ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

J. F. FRANÇAIS

Analise transcendante. Du calcul des dérivations, ramené à ses véritables principes, ou théorie du développement des fonctions, et du retour des suites

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 6 (1815-1816), p. 61-111

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1815-1816__6__61_0>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Du calcul des dérivations, ramené à ses véritables principes, ou théorie du développement des fonctions, et du retour des suites;

Par M. J. F. Français, professeur à l'école royale de l'artillerie et du génie.

Depuis l'invention du *Théorème de Taylor*, sur le développement des fonctions d'un binome, et du *Théorème de Lagrange*, sur le retour des fonctions et des séries, bien des géomètres se sont occupés d'étendre et de généraliser les découvertes de ces deux géomètres célèbres; et, sous le rapport de la théorie générale, on peut dire que les résultats auxquels ils sont parvenus ne laissent plus rien à désirer; mais les formules qui les contiennent, quelques précieuses qu'elles soient comme solutions générales, ne font qu'indiquer une suite d'opérations ultérieures, souvent si compliquées qu'elles découragent le calculateur le plus intrépide. Il restait donc à trouver une méthode simple, facile et uniforme, pour exécuter complètement et immédiatement tous ces développemens, tant directs que de retour. Les géomètres allemands sont les premiers qui ont réussi dans cette recherche : leurs travaux ont donné naissance à un nouveau calcul, appelé *Analise combinatoire* par son inventeur *Hindenburg*. Ce calcul résout à la vérité la question, mais d'une manière trop disparate avec les procedés ordinaires de l'analise : il oblige à former d'abord séparément les groupes de lettres, et ensuite leurs coefficiens numériques, pour lesquels on a besoin de tables de combinaisons calculées d'avance. Il etait réservé à *Arbogast* de donner la solution generale, complète et analitique de cette question difficile, dans son *Calcul des dérivations*. Malheureusement cet ouvrage est entaché de plusieurs defauts très-graves, qui ont dégoûté les géomètres de sa lecture, et ont empêché qu'il ne fût étudié et connu autant qu'il le mérite. Ces défauts sont 1.° de n'avoir pas assez justifié l'introduction de ses nouvelles notations; 2.° de n'avoir pas défini assez nettement ses *dérivées* et ses *dérivations*; 3.° de déduire sa théorie d'un principe qui n'est ni assez clair ni assez évident (n.° 6); 4.° de l'exposer d'une manière trop longue et trop embarrassée; 5.° enfin d'avoir noyé des résultats vraiment remarquables dans une foule de choses qui sont, pour ainsi dire, hors d'œuvre, et sans liaison avec l'objet principal de son ouvrage; de sorte que ce qui pouvait être présenté dans quelques feuilles d'impression est devenu un gros in-4.°.

Je me propose, dans ce petit écrit, de remédier, le mieux que je pourrai, à ces défauts de l'ouvrage d'Arbogast, en déduisant la véritable théorie du calcul des dérivations du seul théorème de Taylor, sans l'emploi d'aucun principe nouveau; de sorte que ce calcul ne sera, à proprement parler, qu'une extension de ce théorème.

Afin de rendre l'exposition de cette théorie plus rapide, et de présenter de suite aux géomètres toute la partie usuelle de ce calcul, je me contenterai quelquefois de généraliser les résultats par des conclusions d'induction; sauf à démontrer ces conclusions dans un article à part. Pour la même raison, je réléguerai dans des *remarques* toutes les observations, soit sur les notations, soit sur le fond même de la théorie.

ARTICLE PREMIER.

Développement des fonctions selon les puissances ascendantes de la variable.

1. On sait, par le théorème de Taylor, que toute fonction d'un binôme $\alpha+x$ (x étant une variable qui reste indéterminée), peut être développée en une série de cette forme

$$(1) \qquad f(\alpha+x)=a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots;$$

les coefficiens a, a_1, a_2, a_3, ... étant déterminés par les valeurs que prennent la fonction $f(\alpha+x)$ et ses coefficiens différentiels $\frac{d.f(\alpha+x)}{dx}$, $\frac{d^2.f(\alpha+x)}{1.2dx^2}$, $\frac{d^3f(\alpha+x)}{1.2.3dx^3}$, ..., lorsqu'après la différentiation on y fait $x=0$.

Nous représenterons ces valeurs particulières des coefficiens différentiels par $Df\alpha$, $\frac{1}{1.2}D^2f\alpha$, $\frac{1}{1.2.3}$, $D^3f\alpha$....; et nous appellerons, avec Arbogast, les quantités $Df\alpha$, $D^2f\alpha$, $D^3f\alpha$,...., *dérivées, première, seconde, troisième*,..... de $f\alpha$. Ainsi la dérivée $D^nf\alpha$, d'un ordre quelconque n, n'est autre chose que ce que devient le coefficient differentiel $\frac{d^n.f(\alpha+x)}{dx^n}$, lorsqu'on y fait $x=0$.

Nous aurons donc

$$(2)\left\{\begin{array}{l} a_1=\frac{1}{1}Df\alpha=\frac{1}{1}Da\,, \\ a_2=\frac{1}{1.2}D^2f\alpha=\frac{1}{1.2}D^2a\,, \\ a_3=\frac{1}{1.2.3}D^3f\alpha=\frac{1}{1.2.3}D^3a\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n=\frac{1}{1.2....n}D^nf\alpha=\frac{1}{1.2....n}D^na\,; \end{array}\right\} \text{d'où l'on tire réciproquement} \left\{\begin{array}{l} Da=a_1\,, \\ D^2a=1.2a_2\,, \\ D^3=1.2.3a_3\,, \\ \ldots\ldots\ldots \\ D^na=1.2....na_n\,. \end{array}\right\}(3)$$

Les valeurs (2) étant substituées dans l'équation (1) donnent

$$(4) \qquad f(\alpha+x)=f\alpha+Df\alpha.x+\frac{1}{1.2}D^2f\alpha.x^2+\frac{1}{1.2.3}D^3f\alpha.x^3+\ldots$$

$$=a+Da.x+\frac{1}{1.2}D^2a.x^2+\frac{1}{1.2.3}D^3a.x^3+\ldots\ldots$$

Mais ici il faut observer que ce développement peut devenir impossible ; ce qui arrive toutes les fois que $f\alpha$ et ses dérivées deviennent infinies : ce cas a lieu pour la fonction $\mathrm{Log}.x$, par exemple.

2. *Remarque.* La loi des *Dérivations*, ou de la formation des dérivées successives, est évidemment la même que celle des différentiations, à la seule exception près que nous supprimons les dénominateurs inutiles $D\alpha$, $D\alpha^2$, $D\alpha^3$, ...; ce qui revient à supposer $D\alpha=1$. En effet, on sait, et il est d'ailleurs évident que le coefficient différentiel d'un ordre quelconque de la fonction d'un binôme $\alpha+x$ est le même, soit qu'on la différencie en regardant x comme variable et α comme constant, soit qu'on la différencie en regardant α comme variable, et x comme constant ; on a donc $\frac{d^n.f(\alpha+x)}{dx^n}=\frac{d^n.f(\alpha+x)}{d\alpha^n}$; or, en faisant $x=0$, dans $\frac{d^n.f(\alpha+x)}{d\alpha^n}$, on obtient $\frac{d^n.f\alpha}{d\alpha^n}=D^nf\alpha$. Il est donc démontré que la loi des dérivations est la même que celle des différentiations ; et il s'ensuit aussi que *les dérivées d'un ordre quelconque ne sont autre chose que les coefficiens différentiels du même ordre, pris relativement à la quantité constante* α, *que l'on feint être variable.*

Il se présente ici naturellement une objection que l'on a faite, dès l'origine, contre la notation du calcul des dérivations : c'est que les opérations dérivatives étant les mêmes que celles du calcul différentiel, il fallait les indiquer par les mêmes notations. Je réponds d'abord qu'absolument parlant la chose eût été possible ; mais que, pour l'ordre et la précision, et d'après les règles d'une saine logique, des opérations qui, bien qu'identiques pour la forme, diffèrent entièrement pour le fond, doivent être représentées par des signes différens. Je dis que ces opérations diffèrent entièrement pour le fond ; car les signes différentiels se rapportent aux variables et à leurs variabilité de grandeur, tandis que les signes dérivatifs ne se rapportent qu'aux seules constantes, et que les dérivées successives n'indiquent qu'une dépendance d'ordre et de succession dans les termes d'un développement. Si Lagrange a été autorisé à introduire une notation nouvelle, dans le calcul des variations, pour indiquer une opération entièrement identique avec la différentiation, et qui se rapporte aux variables même, seulement parce qu'elle ne se rapporte pas à leur variabilité de grandeur, mais à leur variabilité de forme ; à plus forte raison sera-t-il permis, ou plutôt nécessaire, de représenter par une notation particulière une opération qui ne se rapporte pas même aux variables, ni à aucune espèce de variabilité.

Une autre raison, qui suffirait à elle seule pour justifier l'introduction d'une notation particulière pour les dérivations, c'est qu'elles peuvent se trouver, et se trouvent réellement souvent combinées avec les différentielles, dans une même formule; il faut donc qu'on ne puisse pas les confondre : ce qui arriverait infailliblement, si elles étaient représentées par une même notation.

Quant à la suppression des dénominateurs $\mathrm{D}\alpha$, $\mathrm{D}\alpha^2$, $\mathrm{D}\alpha^3$, ... ; leur inutilité seule suffit pour la justifier. Si des personnes habituées aux considérations d'infiniment petits tiennent à conserver ces dénominateurs, dans le calcul différentiel, où leur considération abrège quelquefois les raisonnemens dans des questions de géométrie et de mécanique, mais où elle peut aussi égarer ; il n'y a pas la moindre raison de les conserver dans l'analise pure, ni, à plus forte raison, dans les dérivations où toute idée d'infiniment petit serait plus que déplacée.

3. Réciproquement, tout polynôme de la forme $a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$ (terminé ou non), peut être représenté par $a + \mathrm{D}a \,.\, x + \frac{1}{1.2} \mathrm{D}^2 a \,.\, x^2 + \frac{1}{1.2.3} \mathrm{D}^3 a \,.\, x^3 + \ldots$, où, entre les coefficiens a, a_1,

a_2, a_3, ... et les dérivées successives de a; on a les relations (3).

En effet, en supposant, ce qui est toujours permis,

$$(5) \qquad a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots=\mathrm{f}(\alpha+x);$$

on a, d'après la définition des dérivées (n.° 1),

$$a=\mathrm{f}\alpha,\ a_1=\mathrm{Df}\alpha=\mathrm{D}a,\ a_2=\frac{1}{1.2}\mathrm{D}^2\mathrm{f}\alpha=\frac{1}{1.2}\mathrm{D}^2a,\ a_3=\frac{1}{1.2.3}\mathrm{D}^3\mathrm{f}\alpha=\frac{1}{1.2.3}\mathrm{D}^3a,\ldots;$$

d'où l'on tire les relations (3).

Si le polynôme est terminé, et n'a qu'un nombre n de termes, a_{n-1} sera le dernier des coefficiens; et tous les suivans a_n, a_{n+1}, a_{n+2},......, ainsi que leurs valeurs correspondantes, en dérivées de a, seront égaux à zéro.

4. *Remarque.* Il est bon d'observer que l'équation (5) peut être satisfaite d'une infinité de manières, et que α est entièrement indéterminé. En supposant $\alpha=0$, on a

$$a=\mathrm{f}0,\ a_1=\mathrm{Df}0=\mathrm{D}a,\ a_2=\frac{1}{1.2}\mathrm{D}^2\mathrm{f}0=\frac{1}{1.2}\mathrm{D}^2a,\ a_3=\frac{1}{1.2.3}\mathrm{D}^3\mathrm{f}0=\frac{1}{1.2.3}\mathrm{D}^3a,\ldots;$$

ce qui donne encore les relations (3).

5. Proposons-nous maintenant de développer la fonction d'un polynôme quelconque, ordonné selon les puissances ascendantes de la variable, en une série qui procède selon les mêmes puissances; c'est-à-dire, de déterminer les coefficiens du second membre de l'équation suivante :

$$(6) \qquad \varphi(a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)=A+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots.$$

D'après le n.° 3, le polynôme sous le signe de la fonction peut être représenté par $\mathrm{f}(\alpha+x)$; le premier membre de cette équation peut donc être mis sous la forme $\varphi\mathrm{f}(\alpha+x)$. Il suffit donc de substituer, dans l'équation (4), $\varphi\mathrm{f}$ au lieu de f; ce qui donne

$$\varphi(a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)=\varphi\mathrm{f}\alpha+\mathrm{D}.\varphi\mathrm{f}\alpha.x+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.\varphi\mathrm{f}\alpha.x^3+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3.\varphi\mathrm{f}\alpha.x^3+\ldots$$
$$=\varphi\, a+\mathrm{D}.\varphi\, a.x+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.\varphi\, a.x^2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^2.\varphi\, a.x^2+\ldots$$

en observant cependant que, dans ce cas, chacun des signes de dérivation indique des opérations ultérieures à exécuter, que nous expliquerons dans la remarque suivante : c'est pourquoi nous avons mis un point après chaque signe de dérivation, pour marquer cette différence.

En comparant terme à terme l'équation (7) avec celle (6), on en tire les valeurs suivantes :

$$(8) \qquad A=\varphi a,\ A_1=\mathrm{D}.\varphi a,\ A_2=\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.\varphi a,\ A_3=\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3.\varphi a,\ldots$$

et par conséquent

$$(9) \qquad \varphi a=A\ ,\ \mathrm{D}.\varphi a=A_1\ ,\ \mathrm{D}^2.\varphi a=2A_2\ ,\ \mathrm{D}^3.\varphi a=6A_3,\ldots;$$

6. *Remarque.* Nous avons démontré, dans la remarque du n.° 2, qu'on a, en général, $\mathrm{D}^n\mathrm{f}\alpha=\frac{\mathrm{d}^n\mathrm{f}\alpha}{\mathrm{d}\alpha^n}$; on a donc aussi

$$\mathrm{D}.\varphi\mathrm{f}\alpha=\frac{\mathrm{d}(\varphi\mathrm{f}\alpha)}{\mathrm{d}\alpha},\ \mathrm{D}^2.\varphi\mathrm{f}\alpha=\frac{\mathrm{d}^2(\varphi\mathrm{f}\alpha)}{\mathrm{d}\alpha^2},\ \mathrm{D}^3.\varphi\mathrm{f}\alpha=\frac{\mathrm{d}^3(\varphi\mathrm{f}\alpha)}{\mathrm{d}\alpha^3},\ldots\ldots;$$

$$\mathrm{D}.\varphi a=\frac{\mathrm{d}(\varphi a)}{\mathrm{d}\alpha},\ \mathrm{D}^2.\varphi a=\frac{\mathrm{d}^2(\varphi a)}{\mathrm{d}\alpha^2},\ \mathrm{D}^3.\varphi a=\frac{\mathrm{d}^3(\varphi a)}{\mathrm{d}\alpha^3},\ldots\ldots$$

Or, d'après les règles ordinaires de la différentiation des *fonctions de fonctions*, ou des fonctions de variables qui sont elles-mêmes fonctions de la variable principale, on a

$$\frac{\mathrm{d}(\varphi\mathrm{f}\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}=\frac{\mathrm{d}(\varphi\mathrm{f}\alpha)}{\mathrm{d}\mathrm{f}\alpha}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathrm{f}\alpha}{\mathrm{d}\alpha},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2(\varphi\mathrm{f}\alpha)}{\mathrm{d}\alpha^2}=\frac{\mathrm{d}\left[\frac{\mathrm{d}(\varphi\mathrm{f}\alpha)}{\mathrm{d}\mathrm{f}\alpha}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathrm{f}\alpha}{\mathrm{d}\alpha}\right]}{\mathrm{d}\alpha}=\frac{\mathrm{d}(\varphi\mathrm{f}\alpha)}{\mathrm{d}\mathrm{f}\alpha}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{f}\alpha}{\mathrm{d}\alpha^2}+\frac{\mathrm{d}^2(\varphi\mathrm{f}\alpha)}{(\mathrm{d}\mathrm{f}\alpha)^2}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\mathrm{f}\alpha}{\mathrm{d}\alpha}\right)^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

ou, en mettant a au lieu de $\mathrm{f}\alpha$,

$$\frac{\mathrm{d}(\varphi a)}{\mathrm{d}\alpha}=\frac{\mathrm{d}(\varphi a)}{\mathrm{d}a}\cdot\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\alpha},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2(\varphi a)}{\mathrm{d}\alpha^2}=\frac{\mathrm{d}\left[\frac{\mathrm{d}(\varphi a)}{\mathrm{d}a}\cdot\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\alpha}\right]}{\mathrm{d}\alpha}=\frac{\mathrm{d}(\varphi a)}{\mathrm{d}\alpha}\cdot\frac{\mathrm{d}^2a}{\mathrm{d}\alpha^2}+\frac{\mathrm{d}^2(\varphi a)}{\mathrm{d}a^2}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\alpha}\right)^2;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

Passant donc aux notations dérivatives, en supprimant les dénominateurs, nous aurons

$$D\,.\varphi f\alpha = D\varphi f\alpha . D\varphi f\alpha \ ,$$

$$D^2.\varphi f\alpha = D\varphi f\alpha . D^2\varphi f\alpha + D^2\varphi f\alpha .(Df\alpha)^2 \ ,$$

. . . . ,

et

$$D\,.\varphi a = D\varphi a . D\, a \ ,$$

$$D^2.\varphi a = D\varphi a . D^2 a + D^2\varphi a . Da^2 \ ;$$

. . . .

Le développement de ces deux premières dérivées suffit pour expliquer la différence qui existe entre les dérivées sans point et celles qui sont suivies d'un point : entre $D\varphi a$, $D^2\varphi a$, ... et $D\,\varphi a$, $D^2.\varphi a$,... Les premières sont les dérivées de φa, en supposant $Da = 1$, $D^2 a = 0$, $D^3 a = 0$,..., et les autres sont les dérivées de φa, en supposant que a est fonction de α, que ses dérivées successives sont Da, $D^2 a$, $D^3 a$, ... et qu'elles ne sont pas toutes égales à zéro. En un mot, les dérivées sans point, $D\varphi a$, $D^2\varphi a$, ... sont les coefficiens du développement de $\varphi(a+x)$ et les dérivées suivies d'un point $D.\varphi a$, $D^2.\varphi a$, ... sont les coefficiens du développement de $\varphi(a + Da.x + \frac{1}{2} D^2 a.x^2 + \frac{1}{6} D^3 a.x^3 + ...)$

7. En exécutant, d'après la remarque précédente, les opérations indiquées par les dérivées suivies d'un point, on obtient pour les six premières, en suivant les règles ordinaires de la différentiation, lorsqu'aucune différentielle n'est constante :

$$D\,.\varphi a = D\varphi a . D\, a \ ,$$

$$D^2.\varphi a = D\varphi a . D^2 a + D^2\varphi a . Da^2 \ ,$$

$$D^3.\varphi a = D\varphi a . D^3 a + D^2\varphi a . 3DaD^2 a + D^3\varphi a\, Da^3 \ ,$$

$$D^4.\varphi a = D\varphi a . D^4 a + D^2\varphi a [4DaD^3 a + 3(D^2 a)^2] + D^3\varphi a . 6Da^2 D^2 a + D^4\varphi a . Da^4 \ ;$$

$$D^5\varphi a = D\varphi a . D^5 a + D^2\varphi a (5DaD^4 a + 10D^2 aD^3 a) + D^3\varphi a [10Da^2 D^3 a + 15Da(D^2 a)^2]$$
$$+ D^4\varphi a . 10Da^3 D^2 a + D^5\varphi a . Da^5 \ ,$$

$D^6.\varphi a$

$$\text{D}^6.\varphi a = \text{D}\varphi a.\text{D}^6 a + \text{D}^2\varphi a[6\text{D}a\text{D}^5 a + 15\text{D}^2 a\text{D}^4 a + 10(\text{D}^3 a)^2]$$
$$+\text{D}^3\varphi a[15\text{D}a^2\text{D}^4 a + 60\text{D}a\text{D}^2 a\text{D}^3 a + 15(\text{D}^2 a)^3]$$
$$+\text{D}^4\varphi a[20\text{D}a^3\text{D}^3 a + 45\text{D}a^2(\text{D}^2 a)^2] + \text{D}^5\varphi a.15\text{D}a^4\text{D}^2 a + \text{D}^6\varphi a.\text{D}a^6\,,$$

et ainsi de suite.

En substituant ces valeurs dans les équations (8), et remplaçant les dérivées de a par leurs valeurs (3), on obtient

$$(10)\quad\left\{\begin{array}{l}
A = \varphi a\,, \\
A_1 = \text{D}.\varphi a = \text{D}\varphi a.a_1\,, \\
A_2 = \frac{1}{2}\text{D}^2.\varphi a = \text{D}\varphi a.a_2 + \frac{1}{2}\text{D}^2\varphi a.a_1^2\,, \\
A_3 = \frac{1}{6}\text{D}^3.\varphi a = \text{D}\varphi a.a_3 + \frac{1}{2}\text{D}^2\varphi a.2a_1 a_2 + \frac{1}{6}\text{D}^3\varphi a.a_1^3\,, \\
A_4 = \frac{1}{24}\text{D}^4.\varphi a = \text{D}\varphi a.a_4 + \frac{1}{2}\text{D}^2\varphi a(2a_1 a_3 + a_2^2) + \frac{1}{6}\text{D}^3\varphi a.3a_1^2 a_2 + \frac{1}{24}\text{D}^4\varphi a.a_1^4\,, \\
A_5 = \frac{1}{120}\text{D}^5.\varphi a = \text{D}\varphi a.a_5 + \frac{1}{2}\text{D}^2\varphi a(2a_1 a_4 + 2a_2) + \frac{1}{6}\text{D}^3\varphi a(3a_1^2 a_3 + 3a_1 a_2^2) \\
\qquad + \frac{1}{24}\text{D}^4\varphi a.4a_1^3 a_2 + \frac{1}{120}\text{D}^5\varphi a.a_1^5\,, \\
A_6 = \frac{1}{720}\text{D}^6.\varphi a = \text{D}\varphi a.a_6 + \frac{1}{2}\text{D}^2\varphi a(2a_1 a_5 + 2a_2 a_4 + a_3^2) + \frac{1}{6}\text{D}^3\varphi a(3a_1^2 a_4 + 2.3a_1 a_3 + a_3^2) \\
\qquad + \frac{1}{24}\text{D}^4\varphi.4a_1^3 a_3 + \frac{4.3}{2}a_1^2 a_2^2) + \frac{1}{120}\text{D}^5\varphi a.5a_1^4 a_2 + \frac{1}{720}\text{D}^6\varphi a.a_1^6\,,
\end{array}\right.$$

et ainsi de suite.

Nous voici donc parvenus au développement complet des sept premiers termes de la série (6), qui est l'objet fondamental du calcul des dérivations, sans supposer autre chose que le théorème de Taylor, et les règles ordinaires de la différentiation. En examinant de près la composition successive de ces termes, on en conclut aisément la règle pratique suivante, pour déduire immédiatement un terme quelconque de celui qui le précède.

RÈGLE FONDAMENTALE.

8. *Pour déduire le développement de* A_{n+1} *de celui de* A_n, *les lettres étant disposées d'après leur ordre de succession ;*

1.° *On ne fera varier, dans chaque terme, que la dernière* *lettre ou sa puissance, en suivant les règles ordinaires de la différentiation, et en mettant simplement* a_1 *pour* $\mathrm{D}a$, a_2 *pour* $\mathrm{D}a_1$, a_3 *pour* $\mathrm{D}a_2$, ..., *sans autre coefficient que l'unité ;*

2.° *On fera varier de plus (d'après les mêmes règles de la différentiation) l'avant-dernière lettre, sa puissance ou sa fonction, si elle se trouve être la lettre qui, dans l'ordre numérique des indices, précède immédiatement la dernière du terme ; et comme la puissance de la dernière lettre augmente alors d'une unité, on divisera par son exposant ainsi augmenté.*

Pour faire une application de cette règle, et pour mieux en faire comprendre l'usage, nous allons déduire le développement de A_6 de celui de A_5 [formules (10)].

Le premier terme $\mathrm{D}\phi a.a_5$ donne, d'après la première partie de la règle, qui seule y est applicable, $\mathrm{D}\phi a\, a_6$. Le second terme $\frac{1}{2}\mathrm{D}^2\phi a(2a_1a_4+2a_2a_3)$ donne $\frac{1}{2}\mathrm{D}^2\phi a(2a_1a_5+a_2a_4+a_3^2)$, dont les deux premiers termes sont dûs à la première partie de la règle, et le dernier à la seconde partie. Le troisième terme $\frac{1}{6}\mathrm{D}^3\phi a(3a_1^2a_3+3a_1a_2^2)$ donne $\frac{1}{6}\mathrm{D}^3\phi a(3a_1^2a_4+2.3a_1a_2a_3+a_2^3)$, dont les deux premiers termes d'après la première partie de la règle et le dernier d'après la seconde. Le quatrième terme $\frac{1}{24}\mathrm{D}^4\phi a.4a_1^3a_2$ donne $\frac{1}{24}\mathrm{D}^4\phi a(4a_1^3a_4+\frac{4.3}{2}a_1^2a_2^2)$, dont le premier terme d'après la première partie de la règle et le suivant d'après la seconde. Enfin, le terme $\frac{1}{120}\mathrm{D}^5\phi a.a_1^5$ donne $\frac{1}{120}\mathrm{D}^5\phi a.5a_1^4a_2$, d'après la première partie de la règle et $\frac{1}{720}\mathrm{D}^6\phi a.a_1^6$, d'après la seconde. En rassemblant tous ces différens termes, on obtient exactement le développement de A_6, tel que nous l'avons donné [formules (10)].

On voit, d'après cet exemple, que la règle est d'une exécution très-facile, et qu'elle fournit immédiatement les termes successifs du développement, tout ordonnés et réduits à leur plus simple expression, sans qu'on ait, pour ainsi dire, d'autre peine que celle de les écrire. Il est vrai que, jusqu'à présent, cette règle n'est qu'une conclusion d'induction ; mais nous nous proposons de la démontrer dans un des articles suivans. Nous réservons pour le même article la règle pour former immédiatement un terme quelconque du développement, indépendamment de ceux qui le précèdent.

9. *Remarque I.* On a pu remarquer, en examinant la composition des formules (10), que le signe de fonction, ainsi que les signes de dérivation, n'affectent que la première lettre du polynôme dont il s'agit de développer la fonction. Arbogast appelle cette première lettre *origine de dérivations* ou *premier terme de polynôme*, et toutes les suivantes *quantités polynômiales*. Il résulte de cette observation que la composition des termes successifs du développement, en quantités polynômiales, reste la même, quelle que soit la fonction à développer ; et que toute la différence, dans le développement des diverses sortes de fonctions, consiste dans les valeurs des dérivées $\mathrm{D}\phi a$, $\mathrm{D}^2\phi a$, $\mathrm{D}^3\phi a, \ldots$, qui n'affectent que la première lettre du polynôme. Ainsi on a, pour $(a+a_1x+a_2x^2+\ldots)^m$

$$\mathrm{D}\phi a=ma^{m-1}\,,\quad \mathrm{D}^2\phi a=m(m-1)a^{m-2}\,,\quad \mathrm{D}^3\phi a=m(m-1)(m-2)a^{m-3}\,,\ldots;$$

pour $e^{(a+a_1x+a_2x^2+\ldots)}$

$$\mathrm{D}\phi a=e^a\,,\quad \mathrm{D}^2\phi a=e^a\,,\quad \mathrm{D}^3\phi a=e^a\,,\ldots;$$

pour $\mathrm{Cos.}(a+a_1x+a_2x^2+\ldots)$

$$\mathrm{D}\phi a=-\mathrm{Sin.}a\,,\quad \mathrm{D}^2\phi a=-\mathrm{Cos.}a\,,\quad \mathrm{D}^3\phi a=+\mathrm{Sin.}a\,,\ldots;$$

et ainsi de suite, pour d'autres formes de fonctions.

Si le polynôme sous le signe de fonction était terminé, et composé de n termes, on aurait $a_n=0$, $a_{n+1}=0$, $a_{n+2}=0, \ldots$; il suffirait donc alors de rejeter, dans les formules (10), tous les termes où il entrerait, comme facteur, une des quantités polynômiales dont l'indice serait supérieur à $n-1$; et, dans l'application de la règle du n.° précédent, on s'arrêterait, dans chaque coefficient au terme affecté de a_{n-1}.

10. *Remarque II.* L'inspection des termes successifs (10) du développement de l'équation (6) fait aisément découvrir la loi re-

marquable qui y règne. Elle consiste en ce que A_n est composé de n termes, formés des dérivées successives

$$\frac{\mathrm{D}\phi a}{1}, \quad \frac{\mathrm{D}^2\phi a}{1.2}, \quad \frac{\mathrm{D}^3\phi a}{1.2.3}, \ldots\ldots \frac{\mathrm{D}^n\phi a}{1.2.3\ldots n},$$

dont les coefficiens se composent de la manière suivante : 1.° le coefficient de $\frac{\mathrm{D}^r\phi a}{1.2.3\ldots r}$ est composé de tous les produits de r lettres qu'on peut former avec les quantités polynômiales $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, de manière que la somme des indices de chaque produit soit n : chaque lettre étant supposée écrite autant de fois qu'il y a d'unités dans son exposant; 2.° les coefficiens numériques de chaque produit indiquent le nombre de permutations dont les lettres de ce produit sont susceptibles. Ainsi, le coefficient de $\frac{\mathrm{D}^3\phi a}{1.2.3}$ dans A_6 est composé des trois produits $3a_1a_1a_4+2.3a_1a_2a_3+a_2a_2a_2$, qui sont les seuls qu'on peut former avec trois lettres, de manière que la somme des indices dans chacun soit égale à 6 : leurs coefficiens numériques indiquent, comme on voit, le nombre des permutations dont les lettres qui les composent sont susceptibles.

Cette remarque, traduite en deux règles pratiques, l'une relative à la formation des groupes de lettres, et l'autre relative à celle des coefficiens numériques, d'après la théorie des combinaisons, constitue l'*Analise combinatoire* des géomètres allemands.

11. Si, au lieu de la fonction d'un polynôme $\phi(a+a_1x+a_2x^2+\ldots)$ on avait à développer la fonction $\phi(\alpha+x)$ d'une fonction de binôme, il suffirait, d'après le n.° 5, de substituer, dans les équations (10), ou dans les résultats obtenus par la règle du n.° 8, pour les quantités polynômiales $a, a_1, a_2, a_3, \ldots$, leurs valeurs (2).

Enfin, si l'on avait à développer la fonction d'une fonction de polynôme $\psi\phi(a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)$, on aurait, d'après le même n.° 5,

$$\psi\phi(a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)=\psi(\phi a+\mathrm{D}.\phi a.x+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.\phi a.x^2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3.\phi a.x^3+\ldots);$$

et

et il suffirait de substituer, dans les équations (10), ou dans les résultats obtenus par la règle du n.° 8, pour les quantités polynômiales a, a_1, a_2, a_3, ... les dérivées correspondantes φa, $\mathrm{D}.\varphi a$, $\frac{1}{2}\mathrm{D}^2.\varphi a$, $\frac{1}{6}\mathrm{D}^3.\varphi a$, ..., qui doivent être elles-mêmes développées selon les règles du n.° 8.

Il serait même aisé, dans ce cas, d'obtenir immédiatement le développement de la fonction proposée; car, en mettant dans l'équation (7) $\psi\varphi$ à la place de φ, on obtiendrait

$$\psi\varphi(a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+....)=\psi\varphi a+\mathrm{D}.\psi\varphi a.x+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.\psi\varphi a.x^2+.... ;$$

et au moyen d'une légère extension donnée à la règle du n.° 8, on trouverait

$$\mathrm{D}.\psi\varphi a=\mathrm{D}\psi\varphi a.\mathrm{D}\varphi a.a_1 ,$$

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.\psi\varphi a=\mathrm{D}\psi\varphi a(\mathrm{D}\varphi a.a_2+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.a_1^2)+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\psi\varphi a(\mathrm{D}\varphi a)^2.a_1^2 ,$$

$$\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3.\psi\varphi a=\mathrm{D}\psi\varphi a.(\mathrm{D}\varphi a.a_3+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.2a_1a_2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.a_1^3)$$
$$+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\psi\varphi a.[(\mathrm{D}\varphi a)^2 2a_1a_2+2\mathrm{D}\varphi a.\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.a_1^3]+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\psi\varphi a.(\mathrm{D}\varphi a)^3.a_1^3 ,$$

et ainsi de suite.

Le développement précédent équivaut à celui d'une fonction triple d'un binôme $\psi\varphi f(\alpha+x)$. En effet, pour avoir le développement de cette fonction triple, il suffit de substituer, dans les formules précédentes, pour a, a_1, a_2, a_3, ..., les valeurs (2), en fonction de α.

Nous ne pousserons pas plus loin ces observations, sur le développement des fonctions multiples; ce que nous venons de dire suffit pour faire apercevoir la possibilité de cette extension, au moyen du calcul des dérivations.

12. Jusqu'à présent nous n'avons considéré que les fonctions d'un seul polynôme, et nous avons complètement résolu le problème de leur développement successif: il nous resterait maintenant à resoudre la même question pour les fonctions de plusieurs polynômes, ainsi que pour celles des polynômes à double ou à triple entrée; mais les limites que nous avons dû prescrire à cet écrit, ne nous per-

mettent pas d'entrer dans ces détails : nous nous contenterons d'ajouter encore le développement des produits de deux polynômes et de deux fonctions de polynômes, parce que nous en aurons besoin pour la théorie du retour des suites.

Proposons-nous d'abord de développer le produit

$$(11)\qquad (a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)\times(b+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\ldots)$$

en une série de la forme

$$A+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots.$$

En effectuant la multiplication, par le procédé ordinaire, on obtient

$$(12)\left\{\begin{array}{l} A\ =ab\ , \\ A_1=ab_1+a_1b\ , \\ A_2=ab_2+a_1b_1+a_2b\ , \\ A_3=ab_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b\ , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n=ab_n+a_1b_{n-1}+a_2b_{n-2}+\ldots+a_{n-2}b_2+a_{n-1}b_1+a_n\ ; \end{array}\right.$$

où la loi est évidente.

D'après le n.° 3, le problème peut se mettre sous la forme

$$(13)\qquad (a+\mathrm{D}a.x+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2a.x^2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3a.x^3+\ldots)\times(b+\mathrm{D}b.x+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2b.x^2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3b.x^3+\ldots)$$
$$=A+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots$$

En substituant donc, dans les équations (12), pour a_1, a_2, a_3, ...; b_1, b_2, b_3; .... leurs valeurs en dérivées de a et de b, d'après le n.° 3, on obtient

$$(14)\left\{\begin{array}{l} A\ =ab\ , \\ A_1=\mathrm{D}(ab)=a.\mathrm{D}b+\mathrm{D}a.b\ , \\ A_2=\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2(ab)=a.\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2b+\mathrm{D}a.\mathrm{D}b+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2a.b\ , \\ A_3=\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3(ab)=a\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3b+\mathrm{D}a.\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2b+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2a.\mathrm{D}b+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3a.b\ , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n=\dfrac{1}{1.2\ldots n}\mathrm{D}^n(ab)=a.\dfrac{\mathrm{D}^nb}{1.2\ldots n}+\mathrm{D}a.\dfrac{\mathrm{D}^{n-1}b}{1.2\ldots(n-1)}+\ldots+\dfrac{\mathrm{D}^{n-1}a}{1.2\ldots(n-1)}\mathrm{D}b+\dfrac{\mathrm{D}^na}{1.2\ldots n}b\ ; \end{array}\right.$$

où a et b (d'après les n.os 3 et 4) sont supposés être respectivement fonctions de deux quantités arbitraires α et β, dont les dérivées sont $D\alpha=1$, $D^2\alpha=0,\ldots$, $D\beta=1$, $D^2\beta=0,\ldots$

De la comparaison des formules (12) et (14) résulte la règle pratique suivante :

Règle.

Pour déduire A_{n+1} *de* A_n [formules (12)], 1.° *ne faites varier dans chaque terme, que* b *et ses dérivées, en écrivant* b_1 *pour* Db, b_2 *pour* Db_1, b_3 *pour* Db_2, ...; 2.° *dans le dernier terme seulement, qui contient la plus haute dérivée de* a, *faites varier cette dérivée, en écrivant* a_{n+1} *pour* Da_n.

13. Soit maintenant à développer le produit de deux fonctions de polynômes

$$(15)\qquad \varphi(a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)\times\psi(b+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\ldots)$$
$$A+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots.$$

D'après le n.° 5, cette équation peut être mise sous la forme

$$(16)\qquad (\varphi a+\text{D}.\varphi a.x+\tfrac{1}{2}\text{D}^2.\varphi a.x^2+\ldots)(\psi b+\text{D}.\psi b.x+\tfrac{1}{2}\text{D}^2.\psi b.x^2+\ldots)$$
$$=A+\text{D}.A.x+\tfrac{1}{2}\text{D}^2.A.x^2+\tfrac{1}{6}\text{D}^3.A.x^3+\ldots,$$

qui, étant comparée à celle (13), fait voir qu'il suffit de remplacer, dans celle-ci, a par φa, b par ψb, et les signes de dérivation sans points par des signes de dérivation avec points ; on aura donc, d'après le même n.° 5, les équations analogues à celles (14) ; c'est-à-dire,

$$A=\varphi a.\psi b,$$
$$A_1=\text{D}.(\varphi a.\psi b)=\varphi a.\text{D}.\psi b+\text{D}.\varphi a.\psi b,$$
$$A_2=\tfrac{1}{2}\text{D}^2.(\varphi a.\psi b)=\varphi a.\tfrac{1}{2}\text{D}^2.\psi b+\text{D}.\varphi a.\text{D}.\psi b+\tfrac{1}{2}\text{D}^2.\varphi a.\psi b,$$
$$A_3=\tfrac{1}{6}\text{D}^3.(\varphi a.\psi b)=\varphi a.\tfrac{1}{6}\text{D}^3.\psi b+\text{D}.\varphi a.\tfrac{1}{2}\text{D}^2.\psi b+\tfrac{1}{2}\text{D}^2.\varphi a.\text{D}.\psi b+\tfrac{1}{6}\text{D}^3.\varphi a.\psi b,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n=\frac{1}{1.2\ldots n}\text{D}^n.(\varphi a.\psi b)=\varphi a.\frac{1}{1.2\ldots n}\text{D}^n.\psi b+\text{D}.\varphi a.\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\text{D}^{n-1}\psi b+\ldots$$
$$+\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\text{D}^{n-1}.\varphi a.\text{D}.\psi b+\frac{1}{1.2\ldots n}\text{D}^n\varphi a.\psi b;$$

où chaque dérivée de φa et de ψb doit être développée comme les équations (10) ; c'est-à-dire, d'après la règle du n.° 8. Les formules précédentes contiennent donc, au fond, tout ce qu'il faut pour la solution complète de la question ; mais, pour ne rien laisser à désirer, nous allons en déduire les moyens d'exécuter immédiatement le développement complet de ces formules.

14. En exécutant les dérivations indiquées, au moyen de la règle 8, effectuant les multiplications, et ordonnant le tout par rapport aux exposans des dérivées, on obtient

$$
(18)\quad \left\{
\begin{aligned}
A &= \varphi a.\psi b \\
A_1 &= \varphi a.\mathrm{D}\psi b.b_1 \\
&\quad + \mathrm{D}\varphi a.\psi b.a_1 \\
A_2 &= \varphi a.\mathrm{D}\psi b.b_2 + \varphi a.\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\psi b.b_1^2 \\
&\quad + \mathrm{D}\varphi a.\psi b.a_2 + \mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}\psi b.a_1 b_1 \\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.\psi b.a_1^2 \\
A_3 &= \varphi a.\mathrm{D}\psi b.b_3 + \varphi a.\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.\psi b.2b_1 b_2 \qquad + \varphi a.\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\psi b.b_1^3 \\
&\quad + \mathrm{D}\varphi a.\psi b.a_3 + \mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}\psi b(a_1 b_2 + a_2 b_1) + \mathrm{D}\varphi a.\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\psi b.a_1 b_1^2 \\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.\psi b.2a_1 a_2 \qquad + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.\mathrm{D}\psi b.a_1^2 b_1 \\
&\qquad\qquad + \tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.\psi b.a_1^3 \\
A_4 &= \varphi a.\mathrm{D}\psi b.b_4 + \varphi a.\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\psi b(2b_1 b_3 + b_2^2) + \varphi a.\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\psi b.3b_1^2 b_2 \\
&\quad + \mathrm{D}\varphi a.\psi b.a_4 + \mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}\psi b(a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \mathrm{D}\varphi a.\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\psi b.(2a_1 b_1 b_2 + a_2 b_1^2) \\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.\psi b(2a_1 a_3 + a_2^2) + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.\mathrm{D}\psi b.(a_1^2 b_2 + 2a_1 a_2 b_1) \\
&\qquad\qquad + \tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.\psi b.3a_1^2 a_2 \\
&\quad + \varphi a.\tfrac{1}{24}\mathrm{D}^4\psi b.b_1^4 \\
&\quad + \mathrm{D}\varphi a.\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\psi b.a_1 b_1^3 \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\psi b.a_1^2 b_1^2 \\
&\quad + \tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.\mathrm{D}\psi b.a_1^3 b_1 \\
&\quad + \tfrac{1}{24}\mathrm{D}^4\varphi a.\psi b.u_1^4 \\
A_5 &= \varphi a.\mathrm{D}\psi b.b_5 + \varphi a.\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\psi b(2b_1 b_4 + 2b_2 b_3) + \varphi a.\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\psi b(3b_1^2 b_3 + 3b_1 b_2^2) \\
&\quad + \mathrm{D}\varphi a.\psi b.c_5 + \mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}\psi b(a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 b_1) + \mathrm{D}\varphi a.\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\psi b(2a^2 b_1 b_3 + a_1 b_2 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1) \\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.\psi b(2a_1 a_4 + 2a_2 a_3) + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.\mathrm{D}\psi b(a_1^2 b_3 + 2a_1 a_2 b_2 + 2a_1 a_3 b_1 + a_2^2 b_1) \\
&\qquad\qquad + \tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.\psi b(3a_1^2 a_3 + 3a_2 a_2^2) \\
&\qquad\qquad\qquad + \varphi a.
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left|\begin{array}{ll}
+\varphi a.\frac{1}{24}D^4\psi b.4b_1{}^3b_2 & +\varphi a.\frac{1}{120}D^5\psi b.b^5 \\
+D\varphi a.\frac{1}{6}D^3\psi b(3a_1b_1{}^2b_2+a_2b_1{}^3) & +D\varphi a.\frac{1}{24}D^4\psi b.a_1b_1{}^4 \\
+\frac{1}{2}D^2\varphi a.\frac{1}{2}D^2\psi b(2a_1{}^2b_1b_2+2a_1a_2b_1{}^2) & +\frac{1}{2}D^2\varphi a.\frac{1}{6}D^3\psi b.a_1{}^2b_1{}^3 \\
+\frac{1}{6}D^3\varphi a\,D\psi b(a_1{}^3b_2+3a_1{}^2a_2b_1) & +\frac{1}{6}D^3\varphi a\,\frac{1}{2}D^2\psi b.a_1{}^3b_1{}^2 \\
+\frac{1}{24}D^4\varphi a.\psi b.4a_1{}^3a_2 & +\frac{1}{24}D^4\varphi a\,D\psi b.a_1{}^4b_1 \\
 & +\frac{1}{120}D^5\varphi a.\psi b\,a_1{}^5
\end{array}\right.
$$

et ainsi de suite.

En examinant la composition successive de ces coefficiens, on en conclut la règle pratique suivante, pour déduire immédiatement un coefficient quelconque de celui qui le précède.

Règle.

15. *Pour déduire le développement de A_{n+1} de celui de A_n; les dérivées des fonctions étant disposées en colonnes, d'après les dimensions de leurs exposans, et les lettres d'après leur ordre de succession;*

1.° *On ne fera varier, dans chaque terme de chaque colonne, que les coefficiens composés des quantités polynômiales* $a_1, a_2, a_3, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots,$ *d'après la règle du n.° 8; en observant, pour ceux qui contiennent à la fois des* a *et des* b, *de ne faire varier d'abord que les* b, *et ensuite les* a, *mais dans le dernier terme seulement de chaque coefficient.*

2.° *On fera varier de plus, mais dans la dernière colonne seulement, la fonction* ψb, *dans tous les termes; et, comme la puissance de* b_1 *augmente alors d'une unité, on divisera par son exposant ainsi augmenté;*

3.° *Enfin, on fera encore varier, mais dans le dernier terme de la dernière colonne seulement, la fonction* φa; *et, comme la puissance de* a_1 *augmente alors d'une unité, on divisera par son exposant ainsi augmenté.*

Donnons des exemples de chacune des trois parties de cette règle.

1.° Le coefficient de $\frac{1}{2}D^2\varphi a.D\psi b$, dans A_4, est $a_1{}^2b_2+2a_1a_2b_1$.

Pour en déduire celui du même terme dans A_5, je fais d'abord varier les b, ce qui donne $a_1{}^2b_3+2a_1a_2b_2$; faisant ensuite varier les a dans le dernier terme $2a_1a_2b_1$, on a, d'après la première partie de la règle du n.° 8, $2a_1a_3b_1$, et d'après la seconde partie de cette règle $a_2{}^2b_1$. Rassemblant tous ces termes, on a le coefficient de $\frac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.\psi b$ dans A_5,

2.° En appliquant la seconde partie de la règle ci-dessus aux cinq termes de la dernière colonne de A_4, on obtient les cinq premiers termes de la dernière colonne de A_5;

3.° Enfin, en appliquant la troisième partie de la règle ci-dessus au dernier terme $\frac{1}{24}\mathrm{D}^4\varphi a.\psi b.a_1{}^4$ de la dernière colonne de A_4, on obtient le dernier terme $\frac{1}{120}\mathrm{D}^5\varphi a.\psi b.a_1{}^5$ de la dernière colonne de A_5.

Cette règle est encore d'une exécution très-facile, et si expéditive qu'on peut écrire de suite, et sans s'arrêter, les termes successifs du développement. Elle n'est, jusqu'à présent, de même que celle du n.° 8, qu'une conclusion d'induction; mais nous la démontrerons complètement dans la suite, et nous donnerons aussi une règle très-simple, pour écrire immédiatement un terme quelconque du développement, indépendamment de ceux qui le précèdent.

16. *Remarque I.* En examinant la composition des termes successifs (18) du développement de l'équation (15), on découvre la loi remarquable suivante qui y règne. Le terme général A_n est composé de n colonnes, ordonnées selon les dimensions des exposans des dérivées de φa et ψb, de manière que la $m.^{\text{me}}$ colonne contient les $m+1$ termes

$$\varphi a.\frac{\mathrm{D}^m\psi b}{1.2.....m},\ \mathrm{D}\varphi a.\frac{\mathrm{D}^{m-1}\psi b}{1.2...(m-1)},\ ....\frac{\mathrm{D}^{m-1}\varphi a}{1.2...(m-1)}.\mathrm{D}\psi b,\ \frac{\mathrm{D}^m\varphi a}{1.2....m}.\psi b.$$

Chacun de ces termes a pour coefficient une fonction des quantités polynômiales a_1, a_2, a_3, ..., b_1, b_2, b_3, ... dont voici la formation : en supposant $r+s=m$, le coefficient du terme $\frac{\mathrm{D}^r\varphi a}{1.2...r}.\frac{\mathrm{D}^s\psi b}{1.2...s}$ est composé de tous les produits de m lettres, dont un nombre r des quantités polynômiales en a et un nombre b des quantités polynômiales en b, de manière que la somme de tous les indices de chaque produit soit égale à n. Quant aux coefficiens numériques de chaque produit, on les obtient en multipliant l'un par l'autre le nombre qui indique celui des permutations qu'on peut faire, entre les quantités polynômiales en a, et le nombre qui indique celui des permutions qu'on peut faire entre les quantités polynômiales en b.

Ainsi, le coefficient de $\frac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.\frac{1}{6}\mathrm{D}^3\psi b$, dans A_7 est

$$3a_1{}^2b_1b_2{}^2+3a_1{}^2b_1{}^2b_3+6a_1a_2b_1{}^2b_2+2a_1a_3b_1{}^3+a_2{}^2b_1{}^3\text{, c'est-à-dire,}$$

$$3a_1a_1b_1b_2b_2+3a_1a_1b_1b_1b_3+2.3a_1a_2b_1b_1b_2+2a_1a_3b_1b_1b_1+a_2a_2b_1b_1b_1\,,$$

qui contient en effet tous les produits possibles de deux quantités polynômiales en a et de trois en b, de manière que la somme des indices soit égale à 7 ; et qui a des coefficiens numériques qui suivent la loi que nous venons d'indiquer.

On pourrait donc, au moyen de cette loi, qui est d'ailleurs la même pour une fonction quelconque de deux polynômes indépendans, former immédiatement un terme quelconque du développement, par la théorie des combinaisons ; ce qui donnerait une extension considérable à l'analise combinatoire de Hindenburg ; mais le moyen que nous donnerons par la suite sera à la fois plus simple, plus direct et plus analitique.

On remarquera sans doute que la simplicité de l'énoncé de cette loi, ainsi que de celle du n.° 10, n'est due qu'au choix que nous avons fait d'indices numériques, pour représenter les quantités polynômiales : elle n'aurait pu s'énoncer que très-difficilement, avec les lettres dans l'ordre alphabétique, employées par Arbogast et Hindenburg. Ces lettres à indices ont encore l'avantage d'indiquer, de la manière la plus caractéristique, leurs relations avec les dérivées du premier terme du polynôme, puisqu'on a généralement $a_n=\frac{\mathrm{D}^n a}{1.2\ldots n}$:

tant il est vrai que souvent le plus léger changement dans les notations peut avoir l'influence la plus heureuse sur les méthodes.

17. *Remarque II.* La theorie que nous venons d'exposer, contient tout ce qui est nécessaire pour le développement complet des fonctions d'un polynôme, et même, à la rigueur, pour celui d'une fonction quelconque de deux polynômes indépendans ; car il suffirait, pour le développement de $\varphi(a+a_1x+a_2x^2+\ldots, b+b_1x+b_2x^2+\ldots)$, de remplacer, dans les formules (18), les produits tels que $\frac{\mathrm{D}^r\varphi a}{1.2\ldots r}\cdot\frac{\mathrm{D}^s\psi b}{1.2\ldots s}$ par les dérivées partielles du même ordre de $\varphi(a, b)$. Mais, nous allons encore envisager cette théorie sous un autre point de vue, qui nous facilitera singulierement l'exposition de celle du retour des fonctions et des séries, à laquelle nous nous proposons de consacrer l'article II.

18. On a, par le n.° 1,

$$(19)\qquad \varphi(a+y)=\varphi a+\mathrm{D}\varphi a.y+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.y^2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.y^3+\ldots$$

Si l'on suppose

$$(20)\qquad y=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots=x(a_1+a_2x+a_3x^2+\ldots),$$

où les coefficiens a_1, a_2, a_3, ... représentent des quantités quelconques et indépendantes, et qu'on substitue cette valeur de y dans l'équation (19), son premier membre se transformera en celui de l'équation (7) ; on aura donc

$$(21)\qquad \begin{aligned}\varphi(a+y)&=\varphi(a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)\\&=\varphi a+\mathrm{D}\varphi a.x+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.x^2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.x^3+\ldots\end{aligned}$$

Ces deux développemens ne diffèrent l'un de l'autre qu'en ce que, dans les dérivées du premier, on suppose $\mathrm{D}a=1$, $\mathrm{D}^2a=0$, $\mathrm{D}^3a=0,\ldots,$ et dans celle du second, $\mathrm{D}a=a_1$, $\mathrm{D}^2a=2a_2$, $\mathrm{D}^3a=6a_3,\ldots$ La manière de déduire les dérivées suivies d'un point de celles sans point a été exposée aux n.os 7 et 8.

L'équation (21) fournit donc le moyen de résoudre cette question

tion : y étant une fonction donnée de x, ou un polynôme en x; développer, selon les puissances de x, une fonction quelconque $\varphi(a+y)$? En effet, d'après le n.° 3, l'équation (20) peut être mise sous la forme

$$(22) \qquad y=x\text{f}(\alpha+x)\,,$$

et l'on a

$$(23) \qquad a_1=\text{f}\alpha\,,\ a_2=\text{Df}\alpha\,,\ a_3=\tfrac{1}{2}\text{D}^2\text{f}\alpha\,,\ a_4=\tfrac{1}{6}\text{D}^3\text{f}\alpha\,,\ldots\ldots;$$

c'est-à-dire, que a_1 doit être considéré comme un premier terme de polynôme.

En substituant ces valeurs dans l'équation (21), on obtient

$$(24) \qquad \varphi\{a+x\text{f}(\alpha+x)\}=\varphi(a+\text{f}\alpha.x+\text{Df}\alpha.x^2+\tfrac{1}{2}\text{D}^2\text{f}\alpha.x^3+\ldots)$$
$$=\varphi a+\text{D}.\varphi a.x+\tfrac{1}{2}\text{D}^2.\varphi a.x^2+\tfrac{1}{6}\text{D}^3.\varphi a.x^3+\ldots\ldots;$$

où, dans le développement du dernier membre, qu'on exécute d'après la règle du n.° 8, il faut substituer, pour a_1, a_2, a_3, ... leurs valeurs (23).

19. Si, dans la question du n.° précédent, la valeur de y était donnée par l'équation suivante :

$$(25) \qquad y=x\psi\text{f}(\alpha+x)$$

qui, d'après le n.° 5, devient

$$(26) \qquad y=x(\psi\text{f}\alpha+\text{D}.\psi\text{f}\alpha.x+\tfrac{1}{2}\text{D}^2.\psi\text{f}\alpha.x^2+\tfrac{1}{6}\text{D}^3.\psi\text{f}\alpha.x^3+\ldots)\;;$$

il faudrait faire, dans le développement du dernier membre de l'équation (24),

$$(27) \qquad a_1=\psi\text{f}\alpha\,,\ a_2=\text{D}.\psi\text{f}\alpha\,,\ a_3=\tfrac{1}{2}\text{D}^2.\psi\text{f}\alpha\,,\ a_4=\tfrac{1}{6}\text{D}^3.\psi\text{f}\alpha\,,\ldots;$$

mais, conformément aux principes des n.^{os} 5 et 6, ces dernières dérivées doivent être suivies d'un point, et développées d'après le n.° 7.

20. Si l'on avait à développer, selon les puissances de x; la fonction $\varphi(a+z)$, z étant donné par l'équation

$$(28) \qquad z = x\psi(\beta + y) ;$$

et y par l'équation (22) ; on aurait

$$(29) \qquad \begin{aligned} \phi(a+z) &= \phi[a + x\psi(\beta+y)] = \phi\{a + x\psi[\beta + x\mathrm{f}(\alpha+x)]\} \\ &= \phi\{a + x\psi(\beta + \mathrm{f}\alpha.x + \mathrm{Df}\alpha.x^2 + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\mathrm{f}\alpha.x^3 + \ldots.)\} \\ &= \phi a + \mathrm{D}.\phi a.x + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.\phi a.x^2 + \tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3.\phi a + . \ldots ; \end{aligned}$$

mais ici, dans le développement des dérivées du dernier membre, il faudrait remplacer a_1, a_2, a_3, ... par $\psi\beta$, $\mathrm{D}.\psi\beta$, $\frac{1}{2}\mathrm{D}^2.\psi\beta$, ..., en observant de mettre, dans le développement de ces dernières dérivées, $\mathrm{f}\alpha$ à la place de $\mathrm{D}\beta$, $\mathrm{Df}\alpha$ à la place de $\frac{1}{2}\mathrm{D}^2\beta$, $\frac{1}{2}\mathrm{D}^2\mathrm{f}\alpha$ à la place de $\frac{1}{6}\mathrm{D}^3\beta$; et ainsi de suite.

On pourrait aisément pousser plus loin ces substitutions de fonctions dans les fonctions, ou de séries dans les séries ; et l'on voit que le principe de leur développement par les dérivations est simple et uniforme : il ne reste que la complication des résultats, qui est inhérente à la chose même.

Article II.

Développement des fonctions selon les puissances d'une fonction quelconque de la variable, ou retour des fonctions et des séries.

21. Depuis le n.° 18 de l'article précédent, nous nous sommes occupés de la question suivante : le développement d'une fonction quelconque, selon les puissances d'une fonction donnée de la variable principale, étant supposé connu ; en déduire le développement selon les puissances de la variable principale ? Dans cet article, nous allons résoudre la question inverse, savoir : le développement d'une fonction quelconque, selon les puissances de la variable principale, étant donné, ainsi que la relation entre cette variable et une autre fonction ; en déduire le développement selon les puis-

sances de cette dernière fonction ? Cette question contient le problème général du retour des fonctions et des séries.

22. Proposons-nous de transformer le polynôme

$$(30) \qquad A+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots\ldots;$$

procédant selon les puissances de la variable principale x, en un polynôme

$$(31) \qquad B+B_1y+B_2y^2+B_3y^3+\ldots.$$

procédant selon les puissances de y, dont la valeur est supposée donnée par l'équation (20)

$$y=x(a_1+a_2x+a_3x^2+\ldots\ldots).$$

En comparant le polynôme (30) avec l'équation (21), et le polynôme (31) avec l'équation (19), on obtient

$$(32) \qquad A=\varphi a,\ A_1=\mathrm{D}.\varphi a,\ A_2=\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.\varphi a,\ A_3=\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3.\varphi a,\ldots.;$$

$$(33) \qquad B=\phi a,\ B_1=\mathrm{D}\,\varphi a,\ B_2=\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\,\phi a,\ B_3=\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\,\phi a,\ldots\ldots$$

Ici, ce sont les dérivées suivies d'un point qui sont données immédiatement; et la question se réduit à en déduire celles sans points. On pourrait la résoudre en tirant les valeurs de ces dernières des équations (10), par des éliminations successives; mais, outre que ce moyen serait trop long, il est peu propre à faire découvrir la loi qui y règne : il est bien plus simple de les former immédiatement de la manière suivante.

On a, d'après les n.^{os} 6 et 7, $\mathrm{D}.\varphi a=\mathrm{D}\phi a.a_1$, et par conséquent $\mathrm{D}\varphi a=a_1^{-1}\mathrm{D}.\varphi a$; donc, en répétant l'opération indiquée par cette équation, on obtient

$$(34)\left\{\begin{array}{l}
\mathrm{D}\,\phi a=a_1^{-1}\mathrm{D}.\phi a\,,\\
\mathrm{D}^2\varphi a=\mathrm{D}(\mathrm{D}\varphi a)=a_1^{-1}\mathrm{D}.(a_1^{-1}\mathrm{D}.\varphi a)\,,\\
\mathrm{D}^3\phi a=\mathrm{D}(\mathrm{D}^2\varphi a)=a_1^{-1}\mathrm{D}.[a_1^{-1}\mathrm{D}.(a_1^{-1}\mathrm{D}.\phi a)]\,;\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{array}\right.$$

mais ici il faut observer que la manière dont nous sommes parvenus à ces relations suppose que a_1 est un second terme de polynôme; c'est-à-dire que, d'après le n.° 1, on a

$$a_1=\mathrm{D}a\ ,\quad a_2=\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2a\ ,\quad a_3=\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3a\ ,\ldots\ldots a_n=\frac{1}{1.2\ldots n}\mathrm{D}^na\ ;$$

et par conséquent

$$\mathrm{D}a_1=\mathrm{D}^2a=2a_2\ ,\ \mathrm{D}^2a_1=\mathrm{D}^3a=6a_3\ ,\ldots\ \mathrm{D}^{n-1}a_1=\mathrm{D}^na=1.2\ldots n.a_n\ ;$$

ainsi, dans le développement des seconds membres des équations (34), il faudra substituer pour les dérivées de a_1 leurs valeurs précédentes.

Mais si, conformément au n.° 18, on veut considérer a_1 comme premier terme de polynôme, on a

$$a_2=\mathrm{D}a_1\ ,\ a_3=\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2a_1\ ,\ a_4=\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3a_1\ ,\ldots\ldots a_n=\frac{1}{1.2\ldots n}\mathrm{D}^{n-1}a_1\ :$$

en substituant ces valeurs dans les développemens des équations (34), ce qui revient à y écrire $2\mathrm{D}a_1$ pour $\mathrm{D}a_1$, $3\mathrm{D}^2a_1$ pour D^2a_1, $4\mathrm{D}^3a_1$ pour D^3a_1, ..., $n\mathrm{D}^{n-1}a_1$ pour $\mathrm{D}^{n-1}a_1$, on pourra mettre ces équations sous la forme suivante :

$$(35)\left\{\begin{array}{l}
\mathrm{D}\varphi a=a_1{}^{-1}\mathrm{D}.\varphi a\ ,\\
\mathrm{D}^2\varphi a=\mathrm{D}.(a_1{}^{-2}\mathrm{D}.\varphi a)\ ,\\
\mathrm{D}^3\varphi a=\mathrm{D}^2.(a_1{}^{-3}\mathrm{D}.\varphi a)\ ,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathrm{D}\ \varphi a=\mathrm{D}^{n-1}.(a_1{}^{-n}\mathrm{D}.\varphi a)\ .
\end{array}\right.$$

En substituant ces valeurs dans les équations (33), et remplaçant φa par A, on obtient enfin

$$(36)\left\{\begin{array}{l}
B=A\ ,\\
B_1=a_1{}^{-1}\mathrm{D}.A\ ,\\
B_2=\tfrac{1}{2}\mathrm{D}.(a_1{}^{-2}\mathrm{D}.A)\ ,\\
B_3=\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^2.(a_1{}^{-3}\mathrm{D}.A)\ ,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,\\
B_n=\dfrac{1}{1.2\ldots n}\mathrm{D}^{n-1}.(a_1{}^{-n}\mathrm{D}.A)\ ;
\end{array}\right.$$

où,

où, d'après l'observation du n.° 18, et d'après l'observation précédente, a_1 doit être considéré comme un premier terme de polynome.

23. Si l'on fait attention que l'équation (20) peut être mise sous la forme (22), et que le polynôme (30), d'après le n.° 3, peut représenter une fonction quelconque $\varphi(b+x)$; le problème du n.° précédent fournit la solution de la question suivante : étant donnée la relation $y=x\mathrm{f}(\alpha+x)$, développer la fonction quelconque $\varphi(b+x)$ suivant les puissances de y.

D'après cela, si l'on substitue, dans le polynôme (31), les valeurs (36), et dans celle-ci pour A et a_1 leurs valeurs φb et $\mathrm{f}\alpha$, on aura

$$(37)\qquad \varphi(b+x)=B+B_1y+B_2y^2+B_3y^3+\ldots$$
$$=\varphi b+(\mathrm{f}\alpha)^{-1}\mathrm{D}.\varphi b.y+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}.\{(\mathrm{f}\alpha)^{-2}\mathrm{D}.\varphi b\}y^2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^2.\{(\mathrm{f}\alpha)^{-3}\mathrm{D}.\varphi b\}y^3+\ldots$$

où l'on peut supprimer, si l'on veut, les points qui suivent les signes de derivation qui affectent φb; car, dans le binôme $b+x$, on a $\mathrm{D}b=1$; et par conséquent $\mathrm{D}.\varphi b=\mathrm{D}\varphi b$.

On aurait de même, dans la même hypothèse,

$$(38)\qquad \varphi(b+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\ldots)=B+B_1y+B_2y^2+B_3y^3+\ldots$$
$$=\varphi b+(\mathrm{f}\alpha)^{-1}\mathrm{D}.\varphi b.y+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}.\{(\mathrm{f}\alpha)^{-2}\mathrm{D}.\varphi b\}y^2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^2.\{(\mathrm{f}\alpha)^{-3}\mathrm{D}.\varphi b\}y^3+\ldots.$$

mais ici les points, après tous les signes de dérivation, sont indispensables, car on a $\mathrm{D}b=b_1$, $\mathrm{D}^2b=2b_2$, $\mathrm{D}^3b=6b_3$, ..., et par conséquent $\mathrm{D}.\varphi b=\mathrm{D}\varphi b.b_1$, ...

On aurait encore, de la même manière, et pour la même valeur de y,

$$(39)\quad \psi\varphi(b+x)=\psi\varphi b+(\mathrm{f}\alpha)^{-1}\mathrm{D}.\psi\varphi b.y+\tfrac{1}{2}\{(\mathrm{f}\alpha)^{-2}\mathrm{D}.\psi b\}y^2+\tfrac{1}{6}\{(\mathrm{f}\alpha)^{-3}\mathrm{D}.\psi\varphi b\}y^3+\ldots,$$

où les points, après les signes de dérivation sont encore nécessaires : parce qu'on a $\mathrm{D}.\psi\varphi b=\mathrm{D}\psi\varphi b.\mathrm{D}\varphi b$.

24. Si, dans la question du n.° précédent, la valeur de y était donnée par l'équation (25)

$$y=x\psi\mathrm{f}(\alpha+x),$$

il faudrait substituer, dans les équations (36), pour a_1 sa valeur $\psi f\alpha$, conformément au n.° 19; ce qui donnerait, d'après l'observation faite sur l'équation (37)

$$(40)\quad \varphi(b+x)=\varphi b+(\psi f\alpha)^{-1}D\varphi b.y+\tfrac{1}{2}D.\{(\psi f\alpha)^{-2}D\varphi b\}y^2+\tfrac{1}{6}D^2.\{(\psi f\alpha)^{-3}D\varphi b\}y^3+\ldots$$

Dans le cas particulier où ψ représente la puissance -1, l'équation (25) devient

$$(41)\qquad y=\frac{x}{f(\alpha+x)},$$

et alors l'équation (40) se change en

$$(42)\qquad \varphi(b+x)=\varphi b+f\alpha.D\varphi b.y+\tfrac{1}{2}D.\{(f\alpha)^2D\varphi b\}y^2+\tfrac{1}{6}D^2.\{(f\alpha)^3D\varphi b\}y^3+\ldots$$

On aurait de même, pour la valeur de y (25),

$$(43)\quad F\varphi(b+x)=F\varphi b+(\psi f\alpha)^{-1}D.F\varphi b.y+\tfrac{1}{2}D.\{(\psi f\alpha)^{-2}D.F\varphi b\}y^2+\tfrac{1}{6}D^2.\{(\psi f\alpha)^{-3}D.F\varphi b\}y^3+\ldots$$

où la même observation n'a lieu qu'après l'équation (39).

25. Proposons-nous enfin de résoudre la question suivante : étant données les relations

$$(44)\qquad y=xf(\alpha+x),\quad z=x\psi(\beta+y),$$

développer la fonction $\varphi(b+x)$ selon les puissances de z, sans x ni y.

En comparant les solutions des n.os précédens avec la question du n.° 20, dont celle-ci est l'inverse, on obtient immédiatement

$$(45)\quad \varphi(b+x)=\varphi b+(\psi\beta)^{-1}.D\varphi b.z+\tfrac{1}{2}D.\{(\psi\beta)^{-2}D\varphi b\}z^2+\tfrac{1}{6}D^2.\{(\psi\beta)^{-3}.D\varphi b\}z^3+\ldots;$$

en observant seulement de mettre, dans le développement des dérivées de $\psi\beta$, $f\alpha$ pour $D\beta$, $Df\alpha$ pour $\frac{1}{2}D^2\beta$, $\frac{1}{2}D^2f\alpha$ pour $\frac{1}{6}D^3\beta$, et ainsi de suite.

En se conformant à cette observation, on aurait de même

$$(46)\quad F\varphi(b+x)=F\varphi b+(\psi\beta)^{-1}D.F\varphi b.z+\tfrac{1}{2}D.\{(\psi\beta)^{-2}D.F\varphi b\}z^2+\tfrac{1}{6}D^2.\{(\psi\beta)^{-3}D.F\varphi b\}z^3+\ldots$$

26. *Remarque.* La question traitée au n.° précédent est une espèce de *retour double* : on pourrait en former de pareilles sur des *retours triples*, *quadruples*, etc. : le principe de leurs solutions se déduit aisément de celle du n.° précédent ; et leur développement par les dérivations s'exécuterait aussi facilement que leur complication naturelle peut le permettre.

27. Depuis le commencement de cet article, nous n'avons fait qu'établir les formules générales du retour des fonctions et des séries ; occupons-nous maintenant de leur développement complet et effectif. Reprenons, à cet effet, les problèmes du n.° 23, et proposons-nous de développer complètement les coefficiens successifs B, B_1, B_2, B_3, ... de l'équation (38).

Comme nous avons vu, aux n.^{os} 18 et 22, que a_1 devait être considéré comme un premier terme de polynôme, dans l'équation (20) ou (22), et que d'ailleurs les quantités a_1, a_2, a_3,... peuvent être quelconques ; nous les remplacerons par c, c_1, c_2, c_3, ... ; afin de conserver la régularité dans les développemens ; ainsi, l'équation (20) ou (22) deviendra

$$(47) \qquad y=x\text{f}(\alpha+x)=x(c+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+....)$$

Au moyen de cette observation, le problème en question se réduit à développer les termes B, B_1, B_2, B_3, ... des équations (36), en y substituant c à la place de a_1, et de φb à la place de A ; ce qui donne

$$(48) \qquad 1B_1=c^{-1}\text{D}.\varphi b\,,\ \ 2B_2=\text{D}.(c^{-2}\text{D}.\varphi b)\,,\ \ 3B_3=\tfrac{1}{2}\text{D}^2.(c^{-3}\text{D}.\varphi b)....$$

En comparant ces termes avec la formule (17), on voit aisément que leur développement doit s'exécuter par la même règle, en observant cependant qu'ici la fonction φa est remplacée par une puissance négative de c, dont l'exposant est égal à l'indice du terme ; et que la fonction ψb est remplacée par $\text{D}.\varphi b$. Avec cette attention, on aura, en suivant la règle du n.° 15, les développemens suivans, analogues à ceux (18)

$$
\left\{
\begin{aligned}
&B=\phi b\,;\\
&1B_1=c^{-1}.\mathrm{D}\phi b.b_1\,,\\
&2B_2=c^{-2}.\mathrm{D}\phi b.b_2+c^{-2}.\mathrm{DD}\phi b.b_1^2\\
&\qquad\qquad+\mathrm{D}(c^{-2}).\mathrm{D}\phi b.c_1b_1\\
&3B_3=c^{-3}.\mathrm{D}\phi b.b_3+c^{-3}.\mathrm{DD}\phi b.2b_1b_2+c^{-3}.\frac{\mathrm{D}^2\mathrm{D}\phi b.b_1^3}{2}.b_1^3\\
&\qquad\qquad+\mathrm{D}(c^{-3}).\mathrm{D}\phi b(c_1b_2+c_2b_1)+\mathrm{D}(c^{-3}).\mathrm{DD}\phi b.c_1b_1^2\\
&\qquad\qquad\qquad+\frac{\mathrm{D}^2(c^{-3})}{2}\,\mathrm{D}\phi b.c_1^2b_1\\
&4B_4=c^{-4}.\mathrm{D}\phi b.b_4+c^{-4}.\mathrm{DD}\phi b(2b_1b_3+b_2^2)+c^{-4}.\frac{\mathrm{D}^2\mathrm{D}\phi b}{2}.3b_1^2b_2\\
&\qquad+\mathrm{D}(c^{-4}).\mathrm{D}\phi b(c_1b_3+c_2b_2+c_3b_1+\mathrm{D}(c^{-4}).\mathrm{DD}\phi(2c_1b_2+c_2b_1^2\\
&\qquad\qquad+\frac{\mathrm{D}^2(c^{-4})}{2}.\mathrm{D}\phi b(c_1^2b_2+2c_1c_2b_1)\\
&\qquad+c^{-4}.\frac{\mathrm{D}^3\mathrm{D}\phi b}{6}.b_1^4\\
&\qquad+\mathrm{D}(c^{-4}).\frac{\mathrm{D}^2\mathrm{D}\phi b}{2}.c_1b_1^3\\
&\qquad+\frac{\mathrm{D}^2(c^{-4})}{2}\,\mathrm{DD}\phi b.c_1^2b_1^2\\
&\qquad+\frac{\mathrm{D}^3(c^{-4})}{6}\,\mathrm{D}\phi b.c_1^3b_1\\
&5B_5=c^{-5}.\mathrm{D}\phi b.b_5+c^{-5}.\mathrm{DD}\phi b(2b_1b_4+2b_2b_3)+c^{-5}.\frac{\mathrm{D}^2\mathrm{D}\phi b}{2}.(3b_1^2b_3+3b_1b_2^2)\\
&+\mathrm{D}(c^{-5}).\mathrm{D}\phi b(c_1b_4+c_2b_3+c_3b_2+c_4b_1)+\mathrm{D}(c^{-5}).\mathrm{DD}\phi b.(2c_1b_1b_3+c_1b_2^2+2c_2b_1b_2+c_3b_1^2)\\
&\qquad\qquad+\frac{\mathrm{D}^2(c^{-5})}{2}\,\mathrm{D}.\phi b.(c_1^2b_3+2c_1c_2b_2+2c_1c_3b_1+c_2^2b_1)\\
&+c^{-5}.\frac{\mathrm{D}^3\mathrm{D}\phi b}{2}.4b_1^3b_2 \qquad\qquad +c^{-5}.\frac{\mathrm{D}^4.\mathrm{D}\phi b}{24}.b_1^5\\
&+\mathrm{D}(c^{-5}).\frac{\mathrm{D}^2\mathrm{D}\phi b}{2}(3c_1b_1^2+c_2b_1^3)+\mathrm{D}(c^{-5}).\frac{\mathrm{D}^3\mathrm{D}\phi b}{6}.c_1b_1^4
\end{aligned}
\right.
\tag{49}
$$

$$\left|\begin{array}{l}
+\frac{D^2(c^{-5})}{2}.DD\phi b(2c_1^2 b_1 b_2+2c_1 c_2 b_1^2)+\frac{D^2(c^{-5})}{2}.\frac{D^2 D\phi b}{2}.c_1^2 b_1^3 \\
+\frac{D^3(c^{-5})}{6}.D\phi b(c_1^3 b_2+3c_1^2 c_2 b_1) \qquad +\frac{D^3(c^{-5})}{6}.DD\phi b.c_1^3 b_1^2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\frac{D^4(c^{-5})}{24}.D\phi b.c_1^4 b_1
\end{array}\right.$$

et ainsi de suite.

Si l'on effectue les dérivations des puissances négatives de c, qui ne sont qu'indiquées, ainsi que celles de $D\phi b$, et qu'on ordonne selon les dérivées de ϕb, on obtient

$$(50)\left\{\begin{array}{l}
B=\phi b \\
1B_1=D\phi b.c^{-1}.b_1 \\
2B_2=D\phi b\left|\begin{array}{l} c^{-2}.b_2 \\ -2c^{-3}.b_1 c_1\end{array}\right. +2\frac{D^2\phi b}{2}.c^{-2}.b_1^2 \\
3B_3=D\phi b\left|\begin{array}{l} c^{-3}.b_3 \\ -3c^{-4}(b_1 c_2+b_2 c_1) \\ +\frac{3.4}{2}c^{-5}.b_1 c_1^2\end{array}\right. +2\frac{D^2\phi b}{2}\left|\begin{array}{l} c^{-3}.2b_1 b_2 \\ -3c^{-4}.b_1^2 c_1\end{array}\right. +3\frac{D^3\phi b}{6}.c^{-3}.b_1^3 \\
4B_4=D\phi b\left|\begin{array}{l} c^{-4}.b_4 \\ -4c^{-5}.(b_1 c_3+b_2 c_2+b_3 c_1) \\ +\frac{4.5}{2}c^{-6}(2b_1 c_1 c_2+b_2 c_1^2) \\ -\frac{4.5.6}{2.3}c^{-7}.b_1 c_1^3\end{array}\right. +2\frac{D^2\phi b}{2}\left|\begin{array}{l} c^{-4}(2b_1 b_3+b_2^2) \\ -4c^{-5}(b_1^2 c_2+2b_1 b_2 c_1) \\ +\frac{4.5}{2}c^{-6}.b_1^2 c_1^2\end{array}\right. \\
\qquad +3\frac{D^3\phi b}{6}\left|\begin{array}{l} c^{-4}.3b_1^2 b_2 \\ -4c^{-5}.b_1^3 c_1\end{array}\right. +4\frac{D^4\phi b}{24}.c^{-4}.b_1^4
\end{array}\right.$$

$$
\begin{aligned}
5B_5 = \mathrm{D}\phi b \Big| & c^{-5}.b_5 \\
& -5c^{-6}(b_1c_4+b_2c_3+b_3c^2+b_4c_1) \\
& +\frac{5.6}{2}c^{-7}(2b_1c_1c_3+b_1c_2{}^2+2b_2c_1c^2+b_3c_1{}^2) \\
& -\frac{5.6.7}{2.3}c^{-8}(3b_1c_1c_3+b_2c_1{}^3) \\
& +\frac{5.6.7.8}{2.3.4}c^{-9}.b_1c_1{}^4
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
+2\frac{\mathrm{D}^2\phi b}{2}.\Big| & c^{-5}(2b_1b_4+2b_2b_3) \\
& -5c^{-6}(b_1{}^2c_3+2b_1b_2c_2+2b_1b_3c_1+b_2{}^2c_1) \\
& +\frac{5.6}{2}c^{-7}(2b_1{}^2c_1c_2+2b_1b_2c_1{}^2) \\
& -\frac{5.6.7}{2.3}c^{-8}.b_1{}^2c_1{}^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+3\frac{\mathrm{D}^3\phi b}{6}.\Big| & c^{-5}(3b_1{}^2b_3+3b_1b_2{}^2) \\
& -5c^{-6}(b_1{}^3c_2+3b_1{}^2b_2c_1) \\
& +\frac{5.6}{2}c^{-7}.b_1{}^3c_1{}^2
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
+4.\frac{\mathrm{D}^4\phi b}{24}\Big| & c^{-5}.4b_1{}^3b_2+5.\frac{\mathrm{D}^5\phi b}{120}.c^{-5}.b_1{}^5 \\
& -5c^{-6}.b_1{}^4.c_1
\end{aligned}
$$

et ainsi de suite.

L'examen de la composition successive des termes fournit encore une règle pratique, pour déduire un terme quelconque de celui qui le précède.

Règle.

28. *Pour déduire le développement de* $(n+1)B_{n+1}$ *de celui de* nB_n, *celui-ci étant ordonné en colonnes, par rapport aux dérivées successives de* ϕb, *les termes de chaque colonne, par rapport aux puissances de* c, *et les quantités polynômiales d'après leur ordre de succession* ;

1.° *On divisera tous les termes de* nB_n *par* n, *on multipliera chacun par l'exposant de* c *dans ce terme* (*abstraction faite du signe*), *et l'on augmentera cet exposant d'une unité* (*aussi abstraction faite de son signe*);

2.° *On ne fera varier, dans chaque terme de chaque colonne, que les coefficiens composés des quantités polynômiales* $b_1, b_2, b_3, \ldots,$ $c_1, c_2, c_3, \ldots,$ *d'après la règle du n.°* 8 ; *en observant, pour* *ceux qui contiennent à la fois des* b *et des* c, *de ne faire varier d'abord que les* c, *et ensuite les* b, *mais dans le dernier terme seulement de chaque coefficient.*

3.° *On fera varier de plus, mais dans le dernier terme seulement de chaque colonne, la puissance de* c; *et, comme la puissance de* c_1 *augmente alors d'une unité, on divisera par son exposant ainsi augmenté;*

4.° *Enfin, on fera varier* φb, *dans le tout dernier terme seulement, en mettant* $(n+1)\dfrac{\mathrm{D}^{n+1}\varphi b}{1.2..(n+1)}$ *pour* $n\dfrac{\mathrm{D}^n\varphi b}{1.2\ldots n}$, *et augmentant la puissance de* b_1 *d'une unité.*

Cette règle est analogue à celle du n.° 15 : dans l'exécution, on n'a pas besoin de faire d'avance la préparation de la première partie; elle peut se faire à mesure qu'on opère sur chaque terme.

29. Au moyen de la régle précédente, on peut écrire de suite les termes successifs du développement de l'équation (38) tout ordonnés et réduits à leur plus simple expression. Si l'on suppose $b_1=1$, $b_2=0$, $b_3=0,\ldots$, on aura le cas de l'équation (37); et il n'en résulte d'autre changement à la règle précédente qu'une simplification dans la seconde partie, parce qu'il n'y a plus que des quantités polynômiales d'une seule espèce; ainsi, les formules (50) deviendront, pour ce cas (en remplaçant les colonnes par des parenthèses),

$$B=\varphi b\,,$$

$$1B_1=\mathrm{D}\varphi b.c^{-1}\,,$$

$$2B_2=\mathrm{D}\varphi b(-2c^{-3}.c_1)+2\,\frac{\mathrm{D}^2\varphi b}{2}.c^{-2}\,,$$

$$3B_3=\mathrm{D}\varphi b\left(-3c^{-4}.c_2+\frac{3.4}{2}c^{-5}.c_1^{\,2}\right)+2\frac{\mathrm{D}^2\varphi b}{2}(-3c^{-4}.c_1)+3\frac{\mathrm{D}^3\varphi b}{6}.c^{-3}\,,$$

$$4B_4=\mathrm{D}\varphi l\left(-4c^{5}.c_3+\frac{4.5}{2}c^{-6}.2c_1c_2-\frac{4.5.6}{6}c^{-7}.c_1^{\,3}\right)+2\,\frac{\mathrm{D}^2\varphi b}{2}\left(-4c^{-5}.c_2+\frac{4.5}{2}c^{-6}.c_1^{\,2}\right)$$
$$+3\,\frac{\mathrm{D}^3\varphi b}{6}(-4c^{-5}.c_1)+4.\frac{\mathrm{D}^4\varphi b}{24}.c^{-4}\,,$$

$$5B_5=\mathrm{D}\varphi l\left[-5c^{-6}.c_4+\frac{5.6}{2}c^{-7}(2c_1c_3+c_2^2)-\frac{5.6.7}{6}c^{-8}.3c_1^2c_2+\frac{5.6.7.8}{24}c^{-9}.c_1^4\right]$$
$$+2\frac{\mathrm{D}^2\varphi b}{2}\left(-5c^{-6}.c_3+\frac{5.6}{2}c^{-7}.2c_1c_2-\frac{5.6.7}{2.3}c^{-8}.c_1^3\right)+3\frac{\mathrm{D}^3\varphi b}{6}\left(-5c^{-6}.c_2+\frac{5.6}{2}c^{-7}.c_1^2\right)$$
$$+4\frac{\mathrm{D}^4\varphi b}{24}(-5c^{-6}.c_1)+5.\frac{\mathrm{D}^5\varphi b}{120}.c^{-5}\ ,$$

et ainsi de suite.

Pour le développement de l'équation (39); comme on a, d'après le n.° 5,

$$\psi\varphi(b+x)=\psi(\varphi b+\mathrm{D}\varphi b.x+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi b.x^2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi b.x^3+\ldots.)\ ,$$

la règle reste la même; mais, au lieu de φb, il faut écrire $\psi\varphi b$, $\mathrm{D}\varphi b$ au lieu de b_1, $\frac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi b$ au lieu de b_2, $\frac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi b$ au lieu de b_3, et ainsi de suite.

Pour le cas de l'équation (40), comme $\psi\mathrm{f}\alpha=\psi c$, il faudrait, en conservant la même règle, mettre partout ψc à la place de c, $\mathrm{D}.\psi c$ à la place de c_1, $\frac{1}{2}\mathrm{D}^2.\psi c$ à la place de c_2, $\frac{1}{6}\mathrm{D}^3.\psi c$ à la place de c_3, ...; en observant que ces dérivées doivent être elles-mêmes développées selon la règle du n.° 8; que $\mathrm{D}.\psi c=\mathrm{D}\psi c.c_1=\mathrm{D}\psi\mathrm{f}\alpha.\mathrm{D}\mathrm{f}\alpha,\ldots$, et que, dans ces derniers développemens, il faut substituer $\mathrm{f}\alpha$ pour c, $\mathrm{D}\mathrm{f}\alpha$ pour c_1, $\frac{1}{2}\mathrm{D}^2\mathrm{f}\alpha$ pour c_2, $\frac{1}{6}\mathrm{D}^3\mathrm{f}\alpha$ pour c_3, ...

Pour le cas de l'équation (43), il faudrait tenir compte, à la fois, des deux observations précédentes, et écrire $\mathrm{F}\varphi b$ pour φb, $\mathrm{D}\varphi b$ pour b_1, ..., et ψc pour c, $\mathrm{D}.\psi c$ pour c_1, ...

Mais, pour l'équation (42), la règle du n.° précédent s'emploie sans la moindre restriction, parce que cette équation ne diffère de celle (37) que par le signe des exposans de c ou $\mathrm{f}\alpha$, dont cette règle est indépendante.

Pour le développement de l'équation (45), il faudrait remplacer c, c_1, c_2, ..., par $\psi\beta$, $\mathrm{D}.\psi\beta$, $\frac{1}{2}\mathrm{D}^2.\psi\beta$, ..., en observant que $\mathrm{D}\beta=c$, $\frac{1}{2}\mathrm{D}^2\beta=c_1$, $\frac{1}{6}\mathrm{D}^3\beta=c_2$, ...

Enfin,

Enfin, pour le développement de l'équation (46), il faudrait tenir compte de l'observation précédente, et de plus mettre $F\varphi b$ pour φb, $D\varphi b$ pour b_1, $\frac{1}{2}D^2\varphi b$ pour b_2, ...

Au moyen de ces observations, l'application de la règle du n.° précédent est générale.

30. *Remarque.* En effectuant les dérivations de $D\varphi b$, indiquées dans les équations (49), on obtient $D^2\varphi b$, $\frac{D^3\varphi b}{2}$, $\frac{D^4\varphi b}{6}$, ...: nous avons préféré, dans les équations (50) et (51), d'écrire, à la place de ces résultats, $2\frac{D^2\varphi b}{2}$, $3\frac{D^3\varphi b}{6}$, $4\frac{D^4\varphi b}{24}$,..... parce que $D\varphi b$, $\frac{1}{2}D^2\varphi b$, $\frac{1}{6}D^3\varphi b$, $\frac{1}{24}D^4\varphi b$, ..., sont les coefficiens du développement de $\varphi(b+x)$, et que, par ce moyen, les coefficiens numériques sont mis en évidence: ainsi, pour le problème du n.° 22, on a $D\varphi b=A_1$, $D^2\varphi b=2A_2$ $\frac{D^3\varphi b}{2}=3A_3$, $\frac{D^4\varphi b}{6}=4A_4$, ...

Nous avons déjà remarqué au n.° 27 que, d'après les n.os 18 et 22, a_1 devait être considéré comme premier terme de polynôme, et par conséquent comme indépendant de a; c'est pourpuoi, dès le n.° 23, nous avons remplacé partout cette lettre par b, sous les signes de fonction, afin de ne pas induire en erreur, par une prétendue dépendance qui n'existait plus. Cette observation deviendra encore plus claire par la théorie de l'article suivant.

C'est pour la même raison, et pour conserver la régularité de la loi des développemens, que nous avons remplacé, au n.° 27, le polynôme $a_1+a_2x+a_3x^2+....$ par celui $c+c_1x+c_2x^2+....$ Si, au n.° 18, nous avons préféré la première de ces deux formes, ce n'était que pour mieux faire apercevoir l'identité des développemens de $\varphi(a+a_1x+a_2x^2+....)$ et de $\varphi\{a+x(a_1+a_2x+....)\}$, et pour rendre plus palpable la dépendance mutuelle des coefficiens des développemens de $\varphi(a+y)$ et de $\varphi(a+a_1x+a_2x^2+....)$; dépendance qui nous a tant simplifié l'exposition de la théorie du retour des suites. On aura remarqué sans doute que la loi de cette dépendance est la même que celle du changement de la variable principale, dans la différentiation d'une fonction de deux variables.

Article III.

Démonstration des règles de développement, et règles pour écrire immédiatement un terme quelconque des développemens, tant direct que de retour.

31. Les règles des n.^{os} 8, 15 et 28 ne sont que des conclusions d'induction, tirées de l'examen de la formation successive des termes d'un développement; et, sous ce rapport, elles peuvent laisser quelque doute sur l'exactitude des résultats qu'elles fournissent. Il est donc nécessaire de démontrer ces règles, afin que le calcul des dérivations soit non seulement un instrument commode et expéditif, mais encore sûr et rigoureux.

Ces mêmes règles n'offrent que le moyen de former successivement les termes du développement, en déduisant chacun de celui qui le précède; de sorte que, pour avoir, par exemple, le vingtième terme du développement, il faut calculer auparavant les dix-neuf qui sont à sa gauche. Mais souvent on n'a besoin que d'un terme assez éloigné de l'origine du développement pour que le calcul préalable de tous ceux qui le précèdent exige une perte de temps aussi considérable qu'inutile à l'objet qu'on a en vue. Il est donc essentiel d'avoir le moyen de former immédiatement un terme quelconque, indépendamment de tous ceux qui seraient avant lui.

Tels sont les deux objets que nous nous proposons de remplir dans cet article.

32. Si, dans le polynôme $a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$, on suppose $a_2=0$, $a_3=0$, ..., l'équation (7) deviendra

$$(52)\qquad \varphi(a+a_1x)=\varphi a+\mathrm{D}.\varphi a.x+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.\varphi a.x^2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3.\varphi a.x^3+\ldots;$$

mais, par la supposition que nous venons de faire, on a [équations (3)], $\mathrm{D}a=a_1$, $\mathrm{D}^2a=0$, $\mathrm{D}^3a=0$, ...; ce qui donne, d'après les n.os 6 et 7, $\mathrm{D}.\varphi a=\mathrm{D}\varphi a.a_1$, $\mathrm{D}^2.\varphi a=\mathrm{D}^2\varphi a.a_1^2$, $\mathrm{D}^3.\varphi a=\mathrm{D}^3\varphi a.a_1^3$, ... En substituant ces valeurs dans l'équation (25), on obtient

$$(53)\qquad \varphi(a+a_1x)=\varphi a+\mathrm{D}\varphi a.a_1x+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.a_1^2x^2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.a_1^3x^3+\ldots;$$

résultat identique avec celui qu'on aurait obtenu en mettant a_1x à la place de x dans le théorème de Taylor.

Supposons maintenant que a_1 devienne a_1+a_2x : les puissances de a_1 se changeront en puissances de a_1+a_2x qui, étant elles-mêmes des fonctions de binôme, peuvent être développées comme les équations (52) et (53) ; mais, dans ce cas, ces formules se termineront, parce que $\mathrm{D}a_1=a_2$, $\mathrm{D}^2a_1=0$, ... donnent, en général, $\dfrac{\mathrm{D}^n.a_1^n}{1.2...n}=(\mathrm{D}a_1)^n=a_2^n$, et $\mathrm{D}^{n+1}.a_1^n=0$.
Substituant donc, avec cette attention, a_1+a_2x pour a_1, dans l'équation (53), on obtient

$$\begin{aligned}\varphi\{a+x(a_1+a_2x)\}=\varphi a&+\mathrm{D}\varphi a(a_1+\mathrm{D}a_1.x)x+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a(a_1^2+\mathrm{D}.a_1^2.x+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.a_1^2.x^2)x^2\\&+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a(a_1^3+\mathrm{D}.a_1^3\,x+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.a_1^3.x^2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3.a_1^3.x^3)x^3+\ldots\end{aligned}$$

En effectuant les dérivations indiquées, d'après les règles ordinaires de la différentiation, et remplaçant $\mathrm{D}a_1$ par a_2, cette équation devient

$$\begin{aligned}\varphi\{a+x(a_1+a_2x)\}=\varphi a&+\mathrm{D}\varphi a(a_1+a_2x)x+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a(a_1^2+2a_1a_2x+a_2^2x^2)x^2\\&+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a(a_1^3+3a_1^2a_2x+3a_1a_2^2x^2+a_2^3x^3)x^3+\ldots\end{aligned}$$

En ordonnant cette équation par rapport aux puissances de x, on obtient

$$\begin{aligned}(54)\qquad \varphi(a+a_1x+a_2x^2)=\varphi a&+\mathrm{D}\varphi a.a_1x+(\mathrm{D}\varphi a.a_2+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.a_1^2)x^2\\+(\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.2a_1a_2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.a_1^3)x^3&+(\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.a_2^2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.3a_1^2a_2+\tfrac{1}{24}\mathrm{D}^4\varphi a.a_1^4)x^4+\ldots\end{aligned}$$

Si l'on suppose ensuite que a_2 devienne a_2+a_3x, l'équation précédente deviendra, d'après les mêmes principes,

$$\begin{aligned}\varphi\{a+a_1x+x^2(a_2+a_3x)\}=\varphi a&+\mathrm{D}\varphi a.a_1x+\{\mathrm{D}\varphi a(a_2+\mathrm{D}a_2.x)+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.a_1^2\}x^2\\&+\{\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.2a_1(a_2+\mathrm{D}a_2.x)+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.a_1^3\}x^3+\{\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a(a_2^2+\mathrm{D}.a_2^2.x+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.a_2^2x^2)\\&+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.3a_1^2(a_2+\mathrm{D}a_2.x)+\tfrac{1}{24}\mathrm{D}^4\varphi a.a_1^4\}x^4+\ldots\end{aligned}$$

ou, en effectuant les dérivations indiquées, mettant a_3 pour $\mathrm{D}a_2$, et ordonnant par rapport à x,

$$(55)\qquad \varphi(a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)=\varphi a+\mathrm{D}\varphi a.a_1x+(\mathrm{D}\varphi a.a_2+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.a_1^2x^2)x^2$$
$$+(\mathrm{D}\varphi a.a_3+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a\,2a_1a_2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.a_1^3)x^3+(\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a(2a_1a_3+a_2^2)+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.3a_1^2a_2$$
$$+\tfrac{1}{24}\mathrm{D}^4\varphi a.a_1^4)x^4+\ldots\ldots$$

En comparant les coefficiens des seconds membres des équations (53), (54), (55) avec les formules (10), on voit que les deux premiers termes de l'équation (53), les trois premiers de (54) et les quatre premiers de (55) sont déjà complets. En continuant ces substitutions, on obtiendrait chaque fois un terme complet de plus, et l'on arriverait enfin au développement entier de la fonction de polynôme $\varphi(a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)$. Mais, sans aller plus loin, nous pouvons déjà observer, 1.° qu'on ne fait jamais varier, dans chaque terme, qu'une seule lettre à la fois, ou sa puissance, et que cette lettre est la dernière dans l'ordre des indices; car, d'après la marche que nous venons de suivre, dans ces développemens successifs, il est évident que les dernières lettres, dans l'ordre des indices, ne proviennent que des variations qu'ont subies les lettres précédentes; or, si l'on faisait encore varier celles-ci, il en résulterait que les mêmes lettres auraient subi plusieurs variations; ce qui est contraire a la marche de ces substitutions successives, où l'on ne fait plus attention aux lettres qui ont déjà subi une variation; et il s'ensuit que, dans chaque terme, on ne doit faire varier que la dernière lettre ou sa puissance; 2.° que, dans ces variations successives, chaque lettre est considérée comme un premier terme de polynôme: c'est-à-dire, qu'on écrit a_2 pour $\mathrm{D}a_1$, a_3 pour $\mathrm{D}a_2$, a_4 pour $\mathrm{D}a_3$, ..., sans autre coefficient que l'unité.

Voilà donc les deux conditions principales de la première partie de la règle du n.° 8 justifiées. Mais examinons de plus près la formation de chaque terme du développement, en supposant que toutes les substitutions précédentes, au lieu d'être successives, soient faites à la fois.

33. Le terme A_{n+1}, ou le coefficient de x^{n+1}, dans le déve-

loppement de $\varphi(a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)$ ne peut être composé que des trois parties suivantes : 1.° du terme correspondant du développement de $\varphi(a+a_1x)$, équation (53), c'est-à-dire, de $\frac{\mathrm{D}^{n+1}\varphi a}{1.2\ldots(n+1)}a_1^{n+1}$, 2.° des termes provenant de la substitution de a_1+a_2x pour a_1, de a_2+a_3x pour a_2, de a_3+a_4x pour a_3, et ainsi de suite, dans les dernières lettres (ou leurs puissances) de chaque terme de A_n; 3.° enfin, de ceux provenant des mêmes substitutions, dans les puissances des dernières lettres des termes de A_{n-1}, A_{n-2}, ..., en remontant. Examinons chacune de ces trois parties :

1.° La première partie a toujours évidemment lieu ; car il faut qu'elle subsiste quand a_2, a_3, a_4, ... deviennent nuls ; nous verrons tout à l'heure comment la règle du n.° 8 la fournit.

2.° En faisant la substitution indiquée, dans un terme de A_n de la forme $\zeta a_2^\alpha a_4$, par exemple ; on obtient $\zeta a_2^\alpha(a_4+a_5x)$, et il en résulte pour A_{n+1} le terme $\zeta a_2^\alpha a_5$; ce qui revient à faire varier a_4 de $\mathrm{D}a_4$, et à écrire a_5, à la place de cette dérivée. Si le terme avait été de la forme $\zeta a_2^\alpha a_4^\beta$, on aurait obtenu $\zeta a_2^\alpha(a_4^\beta+\mathrm{D}.a_4^\beta.x+\frac{1}{2}\mathrm{D}^2.a_4^\beta.x^2+\ldots)$, et il en serait résulté, pour A^{n+1}, le terme $\zeta a_2^\alpha.\mathrm{D}.a_4^\beta=\beta\zeta a_2^\alpha a_4^{\beta-1}a_5$; cela revient donc encore à différencier a_4^β, d'après les règles ordinaires, et à écrire a_5 à la place de $\mathrm{D}a_4$. C'est ce qui constitue, avec l'observation de la fin du n.° précédent, la première partie de la règle du n.° 8.

3.° Il paraîtrait d'abord que, pour trouver les termes de cette troisième partie, on est obligé de recourir aux termes ou coefficiens antérieurs à celui de A_n; mais on peut s'en dispenser, au moyen de l'observation suivante. Si A_{n+1} doit contenir un terme provenant d'une puissance de quantité polynômiale, qui a reçu un accroissement, A_n contient aussi un terme dû à cette puissance, qui en est la dérivée immédiatement inférieure ; par exemple, si A_{n+1} doit contenir $\frac{1}{24}\mathrm{D}^4.a_3^6=\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}a_3^2a_4^4$, A_n contiendra $\frac{1}{6}\mathrm{D}^3.a_3^6=$

$\frac{6.5.4}{1.2.3} a_3{}^3 a_4{}^3$: de plus, ces termes, dus aux puissances des quantités polynômiales, sont toujours aisés à reconnaître, en ce que les deux dernières lettres se suivent, dans l'ordre des indices, et réciproquement; car, on a évidemment (ζ étant un coefficient numérique convenable) $\zeta a_3{}^3 a_4{}^2 = \zeta a_3{}^3 (\mathrm{D}a_3)^2 = \frac{1}{\zeta}\mathrm{D}^2.a_3{}^5$. Il ne reste donc que de savoir déduire d'un semblable terme dans A_n son correspondant dans A_{n+1}. Soit donc $\zeta a_2{}^r a_3{}^s$ ce terme dans A_n; on a $\zeta a_2{}^r a_3{}^s = \zeta a_2{}^r (\mathrm{D}a_2)^s$ $= \frac{\mathrm{D}^s.a_2{}^{r+s}}{1.2\ldots.s}$; or, le terme correspondant dans A_{n+1} sera $\frac{\mathrm{D}^{s+1}.a_2{}^{r+s}}{1.2\ldots.(s+1)}$ $= \frac{1}{s+1}\mathrm{D}.\frac{\mathrm{D}^s.a_2{}^{r+s}}{1.2\ldots.s} = \frac{\zeta}{s+1}\mathrm{D}.a_2{}^r(\mathrm{D}a_2)^s = \frac{\zeta r}{s+1}.a_2{}^{r-1}a_3{}^{s+1}$; ce qui revient à différencier l'avant-dernière lettre, ou sa puissance, à écrire a_3 pour $\mathrm{D}a_2$, et à diviser le résultat par l'exposant de la puissance de la dernière lettre, qui se trouve augmenté d'une unité. On ne fait donc autre chose qu'exécuter la seconde partie de la règle du n.° 8. Cette même partie de la règle, appliquée à la fonction φa dans le terme $\frac{\mathrm{D}^n\varphi a}{1.2\ldots.n}.a_1{}^n$ de A_n fournit le terme $\frac{\mathrm{D}^{n+1}\varphi a}{1.2..(n+1)}.a_1{}^{n+1}$, dont nous avons parlé au commencement de ce n.°

La règle du n.° 8 est donc parfaitement exacte, et fournit le moyen le plus simple pour déduire le développement d'un terme A^{n+1} de celui du terme A_n qui le précède immédiatement.

34. Proposons-nous maintenant de développer immédiatement, et indépendamment des termes qui précèdent, un terme quelconque $A_n = \frac{\mathrm{D}^n.\varphi a}{1.2\ldots.n}$ de l'équation (6) ou (7).

En faisant

$$(56) \qquad \zeta = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \ldots,$$

cette équation devient, d'après le n.° 32, équation (53)

$$(57) \qquad \varphi(a+\zeta x) = \varphi a + \mathrm{D}\varphi a.\zeta x + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.\zeta^2 x^2 + \tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.\zeta^3 x^3 + \ldots$$

Mais, ζ étant lui-même un polynôme, ses puissances sont des fonctions de polynômes qui, d'après le n.° 5, deviennent

$$(58)\quad\left\{\begin{aligned}
&\zeta^2 = a_1^2 + \mathrm{D}.a_1^2.x + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.a_1^2.x^2 + \tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3.a_1^2 x^3 + \ldots\ldots \\
&\zeta^3 = a_1^3 + \mathrm{D}.a_1^3.x + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.a_1^3.x^2 + \tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3.a_1^3 x^3 + \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\zeta^n = a_1^n + \mathrm{D}.a_1^n.x + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.a_1^n.x^2 + \tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3.a_1^n.x^3 + \ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

où a_1 doit être considéré comme un premier terme de polynôme ; c'est-à-dire, qu'on a $\mathrm{D}a_1 = a_2$, $\frac{1}{2}\mathrm{D}^2 a_1 = a_3$, $\frac{1}{6}\mathrm{D}_1{}^3 a_1 = a_4 \ldots\ldots \frac{1}{1.2\ldots\ldots(n-1}$ $\mathrm{D}^{n-1} a_1 = a_n$.

Substituant ces valeurs dans l'équation (57), on obtient

$$(59)\qquad \phi(a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots) =$$
$$A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots\ldots\ldots + A_n x^n + \ldots$$
$$= \phi a + \mathrm{D}\phi a.a_1 x + \left\{\begin{aligned}&\mathrm{D}\phi a.\mathrm{D}a_1\\ &+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\phi a.a_1^2\end{aligned}\right\} x^2 + \left\{\begin{aligned}&\mathrm{D}\phi a.\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2 a_1\\ &+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\phi a.\mathrm{D}.a_1^2\\ &+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\phi a.a_1^3\end{aligned}\right\} x^3 + \ldots + \left\{\begin{aligned}&\mathrm{D}\phi a.\frac{\mathrm{D}^{n-1} a_1}{1.2\ldots(n-1)}\\ &+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\phi a.\frac{\mathrm{D}^{n-2}.a_1^2}{1.2\ldots(n-2)}\\ &+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\phi a.\frac{\mathrm{D}^{n-3}.a_1^3}{1.2\ldots(n-3)}\\ &+\ldots\ldots\ldots\\ &+\frac{\mathrm{D}^{n-1}\phi a}{1.2\ldots(n-1)}.\mathrm{D}.a_1^{n-1}\\ &+\frac{\mathrm{D}^n\phi a}{1.2\ldots.n}.a_1^n\end{aligned}\right\} x^n + \ldots$$

d'où l'on tire

$$(60)\qquad A_n = \frac{\mathrm{D}^n.\phi a}{1.2..n} = \mathrm{D}\phi a.\frac{\mathrm{D}^{n-1} a_1}{1.2\ldots(n-1)} + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\phi a\,\frac{\mathrm{D}^{n-2}.a_1^2}{1.2\ldots(n-2)}$$
$$+ \tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\phi a.\frac{\mathrm{D}^{n-3}.a_1^3}{1.2\ldots(n-3)} + \ldots + \frac{\mathrm{D}^{n-1}\phi a}{1.2\ldots(n-1)}\,\mathrm{D}.a_1^{n-1} + \frac{\mathrm{D}^n\phi a}{1.2\ldots.n}\,a_1^n\ ;$$

où, en écrivant cette formule à rebours,

$$(61)\qquad A_n=\frac{D^n.\phi a}{1.2\ldots n}=\frac{D^n\phi a}{1.2\ldots n}.a_1^n+\frac{D^{n-1}\phi a}{1.2..(n-1)}.D.a_1^{n-1}$$
$$+\frac{D^{n-2}\phi a}{1.2\ldots(n-2)}.\tfrac{1}{2}D^2.a_1^{n-2}+\ldots+\tfrac{1}{2}D^2\phi a.\frac{D^{n-2}.a_1^2}{1.2\ldots(n-2)}+D\phi a.\frac{D^{n-1}a_1}{1.2\ldots(n-1)}.$$

Les quantités qui restent à développer, dans cette dernière formule, se succèdent dans l'ordre suivant

$$(62)\quad a_1^n,\ D.a_1^{n-1},\ \tfrac{1}{2}D^2.a_1^{n-2},\ \tfrac{1}{6}D^3.a_1^{n-3},\ \ldots\ldots\frac{D^{n-2}.a_1^2}{1.2..(n-2)},\ \frac{D^{n-1}.a_1}{1.2\ldots(n-1)}.$$

Si tous les exposans de a_1, sous les signes de dérivation, étaient les mêmes et égaux à n, on appliquerait immédiatement, au développement de ces quantités, la règle du n.° 8 ; mais, comme ils vont toujours en diminuant, il est nécessaire, avant tout, de faire subir à chaque terme une préparation qui consiste à diminuer l'exposant de a_1 d'une unité, d'un terme au suivant, et à modifier en conséquence les coefficiens numériques provenant de ces exposans.

Pour trouver la règle de cette préparation, observons que les dérivées (62) se développent elles-mêmes selon la formule (61), et qu'on a, en général,

$$(63)\ \frac{D^r.a_1^{n-r}}{1.2\ldots(n-r)}=\frac{D^ra_1^{n-r}}{1.2\ldots r}.a_2^r+\frac{D^{r-1}a_1^{n-r}}{1.2\ldots(r-1)}.D.a_2^{r-1}+\frac{D^{r-2}a_1^{n-r}}{1.2\ldots(r-2)}.\tfrac{1}{2}D^2.a_2^{r-2}+\ldots$$
$$+\frac{D^{r-s}a_1^{n-r}}{1.2\ldots(r-s)}.\frac{D^s.a_2^{r-s}}{1.2\ldots s}+\ldots+Da_1^{n-r}.\frac{D^{r-1}a_2}{1.2..(r-1)}.$$

Or, pour déduire de ce développement celui de $\frac{D^{r+1}.a_1^{n-r-1}}{1.2\ldots(r+1)}$, il suffit d'en déduire d'abord celui de $\frac{D^r.a_1^{n-r-1}}{1.2\ldots r}$, et d'appliquer à ce dernier la règle du n.° 8. A cet effet, on changera, dans tous les termes de la formule (63), n en $n-1$; mais voyons ce qui en résultera pour

pour un terme quelconque. On a, d'après les règles ordinaires de la différentiation,

$$\frac{D^{r-s}a_1{}^{n-r}}{1.2...(r-s)}=\frac{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)...(n-2r+s+2)(n-2r+s+1)}{1.2.3\,....\,(r-s)}.a_1{}^{n-2r+s},$$

$$\frac{D^{r-s}a_1{}^{n-r-1}}{1.2...(r-s)}=\frac{(n-r-1)(n-r-2)\,....\,(n-2r+s+1)(n-2r+s)}{1.2.3...(r-s)}.a_1{}^{n-2r+s-1}.$$

Ainsi, pour déduire le développement de $\frac{D^r.a_1{}^{n-r-1}}{1.2....r}$ de celui de $\frac{D^r.a_1{}^{n-r}}{1.2....r}$, il suffit de diviser chaque terme de ce développement par $n-r$, de le multiplier par l'exposant de a_1 dans ce terme, et de diminuer cet exposant d'une unité; ce qui fournit la règle pratique suivante.

RÈGLE.

35. *Pour déduire le développement de* $\frac{D^{r+1}.a_1{}^{n-r-1}}{1.2.....(r+1)}$ *de celui de* $\frac{D^r.a_1{}^{n-r}}{1.2....r}$, *divisez chaque terme de ce dernier développement par* n—r, *multipliez-le par l'exposant de* a_1 *dans ce terme (en observant que, dans les termes sans* a_1, *cet exposant est zéro), et diminuez son exposant d'une unité. Après cette préparation, suivez la règle du n.° 8.*

Pour donner un exemple de cette règle, nous allons l'appliquer au développement de A_6, dans l'équation (6) ou (59). Les quantités à développer, dans ce cas, sont

$$a_1{}^6,\ D.a_1{}^5,\ \tfrac{1}{2}D^2.a_1{}^4,\ \tfrac{1}{6}D^3.a_1{}^3,\ \tfrac{1}{24}D^4.a_1{}^2,\ \tfrac{1}{120}D^5.a_1.$$

La première de ces quantités reste $a_1{}^6$; la dérivée $D.a_1{}^5$ donne $5a_1{}^4a_2$; pour en déduire celle $\frac{1}{2}D^2.a_1{}^4$, il faut la diviser par 5, multiplier par 4, exposant de a_1, et diminuer cet exposant d'une unité ; ce qui donne $4a_1{}^3a_2$: appliquant ensuite la règle du n.° 8 à ce terme ainsi préparé, on trouve $4a_1{}^3a_3+\frac{4.3}{2}a_1{}^2a_2{}^2$. Pour déduire de cette dérivée celle $\frac{1}{6}\text{D}^3.a_1{}^3$, il faut diviser le tout par 4, multiplier respectivement les deux termes par 3 et 2, exposans de a_1 et diminuer ces exposans d'une unité ; ce qui donne $3a_1{}^2a_3+3a_1a_2{}^2$: appliquant la règle du n.° 8, on obtient $3a_1{}^2a_4+2.3a_1a_2a_3+a_2{}^3$. Pour déduire de cette dernière celle $\frac{1}{24}\text{D}^4.a_1{}^2$, il faut diviser le tout par 3, multiplier les trois termes respectivement par 2, 1, 0, exposans de a_1, et diminuer ces exposans d'une unité ; ce qui donne $2a^1a_4+2a_2a_3$: appliquant la règle du n.° 8, on obtient $2a_1a_5+2a_2a_4+a_3{}^2$. Enfin, pour déduire de cette dérivée celle $\frac{1}{120}\text{D}^5.a_1$, il faut diviser tous les termes par 2, les multiplier respectivement par 1, 0, 0, exposans de a_1, et diminuer ces exposans d'une unité ; ce qui donne a_5, dont la dérivée est a_6, d'après la règle du n.° 8. En rassemblant tous ces termes, et les multipliant par leurs coefficiens respectifs (61), on aura le développement de A_6, écrit en sens inverse.

L'énoncé de ces opérations peut paraître un peu long ; mais leur exécution est très-expéditive. Après s'être exercé à calculer quatre ou cinq termes, on en a tellement l'habitude qu'il n'en coûte plus, pour ainsi dire, que la peine de les écrire.

36. *Remarque*. La règle précédente donne non seulement le moyen d'écrire immédiatement le coefficient d'une puissance quelconque de x, dans le développement de $\varphi(a+a_1x+a_2x^2+\ldots)$, mais encore une partie quelconque de ce coefficient, sans calculer le reste. Ainsi, si l'on demande le coefficient de $\frac{\text{D}^r\varphi a}{1.2\ldots r}$, dans le développement de $A_n=\frac{\text{D}^n.\varphi a}{1.2\ldots n}$, l'équation (61) indiquera que ce coefficient est $\frac{\text{D}^{n-r}.a_1{}^r}{1.2\ldots(n-r)}$, dont le développement peut s'exécuter immédiatement, d'après la règle précédente et l'équation (61). Cette observation peut avoir les applications les plus utiles, dans la théorie des hasards, et dans celle de la partition des nombres. Nous avons vu au n.° 10 que le

coefficient de $\frac{D^r.\phi a}{1.2..n}$ dans $\frac{D^n.\phi a}{1.2.....n}$ était composé de tous les produits de r lettres qu'on peut former avec les quantités polynômiales a_1, a_2, a_3, ..., de manière que la somme des indices de chaque produit soit égale à n, et que les coefficiens numériques de chaque produit indiquaient le nombre des permutations dont les lettres de ces produits sont susceptibles : nous aurons donc immédiatement tous ces produits, avec leurs coefficiens numériques, en développant la dérivée $\frac{D^{n-r}.a_1^r}{1.2...(n-r)}$. De plus, le nombre des termes dont ce développement sera composé indiquera de combien de manières on peut composer le nombre n, avec r nombres, égaux ou inégaux. Ainsi, en supposant $n=12$, $r=8$, on aura, pour le coefficient de $\frac{D^4\phi a}{1.2....8}$, dans $\frac{D^{12}\phi a}{1.2.....12}$,

$$\tfrac{1}{24}D^4.a_1^8=\tfrac{1}{24}D^4a_1^8.a_2^6+\tfrac{1}{6}D^3a_1^8.D.a_2^3+\tfrac{1}{2}D^2a_1^8.\tfrac{1}{2}D^2.a_2^2+Da_1^8.\tfrac{1}{6}D^3.a_2$$

$$=\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}a_1^4a_2^4+\frac{8.7.6}{1.2.3}a_1^5.3a_2^2a_3+\frac{8.7}{1.2}a_1^6(2a_2a_4+a_3^2)+\tfrac{8}{1}a_1^7a_5.$$

Ce coefficient étant composé de cinq termes, fait voir que le nombre 12 peut être formé de cinq manières différentes, par l'addition de huit nombres, savoir : $1+1+1+1+1+2+2+2+2$, $1+1+1+1+1+2+2+3$, $1+1+1+1+1+1+2+4$, $1+1+1+1+1+1+3+3$, $1+1+1+1+1+1+1+5$, lesquels sont donnés immédiatement par les indices et exposans des lettres des produits.

37. La règle du n.° 15 n'est qu'un corollaire de celle du n.° 8 et de celle du n.° 12, qui est une suite évidente des équations (12) : en effet, si dans l'équation (15) on suppose $a_2=0$, $a_3=0$, ..., $b_2=0$, $b_3=0$, ..., elle deviendra

$$(64) \qquad \phi(a+a_1x)\times\psi(b+b_1x)=A+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+.... ;$$

or, le premier membre de cette équation devient, d'après l'équation (53),

$$(65)\qquad (\varphi a + \mathrm{D}\varphi a.a_1x + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.a_1^2x^2 + \ldots)(\psi b + \mathrm{D}\psi b.b_1x + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\psi b.b_1^2x^2 + \ldots);$$

Ce produit étant développé, d'après l'équation (13), donne

$$(66)\qquad \varphi(a+a_1x)\times\psi(b+b_1x)=$$

$$\begin{array}{llll}
A & +A_1x & +A_2x^2 & +A_3x^3 \\
=\varphi a\psi b & +\left.\begin{array}{l}\varphi a.\mathrm{D}\psi b.b_1 \\ +\mathrm{D}\varphi a.\psi b.a_1\end{array}\right\}x & \left.\begin{array}{l}+\varphi a.\frac{1}{2}\mathrm{D}^2\psi b.b_1^2 \\ +\mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}\psi b.a_1b_1 \\ +\frac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.\psi b.a_1^2\end{array}\right\}x^2 & \left.\begin{array}{l}+\varphi a.\frac{1}{6}\mathrm{D}^3\psi b.b_1^3 \\ +\mathrm{D}\varphi a.\frac{1}{2}\mathrm{D}^2\psi b.a_1b_1^2 \\ +\frac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.\mathrm{D}\psi b.a_1^2b_1 \\ +\frac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.\psi b.a_1^3\end{array}\right\}x^3
\end{array}$$

$$+\ldots+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+A_nx^n+\ldots\ldots$$

$$\left.\begin{array}{l}
+\ldots+\varphi a.\dfrac{\mathrm{D}^n\psi b}{1.2\ldots n}.b_1^n \\[2ex]
+\ldots+\mathrm{D}\varphi a.\dfrac{\mathrm{D}^{n-1}\psi b}{1.2\ldots(n-1)}.a_1b_1^{n-1} \\[2ex]
+\ldots+\frac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.\dfrac{\mathrm{D}^{n-2}\psi b}{1.2\ldots(n-2)}.a_1^2b^{n-2} \\[2ex]
+\ldots+\frac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.\dfrac{\mathrm{D}^{n-3}\psi b}{1.2\ldots(n-3)}.a_1^3b^{n-3} \\[2ex]
+\ldots+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex]
\quad+\dfrac{\mathrm{D}^{n-1}\varphi a}{1.2\ldots(n-1)}.\mathrm{D}\psi b.a_1^{n-1}b_1 \\[2ex]
\quad+\dfrac{\mathrm{D}^n\varphi a}{1.2\ldots n}.\psi b.a_1^n
\end{array}\right\}x^n
\begin{array}{l}
+\ldots \\[2ex] +\ldots \\[2ex] +\ldots \\[2ex] \\[2ex] +\ldots \\[2ex] +\ldots \\[2ex] +\ldots
\end{array}$$

Ici les colonnes qui forment les coefficiens de x ne sont autre chose que les dernières colonnes des équations (18). Or, le produit (65) s'effectuant comme le produit (13), avec la seule différence qu'à la place de a et de b, il faut écrire φa et ψb, et $\text{D}.\varphi a = \text{D}\varphi a_1$, $\text{D}.\psi b = \text{D}\psi b.b_1$,..... à la place de $\text{D}a$, $\text{D}b$,....; il s'ensuit que, pour déduire la dernière colonne de A_{n+1} de celle de A_n [équations (18)], il faut faire varier ψb dans tous les termes de cette colonne, et de plus faire varier φa dans le dernier terme $\frac{\text{D}^n\varphi a}{1.2....n}.\psi b.a_1{}^n$ de cette même colonne. Les deux premières parties du n.° 15 se trouvent donc démontrées.

Les n autres colonnes qui composent A_{n+1} ne peuvent donc provenir que de la variation des quantités polynômiales a_1, a_2, a_3,..... b_1, b_2, b_3,....; c'est-à-dire, de la substitution de $a_1 + a_2 x$ pour a_1, de $a_2 + a_3 x$ pour a_2,...., de $b_1 + b_2 x$ pour b_1, de $b_2 + b_3 x$ pour b_2,...., dans les termes précédens. Il faut donc appliquer ici la règle du n.° 8, modifiée par la coexistance de deux polynômes indépendans, c'est-à-dire, par la règle du n.° 12; ce qui constitue la première partie de la règle du n.° 15. Cette règle se trouve donc entièrement justifiée.

38. Passons maintenant au développement immédiat, et indépendant des termes qui precèdent, d'un terme quelconque de l'équation (15), ou du terme général $A_n = \frac{\text{D}^n.(\varphi a.\psi b)}{1.2...n}$.

En effectuant complètement le développement indiqué par la dernière des équations (17), d'après les n.^{os} 34 et 35, et l'ordonnant selon la somme des exposans de dérivation, relatifs à φa et ψb, on peut le mettre sous la forme suivante :

$$(67)\quad \frac{\text{D}^n.(\varphi a.\psi b)}{1.2...n} = \frac{\text{D}^n\varphi a}{1.2....n}.\psi b.a_1{}^n + \frac{\text{D}^{n-1}\varphi a}{1.2...(n-1)}.\psi b.\text{D}.a_1{}^{n-1} + ...$$
$$+ \frac{\text{D}^{n-1}\varphi a}{1.2...(n-1)}.\text{D}\psi b.a_1{}^{n-1}b_1 + \frac{\text{D}^{n-2}\varphi a}{1.2...(n-2)}.\text{D}\psi b.\text{D}.(a_1{}^{n-2}b_1) + ...$$

$$+\frac{D^{n-1}\phi a}{1.2\ldots.(n-2)}.\tfrac{1}{2}D^2\psi b.a_1{}^{n-2}b_1{}^2+\frac{D^{n-3}\phi a}{1.2\ldots(n-3)}.\tfrac{1}{2}D^2\psi b.D.(a_1{}^{n-3}b_1{}^2)+\ldots.$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\ldots.$$

$$+\tfrac{1}{2}D^2\phi a.\frac{D^{n-2}\psi b}{1.2\ldots(n-2)}.a_1{}^2b_1{}^{n-2}+D\phi a.\frac{D^{n-2}\psi b}{1.2\ldots(n-2)}.D.(a_1b_1{}^{n-2})$$

$$+D\phi a.\frac{D^{n-1}\psi b}{1.2..(n-1)}.a_1b_1{}^{n-1}+\phi a.\frac{D^{n-1}\psi b}{1.2\ldots.(n-1)}.D.b_1{}^{n-1}$$

$$+\phi a.\frac{D^n\psi b}{1.2\ldots n}b_1{}^n$$

$$\ldots.+\tfrac{1}{2}D^2\phi a.\psi b.\frac{D^{n-2}a_1{}^2}{1.2..(n-2)}+D\phi a.\psi b.\frac{D^{n-1}a_1}{1.2..(n-1)}$$

$$\ldots.+D\phi a.D\psi b.\frac{D^{n-2}.(a_1b_1)}{1.2\ldots(n-2)}+\phi a.D\psi b\frac{D^{n-1}b_1}{1.2\ldots(n-1)}$$

$$\ldots.+\phi a.\tfrac{1}{2}D^2\psi b.\frac{D^{n-2}.b_1{}^2}{1.2\ldots(n-2)}$$

Il n'y a plus, dans cette formule, dont la loi est très-élégante, que des fonctions de quantités polynômiales à développer ; et elles se succèdent par colonnes dans l'ordre suivant :

$$(68)\left\{\begin{array}{l}
a_1{}^n \quad, D.a_1{}^{n-1} \quad, \tfrac{1}{2}D^2.a_1{}^{n-2} \quad, \ldots \frac{D^{n-2}.a_1{}^2}{1.2..(n-2)}, \quad \frac{D^{n-1}.a_1}{1.2\ldots(n-1)}, \\
a_1{}^{n-1}b_1, D.(a_1{}^{n-2}b_1), \tfrac{1}{2}D^2.(a_1{}^{n-3}b_1), \ldots \frac{D^{n-2}(a_1b_1)}{1.2\ldots(n-2)}, \quad \frac{D^{n-1}.b_1}{1.2..(n-1)}, \\
a_1{}^{n-2}b_1{}^2, D.(a_1{}^{n-3}b_1{}^2), \tfrac{1}{2}D^2.(a_1{}^{n-4}b_1{}^2), \ldots \frac{D^{n-2}.b_1{}^2}{1.2..(n-2)} \\
a_1{}^{n-2}b_1{}^3, D.(a_1{}^{n-4}b_1{}^3), \tfrac{1}{2}D^2.(a_1{}^{n-5}b_1{}^3), \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_1{}^2b_1{}^{n-2}, D.(a_1b_1{}^{n-2}), \tfrac{1}{2}D^2.b_1{}^{n-2}, \\
a_1b_1{}^{n-1}, D.b_1{}^{n-1} \\
\quad b_1{}^n,
\end{array}\right.$$

Si tous les exposans de a_1, sous le signe de dérivation, étaient les mêmes que dans les termes correspondans de la première colonne, on pourrait appliquer immédiatement au développement de ces quantités la règle du n.° 15; mais, comme ces exposans vont en diminuant d'une unité, d'une colonne à l'autre, comme au n.° 34, il est nécessaire de faire subir à chaque terme la même préparation que dans ce n.°; c'est-à-dire, qu'il faut soumettre chaque terme à la règle du n.° 35, et ensuite y appliquer celle du n.° 15. Par ce moyen, on peut développer immédiatement un terme quelconque $\frac{D^n.(\varphi a.\psi b)}{1.2...n}$ de l'équation (15), indépendamment de ceux qui le précèdent.

39. *Remarque.* On peut faire ici une observation analogue à celle du n.° 36. Par le procédé du n.° précédent, on peut aussi calculer immédiatement un terme quelconque de $\frac{D^n.(\varphi a.\psi b)}{1.2...n}$, indépendamment des autres : ainsi le coefficient de $\frac{D^r\varphi a}{1.2...r}.\frac{D^s\psi b}{1.2...s}$ sera $\frac{D^{n-r-s}.(a_1{}^r b_1{}^s)}{1.2...(n-r-s)}$, dont le développement s'exécutera par le n.° précédent, en remplaçant n par $n-r-s$, φa par $a_1{}^r$ et ψb par $b_1{}^s$, et considérant a_1 et b_1 comme des premiers termes de polynômes. Supposant donc $n=12$, $r=7$, $s=2$, on aura, pour le coefficient de $\frac{D^7\varphi a}{1.2...7}.\frac{D^2\psi b}{1.2}$, dans $\frac{D^{12}.(\varphi a.\psi b)}{1.2...12}$,

$$\frac{D^3.(a_1{}^7 b_1{}^2)}{1.2.3}=\tfrac{1}{6}D^3a_1{}^7.b_1{}^2.a_2{}^3+\tfrac{1}{2}D^2a_1{}^7.b_1{}^2.D.a_2{}^2+Da_1{}^7.b_1{}^2.\tfrac{1}{2}D^2a_2$$
$$+\tfrac{1}{2}D^2a_1{}^7.Db_1{}^2.a_2{}^2b_2+Da_1{}^7.Db_1{}^2.D.(a_2b_2)+a_1{}^7.Db_1{}^2.\tfrac{1}{2}D^2b_2$$
$$+D\,a_1{}^7.\tfrac{1}{2}D^2b_1{}^2.a_2b_2{}^2+a_1{}^7.\tfrac{1}{2}D^2b_1{}^2D.b_2{}^2$$
$$=\frac{7.6.5}{1.2.3}a_1{}^4.b_1{}^2.a_2{}^3+\frac{7.6}{1.2}a_1{}^5.b_1{}^2.2a_2a_3+7a_1{}^6.b_1{}^2.a_4$$

$$+\frac{7.6}{1.2}a_1{}^5.2b_1.a_2b_2+\tfrac{1}{7}a^6.2b_1(a_2b_3+a_3b_2)+a_1{}^7.2b_1.b_4$$

$$+\tfrac{7}{1}a_1{}^6.a_2b_2{}^2+a_1{}^7.2b_2b_3$$

D'après la remarque du n.° 17, qui s'applique également ici, le procédé du n.° précédent donne aussi le moyen de calculer immédiatement un terme quelconque du développement d'une fonction quelconque de deux polynômes indépendans $\varphi(a+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots,\ b+b_1x+b_2x^2+\ldots.)$; il suffit pour cela de remplacer, dans la formule (67) les produits des dérivées de φa et ψb par les dérivées partielles correspondantes de $\varphi(a,b)$; et le n.° précédent fait voir avec quelle facilité le calcul des dérivations fournit la solution de ce problème compliqué, et intraitable par les méthodes ordinaires.

40. La règle du n.° 28 est un corollaire bien simple de celles des n.^{os} 15 et 35 ; en effet, la forme du terme général (48), $nB_n=\frac{\text{D}^{n-1}.(c^{-n}.\text{D}.\varphi b)}{1.2\ldots(n-1)}$, étant comparée à celle (17) $A_{n-1}=\frac{\text{D}^{n-1}.(\varphi a.\psi b)}{1.2\ldots(n-1)}$, fait voir qu'on obtient la première, en remplaçant, dans celle-ci ψb par c^{-n}, et φa par $\text{D}.\varphi b$. Les règles de développement doivent donc être les mêmes pour l'une et l'autre formes, sauf les différences suivantes : 1.° l'exposant de c diminuant d'une unité d'un terme à l'autre, il faut faire subir à chaque terme, avant d'en déduire le suivant, la préparation du n.° 35 ; 2.° φa étant remplacé par $\text{D}.\varphi b$, il s'ensuit qu'on a, en général, $\frac{\text{D}^r.\text{D}.\varphi b}{1.2\ldots.r}=\frac{\text{D}^{r+1}.\varphi b}{1.2\ldots r}=(r+1)\frac{\text{D}^{r+1}\varphi b}{1.2\ldots(r+1)}$; et $\frac{\text{D}^r\text{D}\varphi b}{1.2\ldots r}=(r+1)\frac{\text{D}^{r+1}\varphi b}{1.2\ldots(r+1)}$; ce qui produit les coefficiens numériques égaux aux exposans de dérivation ; 3.° enfin, nous avons ordonné différemment les termes des équations (50), en transformant les lignes horizontales des équations (18) en colonnes, et réciproquement : il en est résulté que les dernières colonnes des équations (18) sont devenues les derniers termes de chaque colonne des équations

(50)

(50), en transformant les lignes horizontales des équations (18) en colonnes, et réciproquement : il en est résulté que les dernières colonnes des équations (18) sont devenues les derniers termes de chaque colonne des équations (50) ; ce qui a produit les modifications des 2.^{me} et 3.^{me} parties de la règle du n.° 15.

41. En tenant compte des observations du n.° précédent, la formule (67) fournit le moyen de développer immédiatement un quelconque des termes (48), indépendamment des précédens : on a, en général,

$$(69) \qquad nB_n = \frac{\mathrm{D}^{n-1}.(c^{-n}.\mathrm{D}.\phi b)}{1.2\ldots(n-1)} =$$

$$n\frac{\mathrm{D}^n\phi b}{1.2\ldots.n}.(c^{-n}).b_1{}^n + (n-1)\frac{\mathrm{D}^{n-1}\phi b}{1.2\ldots(n-1)}.(c^{-n}).\mathrm{D}.b_1{}^{n-1} + \ldots.$$

$$+(n-1)\frac{\mathrm{D}^{n-1}\phi b}{1.2\ldots(n-1)}.\mathrm{D}(c^{-n}).b_1{}^{n-1}c_1 + (n-2)\frac{\mathrm{D}^{n-2}\phi b}{1.2\ldots(n-2)}.\mathrm{D}(c^{-n}).\mathrm{D}.(b_1{}^{n-2}c_1) + \ldots$$

$$+(n-2)\frac{\mathrm{D}^{n-2}\phi b}{1.2\ldots(n-2)}.\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2(c^{-n}).b_1{}^{n-2}c_1{}^2 + (n-3)\frac{\mathrm{D}^{n-3}\phi b}{1.2\ldots(n-3)}.\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2(c^{-n}).\mathrm{D}.(b_1{}^{n-3}c_1{}^2) + \ldots$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots$$

$$+3.\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\phi b.\frac{\mathrm{D}^{n-3}(c^{-n})}{1.2\ldots(n-3)}.b_1{}^3c_1{}^{n-3} + 2.\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\phi b.\frac{\mathrm{D}^{n-3}(c^{-n})}{1.2\ldots(n-3)}.\mathrm{D}.(b_1{}^2c_1{}^{n-3}) + \ldots.$$

$$+2.\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\phi b.\frac{\mathrm{D}^{n-2}(c^{-n})}{1.2\ldots(n-2)}.b_1{}^2c_1{}^{n-2} + \mathrm{D}\phi b.\frac{\mathrm{D}^{n-2}(c^{-n})}{1.2\ldots(n-2)}.\mathrm{D}.(b_1c_1{}^{n-2})$$

$$+\mathrm{D}\phi b.\frac{\mathrm{D}^{n-1}(c^{-n})}{1.2\ldots(n-1)}.b_1c_1{}^{n-1}$$

$$\ldots + 3.\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\phi b.(c^{-n}).\frac{\mathrm{D}^{n-3}.b_1{}^3}{1.2\ldots(n-3)} + 2.\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\phi b.(c^{-n}).\frac{\mathrm{D}^{n-2}.b_1{}^2}{1.2\ldots(n-2)} + \mathrm{D}\phi b.(c^{-n})\frac{\mathrm{D}^{n-1}b_1{}^3}{1.2\ldots(n-1)}$$

$$\ldots + 2.\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\phi b.\mathrm{D}(c^{-n}).\frac{\mathrm{D}^{n-3}(b_1{}^2c_1)}{1.2\ldots(n-3)} + \mathrm{D}\phi b.\mathrm{D}(c^{-n}).\frac{\mathrm{D}^{n-2}(b_1c_1)}{1.2\ldots(n-2)}$$

$$\ldots + \mathrm{D}\phi b.\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2(c^{-n}).\frac{\mathrm{D}^{n-3}(b_1c_1{}^2)}{1.2\ldots(n-3)}$$

où les quantités qui restent à développer sont de la même forme que celles (68), du n.° 38, et doivent être développées de la même manière.

42. Au moyen du n.° précédent, nous sommes donc en état de calculer immediatement un terme quelconque d'une fonction de polynôme, ordonné selon les puissances d'une fonction ou d'un polynôme donné ; ce qui constitue le problème général du retour des fonctions et des séries, étendu aux fonctions de polynômes. De plus, d'après la remarque du n.° 39, qui est applicable à ce cas, nous pouvons aussi calculer immédiatement une partie quelconque d'un terme, sans calculer le reste de ce terme. Mais, ce qu'il y a de plus remarquable, c'est que cette question difficile est résolue d'une manière si simple qu'on n'a, pour ainsi dire, que la peine d'écrire le résultat.

Conclusion.

43. Résumons, en deux mots, l'objet et l'esprit du calcul des dérivations, tel qu'il résulte de ce petit écrit. Le théorème de Taylor donne le développement d'une fonction simple d'un binôme, selon les puissances ascendantes de la variable principale, ou selon les mêmes puissances d'une fonction quelconque donnée de cette variable. Le passage du théorème de Taylor au développement des fonctions de polynômes, ou des fonctions de fonctions, selon les puissances ascendantes de la variable, n'est autre chose que le passage de la différentiation d'une fonction, en regardant la différentielle de la variable principale comme constante, à la différentielle de la même fonction, en ne regardant aucune différentielle comme constante. Quant au passage du développement d'une fonction, selon les puissances ascendantes de la variable à celui selon les puissances ascendantes d'une fonction donnée de cette variable; (ce qui constitue le retour des fonctions et des séries); il n'est

autre chose que celui de la différentiation d'une fonction, en changeant de variable principale ou indépendante.

44. Me voici parvenu au terme que je m'étais proposé : celui de déduire la véritable théorie du calcul des derivations du seul théorème de Taylor, sans l'emploi d'aucun principe nouveau. J'espère que les géomètres verront avec plaisir ce beau corollaire d'un théorème qui a déjà été si fécond. Le cadre étroit dans lequel j'ai resserré l'essence de ce calcul les engagera sans doute à donner quelques momens à la lecture de ce petit écrit ; et j'ose présumer qu'elle les réconciliera avec le calcul des dérivations, dont l'ouvrage d'Arbogast a pu les éloigner. Mon but n'a pas été d'épuiser la matière, mais d'éveiller l'attention des géomètres sur l'utilité, trop méconnue, des dérivations ; et de leur éviter la recherche pénible de nouveaux moyens de développement, en leur présentant ceux qui sont, à la fois, les plus simples et les plus expéditifs qu'on puisse trouver.

Les géomètres auxquels l'*Analise combinatoire* est familière verront, par nos remarques des n.os 10, 16 et 36, que le calcul des dérivations contient, non seulement les véritables sources des règles de cette analise, et leur extension à des fonctions de plusieurs polynômes indépendans, mais encore les moyens d'exécution les plus commodes et les plus rapides.

Metz, le 5 de mai 1815.