ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

J. B. DURRANDE

Questions résolues. Solution de deux problèmes de géométrie, proposés à la page 292 du tome III.e et à la page 59 du tome IV.e de ce recueil; ainsi que de deux autres problèmes analogues

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 8 (1817-1818), p. 61-67
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1817-1818__8__61_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution de deux problèmes de géométrie, proposés à la page 292 du tome III.ᵉ et à la page 59 du tome IV.ᵉ de ce recueil ; ainsi que de deux autres problèmes analogues ;

Par M. J. B. Durrande.

PARMI un grand nombre de problèmes proposés dans les *Annales*, et non encore résolus, on trouve, à la page 292 du tome III.ᵉ, le problème suivant :

PROBLÈME I. Construire le plus petit système de trois cercles, se touchant deux à deux, et dont les circonférences passent respectivement par trois points donnés ?

Auquel on peut joindre celui-ci :

PROBLÈME II. Construire le plus grand système de trois cercles, se touchant deux à deux, et dont les circonférences passent respectivement par trois points donnés?

On trouve ensuite, à la page 59 du tome IV.e, cet autre problème :

PROBLÈME III. A un triangle donné inscrire le système de trois cercles, tels que chacun d'eux touche les deux autres et touche en outre, en son milieu, l'un des côtés du triangle?

Et l'on peut encore se proposer celui-ci :

PROBLÈME IV. A un triangle donné, circonscrire le système de trois cercles tels que chacun d'eux touche les deux autres et touche en outre, en son milieu, l'un des côtés du triangle?

Nous nous proposons ici de faire voir que les deux derniers problèmes se rapportent respectivement aux deux premiers, et réciproquement. Nous enseignerons ensuite à résoudre les uns et les autres.

Cherchons d'abord les caractères du triangle *maximum* et ceux du triangle *minimum*, entre tous ceux qui sont inscrits à un même système de trois cercles, se touchant deux à deux.

Soient C, C, C'' (fig. 5) les centres des trois cercles d'un tel système, et soit AA'A'' le triangle inscrit *maximum*. Si de son sommet A'' on abaisse une perpendiculaire sur la direction du côté opposé AA', cette perpendiculaire devra être plus longue que celle qu'on abaisserait sur la même droite de tout autre point de la circonférence dont le centre est C'', propriété qui ne saurait appartenir qu'à la perpendiculaire qui passe par ce centre ; et, comme ce que nous disons ici du point A'' peut se dire également des points A et A', il s'ensuit que la propriété caractéristique du triangle *maximum*, entre tous ceux qui sont inscrits au système de nos trois cercles, est que les perpendiculaires abaissées de ses sommets sur la direction des côtés opposés, passent respectivement par les centres de ces trois cercles.

Soient ensuite AA'A'' (fig. 6) le plus petit des triangles qu'il soit possible d'inscrire au système de trois cercles se touchant deux à deux, et dont les centres sont C, C', C''. Si de son sommet A'' on abaisse une perpendiculaire sur la direction du côté opposé AA', cette perpendiculaire devra être plus courte que celle qu'on abaisserait sur la même droite de tout autre point de la circonférence dont le centre est C''; propriété qui ne saurait appartenir qu'à la perpendiculaire dont le prolongement passe par ce centre; et, comme ce que nous disons ici du point A'' peut se dire également des points A et A', il s'ensuit que la propriété caractéristique du triangle *minimum*, entre tous ceux qui sont inscrits au système de nos trois cercles, est que les prolongemens des perpendiculaires abaissées de ses sommets sur la direction des côtés opposés, passent respectivement par les centres de ces trois cercles.

Ainsi, dans le triangle *minimum*, comme dans le triangle *maximum*, les directions des perpendiculaires abaissées des sommets sur la direction des côtés opposés passent respectivement par les centres des trois cercles; mais tandis que le triangle dont les sommets sont aux centres des trois cercles est enveloppé par le triangle *maximum*, il enveloppe, au contraire, le triangle *minimum*.

A l'inverse, un triangle étant donné; le plus grand et le plus petit système de trois cercles dont chacun touche les deux autres et passe par l'un des sommets du triangle, est celui dans lequel les centres sont situés sur les directions des perpendiculaires abaissées des sommets du triangle sur les directions des côtés opposés; avec cette différence que, dans le système *maximum*, (fig. 6) les centres sont extérieurs au triangle donné, tandis que, dans le système *minimum*, (fig. 5) ils sont *intérieurs* au même triangle.

Si, présentement (fig. 5 et 6), nous menons, par les points A, A', A'' des tangentes $B'B''$, $B''B$, BB' aux cercles sur lesquels ces points se trouvent respectivement situés, ces tangentes, par leur concours, formeront le triangle $BB'B''$, dont les côtés seront respectivement parallèles à ceux du triangle $AA'A''$; d'où il suit que ce dernier aura ses sommets aux milieux des côtés du premier; de sorte que chacun de ces triangles est déterminé par l'autre.

Lors donc qu'on propose d'inscrire ou de circonscrire au triangle $BB'B''$ le système de trois cercles se touchant deux à deux, et dont chacun touche, en son milieu, l'un des côtés du triangle donné, cela revient à demander le plus grand ou le plus plus petit système de trois cercles se touchant deux à deux, et passant respectivement par les milieux A, A', A'' des côtés de ce triangle; et ce dernier problème revient lui-même à décrire trois cercles se touchant deux à deux, passant respectivement par les points donnés A, A', A'', et ayant respectivement leurs centres C, C', C'' sur les directions des perpendiculaires abaissées des sommets du triangle $AA'A''$ sur les côtés opposés. C'est sous ce dernier point de vue que nous allons présentement envisager notre problème.

Soit donc $AA'A''$ (fig. 7 et 8) un triangle quelconque; AP, $A'P'$, $A''P''$ les perpendiculaires abaissées de ses sommets sur les directions des côtés opposés; et proposons-nous de décrire trois cercles qui, se touchant deux à deux, et passant respectivement par les points A, A', A'', aient leurs centres sur nos perpendiculaires (fig. 7), ou sur leur prolongemens (fig. 8).

Soient C, C', C'' les centres des trois cercles cherchés (fig. 7 et 8); représentons par r, r', r'' leurs rayons inconnus, et par a, a', a'' les trois côtés du triangle $AA'A''$. Des points C, C', soient abaissées sur la direction de AA' les perpendiculaires CD, $C'D'$; par C' soit menée à AA' une parallèle rencontrant CD en E; nous aurons

$$C'E=DD'=AA'\mp(AD+A'D')\ ;$$

le signe supérieur se rapportant à la figure 7, et l'inférieur à la figure 8. Mais on a

$$C'E=\sqrt{\overline{CC'}^2-\overline{CE}^2}=\sqrt{\overline{CC'}^2-(CD-C'D')^2}\,;$$

donc

$$\sqrt{\overline{CC'}^2-(CD-C'D')^2}=AA'\mp(AD+A'D')\,;$$

ou, en quarrant, développant et faisant attention que

$$\overline{AD}^2+\overline{CD}^2=\overline{AC}^2\,,\quad \overline{A'D'}^2+\overline{C'D'}^2=\overline{A'C'}^2$$

et transposant

$$\overline{CC'}^2-\overline{AC}^2-\overline{A'C'}^2+2(CD.C'D'-AD.A'D')\pm2AA'(AD+A'D')-\overline{AA'}^2=0\,.$$

Or, on a

$$CC'=r+r'\,,\quad AC=r\,,\quad A'C'=r\,,\quad AA'=a''\,;$$

$$CD=AC\mathit{Sin}.CAD=r\mathrm{Cos}.A'\,;\quad C'D'=A'C'\mathit{Sin}.C'A'D'=r'\mathrm{Cos}.A\,,$$

$$AD=AC\mathit{Cos}.CAD=r\mathrm{Sin}.A'\,;\quad A'D'=A'C'\mathit{Cos}.C'A'D'=r'\mathrm{Sin}.A\,,$$

d'où

$$CD.C'D'-AD.A'D'=rr'(\mathrm{Cos}.A\mathrm{Cos}.A'-\mathrm{Sin}.A\mathrm{Sin}.A')=rr'\mathrm{Cos}.(A+A')=-rr'\mathrm{Cos}.A''\,;$$

en substituant et faisant attention que $1-\mathrm{Cos}.A''=2\mathrm{Sin}.^2\tfrac{1}{2}A''$, il viendra donc

$$4rr'\mathrm{Sin}.^2\tfrac{1}{2}A''\pm2a''(r\mathrm{Sin}.A'+r'\mathrm{Sin}.A)-a''^2=0\,;$$

Mais, en représentant par T l'aire du triangle, on a

$$\mathrm{Sin}.A=\frac{2T}{a'a''}\,;\qquad \mathrm{Sin}.A'=\frac{2T}{aa''}\,;$$

$$\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}A''=\frac{4T^2}{aa'(a+a'+a'')(a+a'-a'')}\ ;$$

en conséquence, l'équation ci-dessus deviendra

$$\frac{4Tr}{a}\cdot\frac{4Tr'}{a'}\pm(a+a'+a'')(a+a'-a'')\left\{\frac{4Tr}{a}+\frac{4Tr}{a'}\right\}$$

$$-a''^2(a+a'+a'')(a+a'-a'')=0\ ;$$

et comme les trois points C, C′, C″, comparés deux à deux, doivent donner des résultats analogues, il s'ensuit qu'en posant

$$\frac{4Tr}{a}=x\,,\quad \frac{4Tr'}{a'}=x'\,,\quad \frac{4Tr''}{a''}=x''\,,$$

x, x', x'' seront donnés par les équations

$$x\,x'\pm(a+a'+a'')(a+a'-a'')(x+x')-a''^2(a+a'+a'')(a+a-a'')=0$$

$$x'x''\pm(a+a'+a'')(a'+a''-a)(x'+x'')-a^2(a+a'+a'')(a'+a''-a)=0$$

$$x''x\pm(a+a'+a'')(a''+a-a')(x''+x)-a'^2(a+a'+a'')(a''+a-a')=0$$

on voit que les doubles signes ne portant uniquement que sur x, x', x'', on peut n'employer que les signes supérieurs, en se rappelant que les valeurs de x, x', x'' doivent être prises successivement en *plus* et en *moins*.

Désignant donc, pour abréger, par $2s$ la somme des trois côtés du triangle, ces équations deviendront

$$x\,x'+4s(s-a'')(x\;+x'\;-a''^2)=0\;,$$

$$x'x''+4s(s-a\;)(x'\;+x''-a\;^2)=0\;;$$

$$x''x\;+4s(s-a'\;)(x''+x\;-a'^2)=0\;.$$

Si l'on tire des équations extrêmes les valeurs de x' et x'', pour les substituer dans l'équation intermédiaire, il est clair que celle-ci, qui ne renfermera plus que la seule inconnue x, ne s'élèvera qu'au second degré; on pourra donc facilement en déduire la valeur de x, et par suite celles de x' et x''; et on passera de là à celles de r, r', r'', au moyen des relations ci-dessus (*).

(*) Nous espérons qu'à l'exemple de M. Durrande, quelques géomètres voudront bien revenir sur les problèmes, en très-grand nombre, qui dans les précédens volumes de ce recueil, sont restés sans solution.

J. D. G.