ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

PONCELET

Géométrie des courbes. Théorèmes nouveaux sur les lignes du second ordre

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 8 (1817-1818), p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1817-1818__8__1_0>

ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GÉOMÉTRIE DES COURBES.

Théorèmes nouveaux sur les lignes du second ordre ;

Par M. Poncelet, capitaine du génie, ancien élève de l'école polytechnique.

On s'est beaucoup occupé, jusqu'à présent, des propriétés des sections coniques concernant, soit la direction soit la longueur de certaines lignes droites qui en dépendent ; mais on s'est peu appliqué, ce me semble, à rechercher les propriétés de ces courbes qui ne seraient relatives qu'à la relation des angles formés par ces mêmes droites. Cependant, on sait depuis long-temps que les sections coniques peuvent être engendrées d'une infinité de manières différentes, par le mouvement d'angles constans, qui tournent au tour de leurs sommets comme pôles ; d'où il paraît naturel d'inférer qu'il doit exister des dépendances mutuelles, très-remarquables, entre les angles de certains systèmes de droites liées entre elles d'une manière relative à la nature générale de ces courbes. Le cas du cercle, en particulier, présente un grand nombre de semblables propriétés, soit à l'égard des polygones qui lui sont inscrits, soit à l'égard de ceux qui lui sont circonscrits, soit, etc. La plupart d'entre elles sont même connues depuis la plus haute antiquité. Comment donc se fait-il qu'on ait si peu songé jusqu'ici à généraliser ces propriétés, en cherchant à les étendre à une section conique quelconque? N'en résulterait-il pas, en effet, un grand avantage, pour la parfaite connaissance de ces dernières? et n'obtiendrait-on pas de leur rapprochement des solutions élégantes et simples de problèmes difficiles, quand on les attaque par les voies ordinaires? On doit regretter que M. Carnot, à qui la géométrie est redevable de tant de perfectionnemens heureux, n'ait pas donné plus d'extension et plus de développement à l'idée lumineuse qu'il expose au commencement de la section IV de sa *Géométrie de position*, touchant les figures dans lesquelles on peut déterminer les angles, sans l'intervention des quantités linéaires ou trigonométriques. On conçoit, en effet, que cette théorie ne doit pas se borner aux figures composées de lignes droites seules, et qu'elle doit s'étendre également à toutes celles dans lesquelles il entre des courbes dont la génération peut avoir lieu par le moyen des angles seulement; pourvu toutefois que le système de droites dont on examine les angles soit lié, d'une manière convenable, à la nature particulière de cette courbe. Un cercle, par exemple, est dans le cas dont il s'agit; car, il peut être considéré comme le lieu du sommet d'un angle constant, dont les côtés tourneraient autour de deux points fixes: aussi sait-on que ce cercle jouit d'un grand nombre de propriétés relatives aux angles de certaines lignes droites, tracées d'une manière convenable sur son plan. Je répète à dessein le mot *convenable;* car si, par exemple, on considérait un triangle inscrit à ce cercle, il est évident que cette circonstance n'établirait point une nouvelle dépendance entre ses angles, puisqu'un triangle quelconque est toujours inscriptible au cercle. Il n'en serait plus de même si l'on considérait un quadrilatère ou, en général, un polygone quelconque inscrit à ce cercle ; car un quadrilatère, et à plus forte raison, un polygone d'un plus grand nombre de côtés, n'est pas indistinctement, comme un triangle, susceptible d'être inscrit à cette courbe particulière.

Ces idées demanderaient d'être développées et éclaircies plus que nous ne venons de le faire ; mais une pareille entreprise sortirait des bornes de cet article ; et nous nous contenterons, pour le moment, de présenter, sans aucune réflexion, et le plus rapidement qu'il nous sera possible, une suite de propriétés des sections coniques, relatives aux angles de certaines droites ; propriétés qui pourront être envisagées comme l'extension d'autant de propriétés du même genre, correspondant à la circonférence du cercle.

Nous rappellerons d'abord la proposition suivante, dont on trouve la démonstration à la page 49 du V.e volume des *Annales*, et qui est due à l'illustre Maclaurin (*).

« Si l'un des côtés d'une équerre passe constamment par l'un des » foyers d'une section conique, et que son sommet parcoure la » circonférence décrite sur le premier axe comme diamètre, s'il » s'agit de l'ellipse ou de l'hyperbole, ou la tangente au sommet, » s'il s'agit d'une parabole, l'autre côté de l'équerre sera constamment » tangent à la courbe ».

Soit PNN′ ou C (fig. 1) la circonférence décrite sur le premier axe, et F le foyer de la section conique dont il s'agit ; T*t*, T*t*′, *tt*′ étant trois tangentes quelconques à cette courbe, et FN, FN′, F*n* trois perpendiculaires abaissées respectivement du foyer F sur ces tangentes ; leurs pieds N, N′, *n*, seront situés sur la circonférence *C*. Prolongeons les trois tangentes jusqu'à leurs rencontres

(*) Voyez sa *Geometria organica*, sect. III, pag. 102.

respectives en T, t, t'; et les deux perpendiculaires FN, FN', jusqu'à leurs nouvelles intersections, en P, P', avec la circonférence C. Traçons enfin nN, nN', Ft, Ft'.

Puisque les angles n, N' du quadrilatère $nFN't'$ sont droits, ce quadrilatère est inscriptible au cercle ; donc

$$Ang.Ft'n = Ang.FN'n = \tfrac{1}{2}Arc.nNP' ,$$

On prouverait pareillement que le quadrilatère $nFNt$ est aussi inscriptible au cercle ; donc

$$Ang.Ftn = Ang.FNn = \tfrac{1}{2}Arc.nN'P .$$

De ces valeurs des angles $Ft'n$, Ftn du triangle tFt', on conclut

$$Ang.tFt' = \tfrac{1}{2}Cir.NN'PP' - \tfrac{1}{2}Arc.nNP' - \tfrac{1}{2}Arc.nN'P = \tfrac{1}{2}Arc PQP' .$$

Supposons donc que, les tangentes Tt, Tt' restant fixes, la tangente tt' devienne mobile ; les perpendiculaires FN, FN' ne varieront pas, ni conséquemment l'arc PQP', compris entre elles ; donc l'angle tFt' restera de la même grandeur, pour toutes les positions de la tangente mobile tt'.

La démonstration devient encore plus simple pour le cas de la parabole ; mais alors l'angle constant tFt' devient précisément le supplément de l'angle T des deux tangentes fixes. On peut donc énoncer généralement ce théorème :

I. *L'angle sous lequel on voit, de l'un des foyers d'une section conique, la partie d'une tangente mobile interceptée entre deux tangentes fixes est toujours constant, pour toutes les positions de cette première tangente. Dans le cas particulier de la parabole, cet angle constant est le supplément de l'angle formé par les deux tangentes fixes.*

Parmi les conséquences nombreuses auxquelles ce théorème peut conduire, nous nous contenterons de rapporter les suivantes, parce qu'elles offrent quelque chose de simple et de facile à saisir.

Supposons que, dans une de ces positions, la tangente mobile vienne à se confondre avec l'une des deux tangentes fixes, avec TN par exemple; les points t', t se confondront alors, l'un avec T et l'autre avec le point de contact de cette tangente avec la courbe; pareille chose arriverait, si la tangente mobile se confondait avec la seconde TN′ des deux tangentes fixes. Donc

II. *Si, de l'un des foyers d'une section conique, on mène des droites tant au sommet de l'angle formé par deux tangentes quelconques à la courbe qu'aux points de contact des deux côtés de cet angle avec elle, la première de ces deux droites divisera en deux parties égales l'angle formé par les deux autres.*

Ce théorème devant avoir lieu quelle que soit la position des deux tangentes en question, il sera vrai encore dans le cas où un ou plusieurs des trois points ci-dessus se trouveront situés à une distance infinie; ce qui conduit à plusieurs conséquences sur lesquelles il est inutile de s'arrêter.

Si l'on se donnait le foyer F d'une section conique et trois tangentes quelconques TN, TN′, tt'; l'angle tFt' serait déterminé de grandeur; et par conséquent, en le faisant tourner au tour du foyer donné F, la droite tt' qui le soutend deviendrait mobile, et roulerait, d'après ce qui précède, sur la section conique elle-même, dont on aurait ainsi une infinité de tangentes. Le dernier des théorèmes ci-dessus donnerait ensuite, pour chacune des tangentes mobiles et des tangentes fixes, le point où cette tangente vient toucher la courbe.

Au lieu de se donner une position de la tangente mobile tt', on peut ne se donner que l'angle constant tFt'; et alors, en faisant mouvoir cet angle autour de son sommet F, sans en changer la grandeur, les conséquences seront encore les mêmes. Donc

III. *Si, sur le plan d'un angle fixe donné, on fait tourner au-*

tour d'un point arbitraire et fixe, pris pour sommet, un angle quelconque, invariable de grandeur; et qu'on trace ensuite, pour chacune de ses positions, les deux droites qui soutendent à la fois l'angle fixe et l'angle mobile; chacune des deux séries formées par ces droites, enveloppera, en particulier, une seule et même section conique, ayant précisément pour foyer le sommet fixe de l'angle mobile; et les deux côtés de l'angle fixe pour tangentes. En outre, si l'on abaisse du foyer des perpendiculaires, tant sur les deux côtés de l'angle fixe que sur toutes les autres tangentes, appartenant à une même série; les pieds de ces perpendiculaires seront sur une même circonférence ayant le premier axe de la courbe pour diamètre.

Dans le cas particulier où l'angle mobile est égal à l'angle fixe ou en est le supplément, l'une des deux courbes devient une parabole, et le cercle qui lui correspond dégénère en une tangente au sommet de cette parabole.

Cinq droites quelconques étant tracées sur un même plan, la section conique qui les touche toutes à la fois, est, comme l'on sait, déterminée et unique; et l'on en peut aisément trouver les foyers avec la règle et le compas. Donc, si l'on considère deux de ces cinq tangentes comme représentant les deux tangentes fixes dont il a été question ci-dessus, et les trois autres, terminées à celles-là, comme représentant la tangente mobile, dans trois de ses situations, on aura résolu, avec la règle et le compas, cette question, assez difficile, quand on l'attaque d'une manière directe,

IV. *Trouver le point duquel on verrait sous le même angle les parties de trois droites données sur un même plan, interceptées entre deux autres lignes droites aussi données sur ce plan?*

Ce problème est analogue à celui que M. Carnot a résolu, dans sa *Géométrie de position* (pag. 381, art. 327); et l'on voit que sa solution directe donnerait aussi celle de cet autre problème, fort intéressant: *Trouver directement les foyers d'une section conique inscrite à un pentagone donné?*

Jusqu'ici nous n'avons encore considéré que ce qui se passe à l'égard de l'un des foyers d'une section conique; mais il est évident que les mêmes propriétés ont lieu relativement à l'autre foyer; car les raisonnemens ci-dessus demeurent les mêmes dans les deux cas. Nous n'avons donc plus, pour le moment, qu'à nous occuper des propriétés qui peuvent appartenir simultanément au système de ces deux foyers.

Soient F, F′ (fig. 2) les deux foyers dont il s'agit, C la circonférence du cercle décrit sur le premier axe comme diamètre, enfin TN, TN′ deux tangentes quelconques à cette courbe; d'après ce qui a été démontré plus haut, l'angle sous lequel on verrait du foyer F la partie d'une troisième tangente arbitraire comprise entre les deux autres, aurait pour mesure la moitié de l'arc PQP′, intercepté sur la circonférence C, par les prolongemens FP, FP′ des perpendiculaires FN, FN′ abaissées du foyer F sur les deux tangentes TN, TN′. Par la même raison, l'angle sous lequel on verrait, de l'autre foyer F′, cette même partie de la troisième tangente, aurait pour mesure la moitié de l'arc QPQ′, intercepté sur la circonférence C, par les prolongemens F′Q, F′Q′ des perpendiculaires F′M′, F′M abaissées du foyer F′ sur les deux tangentes TN′, TT. Appelant donc F le premier de ces angles F' le second, l'on aura

$$F=\tfrac{1}{2}Arc\mathrm{PQP'}\ ,\quad \mathrm{F}=\tfrac{1}{2}Arc\mathrm{QPQ'}=\tfrac{1}{2}Arc\mathrm{PQ'}+\tfrac{1}{2}Arc\mathrm{PQ}\ .$$

Or, à cause des parallèles, symétriquement placées par rapport au centre du cercle, on a $Arc\mathrm{PQ}=Arc\mathrm{MN'}$ et $Arc\mathrm{PQ'}=Arc\mathrm{MN}$; donc

$$\mathrm{F'}=\tfrac{1}{2}Arc\mathrm{MN}+\tfrac{1}{2}Arc\mathrm{MN'}=\tfrac{1}{2}Arc\mathrm{NMN'}\ ;$$

donc aussi

$$F+F'=\tfrac{1}{2}Arc\mathrm{PQP'}+\tfrac{1}{2}Arc\mathrm{NMN'}\ ;$$

mais on a aussi

$$Ang.\mathrm{NFN}'=\tfrac{1}{2}Arc\mathrm{PQP}'+\tfrac{1}{2}Arc\mathrm{NMN}'\ ;$$

donc

$$F+F'=Ang.\mathrm{NFN}' \quad \text{ou} \quad F+F=200^\circ-\mathrm{T}\ ;$$

puisque, dans le quadrilatère TNFN', les deux angles opposés N, N' sont droits.

Nous avons supposé, dans ce raisonnement, que les deux foyers F, F' étaient intérieurs au cercle ; et c'est ce qui arrive pour l'ellipse. S'ils lui étaient extérieurs, ainsi qu'il arrive pour l'hyperbole, on trouverait que ce n'est plus la somme, mais la différence des angles F, F' qui est égale au supplément de l'angle T.

En appelant donc, pour abréger, *angles vecteurs* d'une même droite les angles sous lesquels cette droite est vue des deux foyers d'une section conique, on aura ce théorème, dont l'analogie avec un autre théorème très-connu est digne de remarque :

V. *Lorsqu'une tangente à une section conique se termine à deux autres tangentes à la même courbe, la somme des angles vecteurs de cette première tangente, dans l'ellipse, et leur différence, dans l'hyperbole, est constante et égale au supplément de l'angle des deux tangentes fixes* (*)

Quand la section conique devient une parabole, on a $F'=0$, et par conséquent $F=200^\circ-T$, ce qui s'accorde avec ce que nous avons dit plus haut. Pareillement, quand elle devient un cercle, on a $F'=F$, et par consequent $2F=200^\circ-T$, comme on peut le vérifier *a priori*. Le cas où T serait nul ou égal à 100° offrirait aussi des circonstances remarquables ; mais nous ne nous y arrêterons pas.

(*) L'angle dont il s'agit ici est celui qui comprend les deux foyers entre ses côtés dans l'ellipse, ou qui n'en comprend aucun dans l'hyperbole.

Revenons à la propriété qui fait le sujet principal de cet article, et examinons, en particulier, les conséquences qui en résultent pour le cas où la section conique est une parabole.

Soit (fig. 3) F le foyer; soient TM, TN deux tangentes quelconques données, et mn une troisième tangente mobile de la parabole dont il s'agit. D'après ce qui a été dit plus haut, l'*angle vecteur* $m\mathrm{F}n$ est toujours constant et égal au supplément de l'angle MTN des deux premières tangentes; donc ce même angle sera égal à l'angle $m\mathrm{T}n$; et par conséquent, si l'on trace FT, le quadrilatère $\mathrm{FT}mn$ sera inscriptible au cercle. De là suit ce théorème :

VI. *Un triangle étant circonscrit à une parabole ; si on lui circonscrit, à son tour, une circonférence de cercle, elle passera nécessairement par le foyer même de la courbe.*

Donc, si l'on se donnait, à volonté, une quatrième tangente $m'n'$ à la parabole, on obtiendrait immédiatement son foyer, en circonscrivant des circonférences de cercles à deux quelconques des quatre triangles formés par les rencontres mutuelles de cette nouvelle tangente avec les trois autres. Le point d'intersection de ces quatre circonférences, qui n'appartiennent à aucune des tangentes données, est évidemment un point unique par où elles passent toutes à la fois; car une même parabole ne saurait avoir deux foyers à une distance finie (*).

Nous venons déjà de voir que l'angle $m\mathrm{F}n$ est égal à l'angle $m\mathrm{T}n$, qui est opposé à mn, dans le triangle $m\mathrm{T}n$; mais il est visible que ce même angle pourrait n'être qu'égal à son supplément, suivant la position de ce dernier ; donc

VII. *Un triangle étant circonscrit à une parabole, l'angle sous lequel on voit, du foyer de la courbe, chacun des côtés de ce*

(*) Ceci donne une nouvelle solution, extrêmement simple, du problème traité à la page 308 du VII.e volume de ce recueil.

J. D. G.

triangle, est le supplément de l'angle opposé du même triangle ou lui est égal, suivant que le foyer se trouve ou ne se trouve pas compris entre les côtés de cet angle, indéfiniment prolongés.

Puisque le quadrilatère FnmT est inscriptible à un cercle, quelle que soit la tangente mobile mn, l'angle FTm sera toujours supplément de son opposé Fnm, et égal, par conséquent, à l'angle Fnt; mais l'angle FTm est invariable, puisque, par hypothèse, TM et TN sont fixes; donc

VIII. *Si l'un des côtés d'un angle invariable passe constamment par le foyer d'une parabole, et que son sommet parcourt une tangente quelconque à la courbe, l'autre côté de l'angle mobile sera aussi constamment tangent à la courbe.*

On peut aussi énoncer ce théorème ainsi qu'il suit :

IX. *Si du foyer d'une parabole on abaisse, sous un même angle donné, des obliques sur toutes ses tangentes; les pieds de toutes ces obliques se trouveront appartenir à une même droite, tangente elle-même à la courbe.*

Ces théorèmes ont leurs analogues, pour le cas d'une section conique quelconque. Alors les pieds des obliqués appartiennent à une même circonférence, touchant la courbe en deux points.

On peut déduire de tout ce qui précède plusieurs conséquences faciles et très-remarquables.

X. *Toutes les paraboles inscrites à un même triangle quelconque ont leurs foyers sur la circonférence d'un même cercle, circonscrit à ce triangle.*

Chaque point de la circonférence dont il s'agit, peut, d'après cela, être considéré comme le foyer d'une parabole inscrite au triangle auquel cette circonférence est circonscrite. Donc

XI. *Si, d'un point quelconque de la circonférence d'un cercle circonscrit à un triangle donné, on abaisse, sous un même angle arbitraire quelconque, des obliques sur les directions des trois côtés* *de ce triangle ; leurs trois pieds seront situés sur une seule et même ligne droite.*

Ce dernier théorème est une extension de celui de R. Simson, rappelé à la page 251 du tome IV.e de ce recueil (*), par M. Servois, qui l'emploie à résoudre, d'une manière très-élégante, un problème de géométrie pratique, concernant les alignemens sur le terrain.

Ce qui précède suffirait, sans doute, pour établir la vérité de ce que nous avons avancé, au commencement de cet article, touchant l'avantage qu'il y aurait à considérer, d'une manière plus spéciale qu'on ne l'a fait jusqu'ici, les propriétés des sections coniques qui n'ont rapport qu'aux angles seuls de certains systèmes de lignes droites qui dépendent de ces courbes ; mais, par l'effet de la négligence des géomètres sur ce point, la matière est si riche que nous ne pouvons nous refuser, malgré l'étendue de cet article, à présenter encore quelques recherches du même genre, particulières à la parabole, et remarquables sur-tout par leur analogie avec certaines propriétés des polygones réguliers inscrits et circonscrits au cercle.

Soient (fig. 4) f le foyer d'une parabole $mnopq$, bo, bn deux tangentes quelconques à cette parabole, la touchant aux points respectifs o, n. Qu'on trace les rayons vecteurs fo, fn, correspondant à ces derniers points, et la droite fb, joignant le foyer au point de concours des deux tangentes ; d'après les théorèmes (II et V), les angles bfn, bfo sont égaux entre eux et au supplément de l'angle nbo, d'où il suit que leur somme nfo est double de ce supplément ; c'est-à-dire, que, dans le quadrilatère $nbof$, on a

(*) Outre la démonstration algébrique du théorème de Simson que contient la note de l'endroit cité, on en trouve une démonstration purement géométrique à la page 254 du VII.e volume de ce recueil.

J. D. G.

$$f=400^\circ-2b\,;$$

et, comme on a d'ailleurs

$$o+n+b+f=400^\circ,$$

il s'ensuit qu'on doit avoir aussi

$$b=o+n.$$

Supposons présentement que $abcd$...... soit un polygone circonscrit à la parabole, et dont tous les angles soient égaux entre eux ; en menant des rayons vecteurs tant aux sommets a, b, c, d, ... qu'aux points de contact m, n, o, p, q, ...; il résultera de ce qui précède,

XII. 1.° *Que le rayon vecteur dirigé vers chaque sommet divisera en deux parties égales l'angle de ceux qui se termineront aux deux points de contact entre lesquels ce sommet se trouve compris.*

2.° *Que le rayon vecteur dirigé vers chaque point de contact divisera aussi en deux parties égales, l'angle formé par ceux qui se termineront aux deux sommets entre lesquels ce point de contact se trouve compris.*

3.° *Que, par conséquent, tous les angles formés autour du foyer, par les rayons vecteurs consécutifs sont égaux entre eux; d'où il suit que chacun de ces angles doit être égal à quatre angles droits divisés par leur nombre, lorsque le polygone est fermé.*

Rappelons-nous présentement cette proposition, démontrée par le marquis de l'Hôpital (*).

(*) Voyez son *Traité analitique des sections coniques* (Liv. VIII).

« La suite des sommets mobiles d'un angle de grandeur donnée » et constante, circonscrit à une parabole, forme une seule et même » section conique, dont un des foyers se confond précisément avec » celui de la parabole ».

Et cet autre, démontré par M. Brianchon (*).

« Si le sommet d'un angle mobile et variable est assujetti à » parcourir une première section conique, et que ses côtés soient » assujettis à en toucher une seconde, la corde de contact avec » celle-ci en enveloppera une troisième ».

En remarquant que, dans le cas actuel, cette troisième section conique a un foyer commun avec la première, on pourra encore conclure,

4.° *Que le polygone circonscrit à notre parabole est lui-même inscriptible à une autre section conique qui a un foyer commun avec elle, et qui est aussi évidemment une parabole.*

5.° *Qu'enfin si l'on joint les points de contact consécutifs par des cordes, de manière à former un polygone inscrit, ce polygone sera lui-même circonscriptible à une nouvelle section conique, qui sera encore évidemment une parabole, dont le foyer coïncidera également avec celui de la première.*

(*) Voyez le 10.me cahier du *Journal de l'école polytechnique* (pag. 14).

STATIQUE.

Conditions d'équilibre, dans un système libre, de forme invariable;

Par M. Gergonne.

Je suis déjà revenu à deux fois, dans le premier volume de ce recueil (pages 1 et 171), sur le sujet qui va m'occuper. J'ose espérer que la manière dont je vais l'envisager ne laissera plus rien à désirer, soit sous le rapport de la rigueur et de la brièveté, soit sous celui de la symétrie qui, dans ces derniers temps, est devenue, avec raison, une sorte de besoin pour les géomètres. Le difficile, dans cette recherche, est de prouver nettement que les conditions auxquelles on parvient sont à la fois nécessaires et suffisantes, et de les obtenir par des procédés qui ne puissent souffrir d'exception dans aucun cas. C'est par là principalement que pèchent la plupart des nombreuses théories qu'on a données jusqu'ici des conditions d'équilibre; et c'est principalement aussi à éviter les inconvéniens qu'elles présentent sous ces divers rapports, que j'ai donné toute mon attention. La méthode que je vais exposer présente, d'ailleurs, l'avantage remarquable de n'exiger absolument aucune sorte de calcul.

1. Avant d'entrer en matière, observons qu'une puissance donnée