ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

BRET

Géométrie des courbes. Essai sur la recherche des grandeur et direction des diamètres principaux, dans les lignes et surfaces du second ordre qui ont un centre

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 5 (1814-1815), p. 357-362

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1814-1815__5__357_0>

GÉOMÉTRIE DES COURBES.

Essai sur la recherche des grandeur et direction des diamètres principaux, dans les lignes et surfaces du second ordre qui ont un centre;

Par M. Bret, professeur de mathématiques à la faculté des sciences de l'académie de Grenoble.

On s'est servi plusieurs fois, avec avantage, dans ce recueil, de la propriété de *maxima* et de *minima* dont jouissent les diamètres principaux, dans les lignes et surfaces du second ordre qui ont un centre, pour la recherche des grandeur et direction de ces diamètres. Nous nous proposons de montrer ici que, par des considérations plus élémentaires, on peut parvenir au même but, d'une manière tout au moins aussi simple.

I. Soit l'équation

$$ax^2+by^2+2cxy=0\ . \qquad (1)$$

Il est connu, et il est d'ailleurs facile de démontrer 1.° que, si l'on a

$$c^2-ab<0\ , \qquad (2)$$

cette équation n'exprimera absolument rien; 2.° qu'elle exprimera le système de deux droites se coupant à l'origine, si l'on a au contraire

$$c^2-ab>0\ ; \qquad (3)$$

3.° qu'enfin, dans le cas particulier où l'on aura

$$c^2-ab=0\ , \qquad (4)$$

les deux droites se confondront en une seule, donnée de direction par l'une ou l'autre des deux équations équivalentes

$$\left.\begin{array}{l} ax+cy=0\ , \\ by+cx=0\ ; \end{array}\right\} \quad (5)$$

lesquelles en effet, par l'élimination de x et y, reproduisent la relation (4).

Cela posé; soit

$$Ax^2+By^2+2Cxy=D \qquad (6)$$

l'équation d'une ligne du second ordre, ayant son centre à l'origine des coordonnées, que nous supposons former entre elles un angle γ. L'équation d'un cercle ayant son centre à l'origine et son rayon égal à r sera

$$x^2+y^2+2xy\,\text{Cos.}\gamma=r^2\ . \qquad (7)$$

Ce cercle coupera la courbe en des points dont r exprimera la distance à l'origine.

Soit prise la différence des produits de l'équation (6) par r^2 et de l'équation (7) par D; nous aurons ainsi

$$(Ar^2-D)x^2+(Br^2-D)y^2+2(Cr^2-D\,\text{Cos.}\gamma)xy=0\ , \qquad (8)$$

équation qui, ayant lieu en même temps que (6) et (7), doit appartenir à une ligne contenant les points d'intersection de celles qu'expriment ces deux-là.

Par la comparaison de (1) et de (8), on a

$$a=Ar^2-D\ , \quad b=Br^2-D\ , \quad c=Cr^2-D\,\text{Cos.}\gamma\ ;$$

d'où il suit 1.° que, si l'on prend (2) l'arbitraire r de telle sorte qu'on ait

$$(Cr^2-D\,\text{Cos.}\gamma)^2-(Ar^2-D)(Br^2-D)<0\ , \qquad (9)$$

l'équation (8) n'exprimera rien ; et par conséquent le cercle (7) ne coupera pas la courbe (6) ; 2.° que, si au contraire on prend (3) l'arbitraire r de telle sorte qu'on ait

$$(Cr^2-D\text{Cos}.\gamma)^2-(Ar^2-D)(Br^2-D)>0\ , \qquad (10)$$

cette équation (8) exprimera le système de deux droites se coupant à l'origine, lesquelles contiendront les quatre intersections de la courbe (6) avec le cercle (7) ; 3.° qu'enfin, dans le cas particulier (4) où l'on prendra l'arbitraire r de telle sorte qu'on ait

$$(Cr^2-D\text{Cos}.\gamma)^2-(Ar^2-D)(Br^2-D)=0\ , \qquad (11)$$

les deux droites se confondront en une seule ; de sorte que le cercle touchera simplement la courbe.

Or, il est visible qu'alors cette droite unique deviendra l'un ou l'autre des diamètres principaux, et que r sera la longueur de la moitié de ce diamètre ; ainsi, les longueurs des demi-diamètres principaux sont donnés par l'équation (11) qui, développée, revient à

$$(C^2-AB)r^4+D(A+B-2C\text{Cos}.\gamma)r^2-D^2\text{Sin}.^2\gamma=0\ ;$$

et leur direction est donnée (5) par l'une ou l'autre des deux équations équivalentes

$$(Ar^2-D)x+(Cr^2-D\text{Cos}.\gamma)y=0\ ,$$
$$(Br^2-D)y+(Cr^2-D\text{Cos}.\gamma)x=0\ .$$

Si, dans l'équation (8), on suppose $r=\infty$, cette équation devient

$$Ax^2+By^2+2Cxy=0\ ,$$

et exprime conséquemment le système de deux droites coupant la courbe (6) à une distance infinie ; mais, pour cela, il faut qu'on ait

$$C^2-AB>0\ ;$$

ainsi, c'est là le seul cas où cette courbe puisse avoir des asymptotes.

II. Soit l'équation

$$ax^2+by^2+cz^2+2a'yz+2b'zx+2c'xy=0 . \qquad (1)$$

Il est connu, et il est d'ailleurs facile de démontrer que, suivant que la fonction

$$abc-aa'^2-bb'^2-cc'^2+2a'b'c' \qquad (2)$$

sera positive ou négative, l'équation (1) n'exprimera absolument rien, ou exprimera une surface conique ayant son centre à l'origine; et qu'en particulier, lorsque cette fonction sera nulle, la surface conique dégénèrera en une ligne droite, donnée par le système de deux quelconques des trois équations

$$\left.\begin{array}{l} ax+b'z+c'y=0 , \\ by+c'x+a'z=0 , \\ cz+a'y+b'x=0 ; \end{array}\right\} (3)$$

donc chacune est en effet comportée par les deux autres, toutes les fois que la fonction (2) est nulle.

Cela posé; soit

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy=D \qquad (4)$$

l'équation d'une ligne du second ordre, ayant son centre à l'origine; les coordonnées faisant entre elles les angles que voici:

$$\text{Ang.}(y,z)=\alpha , \quad \text{Ang.}(z,x)=\beta , \quad \text{Ang.}(x,y)=\gamma .$$

L'équation d'une sphère ayant son centre à l'origine et son rayon égal à r sera

$$x^2+y^2+z^2+2yz\text{Cos.}\alpha+2zx\text{Cos.}\beta+2xy\text{Cos.}\gamma=r^2 . \qquad (5)$$

cette sphère coupera la surface courbe suivant tous ceux de ses points qui seront à la distance r de l'origine.

Soit prise la différence des produits de l'équation (4) par r^2 et de l'équation (5) par D; nous aurons ainsi

$$\left.\begin{array}{l}(Ar^2-D)x^2+2(A'r^2-D\mathrm{Cos}.\alpha)yz\\ +(Br^2-D)y^2+2(B'r^2-D\mathrm{Cos}.\beta)zx\\ +(Cr^2-D)z^2+2(C'r^2-D\mathrm{Cos}.\gamma)xy\end{array}\right\}=0\ ; \qquad (6)$$

équation qui, ayant lieu en même temps que (4) et (5), doit, en général, exprimer une surface qui passe par la commune section des deux premiers.

Par la comparaison de (1) et (6), on a

$$a=Ar^2-D\ ,\quad a'=A'r^2-D\mathrm{Cos}.\alpha\ ;$$
$$b=Br^2-D\ ,\quad b'=B'r^2-D\mathrm{Cos}.\beta\ ,$$
$$c=Cr^2-D\ ,\quad c'=C'r^2-D\mathrm{Cos}.\gamma\ ;$$

d'où l'on voit que, suivant les diverses valeurs qu'on voudra assigner à r, l'équation (6) pourra être absurde d'elle-même, ou exprimer une surface conique ayant son centre à l'origine, laquelle passera par l'intersection de la sphère avec la surface du second ordre. En particulier, cette sphère deviendra tangente à la surface (1), et la surface conique se réduira à une droite (2), lorsqu'on aura

$$\left.\begin{array}{l}(Ar^2-D)(Br^2-D)(Cr^2-D)+2(A'r^2-D\mathrm{Cos}.\alpha)(B'r^2-D\mathrm{Cos}.\beta)(C'r^2-D\mathrm{Cos}.\gamma)\\ -(Ar^2-D)(A'r^2-D\mathrm{Cos}.\alpha)^2-(Br^2-D)(B'r^2-D\mathrm{Cos}.\beta^2)-(Cr^2-D)(C'r^2-D\mathrm{Cos}.\gamma)^2=0.\end{array}\right. \quad (7)$$

Or, il est visible qu'alors cette droite unique deviendra l'un des diamètres principaux, et que r sera la longueur de la moitié de ce diamètre ; ainsi, les longueurs des demi-diamètres principaux sont données par l'équation (7) qui, développée revient à

$$(ABC-AA'^2-BB'^2-CC'^2+2A'B'C')r^6$$
$$-D\left\{\begin{array}{l}(BC-A'^2)+2(B'C'-AA')\mathrm{Cos}.\alpha\\ +(CA-B'^2)+2(C'A'-BB')\mathrm{Cos}.\beta\\ +(AB-C'^2)+2(A'B'-CC')\mathrm{Cos}.\gamma\end{array}\right\}r^4$$

$$+D^2\left\{\begin{array}{l} A\text{Sin.}^2\alpha-2A'(\text{Cos}\,\alpha-\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma)\\ +B\text{Sin.}^2\beta-2B'(\text{Cos.}\beta-\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\alpha)\\ +C\text{Sin.}^2\gamma-2C'(\text{Cos.}\gamma-\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta)\end{array}\right\}r^2$$

$$-D^3(1-\text{Cos.}^2\alpha-\text{Cos.}^2\beta-\text{Cos}^2\lambda+2\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma)=0\ .$$

et leur direction est donnée (3) par le concours de deux quelconques des trois équations

$$(Ar^2-D)x+(B'r^2-D\text{Cos.}\beta)z+(C'r^2-D\text{Cos.}\gamma)y=0\ ,$$

$$(Br^2-D)y+(C'r^2-D\text{Cos.}\gamma)x+(A'r^2-D\text{Cos.}\alpha)z=0\ ,$$

$$(Cr^2-D)z+(A'r^2-D\text{Cos.}\delta)y+(B'r^2-D\text{Cos.}\beta)x=0\ .$$

En raisonnant comme nous l'avons fait ci-dessus on trouvera que l'équation

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy=0$$

est celle de la surface conique asymptotique de la surface proposée ; mais que, pour qu'elle puisse signifier quelque chose, il faut qu'on ait

$$ABC-AA'^2-BB'^2-CC'^2+2A'B'C'>0\ ;$$

ainsi, ce cas est le seul où la surface proposée ait une surface conique asymptotique.

III. Quelque simple et élégante que puisse paraître la précédente analise, nous pensons que, dans un traité élémentaire de géométrie analitique, on doit lui préférer encore soit la discussion donnée par M. Gergonne, à la page 61 de ce volume, soit celle que nous avons donnée nous-même, par la transformation des coordonnées, (tome II, page 33, et tome IV, page 93), et où nous avons fait connaître pour la première fois l'équation qui donne les longueurs des diamètres principaux des surfaces du second ordre, en fonction des coefficiens de l'équation primitive.