x^4$$
$$+1428x^3-4725x^2$$
$$+7672x-5040\ .$$

$$24G=3x^6-72x^5$$
$$+700x^4-3528x^3$$

$$+9744x^2-14112x$$
$$+8640.$$

$$90H=10x^7-315x^6$$
$$+4140x^5-29400x^4$$
$$+121842x^3-295470x^2$$
$$+392040x-226800.$$

$$20I=2x^8-80x^7$$
$$+1365x^6-12960x^5$$
$$+74830x^4-269136x^3$$
$$+590620x^2-730560x$$
$$+403200.$$

$$132K=12x^9-594x^8$$
$$+12760x^7-155925x^6$$
$$+1193148x^5-5925150x^4$$
$$+19105152x^3-38699100x^2$$
$$+45169344x-23950080.$$

$$24L=2x^{10}-120x^9$$
$$+3168x^8-48400x^7$$
$$+473319x^6-3092760x^5$$
$$+13667720x^4-40365600x^3$$
$$+76521456x^2-85029120x$$
$$+43545600.$$

$$
\begin{aligned}
5460M = 420x^{11} &- 30030x^{10} \\
+ 955500x^{9} &- 1783782 0x^{8} \\
+ 216836620x^{7} &- 1800133335x^{6} \\
+ 10404837300x^{5} &- 41856114300x^{4} \\
+ 114941818992x^{3} &- 206003037240x^{2} \\
+ 219389788800x &- 108972864000 \,.
\end{aligned}
$$

16. Il s'agit présentement de procéder aux substitutions. On a d'abord, quel que soit x,

$$2A = 1 \,.$$

Les valeurs de B sont

Pour $x = 2$,	$6B = 1$,
3;	3;
4,	5;
5;	7,
6,	9,
7,	11;
8,	13;
9,	15;
10,	17,
11;	19;
12;	21;

Les valeurs de C sont

Pour $x=3$,	$4C=1$,
4,	4,
5,	9,
6,	16,
7,	25,
8,	36,
9,	49,
10,	64,
11,	81,
12,	100,

Les valeurs de D sont

Pour $x=4$,	$30D=14$,
5,	85,
6,	246,
7,	533,
8,	982,
9,	1629,
10,	2510,
11,	3661,
12,	5118,

Les valeurs de E sont

Pour $x=5$,	$12E=19$;
6,	132,
7,	459,
8,	1168,
9,	2475,
10,	4644,
11,	7987,
12,	12864,

Les valeurs de F sont

Pour $x=6$;	$84F=492$;
7,	4417,
8,	18128,
9,	53073,
10,	127180,
11,	266297,
12,	505632,

Les valeurs de G sont

Pour $x=7$;	$24G=751$;
8,	7360,
9,	34479,
10,	113920,
11,	304375,
12,	703296,

Les valeurs de H sont

Pour $x=8$,	$90H=15824$,
9,	186543,
10	988600;
11,	3941207,
12,	10732176.

Les valeurs de I sont

Pour $x=9$,	$20I=25713$,
10,	323600;
11;	1901961;
12,	7717824.

Les valeurs de K sont

Pour $x=10$,	$132K=1285360$;
11,	18686327,
12;	121158720.

Les valeurs de L sont

Pour $x=11$,	$24L=2171465$,
12;	33267456.

Enfin, la valeur de M est

Pour $x=12$, $5460M=4716233856$.

17. Nous avons donc présentement tous les élémens nécessaires pour calculer nos diverses formules ; et nous procéderons à leur calcul ainsi qu'il suit.

Pour le diviseur *un* nous avons la formule

$$\frac{\int y\mathrm{d}x}{1}=A(a+b) ;$$

puis donc qu'on a, pour tous les cas, $A=\frac{1}{2}$, nous aurons

$$2\int y\mathrm{d}x=(a+b) . \qquad \text{(I)}$$

Pour le diviseur *deux*, nous avons la formule

$$\frac{\int y\mathrm{d}x}{2}=\frac{B}{2}(a+c)+(A-B)b ;$$

mais, pour le même diviseur, nous avons trouvé

$$A=\tfrac{1}{2}, \qquad B=\tfrac{1}{6} ;$$

en substituant donc, la formule sera

$$\left.\begin{aligned}6\int y\mathrm{d}x&=(a+c)\\&+4b\end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

Pour le diviseur *trois*, nous avons la formule

$$\frac{\int y\mathrm{d}x}{3}=\frac{C}{3!}(a+d)+\tfrac{1}{2}(B-C)(b+c) ;$$

mais, pour le même diviseur, nous avons trouvé

$B=\frac{1}{8}$;

$$B=\tfrac{1}{3}\ ,\qquad C=\tfrac{1}{4}\ ;$$

en substituant donc, la formule sera

$$\left.\begin{aligned}8\int y\mathrm{d}x=&(a+d)\\&+3(b+c)\ ;\end{aligned}\right.\qquad\text{(III)}$$

Pour le diviseur *quatre*, nous avons la formule

$$\frac{\int y\mathrm{d}x}{4}=\frac{D}{4!}\,(a+e)+\frac{1}{3!}(C-D)(b+d)+\frac{1}{2}\left(B-C+\frac{D}{2}\right)c\ ;$$

mais, pour le même diviseur, nous avons trouvé

$$B=\tfrac{5}{6}\ ,\quad C=1\ ,\quad D=\tfrac{7}{15}\ ;$$

en substituant donc, la formule sera

$$\left.\begin{aligned}90\int y\mathrm{d}x=&7(a+e)\\&+32(b+d)\\&+12c\ .\end{aligned}\right.\qquad\text{(IV)}$$

Pour le diviseur *cinq*, on a la formule

$$\begin{aligned}\frac{\int y\mathrm{d}x}{5}=&\frac{E}{5!}\,(a+f)\\&+\frac{1}{4!}(D-E)(b+e)\\&+\frac{1}{3!}\left(C-D+\frac{E}{2}\right)(c+d)\ ;\end{aligned}$$

mais, pour le même diviseur, nous avons trouvé

$$C=\tfrac{9}{4}\ ,\quad D=\tfrac{17}{6}\ ,\quad E=\tfrac{19}{12}\ ;$$

en substituant donc, la formule sera

$$\left.\begin{aligned}288\int y\mathrm{d}x=&19(a+f)\\&+75(b+e)\\&+50(c+d)\end{aligned}\right.\qquad\text{(V)}$$

Pour le diviseur *six*, on a la formule

$$\frac{\int y\,dx}{6} = \frac{F}{6!}(a+g)$$

$$+\frac{1}{5!}(E-F)(b+f)$$

$$+\frac{1}{4!}\left(D-E+\frac{F}{2}\right)(c+e)$$

$$+\frac{1}{3!}\left(C-D+\frac{E}{2}-\frac{F}{3!}\right)d\,;$$

mais, pour le même diviseur, nous avons trouvé

$$C=4\,,\quad D=\tfrac{4}{5}\,,\quad E=11\,,\quad F=\tfrac{41}{7}\,;$$

en substituant donc, la formule sera

$$\begin{aligned} 840\int y\,dx = {} & 41(a+g) \\ & +216(b+f) \\ & +27(c+e) \\ & +272\,d\,. \end{aligned} \qquad \text{(VI)}$$

Pour le diviseur *sept*, nous avons la formule

$$\frac{\int y\,dx}{7} = \frac{G}{7!}(a+h)$$

$$+\frac{1}{6!}(F-G)(b+g)$$

$$+\frac{1}{5!}\left(E-F+\frac{G}{2}\right)(c+f)$$

$$+\frac{1}{4!}\left(D-E+\frac{F}{2}-\frac{G}{3!}\right)(d+e)$$

mais pour le même diviseur, nous avons trouvé

$$D=\tfrac{533}{30}\,,\quad E=\tfrac{153}{4}\,,\quad F=\tfrac{631}{12}\,;\quad G=\tfrac{751}{24}\,;$$

en substituant donc, la formule sera

$$\begin{aligned}17280\textstyle\int y\,\mathrm{d}x = {} & 751(a+h)\\ & +3577(b+g)\\ & +1323(c+f)\\ & +2989(d+e)\,.\ (*)\end{aligned}\qquad \text{(VII)}$$

Pour le diviseur *huit*, nous aurons la formule

$$\begin{aligned}\frac{\int y\,\mathrm{d}x}{8} = {} & \frac{H}{8!}(a+i)\\ & +\frac{1}{7!}(G-H)(b+h)\\ & +\frac{1}{6!}\left(F-G+\frac{H}{2}\right)(c+g)\\ & +\frac{1}{5!}\left(E-F+\frac{G}{2}-\frac{H}{3!}\right)(d+f)\\ & +\frac{1}{4!}\left(D-E+\frac{F}{2}-\frac{G}{3!}+\frac{H}{4!}\right)e\,;\end{aligned}$$

mais, pour le même diviseur, nous avons trouvé

(*) On voit par là que, dans la formule correspondante de la page 376 du tome VI.e de ce recueil, il s'est glissé deux légères fautes. Les minutes que j'ai

$$D=\frac{491}{15}\,,\quad E=\frac{292}{3}\,,\quad F=\frac{4532}{21}\,,\quad G=\frac{928}{3}\,,\quad H=\frac{7911}{45}\,;$$

en substituant donc, la formule sera

$$\begin{aligned}28350\textstyle\int y\,\mathrm{d}x=\;&989(a+i)\\&+5888(b+h)\\&-\;928(c+g)\qquad\qquad\text{(VIII)}\\&+10496(d+f)\\&-4540e\;.\;(^*)\end{aligned}$$

Pour le diviseur *neuf*, nous avons la formule

$$\begin{aligned}\frac{\int y\,\mathrm{d}x}{9}=\;&\frac{1}{9!}(a+k)\\&+\frac{1}{8!}(H-I)(b+i)\\&+\frac{1}{7!}\left(G-H+\frac{I}{2}\right)(c+h)\\&+\frac{1}{6!}\left(F-G+\frac{H}{2}-\frac{I}{3!}\right)(d+g)\\&+\frac{1}{5!}\left(E-F+\frac{G}{2}-\frac{H}{3!}+\frac{I}{4!}\right)(e+f)\;;\end{aligned}$$

mais, pour le même diviseur, nous avons trouvé

$$E=\frac{825}{4}\,,\quad F=\frac{17691}{28}\,,\quad G=\frac{11493}{8}\,,\quad H=\frac{20727}{10}\,,\quad I=\frac{257[illegible]}{20}\,;$$

en substituant donc, la formule sera

---

entre les mains prouvent, au surplus, que ces fautes ne sont que d'impression, ou tout au plus de copie.

(*) On voit qu'ici encore, il s'est glissé une faute d'impression ou de copie dans le coefficient du premier membre de la formule correspondante de la page 376 du volume déjà cité.

$$
\begin{aligned}
89600 \int y\, dx = {} & 2857(a+k) \\
& + 15741(b+i) \\
& + 1080(c+h) \qquad\qquad \text{(IX)} \\
& + 19344(d+g) \\
& + 5778(e+f)
\end{aligned}
$$

Pour le diviseur *dix*, nous avons la formule

$$
\begin{aligned}
\frac{\int y\, dx}{10} = {} & \frac{K}{10!}(a+l) \\
& + \frac{1}{9!}(I-K)(b+k) \\
& + \frac{1}{8!}\left(H-I+\frac{K}{2}\right)(c+i) \\
& + \frac{1}{7!}\left(G-H+\frac{I}{2}-\frac{K}{3!}\right)(d+h) \\
& + \frac{1}{6!}\left(F-G+\frac{H}{2}-\frac{I}{3!}+\frac{K}{4!}\right)(e+g) \\
& + \frac{1}{5!}\left(E-F+\frac{G}{2}-\frac{H}{3!}+\frac{I}{4!}-\frac{K}{5!}\right)f;
\end{aligned}
$$

mais, pour le même diviseur, nous avons trouvé

$E=\frac{1161}{3}$, $F=\frac{31795}{21}$, $G=\frac{14240}{3}$, $H=\frac{98860}{9}$, $I=16180$, $K=\frac{121340}{11}$;

en subtituant donc, la formule sera

$$
\begin{aligned}
598752 \int y\, dx = {} & 16067(a+l) \\
& + 106300(b+k) \\
& - 48525(c+i) \\
& + 272400(d+h) \\
& - 260550(e+g) \\
& + 427368 f.
\end{aligned}
$$

Pour le diviseur *onze*, nous avons la formule

$$\frac{\int y\,dx}{11} = \frac{L}{11!}(a+m)$$

$$+\frac{1}{10!}(K-L)(b+l)$$

$$+\frac{1}{9!}\left(I-K+\frac{L}{2}\right)(c+k)$$

$$+\frac{1}{8!}\left(H-I+\frac{K}{2}-\frac{L}{3!}\right)(d+i)$$

$$+\frac{1}{7!}\left(G-H+\frac{I}{2}-\frac{K}{3!}+\frac{L}{4!}\right)(e+h)$$

$$+\frac{1}{6!}\left(F-G+\frac{H}{2}-\frac{I}{3!}+\frac{K}{4}-\frac{L}{5!}\right)(f+g)\;;$$

mais, pour le même diviseur, nous avons trouvé

$$F=\frac{266291}{84}\;;\quad G=\frac{304375}{24}\;;\quad H=\frac{3641207}{90}\,,\quad I=\frac{1901961}{20}\,,$$

$$K=\frac{1698757}{12}\,,\quad L=\frac{2171465}{24}\;;$$

en substituant donc, la formule sera

$$\begin{aligned}87091200\int y\,dx = {} & 2171465(a+m)\\ & +13486539(b+l)\\ & -3237113(c+k)\\ & +25226685(d+i)\\ & -9595542(e+h)\\ & +15493566(f+g)\,.\end{aligned} \qquad \text{(XI)}$$

Pour le diviseur *douze*, nous avons la formule

$$\begin{aligned}\frac{\int y\,\mathrm{d}x}{12} = {} & \frac{M}{12!}(a+n)\\
& +\frac{1}{11!}(L-M)(b+m)\\
& +\frac{1}{10!}\left(K-L+\frac{M}{2}\right)(c+l)\\
& +\frac{1}{9!}\left(I-K+\frac{L}{2}-\frac{M}{3!}\right)(d+k)\\
& +\frac{1}{8!}\left(H-I+\frac{K}{2}-\frac{L}{3!}+\frac{M}{4!}\right)(e+i)\\
& +\frac{1}{7!}\left(G-H+\frac{I}{2}-\frac{K}{3!}+\frac{L}{4!}-\frac{M}{5!}\right)(f+h)\\
& +\frac{1}{6!}\left(F-G+\frac{H}{2}-\frac{I}{3!}+\frac{K}{4!}-\frac{L}{5!}+\frac{M}{6!}\right)g\,;\end{aligned}$$

mais, pour le même diviseur, nous avons trouvé

$$F=\frac{42136}{7}\,,\quad G=29304\,;\quad H=\frac{596232}{5}\,,\quad I=\frac{1929456}{5}\,;$$

$$K=\frac{10096560}{11}\,,\quad L=1386144\,,\quad M=\frac{393019488}{455}\,;$$

en substituant donc, la formule sera

$$\begin{aligned}63063000\int y\,\mathrm{d}x = {} & 1364651(a+n)\\
& +9903168(b+m)\\
& -7587864(c+l)\\
& +35725120(d+k) \qquad \text{(XII)}\\
& -51491295(e+i)\\
& +87516288(f+h)\\
& -87797136g\,.\ (*)\end{aligned}$$

(*) Cette formule est exactement celle de M. Bérard (tom. VII, pag. 110), et diffère totalement de celle que j'avais d'abord publiée (tom. VI, pag. 377).

Toutes ces formules se vérifient, au surplus, en ce qu'elles donnent l'aire cherchée égale à l'unité, lorsqu'on suppose toutes les ordonnées a, b, c,...... égales elles-mêmes à l'unité.

Dans un prochain article, nous appliquerons ces résultats à l'intégration approchée des équations différentielles à deux variables.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de Géométrie.

Il est connu qu'en général par *neuf* points donnés on peut toujours se proposer de faire passer une surface du second ordre dont l'espèce se trouve déterminée par la situation respective de ces neuf points.

Mais, lorsque la surface est donnée d'espèce, elle n'a plus besoin d'un si grand nombre de points pour être déterminée ; ainsi, par exemple, une sphère est déterminée par *quatre* de ses points ; un cylindre droit par *cinq*, et un cône droit par *six*. On sait même faire passer une sphère par quatre points donnés : mais aucun ouvrage de géométrie n'enseigne à faire passer un cylindre et un cône droit par *cinq* ou *six* points donnés ; on propose donc ces deux problèmes ?

L'erreur était donc ici entièrement de mon côté, et je me fais autant un plaisir qu'un devoir de le reconnaître. Elle a dû prendre sa source d'une part dans la complication de mes premiers procédés, et de l'autre dans l'impuissance où j'étais de soumettre mes calculs à la vérification d'autrui.

FIN DU NEUVIÈME VOLUME.

TABLE

Des matières contenues dans le IX.e volume des Annales.

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

ANALISE ALGÉBRIQUE.

ANALISE INDÉTERMINÉE.

ANALISE TRANSCENDANTE.

ARITHMETIQUE APPLIQUÉE.

ASTRONOMIE.

DYNAMIQUE.

GÉOMETRIE ANALITIQUE.

GÉOMÉTRIE ELEMENTAIRE.

GÉOMETRIE TRANSCENDANTE.

GNOMONIQUE.

VARIÉTÉS.

CORRESPONDANCE

Entre les questions proposées *et les* questions résolues.

Tome VII, pag. 256	Problème.	traité, tom. IX,	pages 339—345.
Tom. VIII, pag. 200	Problème I.		106—116.
	Problème II.		—
Pag. 260	Problème I.		—
	Problème II.		—
Pag. 284	Problème.		—
Pag. 315	LXLV Problèmes.	un seul.	293—295.
Pag. 346	LXLV Problèmes.		—
Pag. 380	Problème I.		—
	Problème II.		—
Tom. IX, pag. 36	Théorème.		215—228.
Pag. 72	Problème I.		—
	Problème II.		—
Pag. 116	Théorème I.		277—285.
	Théorème II.		—
Pag. 126	Problème I.		—
	Problème II.		—
Pag. 196	Problème I.		—
	Problème II.		—
Pag. 228	Problème I.		—
	Problème II.		—
	Problème III.		—
	Problème IV.		—
	Théorème.		285—289.

ERRATA

Pour le neuvième volume des Annales.

PAGE 36, ligne 3, — OIT ; *lisez* : SOIT.

Pag. 57, ligne 2, en commençant, — + ; *lisez* : —.

Pag. 72, avant-dernière ligne, — abaissés ; *lisez :* abaissées perpendiculairement.

Pag. 114, mettez au bas de la note, *J. D. G.*

Pag. 196, la pagination porte 200.

Pag. 227, mettez au bas de la note, *J. D. G.*

*Supplément à l'*Errata *du tome VI.*

Page 376, VII.e formule, — 1324 ; *lisez* : 1323.

Même formule, — 2986 ; *lisez* : 2989.

VIII.e formule, — 89600 ; *lisez* : 28350.

Pag. 377, XII.e formule. Cette formule est tout-à-fait fausse : on trouve la véritable, tom. VII, pag. 110.