
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

BÉRARD

Analyse transcendante. Méthode nouvelle pour quarrer les courbes, et intégrer, entre des limites données, toute fonction différentielle d'une seule variable

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 7 (1816-1817), p. 101-116

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1816-1817__7__101_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1816-1817, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Méthode nouvelle pour quarrer les courbes, et intégrer, entre des limites données, toute fonction différentielle d'une seule variable ;

PAR M. BÉRARD, principal du collège de Briançon, membre de plusieurs sociétés savantes.

~~~~~

**M.** Kramp a publié (*Annales de mathématiques*, tom. VI, pag. 281) une méthode ingénieuse, dont la première idée est due à M. d'Obenheim, pour intégrer, entre des limites données, toutes sortes de fonctions à une seule variable. L'esprit de cette méthode consiste à décomposer le trapèze curviligne qu'on veut quarrer, successivement en 2, 3, 4, 6 et 12 autres trapèzes; on a ainsi des aires qui approchent de plus en plus de la véritable aire qu'on cherche. On imagine ensuite que ces aires sont les ordonnées d'une courbe qui se rapproche, de plus en plus, d'une ligne asymptotique, et l'ordonnée de cette courbe correspondante à  $x=0$  est une valeur très-approchée de l'aire cherchée.

Il faut cependant convenir que cette méthode a quelque chose d'empirique qui ne satisfait pas pleinement l'esprit. L'équation par laquelle on lie les aires successives aux termes de la série est entièrement arbitraire; les résultats que l'on obtient varient suivant la loi des exposans de  $x$ , dans la valeur générale de  $y$ ; loi qui semblerait devoir varier suivant les différens cas. Il arrive donc ainsi

*Tom. VII, n.º IV, 1.º octobre 1816.*

que cette méthode ne procure pas réellement le degré d'exactitude qu'on croirait être en droit d'en attendre (\*).

M. Gergonne , dans un mémoire qui fait suite à celui de M. Kramp , a proposé un perfectionnement qui repose sur une idée séduisante , mais qui malheureusement ne réussit qu'imparfaitement , et quelquefois même éloigne du but. Ce géomètre cherche diverses aires de plus en plus approchées , à la manière de M. Kramp , en employant successivement différens diviseurs. Il considère ensuite ces aires diverses comme les termes d'une nouvelle série , dont il cherche , toujours par les formules de M. Kramp , le terme qui répond à  $x=0$ . Ce procédé est inexact , parce que la loi qui lie les termes de la nouvelle série est inconnue , et que l'hypothèse qu'on adopte arbitrairement ne saurait réussir qu'imparfaitement ou par hasard. Aussi , si l'on applique cette extension de la méthode à la recherche du logarithme de 2 , en employant 17 ordonnées , on trouve des résultats qui s'éloignent de plus en plus de la vérité , à mesure qu'on pousse plus loin le procédé.

M. Kramp paraît avoir reconnu les inconvéniens de sa première méthode , puisqu'il en a proposé une autre ( tom. VI , pag. 372 ). Cette seconde méthode paraît en effet préférable à la première ; elle consiste (\*\*) à faire passer par un certain nombre de points donnés , sur la courbe proposée , une courbe parabolique  $y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\dots$  ; cette courbe parabolique coïncide d'autant

(\*) L'observation critique de M. Bérard est très-juste ; mais elle porte malheureusement sur toutes les méthodes connues d'interpolation , dont pourtant on ne saurait se passer. On verra , au surplus , que le procédé que M. Bérard substitue à celui de M. Kramp n'est pas lui-même exempt d'arbitraire , et conséquemment d'empirisme. Il serait même assez difficile de concevoir que cela pût être autrement ; attendu que cela tient intimement à la nature de la question.

J. D. G.

(\*\*) M. Lacroix ( *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* , tom. II , page 141 ) annonce , pour son troisième volume , une méthode à peu près semblable.

( Note de l'auteur ) ,

mieux avec la courbe à quarrer, que le nombre des ordonnées cherchées est plus grand; et il ne s'agit plus ensuite que d'intégrer la formule  $ydx$ , composée alors d'une suite de monomes intégrables.

D'après ce principe, M. Kramp a calculé douze formules, correspondant aux cas où l'on connaît 2, 3, 4, . . . . 12 ou 13 ordonnées de l'espace à quarrer. L'usage de ces formules est très-simple. La substitution des valeurs connues des ordonnées donne, sur-le-champ, l'aire cherchée  $\int Xdx$ , plus exactement et plus brièvement que par les séries ou toute autre méthode connue.

M. Kramp s'est arrêté à la formule relative à 13 ordonnées: « J'aurais désiré, dit-il, de pouvoir continuer cette table, jusqu'au » diviseur 24; mais l'immensité du travail m'a effrayé. Il doit sans » doute y avoir quelque méthode beaucoup plus abrégée que celle » que nous avons suivie; mais, jusqu'ici du moins, je l'ai cherchée » vainement. »

M. Kramp n'ayant pu trouver les formules relatives à un nombre d'ordonnées plus grand que 13, a cherché à y suppléer, en combinant les formules de son tableau; mais le surcroît d'exactitude qui en est résulté n'est pas assez important pour ne rien laisser à désirer. J'ai donc cherché à perfectionner un travail si utile; j'ai vaincu la difficulté qui avait arrêté M. Kramp; et j'ai eu la satisfaction de rencontrer une nouvelle manière de procéder, qui n'a rien de commun avec celle de cet habile géomètre, et qui permet de pousser l'approximation aussi loin qu'on le désire.

### §. I. Exposé d'une nouvelle méthode.

Le problème qui nous occupe peut être énoncé ainsi:

*PROBLÈME. Connaissant les deux ordonnées extrêmes d'un arc de courbe, ainsi que plusieurs ordonnées intermédiaires équidistantes; exprimer, en fonction de ces ordonnées, et de l'intervalle commun qui les sépare, l'aire mixtiligne comprise entre les deux ordonnées extrêmes, la courbe et l'axe des  $x$ ?*

La solution de ce problème sera aussi celle du problème de l'intégration des fonctions d'une seule variable, entre des limites données ; puisque intégrer  $Xdx$ , c'est quarrer la courbe qui a pour équation  $y=X$ .

*Solution.* Soient en général  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$  les ordonnées connues et équidistantes de la courbe  $y=X$  qu'il s'agit de quarrer entre les limites  $y_0$  et  $y_n$ . Pour plus de simplicité, prenons pour unité l'intervalle commun qui sépare les ordonnées consécutives, et supposons que la première  $y_0$  réponde à l'abscisse  $x=0$ . Soit enfin  $S$  l'aire cherchée  $=\int Xdx$ .

Pour fixer les idées, supposons les ordonnées données au nombre de *sept* seulement. Ce que nous dirons de ce cas particulier pourra facilement s'appliquer à tout autre.

1.<sup>o</sup> Je remarque que, quelle que soit la valeur de chacun des coefficients de la formule que nous cherchons, les ordonnées également éloignées des extrêmes doivent y jouer le même rôle ; puisque la première peut être prise pour la dernière, *et vice versa* : ainsi, par exemple,  $y_2$  et  $y_4$  doivent avoir le même coefficient.

Cette observation réduit de moitié le nombre des coefficients à trouver, et prouve que la formule doit être de cette forme :

$$S = A(y_0 + y_6) + B(y_1 + y_5) + C(y_2 + y_4) + Dy_3. \quad (F)$$

2.<sup>o</sup> Les coefficients inconnus  $A, B, C, D$ , doivent être tels que, quand la courbe proposée  $y=X$  est quarrable, la formule (F) donne, pour l'aire  $S$ , une valeur numérique, connue et exacte. Ainsi, il est nécessaire et suffisant que ces coefficients satisfassent à quatre cas particuliers, que l'on pourra d'ailleurs prendre d'une infinité de manières différentes ; mais parmi lesquels on fera bien de choisir les plus simples, pourvu qu'elles soient distinctes et qu'elles ne soient pas comportées les unes par les autres.

3.<sup>o</sup> Supposons, pour premier cas particulier, que la ligne à quarrer est une droite, parallèle à l'axe des  $x$ , dont elle est éloignée de la quantité 1. L'intervalle entre les ordonnées extrêmes étant 6,

l'espace à quarrer sera un rectangle = 6. La formule (F) deviendra donc

$$6 = 2A + 2B + 2C + D. \quad (1)$$

4.° Supposons, pour deuxième cas particulier, que la ligne à quarrer est une parabole ordinaire, touchant l'axe des  $x$  au milieu de l'intervalle qui sépare les ordonnées extrêmes, et passant par les extrémités supérieures de ces ordonnées, que nous supposerons, comme ci-dessus, égales entre elles et à l'unité.

En supposant, pour un moment, l'origine transportée au point de contact, et remarquant que l'on doit avoir  $y = 1$ , lorsqu'on fait  $x = \pm 3$ , l'équation de cette parabole sera  $y = \frac{x^2}{9}$ ; son aire sera  $\int y dx = \int \frac{x^2 dx}{9} = \frac{x^3}{27}$  qui, prise jusqu'à  $x = 3$ , donnera 1 pour la moitié de la surface dont il s'agit, de manière que cette surface  $S$  sera 2.

Au moyen de l'équation  $y = \frac{x^2}{9}$ , on trouvera de plus

$$\begin{aligned} y_0 = y_6 = 1, & \text{ d'où } y_0 + y_6 = 2; \\ y_1 = y_5 = \frac{4}{9}, & \text{ d'où } y_1 + y_5 = \frac{8}{9}; \\ y_2 = y_4 = \frac{1}{9}, & \text{ d'où } y_2 + y_4 = \frac{2}{9}; \\ y_3 = 0. & \end{aligned}$$

En conséquence, on aura, par la substitution dans la formule (F),  $2 = 2A + \frac{2}{9}B + \frac{2}{9}C$ ; c'est-à-dire,

$$9 = 9A + 4B + C. \quad (2)$$

5.° Supposons, pour troisième cas particulier, que la ligne à quarrer est une parabole du quatrième degré, assujettie d'ailleurs aux mêmes conditions que la précédente; en la rapportant à la même origine, elle aura pour équation  $y = \frac{x^4}{81}$  d'où  $S = \int \frac{x^4 dx}{81} = \frac{x^5}{5 \cdot 81}$ ; ce qui donne, entre les limites  $+3$  et  $-3$ ,  $S = \frac{2}{7}$ . On a de plus

$$y_0 = y_6 = 1, \text{ d'où } y_0 + y_6 = 2;$$

$$y_2 = y_4 = \frac{1}{81}, \text{ d'où } y_2 + y_4 = \frac{2}{81};$$

$$y_2 = y_4 = \frac{1}{81}, \text{ d'où } y_2 + y_4 = \frac{2}{81};$$

$$y_3 = 0.$$

On aura donc, par la substitution dans la formule (F),  $\frac{6}{7} = 2A + \frac{12}{81}B + \frac{2}{81}C$ ; c'est-à-dire,

$$243 = 5A + 80B + 5C. \quad (3)$$

6.° Prenons enfin pour dernière courbe, et toujours sous les mêmes conditions, la parabole du sixième degré  $y = \frac{x^6}{729}$ . Nous au-

rons d'abord  $S = \int \frac{x^6 dx}{729} = \frac{x^7}{7 \cdot 729}$ ; ce qui donnera définitivement  $S = \frac{6}{7}$ .

Nous aurons ensuite

$$y_0 = y_6 = 1, \text{ d'où } y_0 + y_6 = 2;$$

$$y_1 = y_5 = \frac{64}{729}, \text{ d'où } y_1 + y_5 = \frac{128}{729};$$

$$y_2 = y_4 = \frac{1}{729}, \text{ d'où } y_2 + y_4 = \frac{2}{729};$$

$$y_3 = 0.$$

Il viendra donc, en substituant dans la formule (F),  $\frac{6}{7} = 2A + \frac{128}{729}B + \frac{2}{729}C$ ; c'est-à-dire,

$$2187 = 5103A + 448B + 7C. \quad (4)$$

7.° Nous avons donc, pour déterminer  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , les quatre équations

$$6 = 2A + 2B + 2C + D,$$

$$9 = 9A + 4B + C,$$

$$243 = 405A + 80B + 5C,$$

$$2187 = 5103A + 448B + 7C;$$

desquelles on tire, par l'élimination,

$$A = \frac{41}{140}, \quad B = \frac{216}{140}, \quad C = \frac{27}{140}, \quad D = \frac{271}{140};$$

substituant ces valeurs dans la formule (F), après avoir multiplié  $S$  par 6, ce qui revient à prendre pour unité l'intervalle qui sépare les ordonnées extrêmes, on aura enfin

$$840S = 41(y_0 + y_6) + 216(y_1 + y_5) + 27(y_2 + y_4) + 272y_3. \quad (F_6)$$

On procédera de la même manière, pour trouver les formules qui doivent correspondre à un autre nombre d'ordonnées ou de divisions de l'intervalle qui sépare les ordonnées extrêmes; ainsi, par exemple, pour 9 ordonnées ou 8 divisions, on emploiera les paraboles des 2.<sup>e</sup>, 4.<sup>e</sup>, 6.<sup>e</sup> et 8.<sup>e</sup> degrés, et de plus la parallèle à l'axe des  $x$ .

Tout autre système de courbes employé à la recherche des valeurs numériques des coefficients, exigerait une élimination plus laborieuse; et les formules auxquelles il conduirait, différentes de celles-ci, seraient en général moins exactes.

Il serait sans doute aussi fastidieux que superflu de transcrire ici tous les calculs qui ont servi à former le tableau que nous allons présenter, et qui offre le recueil de toutes les formules qui peuvent être utiles dans la pratique, uniformément déduites du procédé général que nous venons de faire connaître. Cependant, comme celle relative à 25 ordonnées, ou au diviseur 24 est, par son exactitude, la plus importante de toutes, et en même temps la plus longue à trouver, puisqu'elle exige environ 100 heures de calcul; je crois devoir, à son sujet, indiquer brièvement la marche du procédé, afin qu'on puisse facilement, au besoin, la vérifier, ou même la retrouver. Les applications que j'en ai faites à plusieurs exemples, et les résultats que j'en ai obtenus, semblent, au surplus, en garantir suffisamment l'exactitude.

On voit d'abord que la formule doit être de cette forme

$$S = A(y_0 + y_{14}) + B(y_1 + y_{13}) + C(y_2 + y_{12}) + \dots + Ny_{11}; \quad (F_{14})$$

et qu'il faut 13 cas particuliers pour déterminer les 13 coefficients



$A, B; C; \dots N$ . Le premier de ces cas sera, comme ci-dessus; une droite parallèle à l'axe des  $x$ , et distante d'elle d'une quantité égale à l'unité.

On imaginera ensuite une série de paraboles des 2.<sup>e</sup>, 4.<sup>e</sup>, 6.<sup>e</sup>, ... 24.<sup>e</sup> degrés, ayant toutes leur sommet sur l'axe des  $x$ , au milieu de l'intervalle qui sépare les ordonnées extrêmes, touchant cet axe en ce point, et ayant conséquemment leur axe commun parallèle à l'axe des  $y$ . Chacune d'elles passera d'ailleurs par les extrémités supérieures des deux ordonnées extrêmes, supposées égales entre elles et à l'unité. En transportant l'origine à ce sommet, les équations de ces paraboles seront

$$y = \frac{x^2}{12^2}, \quad y = \frac{x^4}{12^4}, \quad y = \frac{x^6}{12^6}, \quad \dots \quad y = \frac{x^{24}}{12^{24}}.$$

En faisant l'intervalle qui sépare les ordonnées extrêmes = 24, on calculera, pour toutes ces paraboles, les valeurs de  $S$ , prises entre ces mêmes ordonnées, lesquelles seront,  $y$  compris la parallèle à l'axe des  $x$ ,

$$\frac{24}{1}, \frac{24}{3}, \frac{24}{5}, \frac{24}{7}, \dots \frac{24}{13}.$$

On calculera enfin, pour ces mêmes paraboles, les 24 ordonnées, égales deux à deux. Leur substitution successive, ainsi que celle des valeurs correspondantes de  $S$ , dans la formule (F<sub>24</sub>), conduira aux 13 équations que voici, dont la symétrie est remarquable,

$$2A + 2B + 2C + 2D + \dots + 2L - 2M + N = 24, \quad (1)$$

$$12^2.A + 11^2.B + 10^2.C + 9^2.D + \dots + 2^2.L + M = \frac{12^3}{3}, \quad (2)$$

$$12^4.A + 11^4.B + 10^4.C + 9^4.D + \dots + 2^4.L + M = \frac{12^5}{5}, \quad (3)$$

.....

$$12^{22}.A + 11^{22}.B + 10^{22}.C + 9^{22}.D + \dots + 2^{22}.L + M = \frac{12^{23}}{13}, \quad (12)$$

$$12^{24}.A + 11^{24}.B + 10^{24}.C + 9^{24}.D + \dots + 2^{24}.L + M = \frac{12^{25}}{13}. \quad (13)$$

On éliminera  $M$ , en retranchant successivement (2) de (3), (3) de

de (4), (4) de (5), ..... (12) de (13); il en résultera 11 équations, entre lesquelles on éliminera  $L$ , en combinant encore deux à deux les équations qui se suivront immédiatement; on continuera ainsi à éliminer  $K$ ,  $I$ ,  $H$ ,  $G$ , ..... , jusqu'à ce qu'on soit parvenu à la valeur de  $A$ , d'où l'on conclura ensuite, en remontant, celles de  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , ..... ,  $M$ ; et on obtiendra enfin celle de  $N$ , au moyen de l'équation (1). Il faudra ensuite diviser chaque coefficient ou, ce qui revient au même, multiplier  $S$  par 24, afin que l'intervalle entre les ordonnées extrêmes, que nous avons d'abord supposé égal à ce nombre, devienne égal à l'unité.

Dans le tableau suivant, l'indice qui accompagne la lettre  $F$  désigne le diviseur qui sert de base à la formule correspondante; ainsi, l'expression  $(F_6)$  signifie que l'intervalle  $x$  entre les ordonnées extrêmes  $y_0$  et  $y_6$ , a été partagé en 6 parties égales, ou qu'il y a 7 ordonnées. La lettre  $S$  représente toujours  $\int X dx$ , c'est-à-dire, l'aire cherchée.

### §. II. Recueil de formules:

$$(F_1) \quad 2S = (y_0 + y_1) x;$$

$$(F_2) \quad 6S = (y_0 + y_2) x + 4y_1 x;$$

$$(F_3) \quad 8S = (y_0 + y_3) x + 3(y_1 + y_2) x;$$

$$(F_4) \quad 90S = 7(y_0 + y_4) x + 32(y_1 + y_3) x + 12y_2 x;$$

$$(F_5) \quad 288S = 19(y_0 + y_5) x + 75(y_1 + y_4) x + 50(y_2 + y_3) x;$$

$$(F_6) \quad 840S = 41(y_0 + y_6) x + 216(y_1 + y_5) x + 27(y_2 + y_4) x + 27^2 y_3 x;$$

$$(F_7) \quad 28350S = 989(y_0 + y_7) x + 5888(y_1 + y_7) x \\ - 928(y_2 + y_6) x + 10496(y_3 + y_5) x - 4540y_4 x.$$

$$\begin{aligned}
 (F_{1,2}) \quad 63063000S = & 1364651(y_0 + y_{1,2}) \\
 & + 9903168(y_1 + y_{1,1}) \\
 & - 7587864(y_2 + y_{1,0}) \\
 & + 35725120(y_3 + y_0) \\
 & - 51491295(y_4 + y_3) \\
 & + 87516288(y_5 + y_7) \\
 & - 87797136y_6.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (F_{2,4}) \quad & 3693 \ 08773 \ 59626 \ 25000 \ S = \\
 + & 35 \ 20096 \ 97351 \ 90093 \ (y_0 + y_{2,4}) \\
 + & 379 \ 27038 \ 82616 \ 11008 \ (y_1 + y_{2,3}) \\
 - & 1043 \ 44495 \ 56532 \ 09152 \ (y_2 + y_{2,2}) \\
 + & 5985 \ 25999 \ 93685 \ 55008 \ (y_3 + y_{2,1}) \\
 - & 23348 \ 69804 \ 87731 \ 57032 \ (y_4 + y_{2,0}) \\
 + & 78144 \ 92981 \ 50046 \ 56128 \ (y_5 + y_{1,9}) \\
 - & 2 \ 15016 \ 22136 \ 90572 \ 52032 \ (y_6 + y_{1,8}) \\
 + & 4 \ 99068 \ 08728 \ 71868 \ 84608 \ (y_7 + y_{1,7}) \\
 - & 9 \ 81114 \ 32053 \ 02814 \ 65657 \ (y_8 + y_{1,6}) \\
 + & 16 \ 49142 \ 12661 \ 27302 \ 24128 \ (y_9 + y_{1,5}) \\
 - & 23 \ 80252 \ 12883 \ 76579 \ 60192 \ (y_{10} + y_{1,4}) \\
 + & 29 \ 62867 \ 29026 \ 88547 \ 86048 \ (y_{11} + y_{1,3}) \\
 - & 31 \ 86001 \ 61546 \ 46751 \ 00912 \ y_{1,2}.
 \end{aligned}$$

Les cinq premières formules sont presque sans utilité dans la pratique, parce qu'elles donnent une approximation trop bornée : la 6.<sup>me</sup> servira dans les cas les plus ordinaires, ainsi que la 8.<sup>me</sup>,

la 12.<sup>me</sup> devra être employée dans le cas où l'on voudra avoir environ 10 chiffres décimaux exacts : enfin , on ne devra faire usage de la 24.<sup>me</sup> que dans les cas , extrêmement rares , où l'on voudra pousser l'exactitude jusqu'à 16 à 18 chiffres.

Dans des cas extraordinaires , où l'on aurait besoin d'une approximation encore plus grande , on pourrait calculer une formule pour 49 ordonnées : il ne faudrait pour cela que du temps et de la patience ; on peut aussi , quoique moins parfaitement , remplir le même but , en partageant l'intervalle des ordonnées extrêmes en un certain nombre de parties égales , dont chacune soit ensuite subdivisée en 24 ; en appliquant ensuite à chaque groupe de 24 divisions la formule (F<sub>24</sub>) : en voici un exemple.

Je suppose l'intervalle total partagé en 120 parties égales , par 121 ordonnées. En représentant , pour abrégér , par  $p$  ,  $a$  ,  $b$  ,  $c$  ,  $d$  , .....  $n$  , respectivement , les nombres de la formule (F<sub>24</sub>) , on obtiendra , sans difficulté , la formule suivante :

$$\begin{aligned}
 (F_{120}) \quad 5pS = & a(y_0 + 2y_{24} + 2y_{48} + 2y_{72} + 2y_{96} + y_{120}) \\
 & + b(y_1 + y_{23} + y_{25} + y_{47} + y_{49} + y_{71} + y_{73} + y_{95} + y_{97} + y_{119}) \\
 & - c(y_2 + y_{22} + y_{26} + y_{46} + y_{50} + y_{70} + y_{74} + y_{94} + y_{98} + y_{118}) \\
 & + d(y_3 + y_{21} + y_{27} + y_{45} + y_{51} + y_{69} + y_{75} + y_{93} + y_{99} + y_{117}) \\
 & - e(y_4 + y_{20} + y_{28} + y_{44} + y_{52} + y_{68} + y_{76} + y_{92} + y_{100} + y_{116}) \\
 & + f(y_5 + y_{19} + y_{29} + y_{43} + y_{53} + y_{67} + y_{77} + y_{91} + y_{101} + y_{115}) \\
 & - g(y_6 + y_{18} + y_{30} + y_{42} + y_{54} + y_{66} + y_{78} + y_{90} + y_{102} + y_{114}) \\
 & + h(y_7 + y_{17} + y_{31} + y_{41} + y_{55} + y_{65} + y_{79} + y_{89} + y_{103} + y_{113}) \\
 & - i(y_8 + y_{16} + y_{32} + y_{40} + y_{56} + y_{64} + y_{80} + y_{88} + y_{104} + y_{112}) \\
 & + k(y_9 + y_{15} + y_{33} + y_{39} + y_{57} + y_{63} + y_{81} + y_{87} + y_{105} + y_{111}) \\
 & - l(y_{10} + y_{14} + y_{34} + y_{38} + y_{58} + y_{62} + y_{82} + y_{86} + y_{106} + y_{110}) \\
 & + m(y_{11} + y_{13} + y_{35} + y_{37} + y_{59} + y_{61} + y_{83} + y_{85} + y_{107} + y_{109}) \\
 & - n(y_{12} + y_{36} + y_{60} + y_{84} + y_{108}) .
 \end{aligned}$$

Dans l'emploi de toutes ces formules, il faut remarquer que, si l'intervalle entre les ordonnées extrêmes, qui y est pris pour unité, se trouvait, en général, être  $a$ , il faudrait multiplier par  $a$  la valeur de  $S$  donnée par la formule.

Il est une autre remarque assez importante. Si la courbe à quarrer présente un point d'inflexion, entre les limites de l'intégrale cherchée, il sera bon d'évaluer séparément les portions d'aire situées de part et d'autre de ce point; car le défaut de cette attention ne pourrait qu'altérer sensiblement l'exactitude du résultat. On verra ci-après comment M. Kramp, pour avoir négligé cette remarque, a été conduit à de fausses conséquences, et a cru apercevoir un paradoxe là où il n'en existait pas. Il est presque superflu d'observer qu'il faudrait, à plus forte raison, en user ainsi, si, entre les limites de l'intégrale, la courbe offrait un ou plusieurs points de rebroussement.

### §. III. Application des formules.

Il nous reste une dernière tâche à remplir : il faut soumettre nos formules à l'expérience qui est la vraie pierre de touche de toutes les théories (\*).

Nous prendrons, pour 1.<sup>re</sup> application, la recherche du logarithme hyperbolique de 2, c'est-à-dire, en d'autres termes, la recherche de l'intégrale de  $\frac{dx}{x}$ , entre  $x=1$  et  $x=2$ , ou encore la quadrature de l'hyperbole  $y = \frac{1}{x}$ , entre les mêmes limites.

---

(\*) L'expérience est, en effet, la vraie pierre de touche des méthodes empiriques; et nous sommes malheureusement réduits à employer souvent de telles méthodes; mais les véritables théories peuvent se passer de cette sanction; et l'on n'a nullement besoin d'expérience pour être assuré, par exemple, que la surface de la sphère est quadruple de celle de l'un de ses grands cercles. Il est bien vrai que le peuple répète souvent, d'après des gens qui prétendent n'être point peuple, qu'*expérience passe science*; mais il serait fort à désirer que les géomètres pussent constamment tenir un autre langage.

Pour appliquer à cette recherche notre formule (F<sub>2,4</sub>), il faudra faire successivement, dans  $y = \frac{1}{x}$ ,

$$x=1, x=1+\frac{1}{14}, x=1+\frac{2}{14}, x=1+\frac{3}{14}, \dots, x=1+\frac{13}{14}, x=2;$$

ou bien

$$x=1, x=\frac{15}{14}, x=\frac{16}{14}, x=\frac{17}{14}, \dots, x=\frac{27}{14}, x=2;$$

ce qui donnera

$$y_0=1, y_1=\frac{14}{15}, y_2=\frac{14}{16}, y_3=\frac{14}{17}, \dots, y_{23}=\frac{14}{27}, y_{24}=\frac{1}{2}.$$

Il ne s'agira donc plus que de substituer ces valeurs dans la formule (F<sub>2,4</sub>); et on opérera d'une manière analogue, si l'on veut employer toute autre formule. Le tableau suivant présente les résultats obtenus pour *S* ou *Log.2*, par nos formules (F<sub>6</sub>), (F<sub>2</sub>), (F<sub>1,2</sub>), (F<sub>2,4</sub>), en regard desquels nous avons mis ceux de M. Kramp qui leur correspondent.

*Logarithme de 2.*

|                     | <i>Par notre méthode.</i> | <i>Suivant M. KRAMP.</i> |
|---------------------|---------------------------|--------------------------|
| (F <sub>6</sub> )   | 0,69314 80622             | 0,69314 80622            |
| (F <sub>2</sub> )   | 0,69314 72145             | 0,69314 72145            |
| (F <sub>1,2</sub> ) | 0,69314 71806 261         | 0,69314 71807 262        |
| (F <sub>2,4</sub> ) | 0,69314 71805 59945 310   |                          |

La vraie valeur étant

$$0,69314 71805 59945 309;$$

il s'ensuit que le résultat de ma formule 12 est trop fort de 0,00000 00000 662, et celui de M. Kramp de 0,00000 00001 663; l'erreur de M. Kramp est donc presque triple de la mienne.

Je n'ai point rapporté les résultats qu'on obtient des cinq premières formules, parce que, par ma méthode, ces formules sont les mêmes que celles de M. Kramp. Il en est de même pour les formules ( $F_6$ ) et ( $F_8$ ); de sorte que les résultats des deux procédés ne commencent à différer les uns des autres qu'à partir de ( $F_{12}$ ). Cette singularité semblerait assez difficile à expliquer autrement que par quelque erreur de calcul; mais le point essentiel est de savoir laquelle des deux formules doit être préférée; et l'expérience assure l'avantage à la nôtre.

Le même tableau fait encore voir que le résultat de ma formule ( $F_{24}$ ) n'est en défaut que sur le 18.<sup>me</sup> chiffre; approximation qu'aucune autre méthode ne saurait donner aussi simplement, et qui excède de beaucoup les besoins ordinaires.

J'ai pris, pour 2.<sup>me</sup> application, la détermination de la longueur de l'arc de  $45^\circ$ , ou de  $\frac{\pi}{4}$ . La tangente de l'arc étant désignée par  $x$ , on sait que la question se réduit à intégrer  $\frac{dx}{1+x^2}$ , entre les limites  $x=0$ ,  $x=1$ ; ou encore à quarrer, entre les mêmes limites la courbe  $y = \frac{1}{1+x^2}$ . En faisant successivement

$$x=0, x=\frac{1}{14}, x=\frac{2}{14}, x=\frac{3}{14}, \dots, x=\frac{13}{14}, x=1,$$

on trouve

$$y_0=1, y_1=\frac{176}{177}, y_2=\frac{176}{180}, y_3=\frac{176}{181}, \dots, y_{13}=\frac{176}{1101}, y_{24}=\frac{1}{2};$$

ces valeurs mises dans ma formule 24, on trouve

$$\pi=3.14159\ 26535\ 89790;$$

valeur qui n'est en défaut qu'au 16.<sup>m</sup>e chiffre , tandis que M. Kramp n'a pu en trouver que 12 d'exacts , par une combinaison laborieuse de plusieurs de ses formules.

Dans ce 2.<sup>m</sup>e exemple , nous n'avons trouvé que 15 chiffres exacts ; tandis que , dans le 1.<sup>er</sup> , nous en avons obtenu 17 et presque 18. La raison de cette différence est qu'ici la courbe  $y = \frac{1}{1+x^2}$  à quarrer a une inflexion , au point dont les coordonnées sont  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$  ,  $y = \frac{1}{2}$  : cette circonstance donne lieu à une anomalie qui altère le résultat. Pour éviter cette source d'erreur , il aurait fallu quarrer séparément la courbe d'abord entre les limites  $x=0$  et  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$  , et ensuite entre les limites  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$  et  $x=1$  , et prendre la somme des résultats ; mais nous n'avons ici en vue que de comparer l'emploi de notre formule 24 avec le résultat obtenu par M. Kramp (\*).

Ce géomètre , pour n'avoir point fait attention au point d'inflexion , a tiré de ses résultats des conséquences tout-à-fait fausses. En effet , sa formule n.<sup>o</sup> 8 lui a donné plus d'exactitude que ses formules n.<sup>o</sup> 9 et n.<sup>o</sup> 10 ; ce qui , au premier abord , présente un vrai paradoxe. Mais il faut remarquer que , par l'emploi de la formule n.<sup>o</sup> 8 , il a pu s'opérer , entre les aires des deux branches de la courbe , une compensation d'erreurs qui a pu ne point avoir lieu d'une manière aussi avantageuse dans l'application des formules n.<sup>o</sup> 9 et n.<sup>o</sup> 10. Au reste , dans la courbe même  $y = \frac{1}{x}$  , qui n'a pas d'inflexion , les résultats successivement obtenus par les diverses

(\*) On approcherait , au surplus , bien davantage de la valeur de  $\pi$  , en prenant pour  $x$  la tangente d'un très-petit arc , sous-multiple de 30°, et appliquant ensuite la formule (F<sub>2,4</sub>).

( Note de M. Bérard ).



## 116 FORMULES D'INTÉGRATION.

formules ne semblent pas présenter un accroissement régulier d'approximation qui permette l'application de la méthode de M. d'Obenheim, comme M. Kramp l'avait espéré.

Je crois pouvoir conclure de tous les essais que j'ai fait, qu'au moyen de nos formules  $(F_6)$ ,  $(F_8)$ ,  $(F_{12})$ ,  $(F_{24})$ ,  $(F_{120})$ , on tire tout le parti possible d'un nombre donné d'ordonnées, et que l'emploi de ces formules offre le moyen, à la fois le plus exact et le plus expéditif d'intégrer les différentielles d'une seule variable. On peut, pour les diverses applications, consulter les mémoires cités, dont les formules s'appliquent à la manière des nôtres.

Les géomètres sentiront sans doute que cette manière de déterminer les coefficients d'une formule, par des applications faites à des cas connus, dispense l'analyste d'une foule de raisonnemens, dont alors l'algèbre fait tous les frais. L'esprit de cette méthode peut avoir bien d'autres applications utiles.

Novembre 1816.

---