KRAMP

**Astronomie. Mémoire sur les éclipses de soleil**


*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 6 (1815-1816), p. 133-157

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1815-1816__6__133_0>

# ASTRONOMIE.

## *Mémoire sur les éclipses de soleil ;*

Par M. le professeur Kramp, doyen de la faculté des sciences de Strasbourg.

( *Première partie.* )

1. PROBLÈME. *Soient* (*fig.* 1) S *le centre du disque du soleil, vu de la terre, dont le centre doit conséquemment se trouver sur la perpendiculaire menée au plan de ce disque par le point* S ; *et soit* CC′ *le diamètre du même disque. On suppose que deux observateurs, situés en deux points de la surface de la terre, voient au même instant le centre du disque lunaire sur le disque solaire, l'un en* L *et l'autre en* L′ ; *et on demande la relation générale entre les diverses quantités que le problème donne lieu de considérer ?*

2. *Solution.* Les quantités données du problème sont : les demi-diamètres du soleil, de la lune et de la terre ; nous nommerons le premier $a$, le second $b$ et le troisième $c$ ; ensuite les distances des centres du soleil et de la lune à celui de la terre ; nous les désignerons par $A$ et $B$ ; cela rend les demi-diamètres apparens des deux astres respectivement égaux à $\frac{a}{A}$ et $\frac{b}{B}$, et leurs parallaxes horizontales égales à $\frac{c}{A}$ et $\frac{c}{B}$. Toutefois, dans cette analise, nous ne ferons aucun usage des parallaxes.

3. Il faudra fixer les trois axes rectangulaires auxquels nous assignerons le centre de la terre pour point d'intersection commune, et auxquels nous rapporterons tant le centre de la lune que les deux points de la surface de la terre où les deux observateurs sont placés. En désignant par $x$, $y$, $z$ les coordonnées de l'un, et par $x'$, $y'$, $z'$ celles de l'autre, ce qui donne $x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2=c^2$, nous supposerons l'axe des $x$ dirigé du centre de la terre vers celui du soleil; l'axe des $y$ sera mené dans le plan de l'écliptique, parallèlement au diamètre $CC'$ du soleil, c'est-à-dire, vers la partie orientale du ciel; l'axe des $z$, perpendiculaire au plan des deux autres, sera dirigé vers le pôle de l'écliptique.

4. Nous nommerons $P$, $Q$, $R$ les coordonnées du centre de la lune, respectivement parallèles aux $x$, $y$, $z$, et prises dans le même sens; ce qui donne $P^2+Q^2+R^2=B^2$. Comme près de la conjonction le quarré $B^2$ l'emporte considérablement sur la somme $Q^2+R^2$, la différence $B-P$ sera presque nulle; et, à plus forte raison, sera-t-il permis de faire $P=b-\frac{Q^2+R^2}{2B}$.

5. La position du point L sur le disque solaire sera déterminée par les deux coordonnées SN et NL; et celle du point L′ par les deux coordonnées SN′ et N′L′; elles seront respectivement parallèles aux axes des $y$ et des $z$. Nous ferons

$$\mathrm{SN}=q\,, \qquad \mathrm{SN'}=q'\,,$$

$$\mathrm{NL}=r\,; \qquad \mathrm{N'L'}=r'\,.$$

6. Nous avons exposé, dans le tableau suivant, pour chacun des deux observateurs, les coordonnées des trois points par lesquels passe le rayon visuel, savoir :

1. Le lieu de l'observateur ;
2. Le centre de la lune ;
3. Le lieu apparent de ce centre sur le disque solaire.

| | 1.er *Observateur.* | 2.me *Observateur.* |
|---|---|---|
| 1. . . . . . | $x$ , $y$ , $z$ , | $x'$ , $y'$ , $z'$ , |
| 2. . . . . . | $B$ , $Q$ , $R$ , | $B$ , $Q$ , $R$ , |
| 3. . . . . . | $A$ , $q$ , $r$ ; | $A$ , $q'$ , $r'$ . |

Nous en déduirons les quatre proportions

$$A-x : B-x = q-y : Q-y \;,$$
$$A-x : B-x = r-z : R-z \;,$$
$$A-x' : B-x' = q'-y' : Q-y' \;,$$
$$A-x' : B-x' = r'-z' : R-z' \;.$$
$$(A-x)(Q-y) = (B-x)(q-y) \;,$$
$$(A-x)(R-z) = (B-x)(r-z) \;,$$
$$(A-x')(Q-y') = (B-x')(q'-y') \;;$$
$$(A-x')(R-z') = (B-x')(r'-z') \;.$$

7. En éliminant ici les deux coordonnées $Q$, $R$ du centre de la lune, on en fera deux autres, auxquelles nous donnerons la forme suivante, pour en faire ressortir la symétrie

$$\frac{(A-B)y+(B-x)q}{A-x} = \frac{(A-B)y'+(B-x')q'}{A-x'} \;;$$

$$\frac{(A-B)z+(B-x)r}{A-x} = \frac{(A-B)z'+(B-x')r'}{A-x'} \;.$$

Elles font connaître la relation entre le déplacement de l'observateur et celui du lieu apparent du centre de la lune, et contiennent ainsi la solution du problème.

8. Elles deviennent beaucoup plus simples, si on suppose l'un des deux observateurs au centre même de la terre. Il en résulte l'éclipse par laquelle le calculateur doit commencer dans tous les

cas, et que nous nommerons *éclipse géocentrique*. En plaçant au centre de la terre celui des deux observateurs à qui se rapportent les lettres accentuées $x'$, $y'$, $z'$, de même que $q'$, $r'$, on aura $x'=0$, $y'=0$, $z'=0$; les coordonnées $q'$, $r'$ pourront être immédiatement déduites des tables, et regardées comme des quantités données. Les équations deviendront

$$A(A-B)y=(A-x)Bq'-Aq(B-x)\ ;$$
$$A(A-B)z=(A-x)Br'-Ar(B-x)\ .$$

9. En divisant par $(A-x)B$, et en faisant, pour abréger

$$\frac{A(B-x)}{B(A-x)}=n\,,$$

on aura

$$y:z=q'-nq:r'-nr\ .$$

Le *maximum* de $x$ n'est qu'un soixantième de $B$, qui n'est lui-même qu'un quatre centième de $A$; la fraction $n$ diffère donc très-peu de l'unité; ainsi, dans tous les cas, les deux rapports $y:z$ et $q'-q:r'-r$ sont presque égaux entre eux.

10. Le quarré de la distance du lieu de l'observateur au centre de la lune est égal à $(P-x)^2+(Q-y)^2+(R-z)^2$, ou à $B^2-2Px-2Qy-2Rz+c^2$; ce qui rend cette distance presque égale à $B-x$. Si l'on veut tenir compte de l'erreur, très-peu sensible, que cette formule laisse subsister, on fera cette distance égale à $B-x-\omega$; et l'on aura

$$2\omega=\frac{2Qy+2Rz-y^2-z^2}{B-x}\ .$$

11. *PROBLÈME II. Le lieu apparent du centre de la lune sur le disque solaire étant* L′, *dans le cas de l'éclipse géocentrique; on demande dans quel endroit de la terre cette éclipse paraîtra centrale, dans le même instant?*

12. *Solution.* Les quantités données sont ici $q'$, $r'$; les inconnues sont $x$, $y$, $z$; il faut les déterminer de manière que $q=0$, $r=0$. Les équations du n.° 8 fournissent

$$A(A-B)y=(A-x)Bq';$$
$$A(A-B)z=(A-x)Br' \;;$$

c'est-à-dire,

$$y=\frac{Bq'}{A-B}\,,\quad z=\frac{Br'}{A-B}\;;$$

après quoi on trouvera $x$, en vertu de $x^2=c^2-y^2-z^2$. Cette solution nous aidera à trouver, sur le globe, la courbe de l'éclipse centrale.

13. *PROBLÈME III. Déterminer, dans la même supposition, l'endroit du globe, où l'on observe, dans le même instant, le centre de la lune sur un point donné du disque solaire?*

14. Les quantités données sont ici $q$, $r$; $q'$, $r'$; les inconnues $x$, $y$, $z$, seront fournies par ces mêmes équations du n.° 8. En y supprimant $B$ dans $A-B$ et $x$ dans $A-x$ et $B-x$, on trouve

$$y=\frac{B(q'-q)}{A}\,,\quad z=\frac{B(r'-r)}{A}\;:$$

ce sont là les premières valeurs approchées des deux inconnues $y$ et $z$; elles font connaître $x$ à l'aide de $x^2=c^2-y^2-z^2$. Donc si, pour abréger, on fait $\lambda^2=(q'-q)^2+(r'-r)^2$; ce qui rend $\lambda$ égal à la distance des deux lieux apparens du centre de la lune sur le disque solaire, on aura le quarré de la troisième ordonnée $x$, égal à $c^2-\frac{B^2}{A^2}\lambda^2$; quantité que, pour abréger, nous désignerons par $h^2$, et qui, pour exprimer la valeur rigoureuse de $x^2$, a besoin d'être corrigée encore.

15. A cet effet, on fera $x=h-\omega$, et sachant d'avance que $\omega$ sera une quantité très-petite, on s'arrêtera, dans les développemens à sa première puissance. Faisant donc, pour abréger

$$F=AB(q'-q)+(Aq-Bq')h\;;$$
$$G=AB(r'-r)+(Ar-Br')h\;;$$

on trouvera

$$2\omega = \frac{F^2 + G^2 - (A-B)^2 B^2 \lambda^2}{F(Aq - Bq') + G(Ar - Br') + A^2(A-B)^2 h}.$$

On peut remarquer qu'une erreur commise dans $x$ influe peu sur les coordonnées $y$, $z$; de sorte qu'après avoir déterminé $x$, et en avoir déduit $y$ et $z$, à l'aide des équations du n.° 8; on aura une nouvelle valeur de $x$, très-approchée, et beaucoup plus exacte que la précédente, en faisant $x = \sqrt{c^2 - y^2 - z^2}$.

16. *PROBLÈME IV. On demande l'équation de la courbe, tracée sur la surface du globe, où l'éclipse paraît d'une grandeur donnée; c'est-à-dire, où le centre de la lune, observé géocentriquement en* L' *paraît partout éloigné de celui* S *du soleil d'une même quantité, que nous désignerons par* f, *tellement que* $f^2 = q^2 + r^2$?

17. *Solution.* On aura donc, en vertu des équations du n.° 8,

$$A^2 f^2 (B-x)^2 = \{(A-x)Bq' - A(A-B)y\}^2 + \{(A-x)Br' - A(A-B)z\}^2.$$

Combinant cette équation avec celle du globe, savoir : $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$, on pourra en tirer celles des trois projections de la courbe demandée, faites sur les trois plans principaux, et dont la forme, très-compliquée, nous annoncera d'abord une courbe à double courbure.

18. Le cas le plus simple serait celui où les centres de ces trois astres seraient sur une même ligne droite; ce qui ferait du centre du soleil le lieu géocentrique de celui de la lune. Ayant alors $q' = 0$, $r' = 0$, les deux équations du n.° 8 deviendront

$$(B-x)q = -Ay, \quad (B-x)r = -Az;$$

d'où il résultera l'équation

$$(B-x)^2 f^2 = (A-B)^2 (c^2 - x^2),$$

qui ne renferme plus que la seule inconnue $x$. Effectivement, dans ce cas, la courbe demandée est un petit cercle du globe perpendiculaire à la ligne des centres, et dont il reste à déterminer la distance au centre de la terre, moyennant l'équation qu'on vient de trouver.

19. Faisant, pour abréger,

$$c^2 - \frac{(B^2-c^2)}{(A-B)^2} f^2 = R^2 \ ,$$

la solution de notre équation du second degré donnera

$$x = \frac{Bf^2 + (A-B)^2 R}{f^2 + (A-B)^2} \ .$$

Pour que la solution soit possible, il faut que $R^2$ soit une quantité positive ; il faut donc qu'on ait

$$f^2 < \frac{(A-B)^2 c^2}{B^2-c^2} \ ;$$

ou bien, en supprimant $B$ dans $A-B$ et $c^2$ dans $B^2-c^2$,

$$f < \frac{Ac}{B} \ ;$$

conclusions évidentes d'ailleurs.

20. Pour donner une solution, au moins approximative, du problème général, supprimons, dans les deux équations du n.° 8, $B$ dans $A-B$, et $x$ dans $A-x$ et $B-x$ ; elles deviendront

$$Bq = Bq' - Ay \ , \quad Br = Br' - Az \ ;$$

d'où l'on tire, en ajoutant les quarrés de part et d'autre,

$$\frac{B^2 f^2}{A^2} = \left(\frac{Bq'}{A} - y\right)^2 + \left(\frac{Br'}{A} - z\right)^2 :$$

équation de la projection de la courbe demandée, faite sur le plan mené par le centre de la terre, perpendiculairement à la ligne des centres.

21. Cette équation appartient à un cercle ayant pour rayon $\frac{Bf}{A}$, et dont le centre est éloigné de l'axe des $x$, de $\frac{Bq'}{A}$ dans le sens des $y$, et de $\frac{Br'}{A}$ dans celui des $z$. La courbe en question est donc celle qui résulte de l'intersection de la sphère et du cy-

lindre droit. Tant que l'axe du cylindre passe par le centre de la sphère, cette intersection est un cercle, perpendiculaire sur l'axe; c'est le cas que nous avons examiné précédemment. Dans tous les autres cas, ce sera une courbe à double courbure.

22. Des trois axes principaux auxquels nous avons rapporté jusqu'ici le lieu de l'observateur, celui des $x$ était dirigé vers le centre du soleil; celui des $y$ était perpendiculaire au premier, dans le plan de l'écliptique; et celui des $z$ perpendiculaire aux précédens, était dirigé vers son pôle. Pour nous rapprocher des longitudes et des latitudes géographiques, nous introduirons trois nouveaux axes rectangulaires, ayant encore leur intersection commune au centre de la terre, afin d'y rapporter nos trois nouvelles variables que nous désignerons par les lettres majuscules $X$, $Y$, $Z$. L'axe des $X$ sera dirigé vers le point d'équinoxe du printemps; l'axe des $Y$ sera dans la colure des solstices et dirigé vers le 90.$^{me}$ degré de l'équateur; enfin, l'axe des $Z$ sera dirigé vers le pôle de ce grand cercle.

23. Le triangle sphérique tri-rectangle que j'ai nommé *orthoèdre*, est le représentant de tout système de trois axes rectangulaires entre eux. Leur point commun d'intersection est le centre de la sphère, dont la surface comprend huit orthoèdres. Si d'un point I, pris dans l'espace, on mène au sommet commun une droite que nous prendrons pour unité, et qui fasse avec eux les angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, on aura trois triangles-rectangles, dont les bases, Cos.$\alpha$, Cos.$\beta$, Cos.$\gamma$, seront les coordonnées du point I, rapporté à nos trois axes rectangulaires. Ces angles seront remplacés dans l'orthoèdre, dont nous supposons les trois sommets A, B, C, par les trois arcs de grands cercles AI, BI, CI, menés du point I aux trois sommets de l'orthoèdre; ainsi les trois lettres $x$, $y$, $z$, employées pour désigner les coordonnées de I, seront équivalentes à Cos.$\alpha$, Cos.$\beta$, Cos.$\gamma$.

24. En regardant l'orthoèdre A′B′C′ (fig. 2), comme le représentant du système des trois axes rectangulaires que nous avons employés

employés jusqu'ici, on pourra prendre le côté $A'B'$ pour le plan de l'écliptique, le troisième sommet $C'$ pour le pôle de ce plan, et le sommet $A'$ pour le lieu apparent du soleil, vu du centre de la terre, qui est le même que celui de l'orthoèdre. Prolongeant le côté $A'B'$ jusqu'au point d'*aries* qui est ici désigné par $A$, et menant sur la surface de la sphère l'arc $AB$, faisant avec $AA'B'$ un angle égal à l'obliquité de l'écliptique, le grand cercle dont $AB$ fait partie pourra représenter l'équateur. Il ne restera donc plus qu'à prendre l'arc $AB$ égal à un quart de circonférence, et assigner la position du point $C$, pôle de cet arc, pour avoir, dans le nouvel orthoèdre $ABC$, le représentant du nouveau système de coordonnées que nous avons désigné d'avance par les lettres majuscules $X$, $Y$, $Z$.

25. Soit $\varepsilon$ l'obliquité de l'écliptique, et $\alpha$ l'arc $AA'$, longitude du soleil au moment de l'observation. Menons des trois sommets de l'un des deux orthoèdres aux trois sommets de l'autre des arcs de grands cercles, qui ne sont pas exprimés dans la figure, mais qu'il est aisé d'imaginer; on aura

$$\begin{array}{lll} AA'=\alpha\ ; & \mathit{Cos}.BA'=\mathrm{Cos}.\varepsilon\mathrm{Sin}.\alpha\ , & \mathit{Cos}.CA'=\mathrm{Sin}.\varepsilon\mathrm{Sin}.\alpha\ , \\ AB'=90^\circ+\alpha\ ; & \mathit{Cos}.BB'=\mathrm{Cos}.\varepsilon\mathrm{Cos}.\alpha\ , & \mathit{Cos}.CB'=\mathrm{Sin}.\varepsilon\mathrm{Cos}.\alpha\ , \\ AC'=90^\circ\ ; & BC'=90^\circ+\varepsilon\ ; & CC'=\varepsilon\ . \end{array}$$

26. En vertu du n.° 24, on aura, pour nos deux orthoèdres,

$$\begin{array}{ll} x=\mathit{Cos}.A'I\ , & X=\mathit{Cos}.AI\ , \\ y=\mathit{Cos}.B'I\ , & Y=\mathit{Cos}.BI\ , \\ z=\mathit{Cos}.C'I\ , & Z=\mathit{Cos}.CI\ . \end{array}$$

Reste donc à passer, avec facilité, de l'un de nos deux systèmes de coordonnées à l'autre; ce qui sera l'objet du théorème suivant :

27. *THÉORÈME. Désignant par* p, q, r, *les coordonnées d'un point quelconque* A *d'une surface sphérique, et par* p', q', r', *celles d'un autre point quelconque* B *de la même surface; le cosinus de*

*l'arc de grand cercle* AB, *compris entre ces deux points, sera* Cos.AB=pp′+qq′+rr′.

28. En combinant ensemble les formules des trois derniers n.os, on aura pour résultat les six égalités qui suivent, lesquelles renferment la solution du problème qui nous occupe,

$$x=+X\text{Cos.}\alpha+Y\text{Cos.}\varepsilon\text{Sin.}\alpha+Z\text{Sin.}\varepsilon\text{Sin.}\alpha\ ,$$
$$y=-X\text{Sin.}\alpha+Y\text{Cos.}\varepsilon\text{Cos.}\alpha+Z\text{Sin.}\varepsilon\text{Cos.}\alpha\ ,$$
$$z=\qquad -Y\text{Sin.}\varepsilon\qquad +Z\text{Cos}\,\varepsilon\ ;$$

et réciproquement

$$X=x\text{Cos.}\alpha\qquad -y\text{Sin.}\alpha\ ,$$
$$Y=x\text{Cos.}\varepsilon\text{Sin.}\alpha+y\text{Cos.}\varepsilon\text{Cos.}\alpha-z\text{Sin.}\varepsilon\ ,$$
$$Z=x\text{Sin.}\varepsilon\text{Sin.}\alpha+y\text{Sin.}\varepsilon\text{Cos.}\alpha+z\text{Cos.}\varepsilon\ .$$

29. L'angle que fait, dans un instant donné, le méridien d'un lieu avec le colure des équinoxes, est ce qu'on appelle *ascension droite du milieu du ciel*, *ascension droite du méridien*, ou *angle horaire de l'équinoxe*; et, comme, dans toute cette analise, l'un de ses deux côtés sera toujours le colure des équinoxes, nous le nommerons simplement *angle horaire*. Au moment du midi vrai, l'angle horaire sera donc égal à l'ascension droite du soleil. Et si l'on désigne par $A$ l'ascension droite du soleil au midi vrai d'un certain jour, et par $A'$ ce qu'elle sera au midi vrai du jour suivant, l'angle horaire aura augmenté, pendant cet intervalle de $360°+A'-A$; quantité que, pour abréger, nous désignerons par $\alpha$. Comme de plus cette augmentation sera proportionnelle au temps, il s'ensuit qu'en prenant pour unité la durée entière d'un jour solaire, l'angle horaire, au bout du temps $t$, considéré comme une fraction quelconque du jour sera égal $A+\alpha t$.

30. Si de plus on désigne par $D$ la différence angulaire entre le méridien dont nous parlons et un autre méridien du globe situé à son orient; l'angle horaire au moment du midi vrai étant $A$ pour

le premier des deux, il sera pour le second, dans le même instant, égal à $A+D$; et, après une fraction de jour exprimée par $t$, il sera $A+D+\alpha t$, en conservant à $\alpha$ sa signification $\alpha=A'-A+360^\circ$. Ainsi, désignant généralement l'angle horaire par $\mu$, on aura $\mu=A+D+\alpha t$.

31. L'autre angle qui sert à déterminer la position du lieu de l'observateur, par rapport à nos trois plans principaux, c'est la latitude du lieu : nous la désignerons par $\lambda$. L'angle $\lambda$ est une quantité constante pour chaque lieu de la terre; l'angle $\mu$ est une quantité variable qui, pendant sa rotation, varie proportionnellement au temps.

32. La tangente de l'angle horaire est, dans tous les cas, égale à $\frac{Y}{X}$; et, dans la supposition d'une terre sphérique, la latitude $\lambda$ a pour sinus $\frac{Z}{c}$; Il en résulte

$$X=c\,\mathrm{Cos.}\lambda\,\mathrm{Cos.}\mu\ ,$$

$$Y=c\,\mathrm{Cos.}\lambda\,\mathrm{Sin.}\mu\ ,$$

$$Z=c\,\mathrm{Sin.}\lambda\ .$$

Moyennant ces formules, on aura, pour chaque instant, les coordonnées $X$, $Y$, $Z$ de tout lieu dont on connaît la latitude. Les formules du n.° 28 nous aideront à en déduire les coordonnées $x$, $y$, $z$, qui se rapportent immédiatement à la phase de l'éclipse, et qui pourront servir dans l'application des formules du n.° 8.

33. L'applatissement de la terre, si toutefois on veut y faire attention, dans les calculs sur les éclipses, apportera quelques légères modifications à nos formules. En conservant la lettre $c$ pour désigner le demi-petit axe BC du globe (fig. 3) : et en nommant $a$ le grand axe AC, la latitude du point M ne sera plus l'angle ACM; ce sera l'angle ARM que fait le grand axe AC avec la normale MR. En supposant de plus aux méridiens une forme elliptique, on aura

$$\overline{\text{CM}}^2=\frac{a^4\text{Cos.}^2\lambda+c^4\text{Sin.}^2\lambda}{a^2\text{Cos.}^2\lambda+c^2\text{Sin.}^2\lambda};$$

$$\overline{\text{CP}}^2=\frac{a^4\text{Cos.}^2\lambda}{a^2\text{Cos.}^2\lambda+c^2\text{Sin.}^2\lambda}, \qquad \overline{\text{PM}}^2=\frac{c^4\text{Sin.}^2\lambda}{a^2\text{Cos.}^2\lambda+c^2\text{Sin.}^2\lambda}:$$

La ligne $PM$ est toujours la même que l'ordonnée $Z$, tandis que CP est identique avec $\sqrt{X^2+Y^2}$.

34. Si, en faisant $a=c+\alpha$, on s'arrête, dans les développemens, aux premières puissances de $\alpha$, on aura

$$\text{CM}=c+\alpha\text{Cos.}^2\lambda,$$

$$\text{CP}=c\text{Cos.}\lambda+\alpha\text{Cos.}\lambda(2-\text{Cos.}^2\lambda);$$

$$\text{PM}=c\text{Sin.}\lambda-\alpha\text{Sin.}\lambda\text{Cos.}^2\lambda;$$

et, en mettant ces deux expressions à la place de $c$Cos.$\lambda$ et de $c$Sin.$\lambda$, on pourra encore employer les trois formules du n.° 33, même dans la supposition d'une terre sphéroïdique.

35. Le calcul de l'éclipse géocentrique n'a aucune difficulté. Il faudra déterminer, pour chaque instant proposé, les coordonnées SN$'=q'$, N$'$L$'=r'$ (fig. 1), du lieu géocentrique du centre de la lune sur le disque solaire. Ayant déjà désigné par $L$ la longitude du soleil, soit $\eta$ la longitude de la lune, et $\theta$ sa latitude; on aura

$$q'=A\text{Tang.}(\eta-\alpha) \qquad r'=A\text{Tang.}\theta:$$

ce sont là les valeurs absolues de ces coordonnées. Pour avoir leurs valeurs angulaires, exprimées en minutes et secondes du cercle dont le rayon est *un*, il faudra diviser par $A$; on aura ainsi

$$q'=\eta-\alpha, \qquad r'=\theta.$$

36. Dans l'intervalle d'un midi à l'autre, la longitude du soleil croît proportionnellement au temps. Dans la connaissance des temps, année 1816, je trouve cette longitude

Pour le 18 novembre, à midi. . . . . . $180°+56°.4'.\ 2''$,

Pour le 19 novembre, à midi. . . . . . $180°+57°.4'.48''$, Comme les deux différences du 18 au 19 et du 19 au 20 sont rigoureusement égales, la simple progression arithmétique suffit; ainsi, la longitude du soleil, au bout du temps $t$, comptée depuis le midi vrai du 18, en prenant pour unité la durée d'un jour solaire, sera $\alpha = 180^\circ + 56^\circ.4'.2'' + 3640''t$.

37. Il n'en est pas de même de la lune, dont les inégalités, pendant ce même intervalle de temps, sont déjà très-sensibles. La longitude de cet astre est égale à *sept* signes, *plus*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Le 18 à midi. . . . . . . | 13°. 8'. 9'' | = 47289'' | , |
| Le 18 à minuit. . . . . . | 20 .32 .49 | = 73969 | , |
| Le 19 à midi. . . . . . . | 27 .54 .45 | = 100485 | , |
| Le 19 à minuit. . . . . . | 35 .13 . 6 | = 126786 | . |

Le premier terme de la colonne est 47289''; sa première différence est +26680''; sa seconde différence est −164''; et sa troisième différence est −51''. Ces deux dernières sont très-sensibles encore. Les quatre valeurs sont comprises dans la formule

$$\nu = 7^s + 47289'' + 55490''t - 226''t^2 - 68''t^3 ;$$

il faudra s'en servir pour trouver, avec précision, les valeurs des longitudes intermédiaires.

38. On trouve de même la latitude de la lune

| | | | |
|---|---|---|---|
| Le 18 à midi. . . . . . . | 2°. 4'.36'' | = 7476'' | , |
| Le 18 à minuit. . . . . . | 1 .25 .54 | = 5154 | , |
| Le 19 à midi. . . . . . . | .45 .58 | = 2758 | , |
| Le 19 à minuit. . . . . . | 5 .34 | = 334 | . |

Le premier terme de la colonne est 7476''; sa première différence est −2322''; la seconde est −74''; la troisième est +46''. Elles nous font connaître les valeurs exactes des latitudes intermédiaires, au moyen de la formule

$$\theta = 7476'' - 4538''t - 244''t^2 - 64''t^3.$$

39. Pour nous débarrasser de l'emploi de ces polynômes, il faudra resserrer les limites du temps. L'éclipse est comprise, pour l'observateur de Berlin, entre huit heures du matin et midi, temps vrai de Paris. On trouve, à l'aide de nos formules, qu'à huit heures du matin, la longitude de la lune sera $180^\circ + 51^\circ.27'.48''$, et sa latitude $59'.22''$. A midi vrai du même jour, sa longitude sera $180^\circ + 57^\circ.54'.45''$, et sa latitude $13'.24''$. Pendant cet intervalle de quatre heures, sa longitude aura donc changé de $2^\circ.26'.57''$, et sa latitude de $13'.24''$. A ces mêmes huit heures du matin, la longitude du soleil aura été $180^\circ + 56^\circ.54'.35''$, elle aura donc changé, jusqu'à midi vrai du même jour, de $10'.7''$; ce qui nous permettra d'exprimer nos trois quantités angulaires par de simples binômes, de la forme $A + Bt$. On aura donc alors, en prenant l'intervalle de quatre heures pour l'unité du temps $t$, lequel sera compté depuis huit heures du matin, temps vrai de Paris,

$$\alpha = 180^\circ + 56^\circ.54'.35'' + 607''t,$$

$$\eta = 180^\circ + 55^\circ.27'.48'' + 8817''t,$$

$$\theta = 59'.22'' - 804''t;$$

donc

$$q' = \eta - \alpha = -5207'' + 8210''t,$$

$$r' = \theta = +3562'' - 804''t.$$

40. Il nous sera donc permis de supposer, en général, $q = M + mt$; $r = N + nt$; les facteurs numériques $M$, $N$, $m$, $n$, étant immédiatement donnés par les tables. Dans le cas de l'éclipse de 1816, on aura donc

$$M = -5207''; \quad m = +8210'',$$

$$N = +3562'', \quad n = -804''.$$

Le temps $t$, exprimé en fonction de l'intervalle de quatre heures, sera compté depuis huit heures du matin, temps vrai de Paris.

41. Le moment de la conjonction est indiqué par $q=0$, d'où il résulte $t=-\frac{M}{m}$. Dans l'éclipse géocentrique de 1816, on aura $t=0,634226$; la conjonction arrivera donc à $10^h.32'.13''$ du matin; la latitude de la lune sera alors $\frac{Nm-Mn}{m}$; ce qui fait, dans le cas actuel, $3052''$ ou $5'.50''$

42. La plus courte distance apparente des centres, vue de celui de la terre, indiquera le milieu de l'éclipse géocentrique; elle répond à $t=-\frac{Mm+Nn}{m^2+n^2}$; elle sera égale à $\frac{Mn-Nn}{\sqrt{m^2+n^2}}$. Dans l'éclipse de 1816, on aura $t=0,670286$; ce qui répond à $10^h.40'.52''$; et elle sera égale à $3037''=50'.37''$.

43. Le jour de l'éclipse, les deux demi-diamètres apparens du soleil et de la lune seront respectivement $973''$ et $787''$; ce qui donne pour leur somme $1960''$. Comme cette somme est beaucoup plus petite que la moindre distance géocentrique des deux centres, on voit qu'il n'existera pas d'éclipse géocentrique; le centre de la terre ne pouvant entrer ni dans l'ombre de la lune, ni même dans sa pénombre. Cela n'empêchera pas de déterminer, pour chaque instant, les deux coordonnées $q'$, $r'$; mais, quelque valeur qu'on suppose à $t$, le lieu apparent du centre de la lune sera toujours beaucoup au-delà du disque solaire : l'éclipse, en effet, ne sera visible que pour une partie de l'hémisphère boréal du globe.

44. On trouve, dans la connaissance des temps, et en employant une interpolation convenable, que le 19 novembre, à 10 heures du matin, temps vrai de Paris, le demi-diamètre apparent du soleil est de $973''4$, et celui de la lune $987''$. En supposant le rayon de la terre égal à l'unité, celui du soleil sera 111,48, et celui de la lune 0,273 ( *LALANDE*, *abrégé d'astronomie* ). Divisant les premiers nombres par les derniers, on aura les parallaxes horizontales au moment du milieu de l'éclipse géocentrique, pour lequel il faut

prendre ici celui de la plus petite distance apparente des centres ; elle sera $8'',7345$ pour le soleil et $3617''$ pour la lune. Passant de là aux distances réelles, on aura

La première $A = 23615$ ; $\text{Log.}A = 4,3731879$ ;

La seconde $B = 57,0765$ ; $\text{Log.}B = 1,7560767$ .

45. Les ascensions droites du soleil, au midi vrai du 18 et du 19 novembre, seront, d'après les tables,

Au 18 . . . . . $A = 180° + 53°.44'.28''$ ,

Au 19 . . . . . $A' = 180° + 54 .47 . 2''$ .

La différence est $1°.2'.34''$, ou $3754''$. On aura donc $\alpha = 360° + 3754''$, ce qui rend l'angle horaire $\mu = 233°.44'.28'' + (360° + 3754'')t$ ; le temps étant compté depuis le midi vrai du 18 novembre, et exprimé en fraction d'un jour solaire. Pour établir de la conformité entre nos formules, il vaudra mieux prendre l'intervalle de quatre heures pour unité de temps, et compter depuis huit heures du matin. On aura alors $\mu = 174°.36'.36'' + 216626''t$. Pour tout autre observateur, placé à l'orient de Paris, il faudra ajouter à cette formule la différence angulaire des méridiens, que nous avons désignée par $D$. Pour Berlin, on aura $D = 11°.2'$, faisant en temps $44'.8''$.

46. Pour donner une application de nos formules, poursuivons l'éclipse du 19 novembre d'heure en heure, depuis huit heures du matin jusqu'à midi, en supposant l'observateur placé à Berlin, qui a pour hauteur du pôle . $\lambda = 52°.31'.45''$. La lettre $t$ se rapportera toujours au temps vrai de Paris. Il faudra commencer par $q'$, $r'$, coordonnées du centre de la lune, observé du centre de la terre. Elles formeront deux progressions arithmétiques, ayant pour leurs premiers termes,

Celle de $q'$ . . . . . $-5207''$ ,

Celle de $r'$ . . . . . $+3562''$ ;

et pour leurs différences,

celle

Celle de $q'$ . . . . . . $+2055''$ ,

Celle de $r'$ . . . . . . $-\ 201''$ .

Les longitudes du soleil et les angles horaires formeront aussi deux progressions arithmétiques, ayant pour leurs premiers termes,

Celle de la longitude $\alpha$ . . . . . $236.^\circ 54'.35''$ ,

Celle de l'angle horaire $\mu$ . . . . $185.^\circ 38'.36''$ ;

et pour différences

Celle de la longitude $\alpha$ . . . . $2'.32''$ ,

Celle de l'angle horaire $\mu$ . . . $15.^\circ 2'.36''$ .

Voici la table ;

| Temps. | $q'$ | $r'$ | $\alpha=180^\circ+$ | $\mu=189^\circ+$ |
|---|---|---|---|---|
| $8^h$. | $-5207''$ | $+3562''$ | $56^\circ.54'.35''$ | $5^\circ.38'.36''$ |
| 9. | $-3154$ | $+3361$ | 56 .57 . 7 | 20 .41 .12 |
| 10. | $-1102$ | $+3160$ | 56 .59 .39 | 35 .43 .48 |
| 11. | $+\ 950$ | $+2959$ | 57 . 2 .11 | 50 .46 .24 |
| 12. | $+3003$ | $+2758$ | 57 . 4 .43 | 65 .49 . 0 |

47. La latitude connue de Berlin, et les angles horaires qu'on vient de déterminer, conduisent aux coordonnées $X, Y, Z$, moyennant les formules du n.° 32 ; ensuite de quoi celles du n.° 28 feront connaître, sans difficulté, les coordonnées $x$, $y$, $z$, dont la valeur numérique est changée à chaque instant, en vertu de la rotation

du globe, ainsi que des mouvemens propres du soleil et de la lune. En voici la table :

| Temps. | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| 8.h | 0,1117452 | —0,6497894 | 0,7580235 |
| 9. | 0,2107286 | —0,5418849 | 0,8136055 |
| 10. | 0,2772901 | —0,4087702 | 0,8694922 |
| 11. | 0,3068908 | —0,2595157 | 0,9156797 |
| 12. | 0,2975057 | —0,1042659 | 0,9490080 |

48. Les coordonnées $x$, $y$, $z$, meneront immédiatement à celles que nous avons désignées par $q$, $r$, et qui détermineront le lieu apparent du centre de la lune sur le disque du soleil, moyennant les formules du n.° 8, savoir :

$$Aq(B-x)=(A-x)Bq'-A(A-B)y \ ,$$

$$Ar(B-x)=(A-x)Br'-A(A-B)z \ .$$

Comme la plus grande valeur de $x$ de la table n'est encore qu'un quatre-vingt millième de $A$, nous pouvons supprimer $x$ dans $A-x$; ce qui réduit nos formules à

$$(B-x)q=Bq'-(A-B)y \ ,$$

$$(B-x)r=Br'-(A-B)z \ .$$

Ces formules font connaître les valeurs absolues de $q$, $r$. Pour les réduire en secondes, il faudra diviser $A-B$ par $A\text{Tang.}1''$; il en résultera le quotient 205767; et, en désignant ce quotient par $n$, on aura

$$(B-x)q = Bq' - ny\ ,$$

$$(B-x)r = Br' - nz\ .$$

Ces formules nous feront connaître les grandeurs apparentes des coordonnées $q$, $r$, vues de l'observatoire de Berlin et exprimées en secondes. Nous avons ajouté, dans la troisième colonne de la table ci-jointe, la distance apparente du centre du soleil à celui de la lune, c'est-à-dire, $\sqrt{q^2+r^2}$.

| Temps. | $q$ | $r$ | $\sqrt{q^2+r^2}$ |
|---|---|---|---|
| 8.$^h$ | $-2868''$ | $+850''$ | $2991''$ |
| 9. | $-1204$ | $+427$ | $1278$ |
| 10. | $+375$ | $-23$ | $376$ |
| 11. | $+1897$ | $-347$ | $1928$ |
| 12. | $+3396$ | $-670$ | $3461$ |

49. Pour rendre cette table plus complète, en la construisant de quart d'heure en quart d'heure, il faudra employer l'interpolation; on aura

| Temps. | $q$ | $r$ | Distances des centres. |
|---|---|---|---|
| 8.$^h$ 0′ | −2868″ | +850″ | 2991″ |
| 8. 15 | −2443 | +743 | 2565 |
| 8. 30 | −2023 | +637 | 2121 |
| 8. 45 | −1611 | +532 | 1701 |
| 9. 0 | −1204 | +427 | 1278 |
| 9. 15 | − 802 | +323 | 876 |
| 9. 30 | − 405 | +222 | 461 |
| 9. 45 | − 13 | +121 | 122 |
| 10. 0 | + 375 | − 23 | 376 |
| 10. 15 | + 759 | − 73 | 756 |
| 10. 30 | +1141 | −167 | 1153 |
| 10. 45 | +1519 | −258 | 1541 |
| 11. 0 | +1897 | −347 | 1928 |
| 11. 15 | +2272 | −432 | 2313 |
| 11. 30 | +2646 | −515 | 2696 |
| 11. 45 | +3021 | −594 | 3079 |
| 12. 0 | +3396 | −670 | 3461 |

La méthode d'interpolation que nous avons employée, pour construire cette table, sera l'objet du problème qui suit :

50. *PROBLÈME IV. Soit* y *une fonction de* x, *telle que*

*Pour* $x = 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ \ldots\ldots\ ;$

*On ait* $y = a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ d\ ,\ e\ ,\ \ldots\ldots\ ;$

*on demande de comprendre toutes ces valeurs particulières dans une seule formule, telle que* $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots,$ *et de faire connaître la loi générale des coefficiens*, A, B, C, D, ....?

41. *Solution.* Désignons par $\Delta a$, $2\Delta^2 a$, $6\Delta^3 a$, $24\Delta^4 a$, ....., les première, seconde, troisième, quatrième, ..... différences du premier terme de la colonne; tellement que

$$\begin{aligned}
\Delta a &= b - a\ ,\\
2\Delta^2 a &= c - 2b + a\ ;\\
6\Delta^3 a &= d - 3c + 3b - a\ ,\\
24\Delta^4 a &= e - 4d + 6c - 4b + a\ ;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ;
\end{aligned}$$

on aura alors

$$\begin{aligned}
A &= a\\
B &= \Delta a - \Delta^2 a + 2\Delta^3 a - 6\Delta^4 a + 24\Delta^5 a - \ldots\ ;\\
C &= \Delta^2 a - 3\Delta^3 a + 11\Delta^4 a - 50\Delta^5 a + \ldots\ ;\\
D &= \Delta^3 a - 6\Delta^4 a + 35\Delta^5 a - \ldots\ ,\\
E &= \Delta^4 a - 10\Delta^5 a + \ldots\ ;\\
F &= \Delta^5 a - \ldots\ ,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

52. Les coefficiens numériques de ces suites sont les mêmes que ceux des facultés des divers degrés. La faculté de $x$ à exposant *cinq*,

qui est le développement du produit $x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ ou $x^5+10x^4+35x^3+50x^2+24x$, a pour ses coefficiens 1, 10, 35, 50, 24 ; et tels sont aussi les nombres de la colonne verticale des $\Delta^5 a$. La série est d'un grand usage, sur-tout dans les cas où les différences $\Delta a$, $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$, $\Delta^4 a$, .... vont rapidement en décroissant ; ce qui rend la suite $A+Bx+Cx^2+....$ très-convergente ; mais le défaut même de cette circonstance n'ôte rien à sa généralité.

53. L'application de ces formules à la table du n.° 48 donne

$$12q = -34416 + 20572t - 645t^2 + 38t^3 + 3t^4,$$
$$12r = +10800 - 5124t + 13t^2 + 36t^3 - t^4,$$
$$6\sqrt{q^2+r^2} = +17946 - 3251t - 13815t^2 + 7817t^3 - 1029t^4.$$

54. Une interpolation analogue, faite dans la table du n.° 49, nous apprendra que la moindre distance des centres, qui indique le milieu de l'éclipse, aura lieu à $9^h.46'.44''$, temps vrai de Paris ; ce qui équivaut à $10^h.30'.52''$, temps vrai de Berlin. Une détermination générale et plus rigoureuse, sera l'objet du problème suivant.

55. ***PROBLÈME V.*** *On demande la relation générale qui existe, au moment du milieu de l'éclipse, ou de la plus grande phase, entre le temps et la position géographique du lieu de l'observateur ?*

56. *Solution.* L'épaisseur de la partie éclipsée est généralement égale à la somme des deux demi-diamètres du soleil et de la lune, moins la distance de leurs centres ; le moment de la plus grande phase est donc celui de la moindre distance des centres. Le quarré de cette distance est $q^2+r^2$ ; on aura donc, pour le cas du *minimum*, l'équation $q\mathrm{d}q+r\mathrm{d}r=0$. Or, nous avons n.° 8 les deux équations qui suivent :

$$Aq(B-x)=(A-x)Bq'-A(A-B)y\ ;$$
$$Ar(B-x)=(A-x)Br'-A(A-B)z\ .$$

Nous avons de plus

$$\left.\begin{array}{l} q'=M+mt\ ; \\ r'=N+nt\ ; \end{array}\right\}\ \text{d'où}\ \left\{\begin{array}{l} \mathrm{d}q'=m\mathrm{d}t\ ; \\ \mathrm{d}r'=n\mathrm{d}t\ . \end{array}\right.$$

Les coordonnées géocentriques $q'$, $r'$ sont fonctions du temps seul; mais les coordonnées $x$, $y$, $z$, sont fonctions du temps et de la position géographique du lieu de l'observateur, c'est-à-dire, de sa longitude et de sa latitude. Elles doivent donc, toutes les trois, être considérées comme variables.

57. En différenciant, sous ce point de vue, les deux équations du n.° 8, et y introduisant $m\mathrm{d}t$ et $n\mathrm{d}t$, en place de $\mathrm{d}q'$ et $\mathrm{d}r'$, il vient

$$A(B-x)\mathrm{d}q=(Aq-Bq')\mathrm{d}x-A(A-B)\mathrm{d}y+(A-x)Bm\mathrm{d}t\ ,$$
$$A(B-x)\mathrm{d}r=(Ar-Br')\mathrm{d}x-A(A-B)\mathrm{d}z+(A-x)Bn\,\mathrm{d}t\ .$$

Mais, les équations du problème donnant

$$(B-x)(Aq-Bq')=(A-B)(Bq'-Ay)\ ,$$
$$(B-x)(Ar-Br')=(A-B)(Br'-Az)\ ,$$

changent les dernières dans les suivantes

$$\begin{aligned} A(B-x)^2\mathrm{d}q=&\,(A-B)(Bq'-Ay)\mathrm{d}x \\ &-A(A-B)\,(B-x)\,\mathrm{d}y \\ &+(A-x)(B-xBm\mathrm{d}t\ ; \\ A(B-x)^2\mathrm{d}r=&\,(A-B)(Br'-Az)\mathrm{d}x \\ &-A(A-B)\,(B-x)\,\mathrm{d}z \\ &+(A-x)(B-x)Bn\mathrm{d}t\ . \end{aligned}$$

58. Il ne reste plus qu'à prendre la somme des produits respectifs de ces deux équations par $q$ et $r$, pour former la fonction $q\mathrm{d}q+r\mathrm{d}r$ qui, égalée à zéro, doit donner la plus courte distance des centres. En posant, pour abréger,

$$(Bq'-Ay)q+(Br'-Az)r=P \ ,$$

il en résultera l'équation

$$(A-B)P\mathrm{d}x=A(A-B)(B-x)(q\mathrm{d}y+r\mathrm{d}z)-(A-x)(B-x)B(mq+nr)\mathrm{d}t \ .$$

59. L'équation de la sphère $x^2+y^2+z^2=0$, donne, en différenciant $x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z=0$. On pourra donc éliminer la différentielle $\mathrm{d}x$ de l'équation précédente; il viendra ainsi

$$B(A-x)(B-x)(mq+nr)x\mathrm{d}t=(A-B)\{Py+A(B-x)qx\}\mathrm{d}y$$
$$+(A-B)\{Pz+A(B-x)rx\}\mathrm{d}z \ .$$

60. En conséquence, si l'on suppose que le moment d'une plus grande phase est donnée d'avance, ce qui rend $\mathrm{d}t=0$, et qu'on demande l'endroit de la terre où l'observateur doit se placer, pour voir cette moindre distance apparente des centres sous un angle donné, il faudra égaler séparément à zéro les deux coefficiens de $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}z$. Il en résultera les deux équations qui suivent :

$$0=Py+A(B-x)qx \ , \quad 0=Pz+A(B-x)rx \ .$$

61. Ces équations donnent immédiatement $\frac{y}{z}=\frac{q}{r}$; de sorte qu'on peut faire $y=kq$, $z=kr$. Les équations du n.° 8 deviendront alors

$$(A-x)Bq'=A(A-B)kq+A(B-x)q \ ,$$
$$(A-x)Br'=A(A-B)kr+A(B-x)r \ ,$$

de sorte qu'en faisant, pour abréger

$$nA(A-B)+A(B-x)=F$$

on aura

$$(A-x)Bq'=Fq \ ,$$
$$(A-x)Br'=Fr \ ;$$

ainsi donc, au moment de la plus grande phase, quelle que soit d'ailleurs sa grandeur absolue; on a toujours $\frac{q}{r}=\frac{q'}{r'}=\frac{y}{z}$; d'où résulte le théorème qui suit :

62.

61. *THÉORÈME. Les lieux apparens du centre de la lune sur le disque solaire, vus de différens points du globe, au même moment d'une plus grande phase, sont situés sur une ligne droite, qui passe par le centre du disque.*