BRET

Géométrie analitique. Mémoire sur les surfaces du second ordre

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 4 (1813-1814), p. 93-114
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1813-1814__4__93_0>

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Mémoire sur les surfaces du second ordre ;

Par M. Bret, professeur à la faculté des sciences de l'académie de Grenoble.

J'AI donné, dans les *Annales de Mathématiques*, (tome II ; page 144), l'équation qui détermine la grandeur des diamètres principaux, dans les surfaces du second ordre, rapportées à des axes rectangulaires. Je me propose ici de revenir de nouveau sur ce sujet, pour le traiter d'une manière plus générale et plus complète; mais auparavant je donnerai, sur la ligne droite et le plan, quelques notions dont j'ai besoin pour parvenir à mon but.

Dans tout ce qui va suivre, je supposerai constamment aux axes des coordonnées des directions quelconques, et j'adopterai les notations que voici.

$$\text{Ang.}(y\,,z)=\alpha\ ,\quad \text{Ang.}(z\,,x)=\beta\ ,\quad \text{Ang.}(x\,,y)=\gamma$$

§. I. *Équations du plan et de la ligne droite.*

Concevons que, de l'origine, on ait abaissé une perpendiculaire p sur le plan dont on veut obtenir l'équation ; et soient x, y, z les coordonnées courantes de ce plan; il est visible que la somme des projections des coordonnées x, y, z d'un point quelconque du plan dont il s'agit sur la perpendiculaire p, en détermine exactement la longueur. Si donc on dénote respectivement par α', β', γ' les angles que forme cette perpendiculaire avec les trois axes, l'équation du plan sera

$$\text{(A)} \qquad x\text{Cos.}\alpha'+y\text{Cos.}\beta'+z\text{Cos.}\gamma'=p.$$

On exprime communément une droite, dans l'espace, en écrivant les équations de ses projections sur deux quelconques des plans coordonnés; mais il est souvent plus commode et plus élégant de s'y prendre ainsi qu'il suit : soient x', y', z' les coordonnées fixes d'un point déterminé de la droite, et soit r la distance variable de ce point à un autre point quelconque de cette même droite, dont les coordonnées courantes sont supposées x, y, z; on écrira

$$\text{(B)} \qquad x=x'+ar\ , \quad y=y'+br\ , \quad z=z'+cr\ ;$$

a, b, c étant des fonctions angulaires, non susceptibles de devenir infinies, et qui demeurent constantes pour toute l'étendue de la droite; l'élimination de r, entre ces trois équations, conduirait aux équations ordinaires de la ligne droite.

§. II. *Du centre, du plan diamétral et du plan tangent, dans les surfaces du second ordre.*

Soit posée, pour l'équation générale des surfaces du second ordre,

$$\text{(C)} \quad Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy+2A''x+2B''y+2C''z+D=0.$$

Si, dans cette équation, on substitue, pour x, y, z, les valeurs données par les équations (B), en posant, pour abréger,

$$M=Aa^2+Bb^2+Cc^2+2A'bc+2B'ca+2C'ab\ ,$$

$$M'=\left\{\begin{array}{l} \quad(Ax'+B'z'+C'y'+A'')a \\ +(By'+C'x'+A'z'+B'')b \\ +(Cz'+A'y'+B'x'+C'')c, \end{array}\right.$$

$$M''=Ax'^2+By'^2+Cz'^2+2A'y'z'+2B'z'x'+2C'x'y'+2A''x'+2B''y'+2C''z'+D\ ,$$

la transformée sera

$$\text{(D)} \qquad Mr^2+2M'r+M''=0.$$

Dans cette équation, r est la distance entre le point fixe x', y', z' et celui où la droite (B) rencontre la surface (C); elle est du second degré, parce qu'en général la droite (B) rencontre la surface (C) en deux points.

Il peut être intéressant de discuter ce qui arrive, lorsque quelques-uns des coefficiens M, M', M'' deviennent nuls, ou lorsque l'équation (D) a ses deux racines égales. Je bornerai cette discussion aux seuls cas qu'il m'est necessaire de considérer.

1.° Si le coefficient M' est seul nul, les deux valeurs de r seront égales et de signes contraires, quels que soient d'ailleurs x', y', z', a, b, c; et alors on pourra distinguer deux cas:

Si d'abord on suppose que x', y', z' sont les coordonnées d'un point fixe, mais inconnu, tandis que a, b, c sont indéterminés, ce point fixe sera le centre de la surface (C); et on le déterminera en exprimant que l'équation $M'=0$ a lieu indépendamment de toute détermination des quantités a, b, c; ce qui conduira aux trois équations

$$\text{(E)}\qquad \begin{aligned} &Ax'+B'z'+C'y'+A''=0\ ,\\ &By'+C'x'+A'z'+B''=0\ ,\\ &Cz'+A'y'+B'x'+C''=0\ . \end{aligned}$$

Si, au contraire, a, b, c sont constans, et x', y', z' indéterminés, l'équation $M'=0$ exprimera que le plan dont les coordonnées courantes sont x', y', z' contient les milieux de toutes les cordes parallèles à une certaine droite fixe, et est conséquemment un plan diamétral; l'équation générale du plan diamétral est donc

$$\text{(F)}\qquad (Aa+B'c+C'b)x+(Bb+C'a+A'c)y+(Cc+A'b+B'a)z \\ +A''a+B''b+C''c=0.$$

2.° Si, outre l'équation $M'=0$, on a encore $M''=0$, cette dernière équation exprimera d'abord que le point x', y', z' est sur la surface (C); et, puisqu'alors les valeurs de r seront toutes deux nulles, la droite (B) sera une tangente à cette surface. Or, comme le système des équations $M'=0$, $M''=0$ laisse encore les quantités a, b, c indéterminées, il s'ensuit que, par un même point x', y', z' pris sur (C), on peut lui mener une infinité de tangentes. L'équation du lieu de toutes ces tangentes s'obtiendra en éliminant a, b, c de l'équation $M'=0$, au moyen des équations (B). Ce lieu, qui est le plan tangent par le point x', y', z', a donc pour équation

$$\left.\begin{array}{r}(Ax'+B'z'+C'y'+A'')(x-x')\\+(By'+C'x'+A'z'+B'')(y-y')\\+(Cz'+A'y'+B'x'+C'')(z-z')\end{array}\right\}=0.$$

En simplifiant cette équation, au moyen de l'équation de relation $M''=0$, elle prend la forme

$$\text{(G)}\qquad \left.\begin{array}{r}(Ax'+B'z'+C'y'+A'')x\\+(By'+C'x'+A'z'+B'')y\\+(Cz'+A'y'+B'x'+C'')z\\+A''x'+B''y'+C''z'+D\end{array}\right\}=0.$$

Il est aisé de voir que l'équation $M=0$ seule exprimerait que la droite (B) ne rencontre la surface (C) qu'en un point, lequel serait le point x', y', z', si l'on avait en outre $M''=0$. On voit aussi que, si l'on avait, à la fois, $M=0$, $M'=0$, l'équation (D) et conséquemment l'équation (C) seraient absurdes, à moins qu'on n'eût en même temps $M''=0$, auquel cas r demeurerait indéterminée; on pourrait donc, par chacun des points de la surface (C), mener au moins une droite qui y fût entièrement contenue; cette surface serait donc une surface gauche ou une surface développable. Enfin, si l'équation (D) avait ses deux racines égales ou, ce qui revient au même, si l'on avait l'équation $M'^2-MM''=0$, les équations (B) deviendraient celles d'une tangente par un point extérieur x', y', z', laquelle tangente demeurerait indéterminée; on parviendrait donc à l'équation du lieu de toutes les tangentes menées par ce point, c'est-à-dire, à l'équation de la surface conique circonscrite, ayant ce même point pour centre ou sommet, en chassant a, b, c de l'équation $M'^2-MM''=0$, au moyen des équations (B).

§. III. *Transformation générale des coordonnées.*

Pour établir les formules qui servent à passer d'un système rectangulaire ou oblique de coordonnées x, y, z à une autre système quelconque de coordonnées x', y', z', il suffit de remarquer que chacune des grandeurs x, y, z doit être une fonction entière du premier degré en x', y', z'; on est dès-lors fondé à écrire, l'origine étant la même pour les deux systèmes,

$$\text{(H)}\qquad \begin{aligned} x&=ax'+a'y'+a''z'\,;\\ y&=bx'+b'y'+b''z'\,,\\ z&=cx'+c'y'+c''z'\,,\end{aligned}$$

En faisant successivement, dans ces formules, les trois hypothéses suivantes

$$\left\{\begin{aligned} y'&=0\,,\\ z'&=0\,;\end{aligned}\right.\qquad \left\{\begin{aligned} z'&=0\,,\\ x'&=0\,;\end{aligned}\right.\qquad \left\{\begin{aligned} x'&=0\,,\\ y'&=0\,;\end{aligned}\right.$$

on trouvera, pour les équations respectives des axes des x', y', z'; rapportés au système primitif

$$\begin{aligned} &(k)\qquad && x=a\,r\,;\quad y=b\,r\,,\quad z=c\,r\,,\\ &(k')\qquad && x=a'r\,,\quad y=b'r\,,\quad z=c'r\,,\\ &(k'')\qquad && x=a''r\,,\quad y=b''r\,,\quad z=c''r\,.\end{aligned}$$

§. IV. *De la sphère et de son plan tangent.*

Si l'on suppose que x, y, z désignent les coordonnées rectangulaires des points d'une sphère qui a son centre à l'origine et son rayon égal à r, on aura évidemment

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

D'après les formules (H) l'équation de la même sphère, rapportée à des coordonnées obliques x', y', z', sera

$$\left.\begin{array}{l}(a^{2}+b^{2}+c^{2})x'^2+2(a'a''+b'b''+c'c'')y'z' \\ (a'^{2}+b'^{2}+c'^{2})y'^2+2(a''a+b''b+c''c)z'x' \\ (a''^2+b''^2+c''^2)z'^2+2(a\,a'+b\,b'+c\,c')x'y'\end{array}\right\}=r^2$$

si, dans cette dernière équation, on fait successivement les trois hypothèses $x'=0$, $y'=0$, $z'=0$, on obtiendra pour les équations des traces de la sphère sur les trois plans coordonnés

$$(a'^{2}+b'^{2}+c'^{2})y'^2+(a''^2+b''^2+c''^2)z'^2+2(a'a''+b'b''+c'c'')y'z'=r^2\ ,$$
$$(a''^2+b''^2+c''^2)z'^2+(a^{2}+b^{2}+c^{2})x'^2+2(a''a+b''b+c''c)z'x'=r^2\ ,$$
$$(a^{2}+b^{2}+c^{2})x'^2+(a'^{2}+b'^{2}+c'^{2})y'^2+2(a\,a'+b\,b'+c\,c')x'y'=r^2\ ;$$

mais on sait d'ailleurs que, α, β, γ désignant les angles des coordonnées x', y', z', les équations de ces traces doivent être

$$y'^2+z'^2+2y'z'\mathrm{Cos}.\alpha=r^2\ ,$$
$$z'^2+x'^2+2z'x'\mathrm{Cos}.\beta=r^2\ ,$$
$$x'^2+y'^2+2x'y'\mathrm{Cos}.\gamma=r^2\ :$$

comparant donc respectivement ces équations aux précédentes, il viendra

$$a^{2}+b^{2}+c^{2}=1\ ,\qquad a'a''+b'b''+c'c''=\mathrm{Cos}.\alpha\ ,$$
$$a'^{2}+b'^{2}+c'^{2}=1\ ,\qquad a''a+b''b+c''c=\mathrm{Cos}.\beta\ ,$$
$$a''^2+b''^2+c''^2=1\ ;\qquad a\,a'+b\,b'+c\,c'=\mathrm{Cos}.\gamma\ ;$$

et conséquemment l'équation de la sphère rapportée à des coordonnées obliques sera

$$(\mathrm{L})\qquad x^2+y^2+z^2+2yz\mathrm{Cos}.\alpha+2zx\mathrm{Cos}.\beta+2xy\mathrm{Cos}.\gamma=r^2.$$

Cette équation donne aussi la distance r de l'origine à un point dont les coordonnées sont x, y, z.

Si le centre, au lieu d'être situé à l'origine, se trouvait en un point ayant pour ses coordonnées x', y', z', l'equation de la sphère deviendrait

$$(\text{M})\qquad \left.\begin{array}{l}(x-x')^2+2(y-y')(z-z')\text{Cos.}\alpha\\+(y-y')^2+2(z-z')(x-x')\text{Cos.}\beta\\+(z-z')^2+2(x-x')(y-y')\text{Cos.}\gamma\end{array}\right\}=r^2.$$

Si, dans l'équation (G), on fait

$$\begin{array}{lll}A'=\text{Cos.}\alpha\ , & A''=0\ , & \\ B'=\text{Cos.}\beta\ , & B''=0\ , & D=-r^2\\ C'=\text{Cos.}\gamma\ ; & C''=0\ , & \end{array}$$

elle deviendra celle du plan tangent à la sphère qui a son centre à l'origine. Ainsi x', y', z' étant les coordonnées du point de contact, l'équation de ce plan tangent est

$$(\text{N})\ (x'+y'\text{Cos.}\gamma+z'\text{Cos.}\beta)x+(y'+z'\text{Cos.}\alpha+x'\text{Cos.}\gamma)y+(z'+x'\text{Cos.}\beta+y'\text{Cos.}\alpha)z=r^2.$$

§. V. *De la perpendiculaire à un plan.*

Soit

$$(\text{O})\qquad Ax+By+Cz=D\ ;$$

l'équation d'un plan, et soient

$$(\text{P})\qquad x=ar\ ,\quad y=br\ ,\quad z=cr\ ,$$

les équations de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur ce plan. Si l'on conçoit une sphère ayant l'origine pour centre et cette perpendiculaire pour rayon, le plan (O) devra lui être tangent; et, en désignant par x', y', z' les coordonnées du point de contact, les équations (N) et (O) devront coïncider, à un facteur près, pouvant affecter tous les termes de l'une d'elles. Exprimant donc que leur coïncidence a lieu, il viendra

$$D(x'+y'\text{Cos.}\gamma+z'\text{Cos.}\beta)=Ar^2\ ,$$
$$D(y'+z'\text{Cos.}\alpha+x'\text{Cos.}\gamma)=Br^2\ ,$$
$$D(z'+x'\text{Cos.}\beta+y'\text{Cos.}\alpha)=Cr^2\ ;$$

mais, comme le point de contact doit se trouver, à la fois, sur la droite (P) et sur la sphère, on doit avoir

$$x'=ar \quad , \qquad y'=br \quad , \qquad z'=cr \ ,$$

$$x'^2+y'^2+z'^2+2y'z'\text{Cos.}\alpha+2z'x'\text{Cos.}\beta+2x'y'\text{Cos.}\gamma=r^2.$$

En éliminant x', y', z' entre ces équations, il viendra

$$D(a+b\text{Cos.}\gamma+c\text{Cos.}\beta)=Ar \ ,$$

$$D(b+c\text{Cos.}\alpha+a\text{Cos.}\gamma)=Br \ ,$$

$$D(c+a\text{Cos.}\beta+b\text{Cos.}\alpha)=Cr \ ,$$

$$a^2+b^2+c^2+2bc\text{Cos.}\alpha+2ca\text{Cos.}\beta+2ab\text{Cos.}\gamma=1.$$

En éliminant r entre les trois premières équations, on obtiendra les deux suivantes

$$(\text{Q})\quad\begin{cases} A(c+b\text{Cos.}\alpha+a\text{Cos.}\beta)=C(a+b\text{Cos.}\gamma+c\text{Cos.}\beta) \ , \\ B(c+b\text{Cos.}\alpha+a\text{Cos.}\beta)=C(b+c\text{Cos.}\alpha+a\text{Cos.}\gamma) \ , \end{cases}$$

lesquelles expriment que le plan (O) et la droite (P) sont perpendiculaires l'un à l'autre.

Si, entre toutes quatre, on élimine a, b, c, la longueur r de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan (O) se trouvera donnée par l'équation

$$(\text{R})\quad\left\{\begin{array}{l} A^2\text{Sin.}^2\alpha-2BC(\text{Cos.}\alpha-\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma) \\ +B^2\text{Sin.}^2\beta-2CA(\text{Cos.}\beta-\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\alpha) \\ +C^2\text{Sin.}^2\gamma-2AB(\text{Cos.}\gamma-\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta) \end{array}\right\} r^2=(1-\text{Cos.}^2\alpha-\text{Cos.}^2\beta-\text{Cos.}^2\gamma+2\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma)D^2.$$

Si le point duquel on veut abaisser une perpendiculaire sur le plan (O) a pour ses coordonnées x', y', z', il suffira de transporter l'origine en ce point ; ce qui reviendra à changer x, y, z en $x+x'$, $y+y'$, $z+z'$, respectivement, ce qui donnera, pour la nouvelle équation du plan.

$$Ax+By+Cz+(Ax'+By'+Cz'-D)=0 \ ,$$

et partant, pour la longueur de la perpendiculaire, celle qu'on déduirait de l'équation (R), en y changeant simplement D en $Ax'+By'+Cz'-D$.

L'équation

L'équation

$$(S)\qquad a^2+b^2+c^2+2bc\text{Cos.}\alpha+2ca\text{Cos.}\beta+2ab\text{Cos.}\gamma=1\ ,$$

à laquelle nous sommes parvenus tout à l'heure, exprime la relation qui doit exister, dans les équations (B), entre les trois coefficiens a, b, c, et les angles α, β, γ des coordonnées.

Si l'on prend sur les axes des x, des y et des z, respectivement, trois longueurs d, e, f, il sera facile d'assigner le volume du parallélipipède qui aura ces trois longueurs pour arêtes. En effet, d'après la formule (R), la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'extrémité de f, sur le plan des xy, sera

$$\frac{f}{\text{Sin.}\gamma}\sqrt{1-\text{Cos.}^2\alpha-\text{Cos.}^2\beta-\text{Cos.}^2\gamma+2\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma}\ ;$$

mais, en considérant cette perpendiculaire comme la hauteur du parallélipipède, l'aire de sa base sera $de\text{Sin.}\gamma$; d'où il résulte que son volume sera

$$def\sqrt{1-\text{Cos.}^2\alpha-\text{Cos.}^2\beta-\text{Cos.}^2\gamma+2\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma}.$$

Les conditions analitiques qui expriment le parallélisme, soit de deux droites, soit de deux plans, soit d'une droite et d'un plan, étant indépendantes des angles que forment entre eux les axes des coordonnées, nous ne nous arrêterons pas à leur recherche.

§. VI. *De la perpendicularité de deux plans.*

Soient deux plans passant par l'origine, et ayant respectivement pour équations

$$(T)\qquad Ax+By+Cz=0\ ;$$
$$(T')\qquad A'x+B'y+C'z=0\ .$$

On exprimera qu'ils sont perpendiculaires l'un à l'autre si l'on exprime qu'une droite

$$x=ar\ ,\qquad y=br\ ,\qquad z=cr\ ,$$

perpendiculaire au premier, se trouve sur le second. Ainsi, par le précédent §, on aura les équations

$$A(c+a\text{Cos.}\beta+b\text{Cos.}\alpha)=C(a+b\text{Cos.}\gamma+c\text{Cos.}\beta)\ ,$$
$$B(c+a\text{Cos.}\beta+b\text{Cos.}\alpha)=C(b+c\text{Cos.}\alpha+a\text{Cos.}\gamma)\ ,$$
$$A'a+B'b+C'c=0.$$

Si l'on élimine a et b entre elles, c disparaîtra de lui-même, et l'on obtiendra, pour condition de perpendicularité des deux plans (T), (T'), l'équation suivante :

$$\text{(U)}\qquad \left.\begin{array}{l} AA'\text{Sin.}^2\alpha-(BC'+CB')(\text{Cos.}\alpha-\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma) \\ +BB'\text{Sin.}^2\beta-(CA'+AC')(\text{Cos.}\beta-\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\alpha) \\ +CC'\text{Sin.}^2\gamma-(AB'+BA')(\text{Cos.}\gamma-\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta) \end{array}\right\}=0.$$

§. VII. *De la perpendicularité de deux droites, et de l'angle qu'elles forment entre elles.*

Soient deux droites passant par l'origine et ayant respectivement pour équations

$$\text{(V)}\qquad x=ar\ ,\qquad y=br\ ,\qquad z=cr\ ,$$
$$\text{(V')}\qquad x=a'r\ ,\qquad y=b'r\ ,\qquad z=c'r\ .$$

On exprimera qu'elles sont perpendiculaires l'une à l'autre, si l'on exprime qu'un plan

$$Ax+By+Cz=0\ ,$$

perpendiculaire à la première, contient la seconde ; ainsi, par le §. V, on aura les équations

$$A(c+a\text{Cos.}\beta+b\text{Cos.}\alpha)=C(a+b\text{Cos.}\gamma+c\text{Cos.}\beta)\ ,$$
$$B(c+a\text{Cos.}\beta+b\text{Cos.}\alpha)=C(b+c\text{Cos.}\alpha+a\text{Cos.}\gamma)\ ,$$
$$Aa'+Bb'+Cc'=0.$$

Si l'on élimine A et B entre elles, C disparaîtra de lui-même, et l'on obtiendra, pour condition de perpendicularité des deux droites (V), (V'), l'équation suivante

$$\text{(X)}\qquad \left.\begin{array}{l} aa'+(bc'+cb')\text{Cos.}\alpha \\ +bb'+(ca'+ac')\text{Cos.}\beta \\ +cc'+(ab'+ba')\text{Cos.}\gamma \end{array}\right\}=0.$$

Généralement, on peut trouver le cosinus de l'angle formé par les deux droites

$$x=ar\ ,\quad y=br\ ,\quad z=cr\ ;$$
$$x'=a'r'\ ,\quad y'=b'r'\ ,\quad z'=c'r'\ .$$

car, en joignant les extrémités des distances r, r' par une droite, et appelant θ l'angle cherché, la longueur de cette droite aura d'un côté pour expression

$$r^2+r'^2-2rr'\text{Cos.}\theta\ ,$$

et de l'autre, par le §. IV,

$$(x-x')^2+(y-y')^2+2(z-z')^2+2(y-y')(z-z')\text{Cos.}\alpha+2(z-z')(x-x')\text{Cos.}\beta+2(x-x')(y-y')\text{Cos.}\gamma$$

ou, en substituant,

$$\begin{aligned}&(a^2+b^2+c^2+2bc\text{Cos.}\alpha+2ca\text{Cos.}\beta+2ab\text{Cos.}\gamma)r^2\\&+(a'^2+b'^2+c'^2+2b'c'\text{Cos.}\alpha+2c'a'\text{Cos.}\beta+2a'b'\text{Cos.}\gamma)r'^2\\&-2\{aa'+bb'+cc'+(bc'+cb')\text{Cos.}\alpha+(ca'+ac')\text{Cos.}\beta+(ab'+ba')\text{Cos.}\gamma\}rr'\ :\end{aligned}$$

égalant donc cette expression à la première, et exprimant que leur égalité laisse r, r' indéterminés et indépendans, on obtiendra d'abord les deux relations déjà connues

$$a^2+b^2+c^2+2bc\,\text{Cos.}\alpha+2ca\,\text{Cos.}\beta+2ab\,\text{Cos.}\gamma=1\ ,$$
$$a'^2+b'^2+c'^2+2b'c'\text{Cos.}\alpha+2c'a'\text{Cos.}\beta+2a'b'\text{Cos.}\gamma=1\ ,$$

et ensuite la formule

$$(\mathrm{Y})\qquad \text{Cos.}\theta=\left\{\begin{aligned}&aa'+(bc'+cb')\text{Cos.}\alpha\\&+bb'+(ca'+ac')\text{Cos.}\beta\\&+cc'+(ab'+ba')\text{Cos.}\gamma.\end{aligned}\right.$$

Au moyen de cette formule il sera facile de déterminer, soit le sinus de l'angle de deux droites, soit les sinus et cosinus de l'angle de deux plans, ou de l'angle d'une droite et d'un plan.

§. VIII. *Recherche des diamètres principaux dans les surfaces du seconde ordre, rapportées à des axes quelconques.*

Reprenons l'équation générale des surfaces du second ordre

(1) $Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy+2A''x+2B''y+2C''z+D=0.$

Nous avons déjà dit que, pour passer du système des coordonnées x, y, z au système des coordonnées x', y', z', de même origine que celui-là, il fallait poser

$$(2)\qquad \begin{aligned} x&=ax'+a'y'+a''z', \\ y&=bx'+b'y'+b''z', \\ z&=cx'+c'y'+c''z', \end{aligned}$$

et qu'alors les équations des axes des x', y', z', rapportés au système primitif, étaient respectivement

$$(3)\qquad x=a\,r,\quad y=b\,r,\quad z=c\,r;$$

$$(4)\qquad x=a'r,\quad y=b'r,\quad z=c'r,$$

$$(5)\qquad x=a''r,\quad y=b''r,\quad z=c''r.$$

Si l'on substitue les valeurs (2) dans l'équation (1), on obtiendra une transformée, du même degré en x', y', z', que l'on pourra ensuite simplifier, en disposant des quantités arbitraires qui déterminent les directions des nouveaux axes.

Faisant donc disparaître tous les rectangles des coordonnées, nous aurons les équations

$$(6)\qquad (Aa''+B'c''+C'b'')a'+(Bb''+C'a''+A'c'')b'+(Cc''+A'b''+B'a'')c'=0,$$

$$(7)\qquad (Aa''+B'c''+C'b'')a+(Bb''+C'a''+A'c'')b+(Cc''+A'b''+B'a'')c=0,$$

$$(8)\qquad (Aa'+B'c'+C'b')a+(Bb'+C'a'+A'c')b+(Cc'+A'b'+B'a')c=0.$$

Cela posé, en éliminant a, b, c entre les équations (3) et l'équation (7), on tombera sur l'équation d'un plan

$$(9)\qquad (Aa''+B'c''+C'b'')x+(Bb''+C'a''+A'c'')y+(Cc''+A'b''+B'a'')z=0,$$

tel que, l'axe des x' y étant situé, d'une manière quelconque, l'équation de la surface du second ordre se trouvera délivrée du terme en $x'z'$. Pareillement si, entre les équations (4) et (6), on élimine a', b', c', on obtiendra l'équation d'un plan tel que, l'axe des y y étant situé, d'une manière quelconque, l'équation de cette surface se trouvera délivrée du terme en $y'z'$. Mais, par la forme des équations (3), (4), (6), (7), ces deux plans doivent se confondre; donc, en écrivant seulement les équations (6), (7), on aura, pour un axe quelconque des z', un plan unique des $x'y'$ tel que l'équation transformée, en x', y', z', se trouvera privée, à la fois, des rectangles $x'z'$, $y'z'$; et, comme il est toujours facile, l'axe des z' étant constant, ainsi que le plan des $x'y'$, de donner aux axes des x' et des y' des directions telles que le troisième rectangle $x'y'$ disparaisse aussi; il s'ensuit qu'il y a une infinité de systèmes d'axes transformés pour lesquels l'équation générale des surfaces du second ordre prend la forme plus simple

$$Px'^2+P'y'^2+P''z'^2+2Qx'+2Q'y'+2Q''z'+D=0. \tag{10}$$

Parmi tous les systèmes d'axes pour lesquels l'équation prend cette forme, il n'en est généralement qu'un seul qui soit rectangulaire. En effet, assujétissons la droite (5) à être perpendiculaire au plan (9); en employant les équations (Q) du §. V, nous trouverons

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}&(Aa''+B'c''+C'b'')(c''+b''\mathrm{Cos.}\alpha+a''\mathrm{Cos.}\beta)=(Cc''+A'b''+B'a'')(a''+b''\mathrm{Cos.}\gamma+c''\mathrm{Cos.}\beta);\\&(Bb''+C'a''+A'c'')(c''+b''\mathrm{Cos.}\alpha+a''\mathrm{Cos.}\beta)=(Cc''+A'b''+B'a'')(b''+c''\mathrm{Cos.}\alpha+a''\mathrm{Cos.}\gamma);\end{aligned}\right.$$

Si l'on procède à l'élimination de $\frac{a''}{c''}$ entre ces deux équations, on parviendra, en définitif, à deux équations de la forme

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}&M\left(\frac{a''}{c''}\right)+M'=0,\\&N\left(\frac{b''}{c''}\right)^3+N'\left(\frac{b''}{c''}\right)^2+N''\left(\frac{b''}{c''}\right)+N'''=0;\end{aligned}\right.$$

dans lesquelles M, M' renfermeront $\frac{b''}{c''}$, mais où N, N', N'', N''' ne seront fonctions que de α, β, γ et des coefficiens de l'équation (1).

Or, comme toute équation du troisième degré a toujours au moins une racine réelle, il s'ensuit qu'il existe, pour toutes les surfaces du second ordre, un axe des z', perpendiculaire à un plan des $x'y'$, de manière que l'équation générale de ces surfaces ne renferme plus les rectangles $x'z'$, $y'z'$; et, comme on peut toujours chasser le rectangle $x'y'$ qui reste encore dans l'équation, on en conclut que, non seulement on trouve un axe des z', perpendiculaire au plan des $x'y'$, qui prive la nouvelle équation des rectangles $x'z'$, $y'z'$, mais encore qu'il existe un axe des x', perpendiculaire au plan des $y'z'$, et un axe des y', perpendiculaire au plan des $x'z'$, jouissant des mêmes propriétés. Or, si l'on écrit que l'axe (4) des y' est perpendiculaire au plan

$$(Aa'+B'c'+C'b')x+(Bb'+C'a'+A'c')y+(Cc'+A'b'+B'a')z=0$$

qui contient les axes des x' et z', on parviendra aux mêmes équations (11), en y changeant a'', b'', c'' en a', b', c'; d'où il suit que les équations (11) déterminent $\frac{b'}{c'}$ et $\frac{a'}{c'}$, en même temps que $\frac{b''}{c''}$, $\frac{a''}{c''}$; on prouvera de même que le troisième système de racines, tiré des équations (12), est $\frac{b}{c}$ et $\frac{a}{c}$.

Il résulte de ce qui précède que, dans le cas où les axes qui doivent priver l'équation de la surface des trois rectangles $x'y'$, $y'z'$, $z'x'$ doivent être rectangulaires, leur direction est absolument déterminée et unique, et qu'alors les coefficiens de l'équation (10) sont réels et déterminés.

Il reste présentement à faire connaître, pour les surfaces du second ordre qui ont un centre, l'équation qui détermine les grandeurs des diamètres principaux. La chose se réduit à calculer les coefficiens P, P', P'' de l'équation (10). A cet effet, écrivons les résultats des substitutions des valeurs (2) dans l'équation (1), en ayant égard aux équations (6), (7), (8); nous trouverons

$$\left.\begin{array}{l}(Aa^2+Bb^2+Cc^2+2A'bc+2B'ca+2C'ab)x'^2\\+(Aa'^2+Bb'^2+Cc'^2+2A'b'c'+2B'c'a'+2C'a'b')y'^2\\+(Aa''^2+Bb''^2+Cc''^2+2A'b''c''+2B'c''a''+2C'a''b'')z'^2\\+(2Qx'+2Q'y'+2Q''z'+D)\end{array}\right\}=0.$$

et partant

$$(13)\qquad P''=Aa''^2+Bb''^2+Cc''^2+2A'b''c''+2B'c''a''+2C'a''b''\ ;$$

si donc on élimine a'', b'', c'' des équations (11), (13) et de l'équation de relation formée d'après l'équation (S) du §. V, on trouvera l'équation qui doit déterminer P''; mais, comme ces équations, ont lieu, de la même manière, en changeant a'', b'', c'', P'' en a', b', c', P' ou en a, b, c, P, il s'ensuit que P, P', P'' sont donnés par une même équation du troisième degré.

Il s'agit donc actuellement d'effectuer le calcul qui vient d'être indiqué; mais auparavant débarrassons a, b, c des accens qui les affectent dans les équations (11) et (13), et joignons-y l'équation (S), ce qui donnera

$$(14)\quad (Aa+B'c+C'b)(c+a\text{Cos.}\beta+b\text{Cos.}\alpha)=(Cc+A'b+B'a)(a+b\text{Cos.}\gamma+c\text{Cos.}\beta)\ ,$$

$$(15)\quad (Bb+C'a+A'c)(c+a\text{Cos.}\beta+b\text{Cos.}\alpha)=(Cc+A'b+B'a)(b+c\text{Cos.}\alpha+a\text{Cos.}\gamma)\ ,$$

$$(16)\quad Aa^2+Bb^2+Cc^2+2A'bc+2B'ca+2C'ab=P\ ,$$

$$(17)\quad a^2+b^2+c^2+2bc\text{Cos.}\alpha+2ca\text{Cos.}\beta+2ab\text{Cos.}\gamma=1.$$

Posons ensuite

$$(18)\qquad \begin{array}{l}Aa+B'c+C'b=L\ ,\\Bb+C'a+A'c=L'\ ,\\Cc+A'b+B'a=L''\ ;\end{array}$$

les trois premières deviendront alors

$$
(19)\qquad
\begin{aligned}
&L(c+a\text{Cos.}\beta+b\text{Cos.}\alpha)=L''(a+b\text{Cos.}\gamma+c\text{Cos.}\beta)\ ,\\
&L'(c+a\text{Cos.}\beta+b\text{Cos.}\alpha)=L''(b+c\text{Cos.}\alpha+a\text{Cos.}\gamma)\ ,\\
&La+L'b+L''c=P.
\end{aligned}
$$

Si l'on chasse successivement de ces équations deux des trois quantités L, L', L'', en ayant égard à l'équation (17), il viendra

$$
(20)\qquad
\begin{aligned}
L\ &=P(a+b\text{Cos.}\gamma+c\text{Cos.}\beta)\ ,\\
L'&=P(b+c\text{Cos.}\alpha+a\text{Cos.}\gamma)\ ,\\
L''&=P(c+a\text{Cos.}\beta+b\text{Cos.}\alpha)\ ,
\end{aligned}
$$

et, en comparant aux équations (18).

$$
(21)\qquad
\begin{aligned}
&(P-A)a+(P\text{Cos.}\gamma-C')b+(P\text{Cos.}\beta-B')c=0\ ;\\
&(P-B)b+(P\text{Cos.}\alpha-A')c+(P\text{Cos.}\gamma-C')a=0\ ,\\
&(P-C)c+(P\text{Cos.}\beta-B')a+(P\text{Cos.}\alpha-A')b=0\ .
\end{aligned}
$$

Éliminant a et b, entre ces équations, c disparaîtra de lui-même; et il viendra

$$
\begin{aligned}
&(P-A)(P-B)(P-C)+2(P\text{Cos.}\alpha-A')(P\text{Cos.}\beta-B')(P\text{Cos.}\gamma-C')\\
&+(P-A)(P\text{Cos.}\alpha-A')^2+(P-B)(P\text{Cos.}\beta-B')^2+(P-C)(P\text{Cos.}\gamma-C')^2=0\ ,
\end{aligned}
$$

ou, en développant et ordonnant

$$
(22)\qquad
\begin{aligned}
&(1-\text{Cos.}^2\alpha-\text{Cos.}^2\beta-\text{Cos.}^2\gamma+2\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma)P^3\\
&+\left\{\begin{array}{l}
A\text{Sin.}^2\alpha-2A'(\text{Cos.}\alpha-\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma)\\
+B\text{Sin.}^2\beta-2B'(\text{Cos.}\beta-\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\alpha)\\
+C\text{Sin.}^2\gamma-2C'(\text{Cos.}\gamma-\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta)
\end{array}\right\}P^2\\
&+\left\{\begin{array}{l}
BC-A'^2+2(B'C'-AA')\text{Cos.}\alpha\\
+CA-B'^2+2(C'A'-BB')\text{Cos.}\beta\\
+AB-C'^2+2(A'B'-CC')\text{Cos.}\gamma
\end{array}\right\}P\\
&-(ABC-AA'^2-BB'^2-CC'^2+2A'B'C')=0\ ;
\end{aligned}
$$

et les quantités $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ seront déterminées par les équations

{(P—A)

$$\left\{(P-A)(P-B)-(P\text{Cos.}\gamma-C')^2\right\}\frac{a}{c}$$
$$+\left\{(P-B)(P\text{Cos.}\beta-B')-(P\text{Cos.}\alpha-A')(P\text{Cos.}\gamma-C')\right\}=0\ ,$$

(23)

$$\left\{(P-A)(P-B)-(P\text{Cos.}\gamma-C')^2\right\}\frac{b}{c}$$
$$+\left\{(P-A)(P\text{Cos.}\alpha-A')-(P\text{Cos.}\beta-B')(P\text{Cos.}\gamma-C')\right\}=0.$$

Si l'on joint à ces deux équations l'équation (17), on aura tout ce qu'il faut pour determiner a, b, c; et partant, on pourra calculer, dans l'équation (10), les coefficiens Q, Q', Q''.

Il est maintenant facile de conclure des équations précédentes, quelles modifications il faut y apporter, pour qu'elles fassent connaître les grandeurs des diamètres principaux, dans les surfaces du second ordre qui ont un centre. On sait en effet que, pour ces surfaces, si l'on transporte l'origine des coordonnées au centre, les termes affectés des premières puissances de x, y, z disparaissent de son équation. Ainsi, l'équation (1), après y avoir fait disparaître les premières puissances de x, y, z, deviendra

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy=H\ ;$$

d'où il suit que l'équation (10) prendra la forme

$$Px'^2+P'y'^2+P''z'^2=H.$$

Représentant donc par T^2 le quarré d'un demi-diamètre principal, on aura $T^2=\frac{H}{P}$, d'où $P=\frac{H}{T^2}$; substituant cette valeur de P dans les équations (22) et (23), on trouvera les équations qui déterminent la situation et la grandeur des diamètres principaux. On doit observer, au surplus, que l'équation qui a pour racines les trois valeurs de T^2 a nécessairement ses racines reelles, comme nous l'avons déjà démontré, en faisant voir que P, P', P'' sont des quantités réelles. Nous discuterons ici quatre cas différens des surfaces du second ordre.

Premier cas. Si l'equation (22) n'a aucune racine nulle, on pourra toujours faire disparaître les premières puissances de x, y, z, dans l'équation (1), et par conséquent réduire l'équation (10) à la forme

$$Px'^2+P'y'^2+P''z'^2=H\ ;$$

donc 1.° on aura l'*ellipsoïde*, un point ou une surface *imaginaire*, lorsque les racines de l'équation (22) seront toutes de même signe.

2.° On obtiendra les *hyperboloïdes* à une ou à deux nappes, ou une *surface conique*, lorsque les racines de l'équation (21) ne seront pas toutes de mêmes signes.

Deuxième cas. Supposons que l'équation (22) ait une seule racine nulle ; l'équation (10) prend alors la forme

$$Px'^2+P'y'^2+2Qx'+2Q'y'+2Q''z'+D=0\ ;$$

donc 1.° on aura le *paraboloïde elliptique*, ou une surface *imaginaire*, lorsque les deux racines de l'équation (22) seront de même signe, sans que Q'' soit zéro.

2.° On aura le paraboloïde hyperbolique ou le système de deux plans, lorsque les deux seules racines effectives de l'équation (22) seront de signes contraires.

3.° Dans le cas particulier ou $Q''=0$, quels que soient d'ailleurs les signes des deux racines effectives de l'équation (22), la surface est un cylindre ; or, comme l'équation $Q''=0$ est satisfaite, lorsqu'en particulier on a $A''=0$, $B''=0$, $C''=0$; il s'ensuit que l'équation

$$ABC-AA'^2-BB'^2-CC'^2+2A'B'C'=0\ ,$$

suffit pour exprimer que la surface représentée par l'équation

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy+D=0$$

est cylindrique. Il est remarquable que cette équation de condition est indépendante de α, β, γ.

Troisième cas. Si deux des racines de l'équation (22) sont nulles, l'équation (10) prendra la forme

$$Px'^2+2Qx'+2Q'y'+2Q''z'+D=0\ ;$$

elle représente une surface cylindrique, deux plans parallèles ou une surface imaginaire.

Quatrième cas. Supposons 1.° que la surface (1) soit sphérique; il y a alors une infinité de systèmes de diamètres principaux; et, comme les équations d'un diamètre principal sont

$$x=ar\ ,\quad y=br\ ,\quad z=cr\ ;$$

il s'ensuit que a, b, c seront quelconques. Exprimant donc que les équations (21) laissent a, b, c indéterminés, on aura

$$A=B=C=P$$

$$A'=P\text{Cos.}\alpha\ ,\quad B'=P\text{Cos.}\beta\ ,\quad C'=P\text{Cos.}\gamma.$$

2.° Supposons que la surface soit simplement de révolution autour de l'un des axes, alors les équations (21) devront être les mêmes à un facteur près; d'où l'on déduira les équations

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{P-A}{P\text{Cos.}\beta-B'}=\dfrac{P\text{Cos.}\gamma-C'}{P\text{Cos.}\alpha-A'}=\dfrac{P\text{Cos.}\beta-B'}{P-C}\ , \\[2ex] \dfrac{P\text{Cos.}\gamma-C'}{P\text{Cos.}\beta-B'}=\dfrac{P-B}{P\text{Cos.}\alpha-A'}=\dfrac{P\text{Cos.}\alpha-A'}{P-C}\ , \end{cases}$$

on trouvera la racine P commune à ces équations par la théorie du plus grand commun diviseur. Égalant ensuite les valeurs de P, on aura deux équations de condition, qui exprimeront, si elles ont lieu, que la surface proposée du second ordre est de révolution autour d'un axe.

On obtient aussi l'équation du plan qui coupe la surface de révolution suivant un cercle, en éliminant a, b, c entre les équations (3) et l'une des équations (21); on a pour résultat

$$(25)\qquad (P-A)x+(P\text{Cos.}\gamma-C')y+(P\text{Cos.}\beta-B')z=0.$$

Pour donner un exemple de cette théorie, supposons

$$\alpha=\beta=\gamma=\text{ un angle droit ;}$$

les équations (24) et (25) deviendront

$$P = A - \frac{B'C'}{A'} = B - \frac{C'A'}{B'} = C - \frac{A'B'}{C'} \ ;$$

$$B'C'x + C'A'y + A'B'z = 0 \ ,$$

égalant les valeurs de P, deux à deux, on obtiendra les équations

$$(26) \qquad \begin{aligned} A'B'(A-B)+C'(A'^2-B'^2)=0 \ , \\ B'C'(B-C)+A'(B'^2-C'^2)=0 \ , \\ C'A'(C-A)+B'(C'^2-A'^2)=0 \ , \end{aligned}$$

dont deux comportent la troisième. Elles expriment que l'équation (1) appartient à une surface de révolution. L'equation (22) devient, en vertu des équations (26)

$$\left\{P - A - \frac{B'C'}{A'}\right\}^2 \left\{P - A - \frac{C'A'}{B'} - \frac{A'B'}{C'}\right\} = 0.$$

Il nous resterait à examiner ce qui arrive dans ces résultats, lorsque un, deux ou trois rectangles des coordonnées manquent dans l'équation (1) ; mais nous renvoyons, pour cet objet, à notre mémoire qui traite de ces mêmes équations (page 144 du 2.e volume des *Annales de Mathématiques.*)

On peut déduire des théories précédentes d'autres conséquences très-importantes ; ainsi, par exemple, on démontre très-facilement, au moyen de l'équation (22), trois théorèmes principaux sur les surfaces du second ordre (voyez, pour cet objet, un mémoire de M. Bérard, page 105 du 3.e volume des *Annales de Mathématiques*). Nous discuterons seulement le cas particulier où les surfaces du second ordre dégénèrent en deux plans parallèles, et également distans de l'origine des coordonnées. L'équation

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A'yz + 2B'zx + 2C'xy = H \ ,$$

prend alors la forme

$$(mx + ny + pz)^2 - 1 = 0$$

et l'équation en T^2 devient

$$\left\{\begin{array}{l} m^2\text{Sin.}^2\alpha-2np(\text{Cos.}\alpha-\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma) \\ +n^2\text{Sin.}^2\beta-2pm(\text{Cos.}\beta-\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\alpha) \\ +p^2\text{Sin.}^2\gamma-2mn(\text{Cos.}\gamma-\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta) \end{array}\right\} T^2$$
$$=1-\text{Cos.}^2\alpha-\text{Cos.}^2\beta-\text{Cos.}^2\gamma+2\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma.$$

Cette équation donne la longueur d'une perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées sur le plan

$$mx+ny+pz=1\ ;$$

et elle coïncide parfaitement avec l'équation (R) du §. V.

Nous terminerons, sur cette théorie, en observant que la méthode que nous avons employée, pour les surfaces du second ordre, est exactement applicable aux lignes du même ordre, rapportées à un système primitif quelconque de coordonnées. Mais on peut, pour ces lignes, obtenir de suite l'équation qui détermine les quarrés des demi-diamètres principaux. En effet, soit posée l'équation

$$Ax^2+By^2+2Cxy=D\ ,$$

et soit $y=mx$ celle d'un diamètre de la courbe. Si l'on cherche l'intersection du diamètre avec la courbe, puis la distance r de l'origine à ce point d'intersection, en se rappelant la formule

$$r^2=x^2+y^2+2xy\text{Cos.}\gamma\ ,\quad \text{où}\quad \gamma=\text{Ang.}(x,y)\ ,$$

on aura l'équation

$$D(1+m^2+2m\text{Cos.}\gamma)=r^2(Am^2+B+2Cm)$$

ou

$$(Ar^2-D)m^2+2(Cr^2-D\text{Cos.}\gamma)m+(Br^2-D)=0\ ;$$

qui sera telle qu'en donnant une valeur à r, il en résultera deux valeurs correspondantes pour m ; c'est-à-dire, que, généralement, il existe toujours deux diamètres de même longueur qui ont des directions différentes. Si maintenant on suppose que r désigne la longueur d'un demi-diamètre principal, alors les deux diamètres égaux qui répondront à cette hypothèse se confondront en un seul ; les valeurs correspondantes de m devront donc être égales. Écrivant donc la condition d'égalité des racines de l'équation en m, on trouvera que les quarrés des longueurs des demi-diamètres principaux sont déterminés par l'équation

$$(AB-C^2)r^4+D(A+B-2C\text{Cos}\gamma)r^2+D^2\text{Sin.}^2\gamma=0.$$

De semblables considérations pourraient être appliquées à la recherche des longueurs des diamètres principaux, dans les surfaces du second ordre qui ont un centre.

Généralement, on peut parvenir aux équations qui déterminent les diamètres principaux, soit dans les lignes soit dans les surfaces du second ordre, en partant d'une propriété quelconque qui ne puisse convenir qu'à eux seuls ; ainsi la propriété des *maximis* et *minimis* dont ils jouissent exclusivement se prête très-aisément à cet usage, et c'est d'elle, en effet, que M. Bérard est parti, pour parvenir aux formules dont la recherche a fait le sujet du présent mémoire et de l'autre que nous avons déjà rappelé. Mais, nous ferons à ce sujet la remarque que voici : c'est que, comme on ne démontre les propriétés des lignes et surfaces du second ordre, relatives à leurs diamètres principaux, qu'après avoir ramené leurs équations aux formes respectives

$$Px^2+P'y^2=H\ ,\quad Px^2+P'y^2+P''z^2=H\ ;$$

il s'ensuit qu'on ne peut employer ces propriétés, dans la recherche de P, P', P'', qu'après avoir démontré, *a priori*, que ces équations donnent toutes les lignes et surfaces de cet ordre qui ont un centre. Les démonstrations des mêmes formules, par MM. Monge et Hachette, qui se trouvent dans la *Correspondance sur l'école polytechnique* (2.e vol., n.o 5, janvier 1812), sont aussi sujettes aux mêmes inconvéniens. Il me paraît donc plus convenable et plus direct d'établir d'abord, par la transformation des coordonnées, les équations qui font connaître la situation et la grandeur des demi-diamètres principaux ; et c'est ce que j'ai cherché à faire, dans ce mémoire, de la manière la plus simple, et en même temps la plus générale.