ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

KRAMP

Astronomie. Essai d'une nouvelle solution des principaux problèmes d'astronomie

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 5 (1814-1815), p. 1-28
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1814-1815__5__1_0>

ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

ASTRONOMIE.

Essai d'une nouvelle solution des principaux problèmes d'astronomie ;

Par M. KRAMP, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.

(*Troisième mémoire.*) (*)

68. DANS notre second mémoire nous avons entrepris la solution du problème de déterminer les élémens de l'orbite d'un corps, planétaire ou cométaire, moyennant un nombre suffisant d'obser-

(*) Voyez les pages 161 et 237 du IV.e volume de ce recueil.

vations. On sait que ces élémens sont au nombre de *six* : la longitude du nœud, l'inclinaison de l'orbite, la position de la ligne des apsides, le grand axe, l'excentricité et l'instant du passage par l'une des deux apsides. En continuant de désigner par λ l'angle que constitue l'excentricité de l'orbe terrestre, chacune de ces six inconnues pourra être représentée par une série telle que $A+B\lambda+C\lambda^2+\ldots$; elle sera très-convergente, étant disposée selon les puissances de λ que l'on sait être une fraction angulaire égale à un soixantième à peu près. Le premier terme A sera ce que devient cette série dans le cas de $\lambda=0$: c'est celui d'un mouvement uniforme et circulaire. Ce premier terme constitue proprement la difficulté du problème ; les coefficiens des autres se trouveront en suivant une marche analogue à celle de nos problèmes précédens, et qui sera le résultat de quelques différentiations successives.

69. Dans le problème VII qui a précédé immédiatement celui-ci, nous avons supposé la position du plan de l'orbite connue ; deux observations suffisaient alors pour trouver, dans tous les cas, les valeurs générales et rigoureuses des quatre inconnues qu'il restait à déterminer. Si cette position n'est pas connue d'avance, il y aura deux inconnues de plus, ce qui rend le problème beaucoup plus difficile. Il sera convenable alors de s'occuper d'une méthode générale qui puisse nous conduire à la détermination du plan de l'orbite, indépendamment des autres inconnues. Les essais que nous avons faits pour y parvenir seront l'objet du problème qui suit.

70. *PROBLÈME VIII. Trois observations d'une planète ou d'une comète étant données, déterminer les deux élémens desquels dépend la position du plan de son orbite : savoir la longitude du nœud, et l'angle que fait le plan de cet orbite avec celui de l'écliptique ?*

71. *Solution.* Les notations que nous avons employées dans les trois problèmes précédens seront conservées. Soient donc

δ...l'angle ESN ; longitude du nœud.

β...l'angle MNL ; inclinaison de l'orbite.

ε...l'angle ASN , que fait la ligne des nœuds avec celle des apsides.

b...le demi-grand axe de l'orbite de la planète ou de la comète.

μ...l'excentricité de l'orbite ; ce qui donne

$b\mathrm{Cos.}\mu$...pour le demi-petit axe ;

$b\mathrm{Sin.}\mu$... pour la distance du foyer au centre.

a...le demi-grand axe de l'orbite de la terre supposé circulaire.

p...le temps périodique de la terre, dont le mouvement est supposé uniforme.

q...le temps périodique de l'astre.

Le premier de ces termes est connu. Quant à l'autre , le théorème *Képlérien* $p^2 : q^2 = a^3 : b^3$ nous fait voir qu'il dépend du demi-grand axe b, et que les deux quantités b et q ne forment qu'une seule inconnue.

72. Aux *cinq* élémens désignés par les lettres β, δ, ε, μ, b il faut en ajouter un sixième : c'est celui qui doit fixer le moment du passage de la comète par l'aphélie de son orbite. Nous supposerons donc que , dans cet instant , la terre était au point B de la sienne. La sixième inconnue sera donc

μ...l'angle NSB que faisait la ligne des nœuds avec le rayon vecteur de la terre SB , à l'instant du passage de l'astre par l'aphélie de son orbite. (*)

73. Nous continuerons d'employer la lettre φ pour désigner l'*Anomalie vraie* , et la lettre $\varkappa$ pour exprimer l'*Anomalie excentrique.* La longitude de la terre , supposée au point T de son orbite , ou l'angle EST , sera désignée par θ ; ce qui rend l'angle $\mathrm{NST} = \theta - \delta$, et l'angle $\mathrm{BST} = \theta - \delta - \mu$. Et comme l'astre emploie le même temps pour parcourir l'arc AM de son orbite , et pour décrire ainsi l'ano-

---

(*) On suppose toujours qu'on a sous les yeux la figure du *Deuxième mémoire*.

malie vraie φ, à laquelle répondent l'excentrique $\varkappa$ et le rayon vecteur $SM=r$, on aura les équations qui suivent :

$$r=\frac{b\text{Cos.}^2\mu}{1-\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\varphi};$$

$$\text{Sin.}\varkappa=\frac{\text{Cos.}\mu\text{Sin.}\varphi}{1-\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\varphi},$$

$$\text{Cos.}\varkappa=\frac{\text{Cos}\,\varphi-\text{Sin.}\mu}{1-\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\varphi}.$$

$$\frac{p}{q}(\theta-\delta-\mu)=\varkappa+\text{Sin.}\mu\text{Sin.}\varkappa.$$

74. En éliminant de toutes ces formules l'anomalie vraie φ, et en conservant la seule anomalie excentrique $\varkappa$, à laquelle nous aurons soin de tout réduire, les égalités précédentes seront transformées dans celles qui suivent :

$$\text{Sin.}\varphi=\frac{\text{Cos.}\mu\text{Sin.}\varkappa}{1+\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\varkappa};$$

$$\text{Cos.}\varphi=\frac{\text{Cos.}\varkappa+\text{Sin.}\mu}{1+\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\varkappa};$$

$$r=b(1+\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\varkappa);$$

ce qui donne

$$r\text{Sin.}\varphi=b\text{Cos.}\mu\text{Sin.}\varkappa,$$

$$r\text{Cos.}\varphi=b(\text{Cos.}\varkappa+\text{Sin.}\mu).$$

75. En abaissant du point M qui est le lieu de l'astre dans son orbite, la perpendiculaire MN sur la ligne des nœuds, les deux coordonnées de ce point seront exprimées comme il suit :

$$MN=r\text{Cos.}(\varepsilon+\varphi)=bP,$$

$$SN=r\text{Sin.}(\varepsilon+\varphi)=bQ;$$

ce qui donne

$$P=(1+\text{Sin.}\mu\text{Cos.}x)\text{Cos.}(\varepsilon+\varphi)\ ;$$

$$Q=(1+\text{Sin.}\mu\text{Cos.}x)\text{Sin.}(\varepsilon+\varphi)\ ;$$

et, en développant moyennant les formules du n.° 74,

$$P=\text{Cos.}\varepsilon\text{Sin.}\mu+\text{Cos.}\varepsilon\text{Cos.}x-\text{Sin.}\varepsilon\text{Sin.}x\text{Cos.}\mu\ ,$$

$$Q=\text{Sin.}\varepsilon\text{Sin.}\mu+\text{Sin.}\varepsilon\text{Cos.}x+\text{Cos.}\varepsilon\text{Sin.}x\text{Cos.}\mu\ .$$

Nous continuerons d'employer les lettres P et Q, dont nous avons déjà reconnu la nécessité indispensable pour la solution générale du problème.

76. Les mêmes quantités P et Q peuvent encore être autrement exprimées, par la longitude et la latitude géocentriques au moment de l'observation. En continuant de désigner

Par A... la longitude géocentrique,

Par B... la latitude géocentrique ;

nous avons fait voir (55) que

$$\frac{bP}{a}=\frac{\text{Cos.}\beta\text{Cos.}(\theta-\delta)+\text{Sin.}\beta\text{Sin.}(\theta-A)\text{Cot.}B}{\text{Cos.}\beta+\text{Sin.}\beta\text{Sin.}(\delta-A)\text{Cot.}B}\ ;$$

$$\frac{bQ}{a}=\frac{\text{Sin.}(\theta-\delta)}{\text{Cos.}\beta+\text{Sin.}\beta\text{Sin.}(\delta-A)\text{Cot.}B}\ .$$

Égalant entre elles les deux expressions équivalentes de P, aussi bien que celles de Q, on aura donc deux équations renfermant d'un côté l'excentricité μ, l'anomalie excentrique x et l'angle ε que fait la ligne des nœuds avec celle des apsides, et de l'autre le rapport $\frac{a}{b}$ des axes et les deux angles β et δ, desquels dépend la position du plan de l'orbite.

77. Ainsi donc, pour résoudre complètement le problème proposé, nous avons besoin de trois observations. Elles nous fourniront immédiatement les trois longitudes géocentriques A, A', A'', les trois latitudes géocentriques B, B', B'', et les trois angles θ, θ', θ'',

dont les différences seront supposées proportionnelles aux temps. Outre les six inconnues déjà mentionnées (71, 72), nous aurons encore les trois anomalies excentriques $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ qu'il faudra déterminer également. Le nombre des inconnues étant ainsi porté à neuf, il faudra, pour résoudre le problème, *neuf* équations indépendantes entre elles. *Six* de ces équations seront fournies en égalant entre elles les deux expressions équivalentes de P, celles de P' celles de P'', et de même celles de Q, de Q', de Q''. On aura de plus les trois équations (73), savoir :

$$\frac{p}{q}(\theta-\delta-\eta)=\varkappa+\mathrm{Sin.}\mu\,\mathrm{Sin.}\varkappa\quad,$$

$$\frac{p}{q}(\theta'-\delta-\eta)=\varkappa'+\mathrm{Sin.}\mu\,\mathrm{Sin.}\varkappa'\quad,$$

$$\frac{p}{q}(\theta''-\delta-\eta)=\varkappa''+\mathrm{Sin.}\mu\,\mathrm{Sin.}\varkappa''\quad.$$

Ici on pourra, par une simple soustraction, éliminer l'inconnue η, on obtiendra ainsi les deux équations qui suivent :

$$\frac{p}{q}(\theta'-\theta)=\varkappa'-\varkappa+\mathrm{Sin.}\mu(\mathrm{Sin.}\varkappa'-\mathrm{Sin.}\varkappa)\quad;$$

$$\frac{r}{q}(\theta''-\theta')=\varkappa''-\varkappa'+\mathrm{Sin.}\mu(\mathrm{Sin.}\varkappa''-\mathrm{Sin.}\varkappa')\quad.$$

Nous remarquerons qu'en divisant l'une de ces deux dernières équations par l'autre, on aura l'équation symétrique qui suit, et qui est débarrassée du rapport $\frac{p}{q}$, savoir :

$$\begin{aligned}0=\ &\theta(\varkappa'-\varkappa'')+\theta\,\mathrm{Sin.}\mu(\mathrm{Sin.}\varkappa'-\mathrm{Sin.}\varkappa'')\\ &+\theta'(\varkappa''-\varkappa)+\theta'\,\mathrm{Sin.}\mu(\mathrm{Sin.}\varkappa''-\mathrm{Sin.}\varkappa)\\ &+\theta''(\varkappa-\varkappa')+\theta''\mathrm{Sin.}\mu(\mathrm{Sin.}\varkappa-\mathrm{Sin.}\varkappa')\ .\end{aligned}$$

78. En nous arrêtant aux deux équations obtenues en éliminant l'angle η, le problème sera réduit à *huit* équations, renfermant un

pareil nombre d'inconnues. Pour le réduire ultérieurement aux deux seules inconnues β et δ, lesquelles déterminent la position du plan de l'orbite, il faudrait donc éliminer successivement les six autres inconnues, savoir : les trois anomalies excentriques $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$; l'angle ε ; l'excentricité μ, et le rapport $\frac{p}{q}$ ou $\frac{a}{b}$; or, cette élimination est analitiquement impossible, tant que l'on conservera la forme transcendante des deux dernières équations, renfermant à la fois les anomalies excentriques $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, et les sinus de ces mêmes anomalies. Reste donc à exprimer les unes par les autres. De pareilles expressions, au défaut d'être rigoureuses, pourront au moins être approchées ; et ces approximations seront applicables à notre problème, pour peu que les observations qu'on emploîra ne soient pas très-éloignées l'une de l'autre.

79. *Première approximation. L'angle est égal à son sinus.* Cela donne $\psi = \text{Sin.}\psi$, en désignant l'angle par ψ. On a rigoureusement $\psi = \text{Sin.}\psi + \frac{1}{6}\text{Sin.}^3\psi + \frac{3}{40}\text{Sin.}^5\psi + \ldots$; l'erreur est donc égale à $\frac{1}{6}\text{Sin.}^3\psi + \frac{3}{40}\text{Sin.}^5\psi + \ldots$ En prenant ici pour ψ la différence de nos deux anomalies excentriques ou $\varkappa' - \varkappa$, l'équation

$$\frac{p}{q}(\theta' - \theta) = \varkappa' - \varkappa + \text{Sin.}\mu(\text{Sin.}\varkappa' - \text{Sin.}\varkappa)$$

prendra la forme

$$\frac{p}{q} = 2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\varkappa' - \varkappa)\{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(\varkappa' - \varkappa) + \text{Sin.}\mu\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(\varkappa' + \varkappa)\} ;$$

et sera devenue entièrement algébrique. La supposition $\psi = \text{Sin.}\psi$ ne peut être employée sans erreur sensible qu'autant que l'observation moyenne ne diffère des deux autres que de l'intervalle de quelques jours ; cependant, elle sert de base aux méthodes de *du Sejour* et d'*Olbers*, comme nous le verrons bientôt ; et, dans tous les cas, elle fournit une première approximation fort utile.

80. *SECONDE APPROXIMATION. L'angle* ψ *est égal à* $\frac{3\text{Sin.}\psi}{2+\text{Cos.}\psi}$. Il n'en diffère effectivement que de $\frac{\psi^5}{180}+\ldots$, ce qui fait

$$0{,}0002\,,\ \text{pour}\ \psi=30^\circ\,,$$
$$0{,}0018\,,\ \text{pour}\ \psi=45^\circ\,,$$
$$0{,}0080\,,\ \text{pour}\ \psi=60^\circ\,.$$

Pour un angle moindre que 30°, la différence est insensible. Ce théorème se trouve dans l'ouvrage de Snellius, nommé *Cyclométricus* (Lugd. Batav. 1621) ; mais des auteurs très-instruits, en le faisant remonter plus haut de près de deux siècles, en attribuent l'honneur au celèbre et savant cardinal Nicolaus Cusanus. Cette formule fournit, pour la solution du problème, une approximation plus exacte, mais elle conduit à des équations plus compliquées.

81. *TROISIÈME APPROXIMATION. L'angle* ψ *est égal à* $\frac{14+\text{Cos.}\psi}{9+6\text{Cos.}\psi}\text{Sin.}\psi$. Il n'en diffère effectivement que de $\frac{\psi^7}{2100}+\ldots$, ce qui fait

$$0{,}000005\,,\ldots\ \text{pour}\ \psi=30^\circ\,,$$
$$0{,}000100\,,\ldots\ \text{pour}\ \psi=45^\circ\,,$$
$$0{,}000800\,,\ldots\ \text{pour}\ \psi=60^\circ\,.$$

En faisant usage de cette troisième formule, on pourra employer des observations de quelques mois d'intervalle.

82. Dionis du Séjour, dans son *Quatorzième mémoire analitique* (*Acad. des sciences* , *année* 1779 , *pag.* 155), a substitué au secteur curviligne de l'astre, qui est proportionnel au temps, l'aire rectiligne comprise entre les rayons vecteurs et la corde correspondante. On a, pour le premier,

$$\frac{p}{q}(\theta'-\theta)=x'-x+\text{Sin.}\mu(\text{Sin.}x'-\text{Sin.}x)\ ;$$

et on aurait pour l'autre

$$\frac{p}{q}(\theta'-\theta)=\text{Sin.}(\varkappa'-\varkappa)+\text{Sin.}\mu(\text{Sin.}\varkappa'-\text{Sin.}\varkappa) \; .$$

Cet astronome suppose donc tacitement que la différence entre les deux anomalies excentriques est assez petite pour être sensiblement confondue avec son sinus. Le théorème auquel cette supposition l'a conduit, et qui lui a servi pour déterminer la position du plan de l'orbite, est identique avec celui qu'Olbers a publié, dans un traité allemand en 1797, et qui revient encore au principe employé par du Séjour. Cependant cet astronome ne paraît pas en avoir tiré tout le parti qu'il pouvait, parce que, dans son traite, il s'est renfermé dans le seul cas particulier, et peu probable, du mouvement parabolique. (*)

83. Comme nous avons (75)

(*) En poussant ces approximations plus loin, j'ai trouvé

$$\text{IV.} \quad \frac{\psi}{\text{Sin.}\psi}=\frac{80+25\text{Cos.}\psi}{54+48\text{Cos.}\psi+3\text{Cos.}2\psi} \, ,$$

$$\text{V.} \quad \frac{\psi}{\text{Sin.}\psi}=\frac{213+101\text{Cos.}\psi+\text{Cos.}2\psi}{150+150\text{Cos.}\psi+15\text{Cos.}2\psi} \, ,$$

$$\text{VI.} \quad \frac{\psi}{\text{Sin.}\psi}=\frac{1337+924\text{Cos.}\psi+49\text{Cos.}2\psi}{1000+1125\text{Cos.}\psi+180\text{Cos.}2\psi+5\text{Cos.}3\psi} \, ,$$

$$\text{VII.} \quad \frac{\psi}{\text{Sin.}\psi}=\frac{31512+26274\text{Cos.}\psi+2264\text{Cos.}2\psi+10\text{Cos.}3\psi}{24500+29400\text{Cos.}\psi+5880\text{Cos.}2\psi+280\text{Cos.}3\psi} \; .$$

Les erreurs de ces formules approximatives sont respectivement égales à la *neuvième*, la *onzième*, la *treizième* et la *quinzième* puissances de l'angle ψ. En calculant, d'après ces mêmes formules, l'arc de 60°, on le trouve

d'après IV ,... $\frac{185}{306}\sqrt{3}$: erreur 0,00004855 ,

d'après V ,... $\frac{263}{435}\sqrt{3}$: erreur 0,000003614665 ,

d'après VI ,... $\frac{3549}{5870}\sqrt{3}$: erreur 0,000000219670 ,

d'après VII,... $\frac{43507}{71960}\sqrt{3}$: erreur 0,000000018055 .

$$bP = r\,\text{Cos.}(\epsilon+\varphi)\;,$$
$$bQ = r\,\text{Sin.}(\epsilon+\varphi)\;,$$
$$bP' = r'\text{Cos.}(\epsilon+\varphi')\;,$$
$$bQ' = r'\text{Sin.}(\epsilon+\varphi')\;;$$

nous en déduirons

$$b^2(PQ'-P'Q) = rr'\text{Sin.}(\varphi'-\varphi)\;;$$

ce qui devient, en réduisant

$$PQ'-P'Q = \text{Cos.}\mu\text{Sin.}(\varkappa'-\varkappa)+\text{Cos.}\mu\text{Sin.}\mu(\text{Sin.}\varkappa'-\text{Sin.}\varkappa)\;.$$

De plus, nous avons (77)

$$\frac{p}{q}(\theta'-\theta) = (\varkappa'-\varkappa)+\text{Sin.}\mu(\text{Sin.}\varkappa'-\text{Sin.}\varkappa)\;,$$

ce qui devient, en remplaçant l'angle $\varkappa'-\varkappa$ par son sinus

$$\frac{p}{q}(\theta'-\theta) = \text{Sin.}(\varkappa'-\varkappa)+\text{Sin.}\mu(\text{Sin.}\varkappa'-\text{Sin.}\varkappa)\;.$$

Il en résulte

$$PQ'-P'Q = \frac{p}{q}(\theta'-\theta)\text{Cos.}\mu\;.$$

On aura de même

$$P'Q''-P''Q' = \frac{p}{q}(\theta''-\theta')\text{Cos.}\mu\;,$$
$$P\,Q''-P''Q = \frac{p}{q}(\theta''-\theta)\text{Cos.}\mu\;;$$

d'où l'on tire

La dernière peut être appliquée, sans erreur sensible, à tout angle moindre que 90°.

Ces approximations, qu'il serait facile de pousser plus loin, peuvent, dans certains cas, dispenser de l'usage des tables, et donner lieu à d'autres applications utiles. Elles donnent en particulier des approximations faciles du nombre ϖ, et c'est même dans cette vue que Snellius s'était occupé de la formule $\frac{\psi}{\text{Sin.}\psi}=\frac{3}{2+\text{Cos.}\psi}$.

$$PQ'-P'Q+P'Q''-P''Q'+P''Q-PQ''=0:$$

équation essentielle, et remarquable par sa simplicité.

84. Divisant les trois premières de ces équations l'une par l'autre, on aura

$$\frac{PQ'-P'Q}{PQ''-P''Q}=\frac{\theta'-\theta}{\theta''-\theta},$$

$$\frac{P'Q''-P''Q'}{PQ''-P''Q}=\frac{\theta''-\theta'}{\theta''-\theta}.$$

Ainsi donc, tant que les observations seront assez rapprochées pour que les angles $\varkappa'-\varkappa$, $\varkappa''-\varkappa'$ puissent être confondus avec leurs sinus, sans erreur sensible, les trois différences des produits $PQ'-P'Q$, $P'Q''-P''Q'$, $PQ''-P''Q$, seront proportionnelles aux intervalles des temps. Il en résulte deux équations entièrement algébriques, qui ne renferment d'autres inconnues que les deux seuls angles β, δ, desquels dépend la position du plan de l'orbite, et dont nous pourrons tirer, avec facilité, les expressions litérales de ces inconnues.

85. Procédons d'abord au développement de ces trois différences de produits. Faisons $\frac{b}{a}=m$; on aura

$$mP=\frac{\text{Cos.}\beta\,\text{Cos.}(\theta-\delta)+\text{Sin.}\beta\,\text{Sin.}(\theta-A)\,\text{Cot.}B}{\text{Cos.}\beta+\text{Sin.}\beta\,\text{Sin.}(\delta-A)\,\text{Cot.}B},$$

$$mP'=\frac{\text{Cos.}\beta\,\text{Cos.}(\theta'-\delta)+\text{Sin.}\beta\,\text{Sin.}(\theta'-A')\,\text{Cot.}B'}{\text{Cos.}\beta+\text{Sin.}\beta\,\text{Sin.}(\delta-A')\,\text{Cot.}B'},$$

$$mP''=\frac{\text{Cos.}\beta\,\text{Cos.}(\theta''-\delta)+\text{Sin.}\beta\,\text{Sin.}(\theta''-A'')\,\text{Cot.}B''}{\text{Cos.}\beta+\text{Sin}\,\beta\,\text{Sin.}(\delta-A'')\,\text{Cot.}B''};$$

$$mQ=\frac{\text{Sin.}(\theta-\delta)}{\text{Cos.}\beta+\text{Sin}\,\beta\,\text{Sin.}(\delta-A)\,\text{Cot.}B},$$

$$mQ'=\frac{\text{Sin.}(\theta'-\delta)}{\text{Cos.}\beta+\text{Sin.}\beta\,\text{Sin.}(\delta-A')\,\text{Cot.}B'},$$

$$mQ''=\frac{\text{Sin.}(\theta''-\delta)}{\text{Cos.}\beta+\text{Sin.}\beta\,\text{Sin.}(\delta-A'')\,\text{Cot.}B''}.$$

86. Pour présenter ces développemens sous la forme la plus simple, nous ferons d'abord

$$\theta' - \theta = t \quad ,$$
$$\theta'' - \theta' = t' \quad ,$$
$$\theta'' - \theta = h \quad ;$$

de manière que $h=t+t'$; ces trois lettres désigneront ainsi les intervalles des temps. De plus, nous désignerons les trois dénominateurs par D, D', D''; de manière que

$$D = \text{Cos.}\beta + \text{Sin.}\beta\text{Sin.}(\delta - A)\text{Cot.}B \quad ,$$
$$D' = \text{Cos.}\beta + \text{Sin.}\beta\text{Sin.}(\delta - A')\text{Cot.}B' \quad ,$$
$$D'' = \text{Cos.}\beta + \text{Sin.}\beta\text{Sin.}(\delta - A'')\text{Cot.}B'' \quad .$$

Enfin nous emploîrons les lettres M, N, O pour exprimer les trois différences de produit qui suivent :

$$M = \text{Sin.}(\theta - A)\text{Sin.}(\theta' - \delta)\text{Cot.}B - \text{Sin}(\theta' - A')\text{Sin.}(\theta - \delta)\text{Cot.}B' \quad ,$$
$$N = \text{Sin.}(\theta - A)\text{Sin.}(\theta'' - \delta)\text{Cot.}B - \text{Sin.}(\theta'' - A'')\text{Sin.}(\theta - \delta)\text{Cot.}B'' \quad ,$$
$$O = \text{Sin.}(\theta' - A')\text{Sin.}(\theta'' - \delta)\text{Cos.}B - \text{Sin.}(\theta'' - A'')\text{Sin.}(\theta' - \delta)\text{Cot.}B'' \quad .$$

87. En faisant usage de ces notations, on aura, de la manière suivante, les développemens qu'on demandait, savoir :

$$D\,D'(P\,Q' - P'\,Q) = \text{Cos.}\beta\text{Sin.}t + M\text{Sin.}\beta \quad ,$$
$$D\,D''(P\,Q'' - P''Q) = \text{Cos.}\beta\text{Sin.}h + N\text{Sin.}\beta \quad ,$$
$$D'D''(P'Q'' - P''Q') = \text{Cos.}\beta\text{Sin.}t' + O\text{Sin.}\beta \quad .$$

88. Reste donc simplement à substituer les expressions que nous venons d'obtenir dans les égalités (84), savoir

$$h(P\,Q' - P'\,Q) = t\,(PQ'' - P''Q) \quad ,$$
$$h(P'Q'' - P''Q') = t'(PQ'' - P''Q) \quad .$$

En mettant ici à la place de D, D', D'', leurs valeurs respectives, tirées de (86); ensuite à la place de $PQ' - P'Q$, $P'Q'' - P''Q'$,

$PQ''-P''Q$, leurs valeurs données (87), on aura les deux équations du second degré qui suivent :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{o} = & (h\mathrm{Sin}.t - t\mathrm{Sin}.h)\mathrm{Cos}.^2\beta \\
& + h\mathrm{Sin}.t\mathrm{Sin}.(\delta - A'')\mathrm{Cot}.B''\mathrm{Sin}.\beta\mathrm{Cos}.\beta \\
& - t\mathrm{Sin}.h\mathrm{Sin}.(\delta - A')\mathrm{Cot}.B'\mathrm{Sin}.\beta\mathrm{Cos}.\beta \\
& + \qquad (hM - tN)\mathrm{Sin}.\beta\mathrm{Cos}.\beta \\
& + hM\mathrm{Sin}.(\delta - A'')\mathrm{Cot}.B''\mathrm{Sin}.^2\beta \\
& - tN\mathrm{Sin}..(\delta - A')\mathrm{Cot}.B'\mathrm{Sin}.^2\beta\ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{o} = & (h\mathrm{Sin}.t' - t'\mathrm{Sin}.h)\mathrm{Cos}.^2\beta \\
& + h\mathrm{Sin}.t'\mathrm{Sin}.(\delta - A)\mathrm{Cot}.B\ \mathrm{Sin}.\beta\mathrm{Cos}.\beta \\
& - t'\mathrm{Sin}.h\mathrm{Sin}.(\delta - A')\mathrm{Cot}.B'\mathrm{Sin}.\beta\mathrm{Cos}.\beta \\
& + \qquad (hO - t'N)\mathrm{Sin}.\beta\mathrm{Cos}.\beta \\
& + hO\mathrm{Sin}.(\delta - A)\mathrm{Cot}.B\ \mathrm{Sin}.^2\beta \\
& - t'N\mathrm{Sin}.(\delta - A')\mathrm{Cot}.B'\mathrm{Sin}.^2\beta\ .
\end{aligned}
$$

89. Ici je remarquerai d'abord que, tant qu'il n'y aura qu'un intervalle de cinq à six jours entre la première et la seconde, de même qu'entre la seconde et la troisième observations, la valeur numérique des deux différences de produits $h\mathrm{Sin}.t - t\mathrm{Sin}.h$, $h\mathrm{Sin}.t' - t'\mathrm{Sin}.h$ sera au-dessous d'un *dix millième*, et qu'ainsi il sera permis de supprimer les premiers termes de nos équations, sans erreur sensible. Divisant alors par $\mathrm{Sin}.\beta$, elles seront rabaissées au premier degré, et donneront, pour $\mathrm{Tang}.\beta$ les deux expressions équivalentes qui suivent

$$-\mathrm{Tang}.\beta = \frac{h\mathrm{Sin}.t\mathrm{Sin}.(\delta - A'')\mathrm{Cot}.B'' - t\mathrm{Sin}.h\mathrm{Sin}.(\delta - A')\mathrm{Cot}.B' + hM - tN}{hM\mathrm{Sin}.(\delta - A'')\mathrm{Cot}.B'' - tN\mathrm{Sin}.(\delta - A')\mathrm{Cot}.B'},$$

$$-\mathrm{Tang}.\beta = \frac{h\mathrm{Sin}.t'\mathrm{Sin}.(\delta - A)\mathrm{Cot}.B - t'\mathrm{Sin}.h\mathrm{Sin}.(\delta - A')\mathrm{Cot}.B' + hO - t'N}{hO\mathrm{Sin}.(\delta - A)\mathrm{Cot}.B - t'N\mathrm{Sin}.(\delta - A'')\mathrm{Cot}.B'}.$$

90. Essayons de donner aux numérateurs et aux dénominateurs

de ces deux fractions la forme connue de binôme, savoir $F\text{Cos.}\vartheta - G\text{Sin.}\vartheta$. Dans cette vue, nous ferons, pour abreger,

$$a = \text{Cos.}A\ \text{Cot.}B\ ,\quad a' = \text{Sin.}A\ \text{Cot.}B\ ,$$
$$b = \text{Cos.}A'\ \text{Cot.}B'\ ,\quad b' = \text{Sin.}A'\ \text{Cot.}B'\ ,$$
$$c = \text{Cos.}A''\ \text{Cot.}B''\ ;\quad c' = \text{Sin.}A''\text{Cot.}B''\ .$$

$$m = \text{Sin.}(\theta - A)\text{Cot.}B\text{Sin.}\theta' - \text{Sin.}(\theta' - A')\text{Cot.}B'\ \text{Sin.}\theta\ ,$$
$$n = \text{Sin.}(\theta - A)\text{Cot.}B\text{Sin.}\theta'' - \text{Sin.}(\theta'' - A'')\text{Cot.}B''\text{Sin.}\theta'\ ,$$
$$o = \text{Sin.}(\theta' - A')\text{Cot.}B'\text{Sin.}\theta'' - \text{Sin.}(\theta'' - A'')\text{Cot.}B''\text{Sin.}\theta\ ;$$

$$m' = \text{Sin.}(\theta - A)\text{Cot.}B\ \text{Cos.}\theta' - \text{Sin.}(\theta' - A')\text{Cot.}B'\ \text{Cos.}\theta\ ,$$
$$n' = \text{Sin.}(\theta - A)\text{Cot.}B\ \text{Cos.}\theta'' - \text{Sin.}(\theta'' - A'')\text{Cot.}B''\text{Cos.}\theta\ ,$$
$$o' = \text{Sin.}(\theta' - A')\text{Cot.}B'\ \text{Cos.}\theta'' - \text{Sin.}(\theta'' - A'')\text{Cot.}B''\text{Cos.}\theta'\ .$$

91. Enfin, proposons la dernière notation que la nature du problème exige, et qui paraît nécessaire pour présenter l'inconnue sous la forme la plus simple : savoir,

$$D = hm - tn - c'h\text{Sin.}t + b't\text{Sin.}h\ ,$$
$$E = hm' - tn' - ch\text{Sin.}t + bt\text{Sin.}h\ ,$$
$$F = b'tn - c'hm\ ,$$
$$G = b'tn' + btn - c'hm' - chm\ ,$$
$$H = btn' - chm'\ ;$$
$$D' = ho - t'n - a'h\text{Sin.}t' + b't'\text{Sin.}h\ ,$$
$$E' = ho' - t'n' - ah\text{Sin.}t' + bt'\text{Sin.}h\ ,$$
$$F' = b't'n - a'ho\ ,$$
$$G' = bt'n + b't'n' - aho - a'ho'\ ,$$
$$H' = bt'n' - aho'\ .$$

92. Les deux expressions (89) deviendront alors

$$-\text{Tang.}\beta=\frac{D\text{Cos.}\delta-E\text{Sin.}\delta}{F\text{Cos.}^2\delta-G\text{Sin }\delta\text{Cos.}\delta+H\text{Sin.}^2\delta},$$

$$-\text{Tang.}\beta=\frac{D'\text{Cos.}\delta-E'\text{Sin.}\delta}{F'\text{Cos.}^2\delta-G'\text{Sin.}\delta\text{Cos.}\delta+H'\text{Sin.}^2\delta}.$$

93. Reste donc, pour trouver l'angle inconnu δ, à égaler ensemble ces deux fractions qui, par la nature du problème, doivent être équivalentes. On aura l'équation du troisième degré qui suit :

$$\begin{aligned}0=&(DF'-D'F)\\&-(DG'-D'G+EF'-E'F)\text{Tang.}\,\delta\\&+(DH'-D'H+EG'-E'G)\text{Tang.}^2\delta\\&+(EH'-E'H)\text{Tang.}^3\delta\,.\ (*)\end{aligned}$$

94. La tangente de l'angle inconnu δ, duquel dépend la détermination de tous les autres élémens est donc la racine d'une équation assez simple du troisième degré; et la nature du problème nous permet de présumer qu'elle est la seule réelle. Remarquons que nous ne nous sommes permis aucune supposition sur la nature de l'orbite, le grand système de la gravitation universelle nous apprenant uniquement que c'est une section conique. En appliquant, dans chaque cas particulier, les valeurs numériques données par les observations aux expressions littérales de nos formules, nous verrons si c'est une parabole, une ellipse ou bien une hyperbole. Dispensés de l'emploi ordinaire et très-pénible des fausses positions, nous devons remarquer que notre solution, de même que toutes celles de l'algèbre élémentaire, conduit directement au but qu'on s'était proposé. En supposant à la terre un mouvement circulaire et uniforme, pendant l'intervalle qui sépare les observations, nous avons fait disparaître de nos formules la ligne a, demi-grand axe de l'orbe

(*) En ne supposant point nulles les deux différences $h\text{Sin.}t-t\text{Sin.}h$ et $h\text{Sin.}t'-t'\text{Sin.}h$, l'équation finale qui donne Tang.δ est beaucoup plus compliquée ; mais elle ne s'élève néanmoins qu'au quatrième degré.

terrestre ; cette supposition ne peut donc influer sur les résultats que sous le simple rapport de l'inégalité de nos trois rayons vecteurs : inégalité insensible pendant l'intervalle de temps que nous avons supposé. Il nous reste donc à enseigner la petite correction qu'il faut employer, pour faire coïncider l'orbite calculée par notre méthode avec des observations plus éloignées ; et ce sera l'objet d'un autre mémoire.

95. Ayant trouvé l'angle δ, on trouvera l'inclinaison de l'orbite, ou l'angle β, moyennant l'une ou l'autre des deux formules (92), dont l'identité pourra servir d'ailleurs à vérifier le calcul. Connaissant ainsi les deux angles desquels dépend la position de l'orbite, rien n'empêchera de procéder à l'évaluation numérique des fractions P, P', P'', Q, Q', Q'', moyennant les formules (85) ; on verra si les trois différences de produits $PQ'-P'Q$, $P'Q''-P''Q'$, $PQ''-P''Q$ sont entre elles dans la raison des intervalles des temps, et si la troisième est égale à la somme des deux autres. Cette condition étant remplie, on sera sûr qu'aucune erreur n'a pu se glisser dans l'évaluation numérique des formules générales.

96. Toutefois, rappelons-nous que les formules (85) ne nous font pas trouver les quantités P, P', P'', Q, Q', Q'', mais les produits $\frac{bP}{a}$, $\frac{bP'}{a}$, $\frac{bP''}{a}$, $\frac{bQ}{a}$, $\frac{bQ'}{a}$, $\frac{bQ''}{a}$; la fraction $\frac{b}{a}$, qui désigne le rapport entre les demi-grands axes des deux orbites, étant elle-même une des inconnues du problème. Pour éviter toute erreur, nous désignerons par la lettre n, la fraction $\frac{a}{b}$, et nous ferons

$$\begin{array}{lll} P=nM, & Q=nN, & R=nO, \\ P'=nM', & Q'=nN', & R'=nO', \\ P''=nM'', & Q''=nN'', & R''=nO''. \end{array}$$

Comme nous avons déjà employé la lettre R pour désigner la racine

racine quarrée de P^2+Q^2, nous désignerons de même par O celle de M^2+N^2 ; il en sera de même, lorsque ces lettres seront affectées d'un ou de deux accens.

97. La position du plan étant déterminée, le nombre des inconnues sera réduit à *six* : savoir,

Les trois anomalies excentriques x, x', x',

L'excentricité . . . . μ,

L'angle que fait la ligne des apsides avec la ligne des nœuds ε,

Le rapport des deux axes n.

Pour les déterminer, nous aurons les *huit* équations qui suivent

$$(1)\quad nM = \text{Cos}\,\varepsilon\,\text{Sin}.\mu + \text{Cos}\,\varepsilon\,\text{Cos}.x - \text{Sin}.\varepsilon\,\text{Cos}.\mu\,\text{Sin}.x\;;$$

$$(2)\quad nM' = \text{Cos}\,\varepsilon\,\text{Sin}.\mu + \text{Cos}.\varepsilon\,\text{Cos}.x' - \text{Sin}.\varepsilon\,\text{Cos}.\mu\,\text{Sin}.x'\;,$$

$$(3)\quad nM'' = \text{Cos}.\varepsilon\,\text{Sin}.\mu + \text{Cos}.\varepsilon\,\text{Cos}.x'' - \text{Sin}.\varepsilon\,\text{Cos}.\mu\,\text{Sin}.x''\;;$$

$$(4)\quad nN = \text{Sin}.\varepsilon\,\text{Sin}.\mu + \text{Sin}.\varepsilon\,\text{Cos}.x + \text{Cos}.\varepsilon\,\text{Cos}.\mu\,\text{Sin}.x\;,$$

$$(5)\quad nN' = \text{Sin}.\varepsilon\,\text{Sin}.\mu + \text{Sin}.\varepsilon\,\text{Cos}.x' + \text{Cos}.\varepsilon\,\text{Cos}.\mu\,\text{Sin}.x'\;,$$

$$(6)\quad nN'' = \text{Sin}.\varepsilon\,\text{Sin}.\mu + \text{Sin}.\varepsilon\,\text{Cos}.x'' + \text{Cos}.\varepsilon\,\text{Cos}.\mu\,\text{Sin}.x''\;;$$

$$(7)\quad (\theta' - \theta)\sqrt{n^3} = x' - x + \text{Sin}.\mu(\text{Sin}.x' - \text{Sin}.x)\;,$$

$$(8)\quad (\theta'' - \theta')\sqrt{n^3} = x'' - x' + \text{Sin}.\mu(\text{Sin}.x'' - \text{Sin}.x')\;.$$

Six équations suffisent pour trouver les inconnues qui nous restent. On pourra employer les équations (1, 2, 4, 5, 7), en employant la première et la seconde observations ; ou bien les équations (2, 3, 5, 6, 8), si l'on veut faire usage de la seconde et de la troisième. Les deux solutions doivent donner le même résultat, et serviront à vérifier l'une par l'autre.

98. En choisissant les deux premières observations qui nous fournissent les six quantités connues M, M', N, N', θ, θ', nous aurons les cinq équations qui suivent :

$$nM = \mathrm{Cos.}\varepsilon\mathrm{Sin.}\mu + \mathrm{Cos.}\varepsilon\mathrm{Cos.}\varkappa - \mathrm{Sin.}\varepsilon\mathrm{Cos.}\mu\mathrm{Sin.}\varkappa$$
$$nM' = \mathrm{Cos.}\varepsilon\mathrm{Sin.}\mu + \mathrm{Cos.}\varepsilon\mathrm{Cos.}\varkappa' - \mathrm{Sin.}\varepsilon\mathrm{Cos.}\mu\mathrm{Sin.}\varkappa'$$
$$nN = \mathrm{Sin.}\varepsilon\mathrm{Sin.}\mu + \mathrm{Sin.}\varepsilon\mathrm{Cos.}\varkappa + \mathrm{Cos.}\varepsilon\mathrm{Cos.}\mu\mathrm{Sin.}\varkappa$$
$$nN' = \mathrm{Sin.}\varepsilon\mathrm{Sin.}\mu + \mathrm{Sin.}\varepsilon\mathrm{Cos.}\varkappa' + \mathrm{Cos.}\varepsilon\mathrm{Cos.}\mu\mathrm{Sin.}\varkappa'$$
$$(\theta' - \theta)\sqrt{n^3} = (\varkappa' - \varkappa) + \mathrm{Sin.}\mu(\mathrm{Sin.}\varkappa' - \mathrm{Sin.}\varkappa) .$$

99. L'élimination de l'angle ε nous fournit le moyen de réduire à *trois* les quatre premières de ces équations. Nous avons déjà observé, dans le précédent mémoire, que

$$R - R' \text{ ou } n(O - O') = 2\mathrm{Sin.}\mu\mathrm{Sin.}\varphi\mathrm{Sin.}\psi ,$$
$$PQ' - P'Q \text{ ou } n^2(MN' - M'N) = 2\mathrm{Cos.}\mu\mathrm{Sin.}\psi(\mathrm{Cos.}\psi + \mathrm{Sin.}\mu\mathrm{Cos.}\varphi) ,$$
$$RR' - PP' - QQ' \text{ ou } n^2(OO' - MM' - NN') = 2\mathrm{Cos.}^2\mu\mathrm{Sin.}^2\psi ;$$

de même que, dans le problème précédent, nous avons employé les lettres φ et ψ pour désigner la demi-somme et la demi-différence des deux anomalies excentriques, tellement que $\varkappa' = \varphi + \psi$, et $\varkappa = \varphi - \psi$. Moyennant cette notation, la dernière équation prendra la forme qui suit :

$$(\theta' - \theta)\sqrt{n^3} = 2\psi + 2\mathrm{Sin.}\mu\mathrm{Cos.}\varphi\mathrm{Sin.}\psi .$$

100. Pour présenter nos quatre équations sous la forme la plus simple dont elles peuvent être susceptibles, nous emploîrons les quatre lettres a, b, c, d, de la manière qui suit : soient

$$2a = O - O' ,$$
$$2b = MN' - M'N ,$$
$$2c^2 = OO' - MM' - NN' ,$$
$$2d = \theta - \theta' ;$$

elles deviendront alors

$$n\,a = \mathrm{Sin.}\mu\mathrm{Sin.}\varphi\mathrm{Sin.}\psi ,$$
$$n^2b = \mathrm{Cos.}\mu\mathrm{Sin.}\psi(\mathrm{Cos.}\psi + \mathrm{Sin.}\mu\mathrm{Cos.}\varphi) ,$$

$$n^3c = \text{Cos.}\mu\text{Sin.}\psi\ ,$$
$$d\sqrt{n^3} = \psi + \text{Sin.}\mu\text{Cos.}\varphi\text{Sin.}\psi\ .$$

101. Pour tirer de ces quatre équations les valeurs numériques de nos quatre inconnues, dans des cas quelconques, et sans aucun emploi de moyens approximatifs, il faut employer les fausses positions. Ainsi, supposant une valeur quelconque à l'angle φ, la première et la troisième équations nous fourniront $\frac{a}{c} = \text{Tang.}\mu\text{Sin.}\varphi$; ce qui fera connaître l'excentricité μ. Divisant de même le quarré de la troisième par la seconde, on aura

$$\frac{c^2}{b} = \frac{\text{Cos.}\mu\text{Sin.}\psi}{\text{Cos.}\varphi + \text{Sin.}\mu\text{Cos.}\psi}\ ,$$

ou

$$b\text{Cos.}\mu\text{Sin.}\psi - c^2\text{Cos.}\psi = c^2\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\varphi\ ,$$

d'où l'on tirera facilement l'angle ψ, moyennant un nouvel angle, tel que $\text{Tang.}\lambda = \frac{c^2}{b\text{Cos.}\mu}$, et qui fournira $\text{Sin.}(\psi - \lambda) = \text{Sin.}\lambda\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\varphi$. On aura ensuite

$$n = \frac{\text{Cos.}\mu\text{Sin.}\psi}{c}\ ;$$

et les quatre inconnues étant ainsi supposées connues, on en fera l'épreuve sur la quatrième équation ; on aura soin de noter l'erreur qui en sera résultée, et qui conduira à une seconde position plus approchante que l'autre.

102. On pourra cependant se passer de l'emploi des fausses positions, dans le cas où les observations sont assez rapprochées pour que, sans erreur sensible, on puisse faire $\text{Sin.}\psi = \psi$, et $\text{Cos.}\psi = 1$. Nos quatre équations deviendront alors

$$n\ a = \text{Sin}\ \mu\text{Sin}\ \varphi\text{Sin.}\psi\ ,$$
$$n^2b = \text{Cos.}\mu\text{Sin.}\psi(1 + \text{Sin.}\mu\text{Cos.}\varphi)\ ,$$

$$nc = \text{Cos.}\mu\,\text{Sin.}\psi\ ,$$

$$d\sqrt{n^3} = \text{Sin.}\psi(1+\mu\,\text{Cos.}\varphi)$$

Il sera très-facile, dans cette supposition, d'exprimer les angles μ, φ, ψ, en n, de la manière suivante :

$$\text{Sin.}^2\varphi = \frac{na^3b(2c-nb)}{a^3c+(nb-c)^2c^2}\ ,$$

$$\text{Sin.}^2\psi = \frac{nc^2(a^2+c^2)}{b(2c-nb)}\ ,$$

$$\text{Cos.}^2\mu = \frac{nb(2c-nb)}{a^2+c^2}\ ;$$

et substituant, on aura pour n, qui forme la principale inconnue du problème, l'expression très-simple qui suit :

$$n = \frac{2cd^2-(a^2+c^2)b}{bd^2}\ .$$

103. Cette expression nous fait connaître, sur-le-champ, les trois cas de l'ellipse, de la parabole et de l'hyperbole. Tant qu'on aura $2cd^2 > (a^2+c^2)b$, le grand axe de l'orbite sera *positif*, ce qui indique l'*ellipse*. Dans le cas opposé, de $2cd^2 < (a^2+c^2)b$, l'axe, devenu *négatif*, indiquera l'*hyperbole*. On reconnaîtra la *parabole* à ce qu'on aura alors $2cd^2 = (a^2+c^2)b$. Le cercle se reconnaîtra sur-le-champ à l'égalité des trois rayons vecteurs, qui sont proportionnels aux radicaux R, R', R'', ou bien O, O', O''. On aura, dans ce dernier cas, $\text{Sin.}\mu = 0$, et $\text{Cos.}\mu = 1$; ce qui donne

$$n^2b = \text{Sin.}\psi\,\text{Cos.}\psi\ ,$$

$$n\,c = \text{Sin.}\psi\ ,$$

$$d\sqrt{n^3} = \text{Sin.}\psi\ ;$$

ce qui fournira, entre les trois quantités b, c, d, l'équation de condition $d^4 = (b^2+c^2)c^4$.

104. Substituant, dans les expressions littérales de μ, φ, ψ, la valeur de n qu'on vient de trouver, et posant, pour abréger, $a^2+c^2=f^2$, on aura les formules qui suivent :

$$\text{Sin.}\mu=\frac{\sqrt{d^4-2bcd^2+b^2f^2}}{d^2}, \quad \text{Cos.}\mu=\frac{\sqrt{2bcd^2-b^2f^2}}{d^2},$$

$$\text{Sin.}\varphi=\frac{a\sqrt{2bcd^2-b^2f^2}}{c\sqrt{d^4-2bcd^2+b^2f^2}}; \quad \text{Cos.}\varphi=\frac{cd^2-bf^2}{c\sqrt{d^4-2bcd^2+b^2f^2}};$$

$$\text{Sin.}\psi=\frac{c\sqrt{2bcd^2-b^2f^2}}{b^2}.$$

105. Ayant ainsi trouvé les anomalies excentriques x, x' moyennant $x'=\varphi+\psi$ et $x=\varphi-\psi$, on passera aux anomalies vraies φ et φ', moyennant les équations connues

$$\text{Sin.}\varphi=\frac{\text{Cos.}x\,\text{Sin.}\mu}{1+\text{Sin.}\mu\,\text{Cos.}x}, \quad \text{Cos.}\varphi=\frac{\text{Cos.}x+\text{Sin.}\mu}{1+\text{Sin.}\mu\,\text{Cos.}x},$$

et par conséquent

$$\text{Tang.}\varphi=\frac{\text{Cos.}\mu\,\text{Sin.}x}{\text{Cos.}x+\text{Sin.}\mu},$$

ou bien

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\varphi=\text{Tang.}(45^\circ-\tfrac{1}{2}\mu)\text{Tang.}\tfrac{1}{2}x$$

106. Connaissant l'anomalie vraie φ, on aura, pour déterminer l'angle ε que fait la ligne des apsides avec celle des nœuds, les équations suivantes, parmi lesquelles on peut choisir,

$$\text{Cos.}(\varepsilon+\varphi)=\frac{P\text{Sin.}\varphi}{\text{Cos.}\mu\,\text{Sin.}x}=\frac{P\text{Cos.}\varphi}{\text{Cos.}x+\text{Sin.}\mu},$$

$$\text{Sin.}(\varepsilon+\varphi)=\frac{Q\text{Sin.}\varphi}{\text{Cos.}\mu\,\text{Sin.}x}=\frac{Q\text{Cos.}\varphi}{\text{Cos.}x+\text{Sin.}\mu}.$$

107. Reste donc à déterminer le seul angle η qui fixe l'instant du passage par le périhélie, et qui sera la seule inconnue de l'une quelconque des trois équations

$$\frac{p}{q}(\theta-\delta-\eta)=\varkappa+\text{Sin.}\mu\text{Sin.}\varkappa\ ,$$

ou

$$(\theta-\delta-\eta)\sqrt{n^3}=\varkappa+\text{Sin.}\mu\text{Sin.}\varkappa\ ,$$

$$(\theta'-\delta-\eta)\sqrt{n^3}=\varkappa'+\text{Sin.}\mu\text{Sin.}\varkappa'\ ,$$

$$(\theta''-\delta-\eta)\sqrt{n^3}=\varkappa''+\text{Sin.}\mu\text{Sin.}\varkappa''\ .$$

108. Dans cet exposé, on a pris pour exemple la première et la seconde observation, qui ont conduit aux anomalies excentriques $\varkappa$ et $\varkappa'$, et de là aux anomalies vraies φ et φ'. On pouvait employer de même la seconde et la troisième observations, par le moyen desquelles on aurait déterminé les anomalies excentriques $\varkappa'$ et $\varkappa''$, lesquelles auraient conduit ensuite aux anomalies vraies φ et φ'. Les valeurs de l'excentricité μ, du rapport des deux axes $\frac{a}{b}$, de l'angle ε, aussi bien que de l'angle η, qui détermine l'instant du passage par le périhélie, doivent être les mêmes, d'après les deux procedés, avec une petite difference, commune à toutes les méthodes proposées jusqu'ici, et qui vient de ce que nous avons supposé les rayons vecteurs de l'orbite terrestre sensiblement égaux, pendant l'intervalle qui sépare trois observations ; que de plus nous avons supposé les differences angulaires $\varkappa'-\varkappa$, $\varkappa''-\varkappa'$ sensiblement égales à leurs sinus respectifs ; et qu'enfin nous avons supposé $h\text{Sin.}t-t\text{Sin.}h$ et $h\text{Sin.}t'-t'\text{Sin.}h$ l'une et l'autre évanouissantes. Nous nous réservons d'enseigner, dans un mémoire suivant, les moyens les plus expéditifs que fournit l'analise, pour faire disparaître ce reste d'erreur; et, en même temps, nous essayerons de faire usage d'observations moins rapprochées entre elles. Nous terminerons le mémoire actuel, en appliquant notre méthode à quelques exemples ; et, dans cette vue, nous choisirons la seconde comète que Méchain à découverte en 1781, et qu'il a observée pendant les mois d'*octobre*, de *novembre* et de *décembre*. Il en a calculé l'orbite, supposée *Parabolique*, d'après la méthode de Laplace ; il a trouvé ainsi

Le lien du nœud ascendant, ou l'angle $\vartheta = 77.^\circ\ 22'\ 55''$,

L'inclinaison de l'orbite, ou l'angle $\beta = 27.^\circ\ 12'\ 4''$.

Nous ferons l'évaluation de ces mêmes angles, d'après notre méthode, laquelle nous apprendra, en même temps, si l'orbite est *Parabolique*, *Elliptique* ou bien *Hyperbolique*.

109. Des cinq observations de Méchain, faites en *novembre*, nous choisirons celles du 14, du 19 et du 25 novembre. Elles sont toutes rapportées à la même heure du jour, savoir à 8 heures $29'\ 44''$, temps moyen de Paris : ce qui fournit, pour les neuf élémens de notre analise, les valeurs angulaires qui suivent :

Longitudes de la terre, vue du soleil, ou angles θ, θ' θ'',

$$\left.\begin{array}{l} \theta\ = 52.^\circ\ 53'\ 50'', \\ \theta' = 57.^\circ\ 57'\ \ 4'', \\ \theta'' = 64.^\circ\ \ 1'\ 32''; \end{array}\right\}\ \text{donc}\ \left\{\begin{array}{l} t\ = \ 5.^\circ\ 3'\ 14'' = 18194'', \\ t' = \ 6.^\circ\ 4'\ 28'' = 21868'', \\ h = 11.^\circ\ 7'\ 42'' = 40062''. \end{array}\right.$$

Longitudes géocentriques de la comète, ou angles A, A', A'';

$$\left.\begin{array}{l} A\ = 307.^\circ\ 14'\ 45'', \\ A' = 306.^\circ\ 51'\ 26'', \\ A'' = 306.^\circ\ 41'\ 37''; \end{array}\right\}\ \text{donc}\ \left\{\begin{array}{l} \theta\ - A\ = -254.^\circ\ 20'\ 55'', \\ \theta' - A' = -248.^\circ\ 54'\ 22'', \\ \theta'' - A'' = -242.^\circ\ 40'\ \ 5''. \end{array}\right.$$

Latitudes géocentriques de la comète, ou angles B, B', B'';

$$B\ = 55.^\circ\ 17'\ \ 9'',$$
$$B' = 39.^\circ\ 14'\ 48'',$$
$$B'' = 29.^\circ\ 58'\ 43''.$$

110. On en tire la liste des logarithmes qui suivent.

Logarithmes des Sin. et Cos. des longitud. Géocent.

Log.Sin.A $= 9{,}9009382$, Log.Cos.A $= 9{,}7819249$,

Log.Sin.A' $= 9{,}9031620$, Log.Cos.A' $= 9{,}7780232$,

Log.Sin.A'' $= 9{,}9040889$, Log.Cos.A'' $= 9{,}7763639$.

Les sinus des longitudes sont *négatifs*.

Log. des Sin. et Cos. des Long. de la terre, vue du soleil;

$$\text{Log.Sin.}\theta = 9{,}9077605\,,\quad \text{Log.Cos.}\theta = 9{,}7804949\,,$$
$$\text{Log.Sin.}\theta' = 9{,}9281887\,,\quad \text{Log.Cos.}\theta' = 9{,}7248022\,,$$
$$\text{Log.Sin.}\theta'' = 9{,}9537546\,;\quad \text{Log.Cos.}\theta'' = 9{,}6414446\,.$$

Log. des trois différences Ang. t, t′, h *et de leur Sin.*

$$\text{Log.}t = 8{,}9455031\,,\quad \text{Log.Sin.}t = 8{,}9449397\,,$$
$$\text{Log.}t' = 9{,}0253840\,,\quad \text{Log.Sin.}t' = 9{,}0245700\,,$$
$$\text{Log.}h = 9{,}2883075\,;\quad \text{Log.Sin.}h = 9{,}2855735\,.$$

Il en résulte

$$h\,\text{Sin.}t - t\,\text{Sin.}h = 0{,}0000853\,,$$
$$h\,\text{Sin.}t' - t'\,\text{Sin.}h = 0{,}0000907\,;$$

On peut donc regarder ces deux différences comme évanouissantes.

Log. des Cot. des trois Lat. Géoc. B, B′, B″, *et des prod.* *Sin.*(θ—A)*Cot.*B,....;

$$\text{Log.Cot.}B = 9{,}8406070\,,\quad \text{Log.Sin.}(\theta - A)\text{Cot.}B = 9{,}8241976\,,$$
$$\text{Log.Cot.}B' = 0{,}0878113\,,\quad \text{Log.Sin.}(\theta' - A')\text{Cot.}B' = 0{,}0576892\,,$$
$$\text{Log.Cot.}B'' = 0{,}2389351\,,\quad \text{Log.Sin.}(\theta'' - A'')\text{Cot.}B'' = 0{,}1875247\,.$$

Log. des prod. désignés par a, b, c, a′, b′, c′; (90)

$$\text{Log.}a = 9{,}6225319\,,\quad \text{Log.}a' = 9{,}7415452\,,$$
$$\text{Log.}b = 9{,}8658345\,,\quad \text{Log.}b' = 9{,}9909733\,,$$
$$\text{Log.}c = 0{,}0152990\,;\quad \text{Log.}c' = 9{,}1430240\,.$$

Les produits a', b', c' sont *négatifs*.

Valeurs des quantités m, n, o, m′, n′, o′ *et de leurs logarithmes.*

$$m = -0{,}3454160\,,\quad m' = -0{,}3349471\,,$$
$$n = -0{,}6285206\,,\quad n' = -0{,}6368338\,,$$
$$o = -0{,}2786088\,;\quad o' = -0{,}3170086\,.$$

Log.

$Log. m = 9,5383425$, $Log\ m' = 9,5249762$,
$Log. n = 9,7983194$, $Log\ n' = 9,8040262$,
$Log. o = 9,4449948$; $Log.\ o' = 9,5010711$.

Valeurs des coefficiens D, E, F, G, H, D′, E′, F′, G′, H′; (91)

$D = -0,0259450$, $D' = +0,0038155$,
$E = -0,0141056$, $E' = +0,0123514$,
$F = +0,0449740$, $F' = +0,0354211$,
$G = +0,0747632$, $G' = +0,0059353$,
$H = +0,0261437$; $H' = -0,0237557$.

Valeurs numériques des produits nécessaires au calcul des coefficiens (93) ;

Ils ont été tous multipliés par la neuvième puissance de *dix*.

$DF' = -919000$, $EF' = -499636$,
$D'F = +171598$, $E'F = +553497$,
$DG' = -153991$; $EG' = -83721$,
$D'G = +285259$, $E'G = +923430$,
$DH' = +616342$, $EH' = +335088$,
$D'H = +99751$; $EH' = +322911$.

Différences de ces produits, servant à l'équation finale en ♈ ;

$DF' - D'F = -1090598$, $EF' - E'F = -1055128$,
$DG' + D'G = -439250$, $EG' - E'G = -1007151$,
$DH' - D'H = +516591$, $EH' - E'H = +12177$,

Équation finale faisant connaître ϑ ;

$$
\begin{aligned}
0 = & \ 1090598 \\
& -1494378 \text{Tang.}\,\vartheta \\
& +\ 490560 \text{Tang.}^2\vartheta \\
& +\ \ 12177 \text{Tang.}^3\vartheta \,.
\end{aligned}
$$

La seule racine réelle de cette équation fait connaître la tangente de l'angle ϑ ; il sera égal à $91.^\circ\ 19'\ 37''$: c'est la longitude du nœud.

De là on passera à l'inclinaison de l'orbite ou l'angle β ; les deux formules (92) s'accordent à donner

$$
\begin{aligned}
\beta &= 152.^\circ 11'\ 56'' \,. \\
180.^\circ - \beta &= 27.^\circ 48'\ \ 4'' \,,
\end{aligned}
$$

112. Mettons à côté les résultats de la *Méthode de* LAPLACE, pour laquelle on a employé les observations, beaucoup plus éloignées des 9 octobre, 17 novembre et 20 décembre, en admettant toutefois la supposition peu rigoureuse, et même très-peu probable du mouvement parabolique. Elle a donné

$$
\begin{aligned}
\vartheta &= 77.^\circ\ 22.\ 55'' \,, \\
180.^\circ - \beta &= 27.^\circ\ 12'\ \ 4'' \,. \ (*)
\end{aligned}
$$

(*) Voyez *Astronomie de Biot*, 2.e édit., tom. III, additions, pag. 202. Dans sa *Cométographie*, tom. II, pag. 108, Pingré, d'après Méchain, avait donné

$$
\begin{aligned}
\vartheta &= 77.^\circ\ 22'\ 52'' \,, \\
180.^\circ - \beta &= 27.^\circ\ 13'\ \ 8'' \,.
\end{aligned}
$$

J. D. G.

113. Ayant déterminé ainsi la position de l'orbite, il faudra passer à l'évaluation des quantités P, P', P'', Q, Q', Q'', toutes multipliées par le facteur inconnu $\frac{a}{b}$, ou divisées par n, en faisant usage des formules (76). En supprimant ce facteur qui est commun à tous, on aura

$$P = 0.5493415, \quad Q = 0.8942916,$$
$$P' = 0.3727041, \quad Q' = 0.9951803,$$
$$P'' = 0.1634109; \quad Q'' = 0.1060116;$$

d'où il résulte

$$PQ' - P'Q = 0.2133547,$$
$$P'Q'' - P''Q' = 0.2495918,$$
$$PQ'' - P''Q = 0.4614411.$$

Le rapport des deux premières différences s'écarte très-peu du rapport des temps ; de plus, la somme des deux premières est presque rigoureusement égale à la troisième dont elle ne diffère que de 0,0015. On a employé ici les valeurs angulaires trouvées (110), déduites des observations de 14, 19 et 22 novembre. En se servant de celles des 17, 19 et 22, on aurait eu

$$PQ' - P'Q = 0.0588550,$$
$$P'Q'' - P''Q' = 0.0883150,$$
$$PQ'' - P''Q' = 0.1470228.$$

La différence entre la troisième et la somme des deux autres n'est que de 0,00015.

114. Reste donc à déterminer le rapport n ou $\frac{a}{b}$ des axes, l'excentricité μ, l'angle ε de la ligne des apsides avec celle des nœuds,

et l'instant du passage au périhélie. Je me bornerai ici aux deux premiers. On trouve

$$n = -\frac{70871}{20750}\ .$$

Cette valeur négative de n, et conséquemment de b, indique une branche *hyperbolique*. Elle explique et justifie la différence entre nos résultats et ceux de Laplace, déduits de l'hypothèse parabolique. Le cosinus de μ deviendra donc imaginaire. Sin.μ sera une quantité réelle, mais plus grande que l'unité. On trouve en effet Log.Sin.μ=0,6609274 ; donc

$$\text{Sin.}\mu = 4\,.\,580652\ ;$$

$$1+\text{Sin.}\mu = 5\,.\,580652\ ,$$

$$1-\text{Sin.}\mu = 3\,.\,580652\ ;$$

on aura donc

$$\text{Distance périhélie ou } -(1+\text{Sin.}\mu)b = 1{,}048364\ ,$$

$$\text{Distance aphélie ou } -(1-\text{Sin.}\mu)b = 1{,}633934\ .$$

La première, obtenue par la méthode de Laplace,

est 0,9609951 ;

Différence avec la nôtre 0,087369 :

c'est un douzième du demi-grand axe de l'orbe terrestre.