
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

LE BARBIER

**Hydrodynamique. Essai sur les oscillations et l'équilibre
des corps flottans**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 8 (1817-1818), p. 37-61

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1817-1818__8__37_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1817-1818, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

HYDRODYNAMIQUE.

Essai sur les oscillations et l'équilibre des corps flottans ;

Par M. LE BARBIER.



LORSQU'UN corps est d'une densité moindre que celle d'un fluide dans lequel il est plongé, il existe toujours une position où ce corps est en équilibre, quelle que soit d'ailleurs sa figure ; car il suffit pour cela, comme on le sait, par les principes de l'hydrostatique, que le centre de gravité du corps et celui de sa partie plongée, et considérée comme homogène, soient dans une même verticale ; et de plus que le poids total du corps soit égal à celui du volume de fluide qu'il déplace.

Si, par quelque cause que ce soit, ce corps est écarté de sa position d'équilibre, et ensuite abandonné à lui-même, il prendra généralement deux mouvemens ; l'un de translation dû à la différence entre le poids de ce corps et celui du fluide déplacé ; l'autre de rotation dû au défaut de verticalité de la droite qui joint le centre de gravité du corps à celui du volume de sa partie submergée.

On a, depuis long-temps, les conditions générales de la stabilité de l'équilibre des corps flottans. Ces conditions suffisent lorsqu'on

38 OSCILLATIONS ET ÉQUILIBRE

fait abstraction de la figure de ces corps ; mais , lorsqu'il s'agit d'évaluer leurs mouvemens oscillatoires , d'après leur forme particulière , il faut avoir recours à la nature de la surface qui les termine , non seulement pour leur stabilité , mais encore pour apprécier quelle est la surface qui peut le mieux remplir des conditions données , conjointement avec la stabilité.

Nous sommes loin de prétendre de donner ici une théorie complète des corps flottans ; nous nous proposons seulement de résoudre généralement ce problème : *Étant donné l'équation de la surface qui termine un corps , sa position initiale et celle de son centre de gravité ; déterminer les mouvemens oscillatoires de ce corps , en fonction des constantes qui entrent dans l'équation de cette surface et de celles qui servent à déterminer tant la position du centre de gravité du corps que sa position initiale dans le liquide ?*

Nous nommerons *axe du corps* la droite , invariable par rapport à lui , qui , passant par son centre de gravité , devient verticale dans sa position d'équilibre. Après le dérangement de ce corps , c'est-à-dire , lorsqu'il est hors de cette position , cet axe qui cesse alors d'être vertical , détermine , avec la verticale qui passe alors par le centre de gravité , un certain *plan vertical* qui partage le corps en deux parties. Lorsque ces deux parties sont inégales , ce qui est le cas général du problème , l'axe du corps , pendant le mouvement , sort du plan vertical que nous venons de considérer. Lorsqu'au contraire ces deux parties sont égales et semblablement placées par rapport à ce plan , l'axe y reste pendant le mouvement ; car , tout étant alors égal de part et d'autre du plan vertical , il n'y a aucune raison pour que cet axe en sorte. Nous traiterons d'abord ce cas particulier.

Nous allons , avant tout , rapporter les équations générales du mouvement d'un corps de figure quelconque , sollicité par des forces quelconques ; ainsi que les formules pour passer d'un système de coordonnées rectangulaires sur un plan à un autre système de coordonnées de même nature.

Si l'on désigne par x, y, z les trois coordonnées rectangulaires de l'un dm des élémens matériels d'un corps m , pour l'époque t , et par X, Y, Z les composantes parallèles aux axes de la force accélératrice qui sollicite cet élément à la même époque, on aura (*) les six équations suivantes, pour déterminer le mouvement de ce corps

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2x}{dt^2} &= fX dm, \\ M \frac{d^2y}{dt^2} &= fY dm, \\ M \frac{d^2z}{dt^2} &= fZ dm; \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \int \left(y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2} \right) dm &= f(yZ - zY) dm, \\ \int \left(z \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2z}{dt^2} \right) dm &= f(zX - xZ) dm, \\ \int \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} \right) dm &= f(xY - yX) dm; \end{aligned} \right\} (2)$$

le signe intégral devant être étendu, dans ces six équations, à la masse entière du corps.

Pour passer, sur un plan, d'un système de coordonnées rectangulaires à un autre système de même nature, on a les formules connues

(*) Voyez la *Mécanique analytique*, 2.^{me} édition, tome 1.^{er}, pages 259 et 263. Voyez aussi le *Traité de mécanique* de M. POISSON, tome 2.^{me}, n.^o 455.

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi + \alpha, \\ y &= x' \sin \varphi - y' \cos \varphi + \beta; \end{aligned} \right\} (3)$$

α et β étant les coordonnées dès l'origine des x' , y' , et φ l'angle que font entre eux les axes des x et des x' ; cet angle étant compté de droite à gauche, à partir de l'axe des x . Lorsque l'angle φ devient obtus, les formules (3) se changent en celles-ci

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos \psi + y' \sin \psi + \alpha, \\ y &= -x' \sin \psi + y' \cos \psi + \beta; \end{aligned} \right\} (4)$$

ψ étant supposé le supplément de l'angle obtus φ ; c'est-à-dire; que l'angle ψ est aigu; mais il est compté de gauche à droite, à partir de l'axe des x .

Soit maintenant ABCD (fig. 1) la section verticale qui divise le corps en deux parties égales et semblablement disposées, par rapport à cette section; soient AB l'intersection de ce plan avec le plan de flottaison, lorsque le corps a été écarté de sa position d'équilibre; AC une perpendiculaire à l'axe OG de ce corps; O le centre de gravité du corps; G et E ceux des volumes des parties de ce corps correspondant respectivement aux sections ADC et CAB. Soient de plus OG, OF et une troisième droite OZ, perpendiculaire à la section ABCD, et non représentée dans la figure, trois axes rectangulaires, fixes dans le corps, et auxquels on rapporte la surface qui le termine; soient encore Ax' tangente à la surface au point A, Ay' perpendiculaire à cette tangente, dans le plan de la section, et une troisième droite Az', perpendiculaire aux deux autres, et non représentée dans la figure, trois autres axes rectangulaires, mobiles dans le corps durant son mouvement; soient

enfin Ox verticale et Oy horizontale deux axes rectangulaires auxquels on rapporte le mouvement de rotation du corps. Quant au mouvement de translation, nous le rapporterons à la ligne fixe AB (*). Supposons en outre (f étant la valeur qui répond à l'état d'équilibre),

$$OH=f+\zeta, \quad OD=h, \quad GOM=\sigma, \quad x'AN=\varphi, \quad (**)$$

$$GOx=\theta, \quad (OG, Ax')=\psi.$$

On a, par les deux dernières suppositions,

$$BAx'=\frac{1}{2}\pi+\psi+\theta,$$

π étant; comme à l'ordinaire, le rapport de la circonférence au diamètre.

Si l'on désigne par $d\nu$ le volume élémentaire qui répond à l'élément matériel dm du corps, g étant, comme à l'ordinaire, la gravité, et ρ la densité du fluide; on aura $\int Xdm = g \int f dm - g \int f d\nu$. L'intégrale $\int f dm$ devant être étendue à la masse entière du corps, et $\int f d\nu$ ne devant être étendue qu'au volume de la partie de ce corps plongée dans le fluide, on aura, plus simplement,

$$\int Xdm = -g \rho \int f d\nu;$$

(*) Voyez la *Mécanique* de M. POISSON, tome II, pages 421 et suivantes.

(**) Le point M, que l'auteur n'a point qualifié, paraît être le centre de gravité de toute la portion du corps qui répond à ADCB; AN' et AN sont quelconques.

42 OSCILLATIONS ET ÉQUILIBRE

le point placé au-dessus de ν indiquant que, dans l'intégrale, il ne faut retenir que les termes qui dépendent de l'enfoncement ζ du corps et de son inclinaison θ , après qu'il aura été écarté de sa position d'équilibre. De plus, comme pour le mouvement de rotation, on a

$$x = R \cos.(A + \theta), \quad y = R \sin.(A + \theta);$$

R étant le rayon vecteur mené du point O à la projection d'un point quelconque du corps sur le plan des xy , et A l'angle que fait ce rayon vecteur avec l'axe des x , avant que le corps ait été écarté de sa position d'équilibre, on aura

$$\int \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) dm = MK^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2};$$

MK^2 étant le moment d'inertie du corps, relativement à l'axe de rotation. Observant de plus qu'ici $Y = 0$ et $\int y dm = 0$, les équations du mouvement seront ainsi

$$M \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + g \int \bar{y} d\nu = 0, \quad (5)$$

$$MK^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + g \int \bar{y} d\nu = 0. \quad (6)$$

Nous avons placé un trait au-dessus de la coordonnée horizontale y , afin de la distinguer de celle qui entre dans l'équation de la surface, dont nous allons faire usage.

Soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface qui termine le corps dont il s'agit; désignons par α, β les coordonnées du point A , rapporté aux axes OG, OF ; l'équation de la même surface, rap-

portée aux nouveaux axes Ax' , Ay' , Az' , sera, par les formules (4), et après avoir changé les signes des coordonnées x' , y' ,

$$F(-x'\text{Cos.}\psi - y'\text{Sin.}\psi + \alpha, x'\text{Sin.}\psi - y'\text{Cos.}\psi + \beta, z) = 0 .$$

Prenons deux nouveaux axes rectangulaires des x'' , y'' , situés dans le plan ABCD; soit AN l'axe des x'' ; on (3)

$$x' = x''\text{Cos.}\varphi - y''\text{Sin.}\varphi ,$$

$$y' = x''\text{Sin.}\varphi + y''\text{Cos.}\varphi ;$$

substituant donc et faisant $y'' = 0$, on aura; pour la section du corps par le plan dont AN est la trace, l'équation

$$F[-x''\text{Cos.}(\psi - \varphi), x''\text{Sin.}(\psi - \varphi), z] = 0 .$$

Au moyen de cette équation, on calculera l'aire de cette section; dans laquelle l'angle φ entrera comme variable, de sorte qu'en prenant une section consécutive, qui fera avec la première un angle $NAN' = d\varphi$, nous pourrons représenter le volume élémentaire $d\nu$ par le solide que ces deux sections consécutives détacheront du corps, et auquel on peut donner le nom d'onglet; volume que l'on calculera rigoureusement par le *Théorème de Guldin*. $d\nu$ sera donc de cette forme $\Phi d\varphi$, Φ étant considéré comme une fonction de l'angle φ . On aura donc $\int d\nu$ en intégrant $\Phi d\varphi$, depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi + \psi + \theta$, et en ne retenant, dans l'intégrale, que les termes qui contiennent ζ et θ .

On obtiendra \bar{y} , en fonction de l'angle φ , en observant d'abord que

$$\bar{y} = -x \sin.\theta + y \cos.\theta ,$$

valeur dans laquelle (3)

$$x = -x' \cos.\psi + y' \sin.\psi + \alpha ,$$

$$y = x' \sin.\psi - y' \cos.\psi + \beta :$$

De plus, puisque \bar{y} désigne la distance du centre de gravité de l'élément $d\rho$ à l'axe des x , on aura

$$x = Ag \cos.\varphi , \quad y' = Ag \sin.\varphi ,$$

d'où

$$\bar{y} = Ag \sin.(\psi + \theta - \varphi) - \alpha \sin.\theta + \beta \cos.\theta ,$$

$$\int \bar{y} d\rho = \int Ag \Phi \sin.(\Phi + \theta - \varphi) d\varphi - (\alpha \sin.\theta - \beta \cos.\theta) \int \Phi d\varphi ;$$

les intégrales devant être prises depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \pi + \psi + \theta$.

Pour compléter cette méthode, il nous reste à déterminer les coordonnées α et β du point A, et l'angle ψ que font entre eux les axes OG et Ax'. Si, dans l'équation de la surface courbe, on fait $z = 0$, on aura l'équation de la section ABCD; savoir $F(x, y) = 0$; ou bien, en dégagant y ,

$$y = fx ;$$

combinant cette équation avec celle de la ligne AB, savoir,

$$x = \mu y,$$

$$x = \mu y + \nu,$$

dans laquelle on fait, pour abrégér,

$$\mu = \text{Tang.} \theta, \quad \nu = \frac{f + \zeta}{\text{Cos.} \theta},$$

on aura les coordonnées α , β ; d'où

$$\frac{d.fx}{dx} = f'(x) = -\text{Tang.} \psi.$$

Le point placé au-dessus de x indiquant qu'il faut faire $x = \alpha$, après la différentiation. Cette tangente est prise négativement, parce que les x positifs sont comptés suivant la direction OG.

On peut, au lieu de la section dont AN est la trace, sur le plan ABCD, prendre une section parallèle au plan de flottaison. En effet, si l'on rapporte l'équation de la surface courbe aux axes HO, HB, on aura (3)

$$F\{(f + \zeta - x)\text{Cos.} \theta - y\text{Sin.} \theta, (f + \zeta - x)\text{Sin.} \theta + y\text{Cos.} \theta, z\} = 0 :$$

Si, dans cette équation, on considère x comme une constante, ce sera l'équation de la section parallèle au plan de flottaison; l'aire de cette section, multipliée par dx sera $d\nu$: donc, en intégrant depuis $x = 0$ jusqu'à x égal à la distance comprise entre la ligne AB et une parallèle à cette ligne tangente à la courbe ABCD, on aura le volume du fluide déplacé. Quant à \bar{y} , il sera facile de l'avoir en fonction de x ; car, pour cela, il ne faudra que calculer la distance du centre de gravité de cette section à l'axe OH. Il est clair d'ailleurs que la limite des intégrales s'obtiendra, en faisant

$\frac{dx}{dy} = 0$, dans l'équation différentielle de la section ABCD, rapportée aux axes HO, HB; car, de cette égalité, on tirera la valeur de l'abscisse x , laquelle, étant substituée dans l'équation de la courbe, donnera pour y la limite en question.

Cette dernière méthode est plus simple que la précédente, en ce que le centre de gravité de l'élément $d\nu$ est plus facile à déterminer, et que la transformation des coordonnées y est moins compliquée. Au reste, il y a un cas, que nous allons prendre pour exemple, et pour lequel l'une et l'autre méthodes paraissent jouir d'un même degré de simplicité.

Supposons que le corps dont il s'agit soit un cylindre droit ayant pour base l'une des sections coniques, renfermée dans l'équation

$$y^2 = nx + mx^2 ;$$

et représentée par ABCD (fig. 2); on aura, par la première méthode,

$$\alpha = \mu\beta + \nu ;$$

$$\beta = \frac{\mu(l + 2m\nu) + \sqrt{m^2n^2 + 4(k + l\nu + m\nu^2)}}{2(1 - m\mu^2)} ;$$

$$\text{Tang. } \psi = -\frac{l + 2m\alpha}{2\beta} ;$$

en faisant, pour abrégér,

$$k = h(hm + n) ; \quad l = 2hm + n .$$

Et comme, dans cet exemple, la fonction Φ se réduit à $\frac{1}{2}Lr^2$; et Ag à $\frac{1}{2}r$; L désignant la hauteur du cylindre et r le rayon

vecteur AN; on aura facilement, au moyen des valeurs précédentes de α , β , et Tang. ψ , la valeur de ce rayon vecteur. On trouve, tout calcul fait,

$$r = \frac{R \sin. \phi}{M \cos.^2 \phi + N \sin.^2 \phi + P \sin. \phi \cos. \phi},$$

en posant, pour abrégier,

$$M = \sin.^2 \psi - m \cos.^2 \psi, \quad N = \cos.^2 \psi - m \sin.^2 \psi,$$

$$P = -2(1+m) \sin. \psi \cos. \psi, \quad R = 2\beta \cos. \psi - (l + 2am) \sin. \psi :$$

au moyen de cette expression de r , on intégrera $r^2 d\phi$ et $y d\nu$, par les méthodes connues; de sorte qu'en représentant respectivement par B , C , D les trois intégrales $\int r^2 d\phi$, $\int r^3 \sin. \phi d\phi$, $\int r^3 \cos. \phi d\phi$; prises entre les limites $\phi = 0$, $\phi = \frac{1}{2}\pi + \psi + \theta$, les équations du mouvement se changeront en

$$M \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \frac{1}{2} L g \rho B = 0, \quad (7)$$

$$MK^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} - L g \rho \left\{ \frac{1}{2} B (\alpha \sin. \theta - \beta \cos. \theta) + \frac{1}{3} [C \cos. (\psi + \theta) - D \sin. (\psi + \theta)] \right\} = 0. \quad (8)$$

Telles sont les équations rigoureuses du problème, en faisant abstraction de la résistance du fluide, ce qui est fort inexact. Nous allons en déduire le cas que l'on sait résoudre généralement; celui où le dérangement du corps est fort petit, et pour lequel la résistance du fluide est une quantité assez petite pour être négligée; ce qui rend les équations du mouvement linéaires, en négligeant les puissances de θ et ζ supérieures aux premières. Nous applique-

48 OSCILLATIONS ET ÉQUILIBRE

rons ensuite directement à ce cas une méthode qui nous a paru assez simple.

Dans le cas où la base du cylindre est un cercle, on a

$$m = -1, \quad n = 2a, \quad M = N = 1, \quad P = 0, \quad R = 2a;$$

a étant le rayon du cercle. En ne retenant, dans leur second membre, développé au moyen du *Théorème de Maclaurin*, que les premières puissances de θ et ζ , et observant qu'à cause de

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{4m\beta^2 - (l+2mf)^2}{4\beta^2 + (l+2mf)^2},$$

on a

$$\frac{d(\psi + \theta)}{d\theta} = 0;$$

les équations (7) et (8) s'intègrent facilement. On obtient ainsi, tout calcul fait, en posant, pour abréger $h+f=H$,

$$\zeta = \epsilon \text{Cos} \left\{ t \sqrt{\frac{2g\rho L \sqrt{H(2a-H)}}{M}} + \epsilon' \right\}, \quad (9)$$

$$\psi = \epsilon_1 \text{Cos} \left\{ t \sqrt{\frac{a^2 g \rho L}{MK^2} \left[\frac{(H-a)\sqrt{H(2a-H)}}{a^2} + \text{Arc} \left(\text{Sin.} = \frac{H-a}{a} \right) + \frac{1}{2}\pi \right]} (a-h) + \epsilon_1 \right\} \quad (10)$$

$\epsilon, \epsilon', \epsilon_1, \epsilon_1'$ étant des constantes arbitraires.

Lorsqu'on se borne aux premières puissances de θ et ζ , on peut parvenir aux équations linéaires, au moyen de la méthode suivante, qui nous a paru assez simple. D'abord, il est clair que la partie de $\int d\psi$ que nous avons à considérer peut être assimilée, en général, à un cylindre ayant pour base la section du plan de flottaison et, dans notre exemple, à un parallépipède ayant pour base

$$2L\sqrt{H(n+mH)},$$

et ayant pour hauteur la petite quantité δ ; car il est aisé de s'assurer que l'enfoncement du corps dû à la petite quantité θ est du second ordre ; on a donc ainsi , après avoir substitué ce rectangle dans l'équation (5) et intégré ,

$$\zeta = \text{Cos.} \left\{ t \sqrt{\frac{2gLV\sqrt{H(n+mH)}}{M} + \epsilon'} \right\} ;$$

expression qui , en faisant $m = -1$ et $n = 2a$, est parfaitement conforme à celle que nous avons obtenue précédemment d'une autre manière.

Si l'on désigne par Π le volume du fluide déplacé dans la position d'équilibre du corps , par \overline{OG} la distance du centre de gravité du même volume au centre de gravité O du corps ; si , de plus , on désigne par les mêmes caractères , mis entre parenthèses , les mêmes quantités relatives au fluide déplacé par le corps , après qu'il a été écarté de sa position d'équilibre , on aura rigoureusement

$$\int \bar{y} d\nu = (\Pi)(\overline{OG}) \text{Sin.}(\theta + \sigma) ;$$

de manière qu'en négligeant les puissances de θ et ζ supérieures aux premières , on a tout de suite

$$\int \bar{y} d\nu = \Pi . \overline{OG} (\theta + \sigma) ;$$

attendu que les quantités (Π) et (\overline{OG}) ne diffèrent respectivement de Π et \overline{OG} que par des termes qui dépendent de θ et ζ , lesquels deviennent nuls , lorsque θ et ζ sont zéro.

50 OSCILLATIONS ET ÉQUILIBRE

Si des points M et E on abaisse sur OF les perpendiculaires MP et EF, on aura la proportion

$$\Pi : a :: PF : OP .$$

En exprimant par u le volume du corps correspondant au secteur BAC, on tire de cette proportion

$$OP = \frac{u \cdot \overline{OF}}{(\Pi) + u}, \quad \text{Tang.GOM} = \frac{\overline{OP}}{(\overline{OG})} = \frac{u \overline{OF}}{(\overline{OG})[(\Pi) + u]} .$$

u étant de la forme $P\theta$; si l'on fait $\overline{OF} = p$, on aura

$$\sigma = \frac{Pp\theta}{\Pi \cdot \overline{OG}}, \quad \text{d'où} \quad \int \overline{y} d\sigma = (\Pi \cdot \overline{OG} + Pp)\theta ;$$

substituant cette expression dans l'équation (6) et intégrant, on a

$$\theta = \frac{1}{\text{Cos.}} \left\{ t \sqrt{\frac{g\rho}{MK^2} (\Pi \cdot \overline{OG} + Pp) + \sigma'} \right\} .$$

Dans le cas où le corps plongé dans le fluide est un cylindre, on a $u = P\theta = 2Ly^2\theta$ et $p = \frac{1}{3}y$; d'où $Pp = \frac{2}{3}Ly^3$; le point placé au-dessus de y indiquant qu'il faut y faire $x = H$. De plus, en conservant les mêmes dénominations que ci-dessus, il est aisé de voir que l'on a

$$\overline{OG} = f - \frac{2Ly(H-x)dx}{\Pi} ;$$

l'intégrale devant être prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = H$. On tire de là, à cause de $\Pi = 2Lydx$,

$$\Pi.\overline{OG} = 2L(\int xy dx - h \int y dx).$$

Appliquons cette formule au cylindre dont la base est une ellipse ou un cercle. Si l'on fait $y = \sqrt{m} \left(\frac{n}{m} - x \right) z$ (*), on intégrera facilement, et on trouvera

$$\int xy dx - h \int y dx = \frac{n^2}{2.3.4m^{\frac{1}{2}}(1+z^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ 3[z^5 - z + (1+z^2)^3 \text{Arc}(\text{Tang.} = z)] \left(\frac{n}{m} - 2h \right) - \frac{8n}{m} z^3 \right\}.$$

Lorsque la base du cylindre est un cercle, on a $m=1$, $n=2a$, $z = \sqrt{\frac{H}{2a-H}}$; on trouve ainsi, tout calcul fait,

$$t = \frac{1}{2} \text{Cos.} \left\{ t \sqrt{\frac{a^2 g \rho L}{MK^2} \left[\frac{(H-a)\sqrt{H(2a-H)}}{a^2} + 2 \text{Arc.} \left(\text{Tang.} = \sqrt{\frac{H}{2a-H}} \right) (a-h) + t' \right]} \right\}.$$

Cette expression coïncide avec celle que nous avons obtenue précédemment d'une autre manière; car, au moyen de la formule connue de trigonométrie qui donne la tangente de la somme de deux arcs, en fonction des tangentes de chacun d'eux, on trouve

$$2 \text{Arc} \left(\text{Tang.} = \sqrt{\frac{H}{2a-H}} \right) = \frac{1}{2} \pi + \text{Arc} \left(\text{Sin.} = \frac{H-a}{H} \right).$$

(*) Voyez le *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, par M. LACROIX, tom. II, pag. 30 (2.^{me} édition).

52 OSCILLATIONS ET ÉQUILIBRE

En conservant les mêmes dénominations que ci-dessus, on trouve, pour la sphère dont le rayon est a , soit par l'une soit par l'autre des deux méthodes que nous venons de rapporter

$$\zeta = \epsilon \text{Cos.} \left\{ t \sqrt{\frac{\rho p^{\infty}}{M} [a^2 - (a-H)^2] + \epsilon'} \right\},$$

$$\theta = \epsilon_1 \text{Cos.} \left\{ t \sqrt{\frac{\rho p^{\infty}}{3MK^2} [(H-a)[3a^2 - (H-a)^2] + 2a^3](a-h) + \epsilon'_1} \right\}$$

ϵ , ϵ' , ϵ_1 , ϵ'_1 étant les constantes arbitraires.

On peut parvenir très-facilement aux expressions précédentes de θ , relatives au cylindre et à la sphère, en considérant que, quel que soit le dérangement du corps, le centre de gravité du fluide que ce corps déplace est toujours sur une droite KL (fig. 2) verticale, passant par le centre du cercle ou de la sphère; distance qui est généralement $(a-h)\text{Sin.}\theta$, ou bien $(a-h)\theta$, et qui doit être multipliée, dans le premier cas, par le volume d'un segment de cylindre, et dans le second, par le volume d'un segment de sphère; calcul que l'on peut faire par la géométrie ordinaire, et auquel répondent les expressions précédentes, qui deviennent respectivement, dans le cas où le cylindre et la sphère sont entièrement plongés dans le fluide

$$\zeta = \epsilon \text{Cos.} \left\{ t \sqrt{\frac{\rho^2}{MK^2} \pi a^2 L(a-h) + \epsilon} \right\},$$

$$\theta = \epsilon_1 \text{Cos.} \left\{ t \sqrt{\frac{\rho^2}{MK^2} \cdot \frac{4\pi a^3}{3} (a-h) + \epsilon'_1} \right\}.$$

Quant aux valeurs de ζ , elles sont nulles, comme cela doit être.

L'inspection des valeurs de ζ et θ relatives au cylindre à base circulaire et à la sphère, suffit pour faire voir, d'une part, que
le

le mouvement diminue à mesure que $\frac{\rho}{M}$ et L augmentent ensemble ou séparément ; et de l'autre part, que le mouvement de translation étant le plus grand possible, lorsque l'enfoncement H est fort petit, augmente jusqu'à $H=a$; et qu'enfin il diminue jusqu'à $H=2a$, où il est nul. Mais, comme la densité ρ se trouve liée avec la hauteur H , il faudrait avoir ρ en fonction de H ou réciproquement, afin de pouvoir évaluer l'enfoncement H qui répond au mouvement d'oscillation le plus lent. Quant au mouvement de rotation, la quantité qui multiplie $a-h$ devant toujours être positive, on voit que le corps oscillera autour de la position d'équilibre, ou qu'il restera dans la position où il aura été placé, ou enfin qu'il chavirera, suivant que la hauteur h du centre de gravité sera plus petite que le rayon a de la base du cylindre ou de la sphère, ou qu'elle lui sera égale, ou enfin qu'elle sera plus grande.

Passons maintenant au cas général. Soient, pour cela, Ox , Oy , Oz (fig. 3) trois axes rectangulaires, menés par le point O , centre de gravité du corps. Soit LOz un plan qui fasse, avec l'axe des x , un angle $\alpha+\varphi$, de manière à ce que φ soit l'angle variable dû au mouvement du corps autour de l'axe Oz , que nous supposons vertical, et α un angle constant, pris à volonté. Soient encore OL la commune section de ce dernier plan avec celui des xy , en sorte que l'on ait $LOx=\alpha+\varphi$; $ABCD$ la section du corps faite par le plan LOz ; AB la section du même corps faite par le plan de flottaison. Si l'on suppose en outre que la ligne Oz' , située dans le plan LOz , ne soit autre chose que l'axe Oz qui, après le dérangement du corps de sa position d'équilibre, a pris cette situation Oz' , et que ξ et ψ soient respectivement les projections de l'angle $zOz'=\theta$, sur les plans des xz et des yz ; il est clair que les équations du mouvement de rotation, autour des axes Oy et Ox , étant analogues à l'équation (6) des problèmes précédens, on aura, en y comprenant l'équation du mouvement de translation,

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + g \rho \int d\bar{y} &= 0, \\ MK^2 \frac{d^2 \xi}{dt^2} + g \rho \int \bar{x} d\rho &= 0, \\ MK'^2 \frac{d^2 \psi}{dt^2} + g \rho \int \bar{y} d\rho &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

MK^2 et MK'^2 désignant les moments d'inertie relatifs aux axes des y et des x ; quant aux autres quantités, elles ont la même signification que dans les problèmes précédens. Tout se réduit ainsi à avoir les intégrales $\int d\rho$, $\int \bar{x} d\rho$, $\int \bar{y} d\rho$, étendues à toute la partie du corps plongée dans le fluide.

Les moyens qui se présentent ici pour avoir les intégrales sont analogues à ceux que nous avons employés pour les corps terminés par des surfaces de révolution, et pour ceux qu'un plan invariable de situation, dans le mouvement, partage en deux parties symétriques. Nous nous bornerons, dans le présent mémoire, à indiquer le dernier de ces moyens, qui nous a paru plus simple; parce que nous emploierons une autre méthode pour arriver aux équations du problème.

En effet, si l'on rapporte l'équation de la surface courbe qui termine le corps à trois axes respectivement parallèles aux axes Ox , Oy , Oz , ayant le point H pour origine, et que l'on considère z comme une constante dans cette équation, à laquelle nous donnerons la forme $z=f(x, y)$; on aura l'équation d'une section du corps parallèle au plan de flottaison; l'aire de cette section sera une fonction de z qui, multipliée par dz , sera l'élément $d\rho$. \bar{x} et \bar{y} seront aussi des fonctions de z ; donc, en intégrant, depuis $x=0$ jusqu'à x égal à la distance comprise entre le plan de flottaison et un plan qui, lui étant parallèle, soit tangent à la surface courbe

qui termine le corps, on aura les intégrales $\int d\rho$, $\int \bar{x}d\rho$, $\int \bar{y}d\rho$ étendues à toute la partie de ce corps plongées dans le fluide.

Les conditions

$$\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dz}{dy} = 0,$$

étant celles d'un plan parallèle au plan de flottaison; et tangent à la surface courbe qui termine le corps; elles feront connaître les coordonnées du point de tangence, lesquelles étant substituées dans l'équation

$$z = f(x, y),$$

donneront la valeur de la coördonnée verticale z , limite des intégrales en question.

Soient maintenant Ox' , Oy' , Oz' trois axes fixes dans le corps, auxquels on rapporte d'abord l'équation de la surface du corps. Pour rapporter cette même surface aux axes respectivement parallèles à Ox , Oy , Oz , ayant le point H pour origine, il faut, suivant la méthode d'Euler (*), avoir l'équation du plan des $x'y'$, qui s'obtiendra au moyen de l'équation de la droite Oz ; savoir:

$$z = x \text{Cot.} \xi, \quad z = y \text{Cot.} \psi,$$

afin d'en déduire l'angle que fait l'axe des x' avec l'intersection des plans des xy et des $x'y'$, et l'angle que fait cette intersection avec l'axe des x .

Le calcul du premier de ces angles présente deux cas, savoir:

(*) Voyez le *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* de M. Lacroix, tom. I.^{er}, pag. 536 (2.^{me} édition).

56 OSCILLATIONS ET ÉQUILIBRE

1.° lorsque l'axe des x' est dans le plan zOz' ; cas qui se rapporte à un triangle sphérique rectangle dont on connaît les deux côtés qui comprennent l'angle droit , en fonction des angles θ , ξ , ψ , φ ;
 2.° lorsque l'axe des x' fait un angle ω avec l'intersection des plans des xy et des $x'y'$; cas qui se rapporte au calcul de deux triangles sphériques , l'un rectangle et l'autre obliquangle , dans chacun desquels on connaît deux côtés et l'angle compris.

On aura ainsi les intégrales $\int d\nu$, $\int x d\nu$, $\int y d\nu$, en fonction des angles θ , ξ , ψ , φ , ω , et de l'enfoncement ζ . Éliminant ensuite les angles θ , φ , ω , au moyen des relations que l'on obtiendra , par les formules de trigonométrie sphérique , on aura ainsi les équations (11), en fonction seulement des angles ξ et ψ et de l'enfoncement ζ . Au reste , les relations que l'on aura entre tous les angles θ , ξ , ψ , φ , ω , pourront servir à transformer les équations (11) de manière à n'y faire entrer que deux de ces derniers angles , ce qui pourra simplifier l'intégration dans certains cas. Lorsque l'angle ω est nul , on a les relations

$$\text{Tang.}\xi = \text{Cos.}(\omega + \varphi)\text{Tang.}\theta ,$$

$$\text{Tang.}\psi = \text{Sin.}(\omega + \varphi)\text{Tang.}\theta :$$

lesquelles suffisent , comme on voit , pour éliminer les angles θ et φ des équations (11).

Telles seraient les équations générales du problème , en faisant abstraction de la résistance du fluide , ce qui est fort inexact. Nous pourrions néanmoins en déduire le cas que l'on sait généralement résoudre : celui où le dérangement du corps de sa position d'équilibre est fort petit , et pour lequel la résistance du fluide est une quantité assez peu sensible pour être négligée ; mais nous nous contenterons , dans le présent mémoire , de traiter ce dernier cas , en y appliquant directement une méthode analogue à celle que nous avons employée précédemment.

Pour cela, nous mènerons, par le point A, un plan perpendiculaire à l'axe Oz'. Soit AC la section qui en résulte. Puisque le corps a été incliné suivant le plan ABCD; on conçoit que la section AC touche la section AB au point A. Soit G le centre de gravité de la partie ADC, lequel se trouve nécessairement sur l'axe OZ'; soient E le centre de gravité du secteur ABC, et M le centre commun de gravité de ces deux parties réunies, c'est-à-dire, le centre de gravité de la partie du corps plongée dans le fluide. Soient enfin σ , σ' les projections de l'angle GOM sur les plans des xz et des γz , respectivement; on aura, par le principe des momens, et en vertu de la notation adoptée précédemment,

$$\int \bar{x} d\nu = (\Pi) \overline{OG} \text{Sin.}(\xi + \sigma),$$

$$\int \bar{y} d\nu = (\Pi) \overline{OG} \text{Sin.}(\psi + \sigma');$$

Π désignant la partie du volume du corps plongé dans le fluide, dans l'état d'équilibre, et \overline{OG} la distance du centre de gravité du même volume au point O. On trouve, par les formules de trigonométrie, et en se bornant aux premières puissances des angles ξ et ψ ,

$$\sigma = \frac{Pp\xi}{(\Pi \cdot \overline{OG}) \text{Cos.} \alpha}, \quad \sigma' = \frac{Pq\psi}{(\Pi \cdot \overline{OG}) \text{Sin.} \alpha};$$

par conséquent on a, dans la même hypothèse,

$$\int \bar{x} d\nu = \left(\Pi \cdot \overline{OG} + \frac{Pp}{\text{Cos.} \alpha} \right) \xi,$$

$$\int \bar{y} d\nu = \left(\Pi \cdot \overline{OG} + \frac{Pq}{\text{Sin.} \alpha} \right) \psi;$$

P étant le volume du segment ABC divisé par α , et p , q étant

58 OSCILLATIONS ET ÉQUILIBRE

les coordonnées horizontales du centre de gravité du même segment, rapportées aux axes Ox , Oy .

De plus, il est aisé de démontrer (en se bornant toujours aux premières puissances de ζ , ξ , ψ) que

$$\int d\dot{\nu} = A \cdot \zeta ;$$

A représentant la surface de la section du corps faite par le plan de flottaison, dans sa position d'équilibre. Donc, substituant ces dernières expressions dans les équations (11) et intégrant, on aura

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \varepsilon \text{Cos.} \left(\frac{g\rho}{M} \cdot A + \varepsilon' \right), \\ \xi &= \varepsilon_1 \text{Cos.} \left\{ t \sqrt{\frac{g\rho}{MK^2} \left(\Pi \overline{OG} + \frac{Fp}{\text{Cos.} \alpha} \right) + \varepsilon'_1} \right\}, \\ \psi &= \varepsilon_2 \text{Cos.} \left\{ t \sqrt{\frac{g\rho}{MK^2} \left(\Pi \cdot \overline{OG} + \frac{D \sin. \alpha}{Pq} \right) + \varepsilon'_2} \right\}; \end{aligned} \right\} (12)$$

ε , ε' , ε_1 , ε'_1 , ε_2 , ε'_2 étant les constantes arbitraires.

Appliquons ces formules à l'ellipsoïde. Nous aurons d'abord

$$A = \frac{\pi ab}{c^2} [c^2 - (H-c)^2],$$

$$\Pi \cdot \overline{OG} = \frac{\pi ab}{12c^2} [6c^2 H(H-2h) + (H-c)^3(h-3f-c) + (4h-c)c^3];$$

a , b , c étant les trois axes de l'ellipsoïde, de manière à ce que l'axe C soit vertical, dans la position d'équilibre.

Pour avoir Pp et Pq , supposons que la figure 4 représente le segment ABC de la figure 3. Soient Ax' une tangente au point A ; m , n les coordonnées de ce point, rapportées aux axes Ax , Ay , qui sont ceux de la figure 3, transportés parallèlement à eux-mêmes; β l'angle que fait la tangente Ax' avec l'axe des x ;

l'angle $BOx = \alpha$. Cela posé, si l'on conçoit la pyramide élémentaire $Opqrs$, déterminée par les deux plans consécutifs ArC , AqB , faisant entre eux l'angle θ fort petit, et par deux autres plans consécutifs Ops , Oqs , perpendiculaires au plan ArC , et faisant entre eux un angle infiniment petit $d\nu$; l'angle ν étant compté à partir de l'axe des x , on trouvera

$$Pp = -\frac{1}{4\text{Sec.}\beta} \int \{ r^4(\text{Sin.}\nu\text{Cos.}\nu - \text{Tang.}\beta\text{Cos.}^2\nu) + (m\text{Tang.}\beta - n)r^3\text{Cos.}\nu \} d\nu,$$

$$Pq = -\frac{1}{4\text{Sec.}\beta} \int \{ r^4(\text{Sin.}^2\nu - \text{Tang.}\beta\text{Sin.}\nu\text{Cos.}\nu) + (m\text{Tang.}\beta - n)r^3\text{Sin.}\nu \} d\nu;$$

les intégrales devant être prises depuis $\nu = 0$ jusqu'à $\nu = 2\pi$; formules dans lesquelles on a d'ailleurs

$$r = \frac{a'b'}{\sqrt{a'^2\text{Sin.}^2\nu + b'^2\text{Cos.}^2\nu}} \left\{ \begin{array}{l} a' = \frac{a\sqrt{H(2c-H)}}{c}; \\ b' = \frac{b\sqrt{H(2c-H)}}{c}; \end{array} \right.$$

$$m = -\frac{ab\sqrt{H(2c-H)}}{c\sqrt{a^2\text{Tang.}^2\alpha + b^2}}, \quad n = \frac{ab}{c} \frac{\sqrt{H(2c-H)} \cdot \text{Tang.}\alpha}{\sqrt{a^2\text{Tang.}^2\alpha + b^2}},$$

$$\text{Tang.}\beta = \frac{b^2}{a^2\text{Tang.}\alpha}, \quad \text{Sec.}\beta = \frac{\sqrt{a^4\text{Tang.}^2\alpha + b^4}}{a^2\text{Tang.}\alpha}.$$

Les différentielles à intégrer sont, comme l'on voit,

$$r^4 d\nu \cdot \text{Sin.}\nu\text{Cos.}\nu, \quad r^3 d\nu \cdot \text{Sin.}\nu, \quad r^3 d\nu \cdot \text{Cos.}\nu, \quad r^4 d\nu \cdot \text{Sin.}^2\nu, \quad r^4 d\nu \cdot \text{Cos.}^2\nu:$$

Il est aisé de voir, 1.^o que l'intégrale de la première de ces différentielles est algébrique; 2.^o que la seconde et la troisième sont du genre de celles que l'on appelle *binômes*, et sont par conséquent faciles à intégrer; 3.^o enfin que la quatrième et la cinquième sont

60 OSCILLATIONS ET ÉQUILIBRE

du genre de celles que l'on appelle *irrationnelles*, et qu'elles pourront s'intégrer en faisant

$$\text{Pour la quatrième } z = \sqrt{\frac{1 + \text{Sin.}\nu}{1 - \text{Sin.}\nu}},$$

$$\text{Et pour la cinquième } z = \sqrt{\frac{1 + \text{Cos.}\nu}{1 - \text{Cos.}\nu}};$$

car on trouve ainsi

$$r^4 d\nu \cdot \text{Sin.}^2 \nu = \frac{2a'^4 b'^4 (z^2 - 1)^2 (z^2 + 1) dz}{\{a'^2 (z^2 - 1)^2 + 4b'^2 z^2\}^2},$$

$$r^4 d\nu \cdot \text{Cos.}^2 \nu = - \frac{2a'^4 b'^4 (z^2 - 1)(z^2 + 1) dz}{\{b'^2 (z^2 - 1)^2 + 4a'^2 z^2\}^2}.$$

Dans le cas d'un ellipsoïde de révolution autour de l'axe C, on a $a = b$, $a' = b'$, $r = a'$; on trouve pour ce cas

$$\frac{Pp}{\text{Cos.}\alpha} = \frac{a^4 H^2 (2c - H)^{2\alpha}}{4c^4}, \quad \frac{Pq}{\text{Sin.}\alpha} = \frac{a^4 H^2 (2c - H)^{2\alpha}}{4c^4};$$

quantités indépendantes de l'angle α , comme cela doit être, puisque l'on a $\xi = \theta \text{Cos.}\alpha$, $\psi = \theta \text{Sin.}\alpha$; c'est-à-dire que l'angle α est alors enveloppé dans les valeurs des constantes ε_1 et ε_2 . Il résulte de là que

$$\xi = \varepsilon_1 \text{Cos.} \left\{ t \sqrt{\frac{gP^{\alpha}}{3MK^2} \left[(a - H^3 + a^2(3H - a))(a - h) + \frac{3H^2(2c - H)^{\alpha}(a^4 - c^4)}{4c^4} + \varepsilon_1' \right]} \right\}.$$

Ce résultat convient également à ψ , en changeant seulement les constantes ε_2 et ε_1' . On voit, par cette valeur de ξ , que le corps oscillera autour de sa position d'équilibre; qu'il restera dans la position où on l'aura placé, ou enfin qu'il chavirera, suivant que h sera plus petit que

$$\frac{3H^2(2c-H)^2(a^4-c^4)}{4c^4\{(a-H)^3+a^2(3H-a)\}} + a,$$

égale à cette quantité ou plus grande qu'elle. De plus, cette valeur de ξ , qui coïncide avec celle de θ relative à la sphère, lorsque $a=c$, donne le même résultat lorsque $H=2c$, c'est-à-dire, lorsque l'ellipsoïde est entièrement plongé dans le fluide, ce qui fait voir que le mouvement est nul dans ce cas (comme on le sait d'ailleurs) lorsque le centre de gravité du corps est à son centre de figure.
