ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

J. B. DURRANDE

Questions résolues. Démonstration du théorème de géométrie énoncé à la page 384 du V.e volume de ce recueil

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 6 (1815-1816), p. 49-54
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1815-1816__6__49_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration du théorème de géométrie énoncé à la page 384 du V.^e volume de ce recueil ;

Par M. J. B. Durrande.

THÉORÈME. *Tout quadrilatère, plan ou gauche, rectiligne ou sphérique, dans lequel la somme de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres côtés, est circonscriptible au cercle.*

Démonstration I. Soit le quadrilatère plan ABCD (fig. 3) dans lequel on suppose

$$AB+CD=BC+AD\ . \qquad (1)$$

Soient divisés les angles A, B en deux parties égales, par des droites concourant en O. Soit joint ce point O aux sommets C et D ; et du même point soient abaissées sur les directions des côtés les perpendiculaires OE, OF, OG, OH ; l'équation (1) deviendra d'après cela

$$AE+BE+CG+DG=BF+CF+AH+DH\ . \qquad (2)$$

Les triangles-rectangles OEA, OHA qui ont l'hypothénuse commune et un angle oblique égal, par construction, sont égaux ; et il en est de même, pour de semblables raisons, des triangles rectangles OEB, OFB ; donc d'abord

$$OH=OE=OF\ ; \qquad (3)$$

et ensuite

$$AH=AE\,, \qquad BE=BF\,. \tag{4}$$

Au moyen des équations (4), l'équation (2) se réduit à

$$CG+DG=CF+DH\,. \tag{5}$$

Présentement OC, OD étant l'une et l'autre hypothénuses communes de deux triangles rectangles, on doit avoir

$$\overline{OF}^2+\overline{CF}^2=\overline{OG}^2+\overline{CG}^2\,,$$

$$\overline{OH}^2+\overline{DH}^2=\overline{OG}^2+\overline{DG}^2\,,$$

retranchant donc, et ayant égard à l'équation (3), il viendra

$$\overline{CF}^2-\overline{DH}^2=\overline{CG}^2-\overline{DG}^2\,,$$

ou

$$(CF+DH)(CF-DH)=(CG+DG)(CG-DG)\,,$$

ou simplement, en vertu de (5),

$$CF-DH=CG-DG\,,$$

ou encore en ajoutant et retranchant cette dernière à l'équation (5), transposant, réduisant et divisant par 2,

$$DG=DH\,, \qquad CG=CF\,;$$

les deux triangles rectangles OFC, OGC sont donc égaux, ainsi que les deux triangles rectangles OHD, OGD; on a donc

$$OG=OF=OH=OE\,,$$

et par conséquent le cercle décrit du point O comme centre, et avec l'une quelconque de ces quatre droites pour rayon, touchera les cotes du quadrilatère aux points E, F, G, H, et lui sera en effet circonscrit. (*)

(*) On aurait pu ne point mener d'abord OG, démontrer, comme ci-dessus, que $CD=CF+DH$, déterminer le point G par la condition $CG=CF$, d'où $DG=DF$ et mener alors OG. On aurait remarqué ensuite que d'apres cette construction les cercles décrits des points A, B, C, D comme centres et avec les rayons respectifs AE ou AH, BE ou BF, CF ou CG, DG ou DH se touchent deux à-

II. Si le quadrilatère est sphérique, après avoir fait une construction analogue et démontré comme ci-dessus que

$$Arc.\mathrm{OH}=Arc.\mathrm{OF}=Arc.\mathrm{OE}\,, \qquad (6)$$

et que

$$Arc.\mathrm{CF}+Arc.\mathrm{DH}=Arc.\mathrm{CG}+Arc.\mathrm{DG}\,, \qquad (7)$$

les couples de triangle sphériques dont les hypothénuses communes sont $Arc.\mathrm{OC}$ et $Arc.\mathrm{OD}$ donneront

$$Cos.\mathrm{OF}\,Cos.\mathrm{CF}=Cos.\mathrm{OG}\,Cos.\mathrm{CG}\,,$$

$$Cos.\mathrm{OH}\,Cos.\mathrm{DH}=Cos.\mathrm{OG}\,Cos.\mathrm{DG}\,:$$

prenant successivement la somme et la difference de ces deux équations, en ayant égard à l'équation (6), on aura

$$Cos.\mathrm{OE}(Cos\,\mathrm{CF}\pm Cos.\mathrm{DH})=Cos.\mathrm{OG}(Cos.\mathrm{CG}\pm Cos.\mathrm{DG})\,;$$

ou, en dédoublant et divisant,

$$\frac{Cos.\mathrm{CF}-Cos.\mathrm{DH}}{Cos.\mathrm{CF}+Cos.\mathrm{DH}}=\frac{Cos.\mathrm{CG}-Cos.\mathrm{DG}}{Cos.\mathrm{CG}+Cos.\mathrm{DG}}\,;$$

ou, en décomposant, par les formules connues,

$$Tang.\tfrac{1}{2}(\mathrm{DH}+\mathrm{CF})Tang.\tfrac{1}{2}(\mathrm{DH}-\mathrm{CF})=Tang.\tfrac{1}{2}(\mathrm{DG}+\mathrm{CG})Tang.\tfrac{1}{2}(\mathrm{DG}-\mathrm{CG})\,;$$

ou, en simplifiant, au moyen de l'équation (7), et passant ensuite des tangentes aux doubles des arcs

$$Arc.\mathrm{DH}-Arc.\mathrm{CF}=Arc.\mathrm{DG}-Arc.\mathrm{CG}\,,$$

en combinant cette dernière équation, par addition et soustraction avec l'équation (7), on en tirera, en transposant et réduisant,

---

deux aux points E, F, G, H, qui sont conséquemment sur une même circonférence; on en aurait conclu OG=OF=OH=OE. De là serait résulté l'égalité soit entre les triangles OFC, OGC, soit entre les triangles OHD, OGD; et, par suite, la perpendicularité de OG sur CD; ce qui aurait établi que le cercle touchant les trois premiers côtés en H, E, F, touchait aussi le quatrième en G.

(*Note de l'auteur.*)

$$Arc.\mathrm{CG}=Arc.\mathrm{CF}\ ,\quad Arc.\mathrm{DG}=Arc.\mathrm{DF}\ ;$$

et l'on achèvera comme ci-dessus. (*)

III. Soit enfin le quadrilatère gauche ADBD′ (fig. 4), dont une des diagonales soit AB ; et concevons d'abord qu'on ait fait tourner autour de cette diagonale l'un des triangles qu'elle determine pour l'amener dans le plan de l'autre, de manière que le quadrilatère devienne plan.

Soient inscrits aux deux triangles ADB, AD′B des cercles, dont C, C′ soient les centres E, E′ les points de contact avec la diagonale, G, H les points de contact du premier avec les côtes DA, DB, et enfin G′, H′ les points de contact du second avec les côtés D′A, D′B.

Si, comme nous le supposons, on a la relation

$$\mathrm{AD}+\mathrm{BD}'=\mathrm{BD}+\mathrm{AD}'\ , \tag{1}$$

On pourra la transformer en celle-ci :

$$\mathrm{AG}+\mathrm{DG}+\mathrm{BH}'+\mathrm{D}'\mathrm{H}'=\mathrm{BH}+\mathrm{DH}+\mathrm{AG}'+\mathrm{D}'\mathrm{G}'\ ; \tag{2}$$

mais on a, par la propriété des tangentes,

$$\begin{aligned}\mathrm{DH}&=\mathrm{DG}\ ,\\ \mathrm{D}'\mathrm{G}'&=\mathrm{D}'\mathrm{H}'\ ,\\ \mathrm{AE}&=\mathrm{AG}\ ,\\ \mathrm{BH}&=\mathrm{BE}\ ,\\ \mathrm{AG}'&=\mathrm{AE}'\ ,\\ \mathrm{BE}'&=\mathrm{BH}'\ ;\end{aligned}$$

ajoutant donc toutes ces équations à l'équation (2), il viendra, en reduisant

(*) Ceci démontre que, sur une sphère comme sur un plan, lorsque quatre cercles se touchent deux à deux, leurs quatre points de contact sont situés sur une même circonférence, et conséquemment dans un même plan.

(*Note de l'auteur*).

AE

$$AE+BE'=BE+AE' ;$$

mais, on a aussi

$$AE+BE=AE'+BE' ;$$

ajoutant donc ou retranchant, on tirera de ces deux dernières

$$AE=AE' \quad \text{ou} \quad BE=BE' ;$$

ainsi, les points de contact E, E′ se confondent en un seul qu'à l'avenir nous désignerons simplement par E, et qui se trouve conséquemment avec C et C′ sur une même droite perpendiculaire à AB.

Concevons que des points A, B pris successivement pour centres, et avec des rayons respectifs $AE=AG=AG'$, $BE=BH=BH'$, on décrive deux cercles, leurs tangentes extérieures concourront en quelque point F du prolongement de la droite AB qui joint leurs centres. Soient encore décrits des points D, D′ comme centres et avec les rayons $DG=DH$, $D'G'=D'H'$, ils toucheront les deux autres, le premier en G, H et le second en G′, H′; donc, par les théories connues, les droites GH, G′H′ iront concourir en F, sur le prolongement de la diagonale AB.

Concevons présentement que l'on relève le plan de l'un des deux triangles ADB, AD′B, en le faisant tourner autour de AB, de manière à reconstruire le quadrilatère gauche; les droites GH, G′H′ ne cesseront pas, dans ce mouvement, de concourir en F et d'être conséquemment dans un même plan, lequel contiendra aussi les quatre points G, H, G′, H′; EC et EC′ ne cesseront pas pareillement d'être dans un même plan perpendiculaire à AB.

Les axes de ces deux cercles, c'est-à-dire, les perpendiculaires menées à leurs plans par leurs centres, seront aussi dans ce dernier plan, et se couperont conséquemment en un certain point O, lequel, appartenant à ces deux axes, sera également distant des points G, H, G′, H′; puis donc que ces points sont sur un même plan; ils appartiennent à une même circonférence à laquelle conséquemment notre quadrilatère est circonscrit (*).

Si les deux diagonales étaient telles que leur somme fût égale à celle des côtés opposés, ces côtés et les deux diagonales ne seraient autres que les six arêtes du tétraèdre dont il a été question à la page 304 du V.e volume de ce recueil (**).

(*) Dans le vrai, si l'on veut appeler polygone *circonscrit* à un cercle, comme on le fait communément, un polygone dont tous les côtés sont des tangentes à ce cercle, notre quadrilatère gauche ne sera point proprement circonscriptible au cercle, mais à une sphère ayant le point O pour centre et OE pour rayon.

J. D. G.

(**) Le théorème étant ainsi démontré pour le quadrilatère gauche, se trouve l'être aussi pour le quadrilatère plan, qui n'en est qu'un cas particulier. Il n'est pas même difficile d'en conclure aussi la démonstration pour le quadrilatere sphérique. En y faisant, en effet, une semblable construction, on s'assurera, par les mêmes moyens, que les points E, E′ se confondent. Imaginant alors par les points G, H, G′, H′ des tangentes aux cercles, ces tangentes formeront par leurs concours un quadrilatère gauche dans lequel les sommes de côtés opposés seront égales; il sera donc circonscriptible au cercle, et le cercle qu'on lui inscrira sera aussi inscrit au quadrilatère sphérique.

(Note de l'auteur.)