KRAMP

Analise transcendante. Formules nouvelles, pour l'intégration approchée de toute fonction différentielle d'une seule variable, entre deux limites données quelconques

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 6 (1815-1816), p. 281-302
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1815-1816__6__281_0>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Formules nouvelles, pour l'intégration approchée de toute fonction différentielle d'une seule variable, entre deux limites données quelconques ;

Par M. le professeur KRAMP, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.

L'OBJET que nous nous proposons dans ce mémoire est d'enseigner à déterminer, entre des limites données quelconques, l'intégrale de toute différentielle de la forme $X\mathrm{d}x$, quelle que puisse être d'ailleurs la forme de la fonction de x désignée par X. La méthode que nous allons faire connaître a cela de particulier qu'elle est, en quelque sorte, étrangère aux principes du calcul intégral et à la notion des infinimens petits ; elle ne suppose que les principes connus de l'algèbre élémentaire ; elle s'étend à toutes les fonctions quelconques, à celles même qui se sont constamment refusées jusqu'ici à tous les moyens d'intégration connus ; elle donne l'intégrale demandée, moyennant un nombre très-limité de termes, avec une précision bien supérieure à tout ce qu'on pourrait se promettre de l'usage des suites infinies.

1. On sait que l'intégration de toute formule $X\mathrm{d}x$, entre des limites données, $x=a$ et $x=a'$, par exemple, revient à quarrer l'aire mixtiligne terminée d'une part par la courbe dont l'équation serait $y=X$, d'une autre par l'axe des x, et enfin par les ordonnées

b, b' de cette courbe répondant respectivement aux abscisses a et a'. C'est même de là que ce problème a été appelé *problème des quadratures*, et c'est sous ce point de vue que nous l'envisagerons constamment, dans tout ce qui va suivre.

2. Soit fait, pour abréger $a'-a=c$; et, pour fixer les idées, imaginons que l'on ait divisé l'intervalle c en *douze* parties égales; désignons par a_0, a_1, a_2,..... a_{10}, a_{11}, a_{12} les abscisses qui répondent aux *treize* points de divisions; au moyen de l'équation $y=X$, nous pourrons calculer les ordonnées qui leur correspondent; représentons-les respectivement par b_0, b_1, b_2,.... b_{10}, b_{11}, b_{12}; nous connaîtrons ainsi treize points de la courbe qu'il s'agit de quarrer entre les limites $x=a_0$ et $x=a_{12}$, pour lesquelles on a respectivement $y=b_0$, $y=b_{12}$.

3. Soient joints les deux points extrêmes (a_0, b_0), (a_{12}, b_{12}) par *une* corde, cette corde, avec sa projection c et les *deux* ordonnées extrêmes formera *un* trapèze; en désignant son aire par S_{12}, et posant

$$12(\tfrac{1}{2}b_0+\tfrac{1}{2}b_{12})=b'_{12};$$

nous aurons

$$S_{12}=\tfrac{1}{12}cb'_{12}.$$

4. Soient joints consécutivement les *trois* points (a_0, b_0), (a_6, b_6), (a_{12}, b_{12}) par *deux* cordes; ces cordes formeront, avec c et les *trois* ordonnées b_0, b_6, b_{12}, *deux* trapèzes; en désignant la somme de leurs aires par S_6, et posant

$$6(\tfrac{1}{2}b_0+b_6+\tfrac{1}{2}b_{12})=b'_6,$$

nous aurons

$$S_6=\tfrac{1}{12}cb'_6.$$

5. Soient joints consécutivement les *quatre* points (a_0, b_0), (a_4, b_4), (a_8, b_8), (a_{12}, b_{12}) par *trois* cordes; ces cordes formeront, avec c et les *quatre* ordonnées b_0, b_4, b_8, b_{12}, *trois* trapèzes; en désignant la somme de leurs aires par S_4, et posant

$$4(\tfrac{1}{2}b_0+b_4+b_8+\tfrac{1}{2}b_{12})=b'_4\ ,$$

nous aurons

$$S_4=\tfrac{1}{12}cb'_4\ .$$

6. Soient joints consécutivement les *cinq* points $(a_0\,,b_0)$, $(a_3\,,b_3)$, $(a_6\,,b_6)$, $(a_9\,,b_9)$, $(a_{12}\,,b_{12})$ par *quatre* cordes ; ces cordes formeront, avec c et les *cinq* ordonnées b_0, b_3, b_6, b_9, b_{12}, *quatre* trapèzes ; en désignant la somme de leurs aires par S_3, et posant

$$3(\tfrac{1}{2}b_0+b_3+b_6+b_9+\tfrac{1}{2}b_{12})=b'_3\ ,$$

nous aurons

$$S_3=\tfrac{1}{12}cb'_3\ .$$

7. Soient joints consécutivement les *sept* points $(a_0\,,b_0)$, $(a_2\,,b_2)$, $(a_4\,,b_4)$, $(a_6\,,b_6)$, $(a_8\,,b_8)$, $(a_{10}\,,b_{10})$, $(a_{12}\,,b_{12})$ par *six* cordes ; ces cordes formeront, avec c et les *sept* ordonnées b_0, b_2, b_4, b_6, b_8, b_{10}, b_{12}, *six* trapèzes ; en désignant la somme de leurs aires par S_2, et posant

$$2(\tfrac{1}{2}b_0+b_2+b_4+b_6+b_8+b_{10}+\tfrac{1}{2}b_{12})=b'_2\ ,$$

nous aurons

$$S_2=\tfrac{1}{12}cb'_2\ .$$

8. Enfin, soient joints consécutivement tous les *treize* points de la courbe par *douze* cordes ; ces cordes formeront, avec c et les *treize* ordonnées, *douze* trapèzes ; en désignant la somme de leurs aires par S_1, et posant

$$\tfrac{1}{2}b_0+b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7+b_8+b_9+b_{10}+b_{11}+\tfrac{1}{2}b_{12}=b'_1\ ,$$

nous aurons

$$S_1=\tfrac{1}{12}cb'_1\ .$$

9. Aucune des aires S_{12}, S_6, S_4, S_3, S_2, S_1 n'est l'aire demandée ; mais il résulte évidemment de notre procédé que ces aires convergent de plus en plus vers celle-là. Donc aussi la ligne par

laquelle il faut multiplier $\frac{1}{12}c$ pour avoir l'aire demandée n'est aucune des lignes b'_{12}, b'_6, b'_4, b'_3, b'_2, b'_1, mais une ligne vers laquelle celles-là convergent de plus en plus.

10. Portons les ordonnées b'_{12}, b'_6, b'_4, b'_3, b'_2, b'_1 sur leurs correspondantes b_{12}, b_6, b_4, b_3, b_2, b_1 ; et imaginons une courbe située au-dessus de la première, passant par les *six* points (a_1, b'_1), (a_2, b'_2), (a_3, b'_3), (a_4, b'_4), (a_6, b'_6), (a_{12}, b_{12}); cette courbe prolongée rencontrera le prolongement de l'ordonnee b_0 en quelque point, en désignant par b'_0 son ordonnée qui répond à celle-là, et conséquemment à l'abscisse a_0 les ordonnées b'_{12}, b'_6, b'_4, b'_3, b'_2, b'_1 tendant continuellement vers la ligne par laquelle il faut multiplier $\frac{1}{12}c$ pour avoir l'aire cherchée, en désignant cette aire par S_0, nous pourrons prendre sensiblement

$$S_0 = \tfrac{1}{12}cb'_0 ;$$

et tout se réduira à trouver b'_0 ; problème qui rentre dans les méthodes connues d'interpolation. Par la nature même de ces méthodes, et de l'espèce d'arbitraire auquel elles sont inévitablement assujetties, la valeur que nous trouverons pour b'_0 ne sera poiut proprement la véritable ; mais sa différence avec elle sera comparable à celle qui existe entre le rayon et le *sinus-verse* d'un très-petit angle, tel que serait, par exemple, celui d'une minute ou même d'une seconde. Effectivement nous verrons bientôt que, dans tous les cas ordinaires d'intégration, cette différence n'est sensible qu'à la dixième ou à la douzième décimale. D'ailleurs on peut la diminuer à volonté, en augmentant le nombre des parties égales de c qu'on pourra porter à 18, 24, 30, 36, 48 ou 60 au lieu de 12.

11. Il est facile de voir, par la nature de la courbe dont les ordonnées sont b'_{12}, b'_6, b'_4, b'_3, b'_2, b'_1, qu'elle doit couper perpendiculairement l'ordonnée b'_0, c'est-à-dire, en d'autres termes, qu'en prenant y' pour le symbole général des ordonnées de cette courbe, et faisant répondre l'origine à l'ordonnée b'_0, on doit avoir

en même temps $x=0$, $\frac{dy'}{dx}=0$; ce qui exige que l'expression de y' ne renferme point la première puissance de x. Pour plus d'uniformité, nous en exclurons également toutes les autres puissances impaires, et nous poserons simplement

$$y'=A+Bx^2+Cx^4+Dx^6+Ex^8+\ldots\ldots ;$$

il s'agira donc de déterminer le coefficient A, auquel se réduit y' lorsque $x=0$.

12. En prenant $\frac{1}{12}c$ pour unité, il faudra donc qu'aux valeurs 1, 2, 3, 4, 6, 12 de x, répondent pour y' les valeurs b'_1, b'_2, b'_3, b'_4, b'_6, b_{12}, ce qui donnera

$$\begin{aligned}
b'_1 &=A+B+C+D+E+F ,\\
b'_2 &=A+2^2B+2^4C+2^6D+2^8E+2^{10}F ,\\
b'_3 &=A+3^2B+3^4C+3^6D+3^8E+3^{10}F ,\\
b'_4 &=A+4^2B+4^4C+4^6D+4^8E+4^{10}F ,\\
b'_6 &=A+6^2B+6^4C+6^6D+6^8E+6^{10}F ,\\
b'_{12} &=A+12^2B+12^4C+12^6D+12^8E+12^{10}F ;
\end{aligned}$$

et, en éliminant, entre ces six équations, les cinq coefficiens B, C, D, E, F, la valeur de A que l'on tirera de l'équation finale, en fonction de b'_1, b'_2, b'_3, b'_4, b'_6, b'_{12}, sera, pour $c=12$, l'intégrale demandée; nous avons vu d'ailleurs qu'on a

$$\begin{aligned}
b'_1 &=\tfrac{1}{2}b_0+b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7+b_8+b_9+b_{10}+b_{11}+\tfrac{1}{2}b_{12} ;\\
b'_2 &=b_0+2b_2+2b_4+2b_6+2b_8+2b_{10}+b_{12} ;\\
b'_3 &=\tfrac{3}{2}b_0+3b_3+3b_6+3b_9+\tfrac{3}{2}b_{12} ,\\
b'_4 &=2b_0+4b_4+4b_8+2b_{12} ,\\
b'_6 &=3b_0+6b_6+3b_{12} ,\\
b'_{12} &=6b_0+6b_{12} . \text{ (*)}
\end{aligned}$$

(*) Je dois l'idée, très-ingénieuse, qui sert de fondement à cette nouvelle méthode d'intégration à M. D'OBENHEIM, ancien sous-directeur des fortifications

13. Les équations qu'il s'agit de résoudre étant au nombre de six, nous allons les présenter sous la forme plus générale que voici

$$
\begin{aligned}
a' &= A+Ba+Ca^2+Da^3+Ea^4+Fa^5\,,\\
b' &= A+Bb+Cb^2+Db^3+Eb^4+Fb^5\,,\\
c' &= A+Bc+Cc^2+Dc^3+Ec^4+Fc^5\,,\\
d' &= A+Bd+Cd^2+Dd^3+Ed^4+Fd^5\,,\\
e' &= A+Be+Ce^2+De^3+Ee^4+Fe^5\,,\\
f' &= A+Bf+Cf^2+Df^3+Ef^4+Ff^5\,.
\end{aligned}
$$

Les quantités a', b', c', d', e', f', de même que a, b, c, d, e, f, sont regardées comme données, et il s'agit uniquement d'obtenir la valeur de A ; de sorte que les cinq autres quantités B, C, D, E, F sont tout à fait indifférentes au problème qui nous occupe. Or, on trouve

$$
\begin{aligned}
A = &\frac{bcdefa'}{(b-a)(c-a)(d-a)(e-a)(f-a)}\\
&+\frac{cdefab'}{(c-b)(d-b)(e-b)(f-b)(a-b)}\\
&+\frac{defabc'}{(d-c)(e-c)(f-c)(a-c)(b-c)}\\
&+\frac{efabcd'}{(e-d)(f-d)(a-d)(b-d)(c-d)}\\
&+\frac{fabcde'}{(f-e)(a-e)(b-e)(c-e)(d-e)}\\
&+\frac{abcdef'}{(a-f)(b-f)(c-f)(d-f)(e-f)}
\end{aligned}
$$

---

professeur de mathématiques à l'école d'artillerie de Strasbourg. Il l'a exposée dans un ouvrage qu'il vient de publier sous le titre de BALISTIQUE ou *Indication de quelques expériences propres à compléter la théorie dû mouvement des projectiles de l'artillerie* ; mais je crois pouvoir en revendiquer les développemens et applications qui vont suivre, lesquels sont entièrement mon ouvrage.

(*Note de M.* KRAMP.)

La loi que suit cette expression générale est évidente, et on peut aisément l'étendre au cas où l'on aurait un plus grand nombre d'équations.

14. J'appellerai *diviseur général* le nombre des parties égales dans lesquelles on aura divisé l'intervalle c qui sépare les ordonnées extrêmes qui terminent l'espace mixtiligne qu'il s'agit de quarrer ; nombre qui a constamment été supposé 12 dans ce qui précède. Le choix de ce nombre n'est point indifférent ; et à grandeur à peu près égale, on doit donner la préférence à celui qui a le plus grand nombre de petits diviseurs, tel que 6, 12, 18, 24, 30, 36, 48, 60, ... Nous allons voir, au surplus, que, dans les applications pratiques, il doit être à peu près superflu d'aller au-delà de 24 ; attendu qu'en se bornant à ce nombre, on peut, dans les cas ordinaires, obtenir les intégrales avec *douze* chiffres décimaux exacts, au moins.

15. Le diviseur général étant choisi, le nombre et la nature des parties aliquotes à employer sont encore arbitraires. Il convient de ne jamais donner l'exclusion aux aliquotes 1, 2, 3 ; et le plus exact sera de les employer toutes ; mais il en résultera nécessairement plus de peine pour le calculateur ; d'ailleurs en n'allant pas même au-delà de 6, on peut obtenir des résultats qui, pour la précision, excèdent déjà les besoins ordinaires de l'analise.

16. *Première formule.* Prenons d'abord pour diviseur général le nombre 6, en employant tous les aliquotes 1, 2, 3, 6 ; nous aurons simplement ici

$$A=\frac{bcda'}{(b-a)(c-a)(d-a)}+\frac{cdab'}{(c-b)(d-b)(e-b)}+\frac{dabc'}{(d-c)(a-c)(b-c)}+\frac{abcd}{(a-d)(a-d)(c-d)}\,:$$

Or, on a, dans le cas actuel, $a=1$, $b=4$, $c=9$, $d=36$, ce qui donne, en substituant,

$$A=\frac{1296a'-567b'+112c'-d'}{840}\,;$$

et, en prenant pour unité l'intervalle entre deux ordonnées consécutives, ce sera là l'intégrale demandée.

17. Pour plus de simplicité, appelons les sept ordonnées du cas actuel α, β, γ, δ, ε, ζ, η; nous aurons

$$a'=\tfrac{1}{2}\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\tfrac{1}{2}\eta,$$

$$b'=\alpha+2\gamma+2\varepsilon+\eta,$$

$$c'=\tfrac{1}{2}\alpha+3\delta+\tfrac{1}{2}\eta,$$

$$d'=3\alpha+3\eta;$$

ce qui donnera, en substituant,

$$A=\frac{246(\alpha+\eta)+1296(\beta+\zeta)+162(\gamma+\varepsilon)+1632\delta}{840}.$$

En prenant donc l'intervalle entier qui sépare les ordonnées extrêmes α et η pour unité; on aura finalement pour l'intégrale cherchée

$$\int X\mathrm{d}x=\frac{41(\alpha+\eta)+216(\beta+\zeta)+27(\gamma+\varepsilon)+272\delta}{840}. \qquad \text{(I)}$$

Si, dans cette dernière formule, on fait $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\varepsilon=\zeta=\eta=1$, elle devient $\int X\mathrm{d}x=1$, ainsi que cela doit être.

18. *Exemple premier*. On demande le logarithme naturel de *deux*?

Le logarithme d'un nombre quelconque n est l'intégrale de $\frac{\mathrm{d}x}{x}$, depuis $x=1$ jusqu'à $x=n$. En divisant donc en *six* parties égales l'intervalle compris entre *un* et *deux*, et remarquant qu'ici $X=\frac{1}{x}$, nous aurons d'abord

$$\alpha=\tfrac{6}{6}=1{,}00000000, \quad \alpha+\eta=1{,}50000000;$$

$$\beta=\tfrac{6}{7}=0.85714286, \quad \beta+\zeta=1{,}40259740;$$

$$\gamma=\tfrac{6}{8}=0{,}75000000, \quad \gamma+\varepsilon=1{,}35000000,$$

$$\delta=\tfrac{6}{9}=0{,}66666667; \quad 2\delta=1{,}33333333.$$

$\varepsilon=\frac{6}{10}=0,60000000$,

$\zeta=\frac{6}{11}=0,54545455$,

$\eta=\frac{6}{12}=0,50000000$;

Ces valeurs étant substituées dans la formule (I), on aura

$$\text{Log.}2=0,69314806 .$$

La valeur rigoureuse est

$$\text{Log.}2=0,69314718 .$$

La différence est donc $+0,00000088$, moindre qu'*un millionième.*

19. *Exemple II.* On demande la longueur du demi-quadrans $=\frac{\pi}{4}$?

La longueur de l'arc dont la tangente est t est l'intégrale de $\frac{dx}{1+x^2}$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=t$; celle de l'arc $\frac{\pi}{4}$ sera donc cette même intégrale, prise entre *zéro* et *un*; divisant donc cet intervalle en *six* parties égales, et remarquant qu'ici $X=\frac{1}{1+x^2}$, il viendra

$\alpha=1=1,00000000$, $\alpha+\eta=1,50000000$,

$\beta=\frac{36}{37}=0,97297297$, $\beta+\zeta=1,56313690$,

$\gamma=\frac{36}{40}=0,90000000$, $\gamma+\varepsilon=1,59230769$,

$\delta=\frac{36}{45}=0,80000000$, $2\delta=1,60000000$.

$\varepsilon=\frac{36}{52}=0,69230769$,

$\zeta=\frac{36}{61}=0,59016393$,

$\eta=\frac{36}{72}=0,50000000$;

Ces valeurs étant substituées dans la formule (I), on aura

$$\frac{\pi}{4}=0,78539271 .$$

La valeur rigoureuse est

$$\frac{\pi}{4}=0{,}78539816 \; .$$

Ainsi l'erreur est $-0{,}00000545$, moindre que *un cent millième.*

20. Cette première formule (17) est la plus simple et la plus aisée de toutes ; c'est celle qui exige le moins de calculs ; mais c'est aussi celle qui donne les résultats les moins approchés. Celles qui vont suivre seront beaucoup plus exactes.

21. *Deuxième formule.* Prenons 12 pour diviseur général, mais n'admettons d'abord que les parties aliquotes 1, 2, 3, 4, 6 ; cela donnera

$$A=\frac{bcdea'}{(b-a)(c-a)(d-a)(e-a)}+\frac{cdeab'}{(c-b)(d-b)(e-b)(a-b)}+\frac{deabc'}{(d-c)(e-c)(f-c)(g-c)}$$
$$+\frac{eabcd'}{(e-d)(a-d)(b-d)(c-d)}+\frac{abcde'}{(a-e)(b-e)(c-e)(d-e)} \; .$$

Or, nous avons ici $a=1$, $b=4$, $c=9$, $d=16$, $e=36$, nous aurons donc, en prenant pour unité l'intervalle entre les deux ordonnées extrêmes,

$$A=\frac{1728a'-945b'+320c'-54d'+e'}{12600} \; ;$$

mais on a, dans le cas actuel,

$$a'=\tfrac{1}{2}\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta+\theta+\iota+\varkappa+\lambda+\mu+\tfrac{1}{2}\nu \, ,$$
$$b'=\alpha+2\gamma+2\varepsilon+2\eta+2\iota+2\lambda+\nu \, ,$$
$$c'=\tfrac{3}{2}\alpha+3\delta+3\eta+2\varkappa+\tfrac{3}{2}\nu \, ,$$
$$d'=2\alpha+4\varepsilon+4\iota+2\nu \, ,$$
$$e'=3\alpha+6\eta+3\nu \; ;$$

ce qui donnera, en substituant,

$$\int X\mathrm{d}x=\frac{49(\alpha+\nu)+288(\beta+\mu)-27(\gamma+\lambda)+448(\delta+\varkappa)-63(\varepsilon+\iota)+288(\zeta+\theta)+134\eta}{2100} \; .$$

22. *Exemple I.* On demande de nouveau le logarithme de *deux* ?

En divisant en douze parties égales l'intervalle entre *un* et *deux*, nous aurons

$$\alpha=\tfrac{12}{12}=1{,}0000000000\,, \qquad \alpha+\nu=1{,}5000000000\,,$$

$$\beta=\tfrac{12}{13}=0{,}9230769231\,, \qquad \beta+\mu=1{,}4448160535\,,$$

$$\gamma=\tfrac{12}{14}=0{,}8571428571\,, \qquad \gamma+\lambda=1{,}4025974026\,,$$

$$\delta=\tfrac{12}{15}=0{,}8000000000\,, \qquad \delta+\kappa=1{,}3714285714\,,$$

$$\varepsilon=\tfrac{12}{16}=0{,}7500000000\,, \qquad \varepsilon+\iota=1{,}3500000000\,,$$

$$\zeta=\tfrac{12}{17}=0{,}7058823529\,, \qquad \zeta+\theta=1{,}3374613003\,,$$

$$\eta=\tfrac{12}{18}=0{,}6666666667\,, \qquad 2\eta=1.3333333333\,;$$

$$\theta=\tfrac{12}{19}=0{,}6315789474\,,$$

$$\iota=\tfrac{12}{20}=0{,}6000000000\,,$$

$$\kappa=\tfrac{12}{21}=0{,}5714285714\,;$$

$$\lambda=\tfrac{12}{22}=0{,}5454545455\,,$$

$$\mu=\tfrac{12}{23}=0{,}5217391304\,,$$

$$\nu=\tfrac{12}{24}=0{,}5000000000\,;$$

ce qui donnera, en substituant dans la formule (II)

$$\text{Log.}2=0.6931471816\,;$$

la valeur rigoureuse est

$$\text{Log.}2=0{,}6931471806\,;$$

l'erreur est donc

$$0{,}0000000010\,,$$

c'est-à-dire, que cette valeur est exacte dans les *huit* premiers chiffres décimaux.

23. *Remarque.* Avec le seul logarithme de *deux* on peut facile-

ment trouver tous les autres. Soit m un nombre absolument quelconque dont il faille chercher le logarithme. Soit 2^n la puissance de *deux* qui lui est immédiatement inférieure ; et soit $1+h$ le quotient qu'on obtient en divisant le premier de ces deux nombres par le second. Comme h sera certainement un nombre moindre que l'unité, la formule (I) suffira pour déterminer le logarithme de $1+h$; divisant donc h en *six* parties égales on aura $\alpha=\frac{6}{6}$, $\beta=\frac{6}{6+h}$, $\gamma=\frac{6}{6+2h}$, $\delta=\frac{6}{6+3h}$, $\varepsilon=\frac{6}{6+4h}$, $\zeta=\frac{6}{6+5h}$, $\eta=\frac{6}{6+6h}=\frac{1}{1+h}$. Il faudra multiplier par h l'intégrale obtenue par la formule ; on aura alors le logarithme de $1+h$, auquel ajoutant n fois celui de *deux*, on aura celui de m avec une erreur qui ne tombera pas au-dessus de la *huitième* ou même de la neuvième décimale.

24. *Exemple II.* On demande le logarithme naturel de 10000 ?

La puissance de *deux* immédiatement inférieure à 10000 est $8192=2^{13}$. On aura ainsi $m=10000$, $n=13$, $1+h=\frac{10000}{8192}=1+\frac{1808}{8192}=1+\frac{113}{512}$; on aura donc

$$\text{Log}.10000=13\text{Log}.2+\text{Log}(1+\tfrac{113}{512}) .$$

Pour trouver ce dernier logarithme, on fera

$$\alpha=\tfrac{3072}{3072},\ \beta=\tfrac{3072}{3185},\ \gamma=\tfrac{3072}{3298},\ \delta=\tfrac{3072}{3411},\ \varepsilon=\tfrac{3072}{3524},\ \zeta=\tfrac{3072}{3637},\ \eta=\tfrac{3072}{3750}.$$

On trouvera ensuite

$$\begin{aligned} 41(\alpha+\eta) &= 74{,}58720000 ,\\ 216(\beta+\zeta) &= 390{,}78145008 ,\\ 27(\gamma+\varepsilon) &= 48{,}68667756 ,\\ 272\ \delta &= 244{,}96745680 . \end{aligned}$$

La somme 759.02278444 de ces quatre nombres, divisée par 840, et multipliée par $h=\frac{113}{512}$ donne pour le logarithme de $1+h$ ou $\frac{625}{512}$, 0,1994270243. La valeur rigoureuse est 0,1994270243 ; la différence est donc seulement de *quatre* unités décimales du *dixième* ordre.

25. D'un autre côté, ayant trouvé Log 2 = 0,6931471816, on aura 13Log.2 = 9.0109133608. Ajoutant celui qu'on vient de trouver,

il en résultera le logarithme de 10000 égal à 9,2103403851. En prenant le quart de ce logarithme, on aura, pour le module de nos tables vulgaires

$$\text{Log.}10=2,3025850963\ .$$

La valeur rigoureuse étant

$$\text{Log.}10=2,3025850930\ ;$$

on voit que l'erreur est au-dessous de *quatre* unités décimales du *neuvième* ordre.

26. *Exemple III.* On demande la longueur de tout arc dont on connaît la tangente ?

L'arc dont la tangente est t est l'intégrale de $\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=t$. En se servant de la formule (II) les quantités qu'il faudra y substituer pour α, β, γ, ... λ, μ, ν seront des fractions ayant pour numérateur commun 144, et pour dénominateurs respectifs les nombres 144, $144+t^2$, $144+4t^2$, $144+9t^2$, $144+16t^2$, $144+100t^2$, $144+121t^2$, $144+144t^2$; et l'arc cherché sera la valeur qui en résultera pour A, multipliée par t. L'exemple suivant nous fera juger du degré d'exactitude de ce procédé.

27. *Exemple IV.* On demande, suivant la formule précédente, la longueur de l'arc $\frac{\varpi}{4}$?

Les dénominateurs de nos quantités α, β, γ, ... λ, μ, ν sont ici 144, 145, 148, 153, 160, 169 180, 193, 208, 225, 244, 265, 288, ce qui donnera

$$\alpha+\nu=\tfrac{144}{144}+\tfrac{144}{288}=\quad\tfrac{3}{2}\quad=1,5000000000\ ;$$

$$\beta+\mu=\tfrac{144}{145}+\tfrac{144}{265}=\tfrac{11808}{5\cdot 29\cdot 53}=1,5364996746\ ,$$

$$\gamma+\lambda=\tfrac{144}{148}+\tfrac{144}{244}=\tfrac{3528}{37\cdot 61}=1,5631369074\ ,$$

$$\delta+\varkappa=\tfrac{144}{153}+\tfrac{144}{225}=\tfrac{672}{17\cdot 25}=1,5811764706\ ,$$

$$\varepsilon+\iota=\tfrac{144}{160}+\tfrac{144}{208}=\tfrac{207}{130}=1,5923076923\ ,$$

$$\zeta+\iota=\tfrac{144}{169}+\tfrac{144}{193}=\tfrac{52128}{169\cdot 193}=1,5981849955\ ;$$

$$2\ \eta=\tfrac{144}{180}+\tfrac{144}{180}=\ \tfrac{8}{5}\ =1,6000000000\ .$$

d'où on conclura finalement

$$\frac{\pi}{4}=0,7853981727\ .$$

La valeur rigoureuse étant

$$\frac{\pi}{4}=0,7853981634\ ,$$

il s'ensuit que l'erreur tombe au-dessous d'une unité décimale du *huitième* ordre.

28. *Exemple V.* Rectification générale de l'ellipse.

Ce célèbre problème qui exerce, depuis plus d'un siècle, le génie de nos plus grands analistes, rentre de lui-même dans nos formules générales, dont il ne présente qu'un cas très-particulier. Soient a, b les deux demi-axes, et proposons-nous de rectifier l'arc compris depuis l'extrémité de a jusqu'au point dont la normale fait avec a un angle λ; la formule à intégrer sera

$$\frac{a^2b^2\mathrm{d}\lambda}{(a^2\mathrm{Cos.}^2\lambda+b^2\mathrm{Sin.}^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}\ ,$$

depuis $\lambda=0$. Si l'on veut se contenter de la première formule, on remplacera successivement la lettre λ, dans

$$\frac{a^2b^2}{(a^2\mathrm{Cos.}^2\lambda+b^2\mathrm{Sin.}^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}\ ,$$

d'abord par zéro et ensuite par $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{6}$ de λ. On aura ainsi les valeurs de α, β, γ, δ, ε, ζ, η, d'où on conclura celles de a', b', c', d', et par suite celle de A qui, multipliée par l'arc entier λ, exprimé en parties du rayon, fera connaître la longueur de l'arc cherché.

29. Supposons, par exemple, qu'il soit question d'assigner la

longueur du quart de l'ellipse ; λ sera un angle droit, et devra conséquemment devenir successivement $0°$, $15°$, $30°$, $45°$, $60°$, $75°$, $90°$. Or, on sait que

$$\mathrm{Sin.}^2\,0 = \mathrm{Cos.}^2 90° = 0\,,$$
$$\mathrm{Cos.}^2\,0 = \mathrm{Sin.}^2 90° = 1\,,$$
$$\mathrm{Sin.}^2 15° = \mathrm{Cos.}^2 75° = \frac{2-\sqrt{3}}{4}\,,$$
$$\mathrm{Cos.}^2 15° = \mathrm{Sin.}^2 75° = \frac{2+\sqrt{3}}{4}\,,$$
$$\mathrm{Sin.}^2 30° = \mathrm{Cos.}^2 60° = \tfrac{1}{4}\,,$$
$$\mathrm{Cos.}^2 30° = \mathrm{Sin.}^2 60° = \tfrac{3}{4}\,,$$
$$\mathrm{Sin.}^2 45° = \mathrm{Cos.}^2 45° = \tfrac{1}{2}\,.$$

Il viendra donc, en posant pour abréger le quarré a^2-b^2 de l'excentricité $=c^2$,

$$\alpha = \frac{b^2}{a}\,,$$
$$\beta = \frac{a^2b^2}{\left(a^2-\frac{2-\sqrt{3}}{4}c^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,,$$
$$\gamma = \frac{a^2b^2}{\left(a^2-\frac{1}{4}c^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,,$$
$$\delta = \frac{a^2b^2}{\left(a^2-\frac{1}{2}c^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,,$$
$$\varepsilon = \frac{a^2b^2}{\left(a^2-\frac{3}{4}c^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,,$$
$$\zeta = \frac{a^2b^2}{\left(a^2-\frac{2+\sqrt{3}}{4}c^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,,$$
$$\eta = \frac{a^2}{b}\,.$$

Ayant obtenu la valeur de A, on la multipliera par $\frac{\varpi}{2} = 1{,}5708$, et l'on aura ainsi une valeur du quart d'ellipse qui, dans les cas ordinaires, ne sera pas fautive d'un *cent-millième.*

30. *Exemple VI.* On demande l'intégrale de $e^{-t^2}dt$, depuis $t=0$ jusqu'à $t=3$?

L'intervalle étant divisé en *douze* parties égales, on aura

Pour $t=0,00$, la fonction	$e^{-t^2}=1,0000000$,
0,25	0,9394332,
0,50	0,7788009,
0,75	0,5697828,
1,00	0,3678794,
1,25	0,2096113,
1,50	0,1053992,
1,75	0,0467706,
2,00	0,0183156,
2,25	0,0063297,
2,50	0,0013904,
2,75	0,0005244,
3,00	0,0001234.

En employant la formule (II), on trouve, pour le numérateur de l'intégrale. 620,3635233,
et pour son dénominateur . . . . 2100 ;
mais, à cause de l'intervalle 3, il faudra diviser par 700 seulement, ce qui donnera finalement

$$\int e^{-t^2}dt=0,8862336 .$$

31. Dans mon *Analise des réfractions astronomiques*, j'ai donné une table des intégrales de $e^{-t^2}dt$, prises jusqu'à l'infini. J'y trouve

Depuis $t=0$, ... 0,88622692,

Depuis $t=3$, ... 0,00001958 ;

Elle est donc de 0 à 3, ... 0,88620734 ;

la différence avec la précédente n'excède guère *un quarante-millième* d'unité.

32.

32. *Exemple VII.* On demande l'intégrale de $\frac{e^x dx}{x}$, depuis $x=1$ jusqu'à une valeur quelconque de x ?

La courbe dont l'équation est $y=\frac{e^x}{x}$ n'a aucun de ses points situé dans les angles des coordonnées de signes contraires ; mais elle a, dans chacun des angles des coordonnées de mêmes signes, une partie qui présente deux branches infinies. Les axes sont les asymptotes de la partie située dans l'angle des coordonnées négatives ; quant à l'autre partie, elle n'a qu'une seule asymptote qui est l'axe des y ; elle a une ordonnée *minimum* qui répond au point pour lequel on a $x=1$, et conséquemment $y=e$; et, à partir de ce point jusqu'à l'origine, l'accroissement de l'ordonnée est très-rapide, et s'élève à un ordre d'infini qu'il n'est pas même possible de déterminer ; de sorte que cette branche ne peut approcher indéfiniment d'aucune courbe connue, à moins peut-être que ce ne soit la branche curviligne de la *Logistique* ordinaire.

33. Cherchons, par la première formule, l'aire de la courbe, d'abord entre 1 et 7, puis entre 7 et 13 ; et nous chercherons ensuite, par la seconde formule, l'aire totale entre 1 et 13, laquelle doit être rigoureusement égale à la somme des deux premières. La différence que nous trouverons entre les deux résultats nous mettra à même d'apprécier l'erreur que notre méthode laisse subsister, dans le cas particulier de ce problème.

34. On trouve, dans les *Tables logarithmiques* de SCHULZE (Berlin, 1778), une table des puissances de $e=2,71828...$, depuis la première jusqu'à la vingt-quatrième. Divisant donc les *treize* premiers par leurs exposans respectifs, nous aurons nos treize ordonnées ainsi qu'il suit :

$$\alpha = 2,718282,$$
$$\beta = 3,694528,$$
$$\gamma = 6,695178,$$

$$\begin{aligned}
\delta &= 13,649537\,, \\
\varepsilon &= 29,682632\,, \\
\zeta &= 67,238132\,, \\
\eta &= 156,661880\,, \\
\theta &= 372,619748\,, \\
\iota &= 900,342659\,, \\
\varkappa &= 2202,646579\,, \\
\lambda &= 5443,103792\,, \\
\mu &= 13562,899285\,, \\
\nu &= 34031,769385\,.
\end{aligned}$$

35. On aura d'abord, par la formule (I), pour l'aire comprise entre 1 et 7,

$$\frac{41(\alpha+\eta)+216(\beta+\zeta)+27(\gamma+\varepsilon)+272\delta}{140}\,;$$

et pour l'aire comprise entre 7 et 13,

$$\frac{41(\eta+\nu)+216(\theta+\mu)+27(\iota+\lambda)+272\varkappa}{140}\,.$$

On trouvera ensuite, par la formule (II), pour l'aire totale, comprise entre 1 et 13,

$$\tfrac{7}{25}(\alpha+\nu)+\tfrac{288}{175}(\beta+\zeta+\theta+\mu)-\tfrac{27}{175}(\gamma+\lambda)+\tfrac{64}{25}(\delta+\varkappa)-\tfrac{9}{25}(\varepsilon+\iota)+\tfrac{124}{175}\eta\,.$$

36. On aura ainsi,

Pour l'aire entre 1 et 7 189,649401,

Pour l'aire entre 7 et 13, ... 37015,696762,

Pour l'aire entre 1 et 13, ... 37198,443648.

Cette dernière est un peu moindre que la somme des deux autres; et elle doit naturellement être réputée plus exacte; la différence est 8,902515; c'est environ la 4200$^{\text{me}}$ partie de l'intégrale entière.

Cette différence est un peu plus sensible que celles de tous les problèmes précédens ; mais il faut considérer aussi à quelle intégrale on avait à faire. Celle de $\frac{e^x dx}{x}$ tient une des premières places parmi ces intégrales éminemment réfractaires, qui se sont constamment jusqu'ici montrées rebelles à tous les moyens d'intégration connus, sans même en exclure l'emploi des séries infinies. *Hinc ergo natura hujus functionis transcendentis parum cognoscitur*, dit EULER (*Calc. intég.*, vol. 1, n.° 228).

37. Egalant entre elles la somme des deux formules qui nous ont donné les aires partielles et celle qui nous a donné l'aire totale, on est conduit à cette nouvelle égalité très-remarquable

$$(\alpha+\nu)-8(\beta+\mu)+27(\gamma+\lambda)-48(\lambda+\kappa)+43(\varepsilon+\iota)-8(\zeta+\theta)=14\eta\,;$$

C'est l'équation de condition, pour que le point du milieu, ou bien tout autre de nos *treize* points, se trouve sur la courbe déterminée par les *douze* autres. Elle est rigoureusement satisfaite, dans le cas où nos treize ordonnées sont égales entre elles : elle est rigoureusement remplie encore dans une infinité d'autres courbes dont il serait trop long de faire ici l'énumération. Elle est remplie, quoiqu'avec une différence presque insensible, lorsque la portion de courbe qui est comprise entre les limites de l'intégrale, est sans asymptote, sans imaginaires, sans point d'inflexion ni de rebroussement ; lorsqu'enfin elle ne s'écarte pas trop de quelque courbe rentrante, telle que sont les ellipses de différens degrés. Ces sortes d'équation de condition, nouvelles dans l'analise, sont essentielles dans la théorie de l'interpolation ; elles pourront être le sujet d'un mémoire particulier.

38. *Troisième formule.* En conservant le diviseur général 12, ajoutons aux cinq premiers aliquotes 1, 2, 3, 4, 6, le nombre 12 lui-même. Nous aurons alors $a=1$, $b=4$, $c=9$, $d=16$, $e=36$, $f=144$; et ensuite (13)

$$
\begin{aligned}
21621600A=2985984a'&-1667952b'\\
+\ 585728c'&-\ 104247d'\\
+\ \ \ 2288e'&-\qquad f'\ :
\end{aligned}
$$

ce qui donnera

$$
\begin{aligned}
1801800A=41833(\alpha+\nu)&+248832(\beta+\zeta+\theta+\mu)\\
-29160(\gamma+\lambda)&+395264(\delta+\varkappa)\\
-63909(\varepsilon+\iota)&+118416\eta\ .
\end{aligned}
$$

Le calcul d'après cette formule est beaucoup plus compliqué, mais aussi elle réduit à peu près au quart l'erreur de l'autre.

39. *Quatrième formule.* En prenant pour diviseur général 18, et pour ses parties aliquotes 1, 2, 3, 6, 9, d'où $a=1$, $b=4$, $c=9$; $d=36$, $e=81$, on obtient d'abord (21)

$$277200A=24057a'-10935b'+2310c'-33d'+e'\ ,$$

et ensuite

$$
\begin{aligned}
30800A=496(\alpha+\tau)&+2673(\beta+\zeta+\theta+\mu+o+\sigma)\\
+243(\gamma+\varepsilon+\iota+\lambda+\zeta+\rho)&+3443(\delta+\varpi)\\
+991(\eta+\nu)&+3444\varkappa\ ,
\end{aligned}
$$

40. *Cinquième formule.* En prenant pour diviseur général 24; et pour ses aliquotes 1, 2, 3, 4, 6, d'où $a=1$, $b=4$, $c=9$, $d=16$, $e=36$, on obtient d'abord

$$25200A=1728a'-945b'=320c'-54d'+e'\ :$$

Cette formule paraît être, au dénominateur près, qui est double, identique avec notre seconde formule; elle ne l'est pourtant pas; parce que le nombre des ordonnées étant double, les lettres a', b', c', d', e', en acquièrent des valeurs entièrement différentes. On trouve, en effet, en désignant par ȣ la 25.^e ordonnée

$$
\begin{aligned}
4200A=49(\alpha+\text{ȣ})&+288(\beta+\zeta+\theta+\mu+\xi+\sigma+\upsilon+\omega)\\
-27(\gamma+\lambda+o+\psi)&+448(\delta+\varkappa+\varpi+\chi)\\
-63(\varepsilon+\iota+\varrho+\phi)&+134(\eta+\tau)+98\nu\ .
\end{aligned}
$$

L'erreur que cette formule laisse subsister dans le calcul de l'arc $\frac{\varpi}{4}$, laquelle est soustractive, n'est sensible qu'à la onzième décimale.

41. *Sixième formule.* Le diviseur général étant encore 24; si l'on emploie les parties aliquotes 1, 2, 3, 4, 6, 8; ce qui donne $a=1$, $b=4$, $c=9$, $d=16$, $e=36$, $f=64$; on aura d'abord (13)

$$970200A=67584a'-38808b'+14336c'-2772d'+88e'-3f'\;;$$

et ensuite

$$\begin{aligned}80850A=\;&933(\alpha+\text{ȣ})+5632(\beta+\zeta+\theta+\mu+\xi+\sigma+\upsilon+\omega)\\&-836(\gamma+\lambda+o+\psi)+9216(\delta+\kappa+\varpi+\chi)\\&-1760(\varepsilon+\varphi)+2792(\eta+\tau)-1762(\iota+\varrho)+1868\nu\;.\end{aligned}$$

L'usage de cette formule réduit au quart l'erreur que la précédente avait laissé subsister.

42. *Septième formule.* Le diviseur général étant toujours 24, prenons ses aliquotes 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12; ce qui donnera $a=1$, $b=4$, $c=9$, $d=16$, $e=36$, $f=64$, $g=144$; on aura d'abord

$$\begin{aligned}15765750A=\;&2654208a'-1556755b'+5963776c'\\&-1216215d'+45760e'-2106f'+7g'\;;\end{aligned}$$

et ensuite

$$\begin{aligned}31531050A=\;&362135(\alpha+\text{ȣ})+2211840(\beta+\zeta+\theta+\mu+\xi+\sigma+\upsilon+\omega)\\&-382782(\gamma+\lambda+o+\psi)+3702784(\delta+\kappa+\varpi+\chi)\\&-788157(\varepsilon+\varphi)+1131072(\eta+\tau)-789561(\iota+\varrho)+725674\nu\;;\end{aligned}$$

Par l'usage de cette formule l'erreur du calcul de $\frac{\varpi}{4}$ ne devient sensible que sur la *douzième* décimale.

43. *Huitième formule.* Prenons pour diviseur général 60, et pour ses aliquotes 1, 2, 3, 4, 5; d'où $a=1$, $b=4$, $c=9$, $d=16$, $e=25$; cela donnera d'abord

$$126A = 210a' - 120b' + 45c' - 10d' + e' .$$

Comme nous avons ici 61 ordonnées, nous représenterons

Les vingt premières par α , β , γ , ... σ , τ , υ ;
Les vingt suivantes par α' , β' , γ' , ... σ' , τ' , υ' ,
Les vingt autres par α'' , β'' , γ'' , ... σ'' , τ'' , υ'' ,
Et enfin la dernière par α'''. Il viendra ainsi

$$\begin{aligned}1512A = {} & 7(\alpha+\alpha''')+42(\beta+\theta+\mu+\xi+\sigma+\upsilon+\delta'+\kappa'+\mu'+\sigma'\\ & +\beta''+\delta''+\theta''+\kappa''+\xi''+\upsilon'')-6(\varepsilon+o+\gamma'+\eta'+o'+\tau'+\eta''+\tau'')\\ & +69(\delta+\kappa+\beta'+\delta'+\xi'+\upsilon'+\mu''+\sigma'')-14(\varepsilon+\iota+\rho+\iota'+\nu'+\varepsilon''+\nu''+\rho'')\\ & +43(\zeta+\zeta'+\varpi'+\varpi'')+21(\eta+\tau+\gamma''+o'')-5(\lambda+\lambda'')\\ & +13(\upsilon+\varepsilon'+\rho'+\tau'')+70(\varpi+\zeta'')-13(\alpha'+\alpha'')+110\lambda' .\end{aligned}$$

Nous n'avons point mis cette formule à l'épreuve ; mais on peut présumer que dans le calcul de $\frac{\varpi}{4}$, l'erreur qu'entraînerait son usage tomberait au-delà de la *vingtième* décimale.

44. Nous ne craignons pas d'avancer qu'à l'aide de ces diverses formules, toute intégrale quelconque, de la forme $\int X\mathrm{d}x$, peut être évaluée numériquement, entre les limites données, moyennant un nombre fini et très-limité de termes , indépendamment du calcul intégral , et de toute notion d'infiniment petit, par les seuls moyens que fournit l'algèbre élémentaire , et avec toute la précision que l'on veut donner à son calcul ; pourvu seulement que la fonction X ne devienne ni infinie ni imaginaire , dans l'étendue de l'intégration. Toute fonction intégrale d'une seule variable , telle que $\int X\mathrm{d}x$, doit donc être comprise désormais dans la classe des quantités entièrement connues.