ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

BÉRARD

Questions résolues. Démonstrations du dernier des deux théorèmes énoncés à la page 296 du quatrième volume de ce recueil. Démonstration analitique

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 5 (1814-1815), p. 52-53
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1814-1815__5__52_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstrations du dernier des deux théorèmes énoncés à la page 296 du quatrième volume de ce recueil.

ÉNONCÉ. *Dans toute ligne du second ordre qui a un centre ; si l'on mène deux tangentes parallèles à une même droite fixe quelconque, et une troisième tangente variable ; le produit des segmens des deux premières tangentes compris depuis leurs points de contact jusqu'à la troisième, sera une quantité constante.* (*)

Démonstration analitique ;

Par M. Bérard, principal et professeur de mathématiques du collége de Briançon, membre de plusieurs sociétés savantes.

Les points de contact des deux tangentes parallèles entre elles étant les extrémités d'un diamètre, nous prendrons ce diamètre, que

(*) Dans la *Théorie des fonctions analitiques*, page 134 de la première édition et 187 de la deuxième, Lagrange a démontré que, non seulement cette propriété appartenait aux sections coniques ; mais que de plus elle n'appartenait qu'à elles seules. Mais sa démonstration sort du cercle des élémens.

nous appellerons $2a$, pour axe des x, et son conjugué $2b$ pour axe des y.

Si alors x', y' sont les cordonnées du point de contact de la troisième tangente, nous aurons

$$b^2x'^2 \pm a^2y'^2 = a^2b^2 \; ; \qquad (1)$$

et l'équation de cette troisième tangente sera

$$b^2xx' \pm a^2yy' = a^2b^2 \; ; \qquad (2)$$

On en déduira la longueur des segmens que cette tangente détermine sur les deux premières, en y faisant successivement $x=a$ et $x=-a$, et en prenant les valeurs correspondantes de y, ce qui donnera

$$y = \pm \frac{b^2(a-x')}{ay'} \; ; \qquad y = \pm \frac{b^2(a+x')}{ay'} \; ;$$

le produit de ces deux segmens sera donc

$$b^2 . \frac{a^2b^2 - b^2x'^2}{a^2y'^2} \; ;$$

quantité qui, en vertu de l'équation (1), se réduit à $\pm b^2$, c'est-à-dire, le quarré de la moitié du conjugué du diamètre qui joint les points de contact des tangentes parallèles.