
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

KRAMP

Astronomie. Analyse de l'éclipse de soleil du 7 de septembre 1820 ; avec application aux deux villes de Montpellier et de Strasbourg

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 8 (1817-1818), p. 331-346

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1817-1818__8__331_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1817-1818, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ASTRONOMIE.

*Analyse de l'éclipse de soleil du 7 de septembre 1820 ;
avec application aux deux villes de Montpellier et
de Strasbourg.*

Par M. le professeur KRAMP, correspondant de l'académie
des sciences, doyen de la faculté des sciences de
Strasbourg, etc. (*).



§. I.

Éclipse géocentrique.

1. ON trouve, dans la *Connaissance des temps*, pour l'année 1820,
au 27 septembre,

Parallaxe horizontale de la lune, sous l'équateur, $53'.54''$;

Parallaxe horizontale du soleil. $8'',52719$;

Demi-diamètre horizontal de la lune $14'.41'' = 881''$;

Demi-diamètre horizontal du soleil $15'.54'',8 = 954'',8$;

Logarithme du rayon vecteur de la terre. $0,003012$.

(*). Voyez, pour l'interprétation des symboles, la page 40 du précédent volume.

$$\text{Donc } A=24187, \quad \text{Log. } A=4,3835886 ;$$

$$B=63,7748, \quad \text{Log. } B=1,8046495 .$$

Somme des deux demi-diamètres $30'.35'',8=1835'',8 ;$

2. On trouve, de plus, dans le même recueil, pour midi du mois de septembre,

$$\text{Longitude du soleil ; le 7 } \dots \lambda = 164^{\circ}.42'.41'' ,$$

$$\text{le 8 } \dots \lambda' = 165^{\circ}.41'.6 ;$$

$$\text{donc } \lambda' - \lambda = 0^{\circ}.58'.25 ;$$

$$\text{c'est-à-dire, } \lambda' - \lambda = 3505'' .$$

3. Quant à l'angle horaire, on trouve, toujours pour midi du mois de septembre,

$$\text{Ascension droite du soleil, le 7 } \dots = 165^{\circ}.55'.30'' ;$$

$$\text{le 8 } \dots = 166^{\circ}.49'.33 ,$$

$$\text{Différence } \dots = 54'.3 ;$$

Donc, l'angle horaire, pendant le 7 septembre, sera

$$165^{\circ}.55'.30'' + (360^{\circ}.54'.3'')t ;$$

Le temps étant compté du 7 de septembre à midi, et le jour solaire étant pris pour unité.

4. On aura donc, en allant d'heure en heure,

Longit.

	<i>Longit. du soleil.</i>	<i>Angle horaire.</i>
Pour 0 heure	164°.42'.41" + 0"	165°.55'.30" + 0°.0'.0" ;
1 heure	164 .42 .41 +146	165 .55 .30 +15 .2 .15 ;
2 heures	164 .42 .41 +292	165 .55 .30 +30 .4 .30 ;
3 heures	164 .42 .41 +438	165 .55 .30 +45 .6 .45 ,
4 heures	164 .42 .41 +584	165 .55 .30 +60 .9 . 0 .

5. *Longitude de la lune.*

Le 6, à midi	152°. 0'.32" = 547232"	$\left. \begin{array}{l} 21247'' \\ 21218 \\ 21203 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -29'' \\ -15 \end{array} \left. \right\} +14''.$
à minuit	157 .54 .39 = 586479	
Le 7, à midi	163 .48 .17 = 589697	
à minuit	169 .41 .40 = 610900	

Il en résulte $a = 547232''$,

$$\Delta a = 21247 \text{ ,}$$

$$2\Delta^2 a = -29 \text{ ,}$$

$$6\Delta^3 a = +14 \text{ ;}$$

donc

$$6\text{Long. lunaire} = 3283392'' + 127597''t - 129''t^2 + 14''t^3 \text{ ;}$$

6. *Latitude de la lune.*

$$\begin{array}{l}
 \text{Le 6, à midi } 1^{\circ}.53'.11'' = 6791'' \\
 \quad \text{à minuit } 1.22.14 = 4924 \\
 \text{Le 7, à midi } 0.50.6 = 3006 \\
 \quad \text{à minuit } 0.17.36 = 1056
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 -1867'' \\
 -1918 \\
 -1950
 \end{array} \right|
 \left. \begin{array}{l}
 -57'' \\
 -32
 \end{array} \right| + 19''.$$

$$\text{Il en résulte } a = 6791'',$$

$$\Delta a = -1867,$$

$$2\Delta^2 a = -51,$$

$$6\Delta^3 a = +19;$$

donc

$$6\text{Latit. lunaire} = 40746'' - 11011''t - 210''t^2 + 19''t^3.$$

7. Dans les formules précédentes (5, 6), le temps est compté du *six* de septembre à midi, et le demi-jour est pris pour unité; si donc l'on veut compter le temps du *sept* à midi, il faudra changer t en $2+t$; ce qui donnera

$$6\text{Long. Lun.} = 3538182 + 127249t + 45t^2 + 14t^3,$$

$$6\text{Lat. Lun.} = 18036 - 11623t - 96t^2 + 19t^3.$$

8. En remplaçant successivement le temps t par $\frac{0}{12}, \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}$, on aura (4) le tableau suivant :

	<u>Long. Sol.</u>	<u>Long. Lun.</u>	<u>Lat. Lun.</u>
à midi	592961''	589697''	3006''
une heure	593107	591464	2845
deux heures	593253	593237	2683
trois heures	593399	595000	2522
quatre heures	593545	596766	2358

9. La longitude du soleil , moins celle de la lune , donne le mouvement relatif de cette dernière. Nous l'avons exposé dans le tableau qui suit , de même que la latitude ou les lignes désignées par q' et r' , ainsi que leurs logarithmes ; nous y avons joint encore les longitudes du soleil , avec les logarithmes de leurs sinus et cosinus.

$$t=0^h, q'=-3264, r'=+3006, \text{Log.}q'=3.5137502, \text{Log.}r'=3.4779890$$

1 ;	-1643,	+2844;	3.2156376,	3.4539206
2 ;	- 22,	+2682,	1.3424227,	3.4284588
3 ,	+1599,	+2520;	3.2038485,	3.4014005
4 ,	+3220,	+2358,	3.5078559;	3.3725438

$$t=0^h, L=164^{\circ}.42'.41'', \text{Cos.}L=-9.9843517, \text{Sin.}L=9.4210803$$

1 ,	164 .45. 7 ,	-9.9844321 ,	9.4199532
2 ,	164 .47. 33 ,	-9.9845193 ,	9.4188239
3 ,	164 .49. 59 ,	-9.9846040 ,	9.4176925
4 ,	164 .52. 25 ,	-9.9846916 ,	9.4165559

Les signes des logarithmes doivent s'interpréter comme il a été dit à la page 174 du présent volume.

10. A ces données , il faut ajouter le logarithme de k , dans les deux équations

$$q = \frac{Bq'}{B-x} - \frac{Ky}{B-x}, \quad r = \frac{Br'}{B-x} - \frac{Kz}{B-x};$$

or, on a $\text{Log}.k=5.3132784$. Quant au logarithme du sinus et du cosinus de l'angle ϵ ou de l'obliquité de l'écliptique, on trouve

$$\text{Sin.}\epsilon = +9.6000987 \quad \text{Cos.}\epsilon = +9.9625113 .$$

11. A ces préceptes nous ajouterons encore les suivans ; quoi- qu'ils ne se rapportent pas immédiatement à l'éclipse géocentrique.

Soient a le demi-diamètre du soleil ,

b le demi-diamètre de la lune ;

c la distance de leurs centres .

Il est aisé de voir

1.° Que, tant qu'on aura

$$c > a + b ,$$

l'éclipse n'aura point lieu ;

2.° Que, lorsqu'on aura

$$c = a + b ,$$

l'éclipse commencera ou finira ;

3.° Que, tant qu'on aura

$$c \begin{cases} < a + b ; \\ > a - b ; \end{cases}$$

l'éclipse, déjà commencée, sera partielle et aura pour sa grandeur

$$a + b - c ;$$

4.° Que lorsqu'on aura

$$c = a - b ,$$

l'éclipse commencera à être annulaire, ou finira de l'être, pourvu toutefois qu'on ait $b > a$;

5.° Que, tant qu'on aura

$$c < a - b,$$

l'éclipse continuera à être annulaire; qu'alors la plus grande et la moindre largeur de l'anneau seront respectivement

$$a - b + c, \quad a - b - c;$$

6.° Qu'enfin si l'on a $c = 0$ l'éclipse sera centrale; auquel cas la largeur uniforme de l'anneau sera $a - b$.

12. On peut demander aussi en quel point du disque solaire se fera la première ou la dernière impression du disque lunaire. Supposons, pour fixer les idées, qu'il soit question de la première impression; soient respectivement A, B (fig. 14) les centres du soleil et de la lune en contact; AZ le vertical du soleil; AH un cercle perpendiculaire à celui-là, conduit par son centre; et AE l'écliptique. Tout se réduira à déterminer l'angle ZAB, ou son complément BAH = BAE + EAH. Or, en abaissant BM, perpendiculaire sur AE, on a $Tang.BAM = \frac{BM}{AM} = \frac{r}{q}$, fraction parfaitement connue. Quant à l'angle EAH, il est égal à la distance du zénith au pôle de l'écliptique. Soient donc Z le zénith (fig. 15), P le pôle de l'équateur et Q celui de l'écliptique. Dans le triangle sphérique PQZ, le côté PZ sera le complément de la hauteur du pôle ou $90^\circ - \lambda$; PQ sera l'obliquité de l'écliptique ou ϵ ; et l'angle P sera notre angle horaire, moins l'ascension droite au moment de midi, ou $\mu - A$; on aura donc

$$\text{Cos.} QZ = \text{Sin.} \lambda \text{Cos.} \epsilon + \text{Cos.} \lambda \text{Sin.} \epsilon \text{Cos.} (\mu - A) :$$

Ajoutant donc cet angle à celui dont la tangente est $\frac{r}{q}$, et ôtant la somme

de 90° ; on aura l'angle ZAB (fig 14) ; il déterminera le point de la circonférence solaire où se fait le contact des deux limbes , à la première et à la dernière impressions du disque lunaire.

13. Voilà donc à quoi se réduit le travail entier d'une éclipse de soleil , à chaque instant de la traversée curviligne que fait le limbe de la lune sur le disque solaire , depuis la première impression jusqu'à la dernière. La hauteur du pôle λ est connue par les tables. Il en faut dire autant de l'angle horaire , égal à la différence des méridiens , plus le temps réduit en degrés. Prenant le rayon de la terre pour unité , on aura

$$X = \text{Cos.}\lambda . \text{Cos.}\mu ,$$

$$Y = \text{Cos.}\lambda \text{ Sin.}\mu ,$$

$$Z = \text{Sin.}\lambda ;$$

et de là

$$x = +X \text{Cos.}L + Y \text{Cos.}\epsilon \text{ Sin.}L + Z \text{Sin.}\epsilon \text{ Sin.}\sigma ,$$

$$y = -X \text{Sin.}L + Y \text{Cos.}\epsilon \text{ Cos.}L + Z \text{Sin.}\epsilon \text{ Cos.}\sigma ,$$

$$z = -Y \text{Sin.}\epsilon + Z \text{Cos.}\epsilon .$$

Ensuite de quoi on aura

$$q = \frac{Bq'}{B-x} - \frac{Ky}{B-x} ,$$

$$r = \frac{Br'}{B-x} - \frac{Kz}{B-x} .$$

La distance apparente entre les centres des deux astres sera $\sqrt{q^2+r^2}$, et la grandeur de la partie éclipsée sera égale à la somme de leurs demi-diamètres , moins la distance de leurs centres. Il sera donc facile , par des interpolations , de trouver les époques du

commencement et de la fin de l'éclipse, celle de la plus grande phase, et, en général, tout ce qui peut concerner la position du disque lunaire sur le disque du soleil, à chaque instant déterminé d'avance.

§. II.

Éclipse de Montpellier.

La hauteur du pôle où l'angle λ est de $43^{\circ}.36'.16''$. La différence des méridiens de Paris et de Montpellier est de $1^{\circ}.32'.34''$ vers l'est, faisant en temps $0^h.6^m.10^s$. On aura donc

$$\text{Cos.}\lambda = 9.8598116 ,$$

$$\text{Sin.}\lambda = 9.8386427 .$$

Quant à l'angle horaire μ , on trouve pour

$t = 0^h$, $\mu = 167^{\circ}.28'.0''$,	$\text{Cos.}\mu = -9.9895254$,	$\text{Sin.}\mu = +9.3364749$
1, 182.30.15,	-9.9995855,	-9.6404023
2, 197.37.30,	-9.9793198;	-9.4791422
3, 212.34.45;	-9.9256463,	-9.7311569
4, 227.37.0,	-9.8287163,	-9.8684396

On a ensuite pour

$t = 0^h$,	$\text{Log.}X = -9.8493370$,	$\text{Log.}Y = +9.0962859$,	$\text{Log.}Z = +9.8386427$
1,	-9.8593971,	-8.5002139,	+9.8386427
2,	-9.8391314,	-9.3389538,	+9.8386427
3,	-9.7854579,	-9.5909685,	+9.8386427
4,	-9.6885279,	-9.7282512,	+9.8386427.

de là on conclut, pour

$$t=0^h, \quad x=+0.7922641, \quad y=-0.2175620, \quad z=+0.5700644;$$

$$1, \quad +0.7625515, \quad -0.0466947, \quad +0.6452344;$$

$$2, \quad +0.6857936, \quad +0.1083164, \quad +0.7195425,$$

$$3, \quad +0.5672010, \quad +0.2397924, \quad +0.7878987,$$

$$4, \quad +0.4148438, \quad +0.3359179, \quad +0.8455954.$$

et enfin, pour

$$t=0^h, \quad q=-2594,66, \quad r=+1198,87,$$

$$1, \quad -1510,43, \quad +774,87,$$

$$2, \quad -375,70, \quad +364,86,$$

$$3, \quad +832,90, \quad -21,75,$$

$$4, \quad +2150,40, \quad -372,09,$$

donc, en général ;

$$q=-2594,66 \qquad r=+1198,87$$

$$+1063,86t \qquad -440,72t$$

$$+18,91t^2 \qquad +16,88t^2$$

$$+0,98t^3 \qquad -3,80t^3$$

$$+0,48t^4 \qquad +0,64t^4 ;$$

ou, en comptant le temps par quarts-d'heures,

$$q =$$

$q = -2594,660000$	$r = +1198,870000$
$+ 265,963750t$	$- 110,180833t$
$+ 1,181823t^2$	$+ 1,054739t^2$
$+ 0,015312t^3$	$- 0,059923t^3$
$+ 0,001898t^4$;	$+ 0,002516t^4$.

De là la table des coordonnées q , r , et de la distance des centres de quart-d'heure en quart-d'heure,

$t = 0^h. 0^m$	$q = -2594,66$	$r = +1198,87$	$\sqrt{q^2+r^2} = 2859$;
0.15	-2327,50	+1089,69	2570
0.30	-2057,85	+982,29	2280
0.45	-1785,57	+876,42	1989
1.0	-1570,43	+771,87	1750
1.15	-1232,20	+668,49	1401
1.30	-950,37	+566,80	1107
1.45	-665,20	+464,98	811
2.0	-375,70	+364,87	524
2.15	-81,66	+265,96	278
2.30	+217,42	+168,43	274
2.45	+523,03	+72,47	527
3.0	+832,73	-21,62	838
3.15	+1150,18	-113,52	1158
3.30	+1474,96	-202,81	1488
3.45	+1807,78	-289,03	1831
4.0	+2149,38	-371,68	2181

Le moment de la conjonction arrivera donc à $2^h.15^m + \frac{8166}{29908}$ d'un quart-d'heure, faisant $2^h.15^m.6^s$. Le passage du centre de la lune par l'écliptique aura lieu à $2^h.45^m + \frac{7247}{2409}$ d'un quart-d'heure, faisant $2^h.57^m.22^s$. Le commencement de l'éclipse sera fixé à $0^h.54^m.34^s$; et sa fin à $3^h.45^m.13^s$.

Quant à l'époque de la plus grande phase, on trouve

$$\left. \begin{array}{l} 524 = A, \\ 278 = A + B + C + D, \\ 275 = A + 2B + 4C + 8D, \\ 327 = A + 3B + 9C + 27D; \end{array} \right\} \text{ donc } \left\{ \begin{array}{l} A = +524, \\ B = -362, \\ C = +113,5, \\ D = +2,5. \end{array} \right.$$

Or,

$$3Dt = -C + \sqrt{C^2 - BD};$$

donc $t = 1,519$, faisant $2^h.22^m.47^s$.

La distance des centres sera alors de 245 secondes. La grandeur de l'éclipse sera de *dix doigts*.

§. III.

[Éclipse de Strasbourg.]

La hauteur du pôle, est de $48^{\circ}.34'.56''$. On aura donc

$$\text{Cos. } \lambda = 9.8205590;$$

$$\text{Sin. } \lambda = 9.8750064.$$

La distance du méridien de Strasbourg à celui de Paris est de $5^{\circ}.24'.36''$, faisant en temps $0^h.21^m.38^s$. Les angles horaires sont compris dans la table qui suit :

$t=0^h$, $\mu=171^{\circ}.20'.5''$, $\text{Cos.}\mu=-9.9950242$, $\text{Sin.}\mu=+9.1780030$,

1,	186 .22.20	-9.9973085,	-9.0452726,
2,	201 .24.35	-9.9689470,	-9.5623342,
3,	216 .26.50	-9.9054745,	-9.7738464,
4,	231 .29.5	-9.7942906,	-9.8934523.

On a ensuite, pour les logarithmes des coordonnées X , Y , Z ,

$t=0^h$, $X=-9.8155732$, $Y=+8.9985620$, $Z=+9.8750064$,

1,	-9.8178675,	-8.8658316,	+9.8750064,
2,	-9.7895010,	-9.3828932,	+9.8750064,
3,	-9.7860335,	-9.5944054,	+9.8750064,
4,	-9.6148496,	-9.7140113,	+9.8750064;

d'où on conclut, pour les coordonnées x , y , z ,

$t=0^h$, $x=+0.7336941$, $y=-0.2037876$, $z=+0.6481999$;

1,	+0.6951279,	-0.0502065,	+0.7171248,
2,	+0.6145502,	+0.0871652,	+0.7840474,
3,	+0.4974199,	+0.1989708,	+0.8443843,
4,	+0.3517072,	+0.2775992,	+0.8940032.

Donc

$$\begin{aligned}
 t=0^h, \quad q &= -2636,97, \quad r = +925,73, \\
 1, \quad & -1497,36, \quad +536,59, \\
 2, \quad & -306,11, \quad +154,36, \\
 3, \quad & +964,70, \quad -205,36, \\
 4, \quad & +2337,44, \quad -528,73.
 \end{aligned}$$

On aura conséquemment

$$\begin{aligned}
 q &= -2636,970 & r &= +925,730 \\
 & +1124,484t & & -386,955t \\
 & +9,316t^2 & & -5,152t^2 \\
 & +6,041t^3 & & +3,040t^3 \\
 & -0,231t^4; & & -0,073t^4;
 \end{aligned}$$

et de quart-d'heure en quart-d'heure,

$$\begin{aligned}
 q &= -2636,970000 & r &= +925,730000 \\
 & +281,121041t & & -96,738750t \\
 & +0,582266t^2 & & -0,321979t^2 \\
 & +0,094388t^3 & & +0,047500t^3 \\
 & -0,000902t^4; & & -0,000286t^4.
 \end{aligned}$$

Done

$t=0^h. 0^m$	$q=-2636,97$	$r=+925,73$	$\sqrt{q^2+r^2}=2795$
0.15	-2355,17	+828,72	2496
0.30	-2071,66	+731,34	2197
0.45	-1785,89	+633,88	1895
1. 0	-1497,36	+536,59	1590
1.15	-1205,57	+439,74	1284
1.30	- 910,07	+343,59	973
1.45	- 610,39	+248,38	658
2. 0	- 306,13	+154,35	342
2.15	+ 3,12	+ 61,74	62
2.30	+ 317,75	- 29,24	319
2.45	+ 638,12	-118,36	648
3. 0	+ 964,55	-205,41	987
3.15	+1297,36	-290,18	1329
3.30	+1636,85	-372,49	1680
3.45	+1983,28	-452,13	2034
4. 0	+2336,90	-528,92	2396

La conjonction aura donc lieu à $2^h.14^m.51^s$, temps vrai de Paris ; le passage du centre de la lune par l'écliptique à $2^h.25^m.17^s$; le commencement de l'éclipse à $0^h.47^m.5^s$; et sa fin à $3^h.36^m.37^s$.

Quant au milieu, soient

$$\begin{array}{l}
 342=A, \\
 62=A+B+C+D, \\
 319=A+2B+4C+8D, \\
 648=A+3B+9C+27D;
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.
 \begin{array}{l}
 \text{d'où} \\ \\ \\ \\
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 A=+342,0; \\
 B=-202,5, \\
 C=+501,0, \\
 D=-77,5.
 \end{array} \right.$$

Donc

$$\sqrt{c^2 - 3BD} = 296 ,$$

$$t = 0,8817 ,$$

$$t^2 = 0,7774 ,$$

$$t^3 = 0,6864 ;$$

donc aussi

$$A + Bt + Ct^2 + Dt^3 = 59''$$

L'éclipse sera donc ANNULAIRE. En voici le calcul.

On a

$$a = 954,8 ,$$

$$b = 88,0 ,$$

$$a - b = 73,8 .$$

Comme cette différence, entre les deux demi-diamètres, est plus grande que la moindre distance des centres, l'éclipse sera annulaire.

Quant à la largeur des deux parties extrêmes de l'anneau, on a

$$a - b + c = 132'',8 ,$$

$$a - b - c = 14'',8 (*) .$$
