
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

DU BOURGUET

**Analyse transcendante. Intégration, sous forme finie, de
quelques fonctions différentielles circulaires**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 4 (1813-1814), p. 72-78

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1813-1814__4__72_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1813-1814, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Intégration , sous forme finie , de quelques fonctions différentielles circulaires ;

Par M. DU BOURGUET , professeur de mathématiques spéciales au lycée impérial,



ON rencontre souvent , en mécanique , des fonctions différentielles de la forme

gers à ces deux lignes par la somme de leurs projections sur l'une et sur l'autre.

Le même M. de Maizière , au sujet de quelques difficultés que j'avais opposées au mémoire que je viens de citer , me man lait , dès le mois d'avril 1811 : *ce que j'avance ici sur les imaginaires est une idée hardie que je suis bien aise de jeter en avant , et dont , j'en suis sûr , vous aurez déjà reconnu l'exactitude ;* et , un peu plus loin : *ce paradoxe cessera d'en être un , lorsque j'aurai prouvé que les imaginaires du second degré , et par conséquent de tous les degrés , sont tout aussi peu imaginaires que les quantités négatives , ou les imaginaires du premier degré ; et que nous sommes exactement , à l'égard des uns , dans la situation où étaient nos algébristes du XVII^e siècle à l'égard des autres.*

En rappelant ces circonstances , il est certes loin de ma pensée de chercher à dépouiller M. Français , non plus que le géomètre dont il a si bien su mettre les indications à profit , de la priorité de leurs idées ; mais je veux montrer que ces idées ne sont point tellement étranges que le fond n'en ait pu germer dans plusieurs têtes à la fois. Il faudra sans doute faire beaucoup encore pour parer à toutes les objections , pour éclaircir toutes les difficultés , pour dissiper tous les nuages , pour étendre et perfectionner la nouvelle théorie et en rendre bien évidens l'esprit , le but et les avantages ; mais , on ne peut espérer ces résultats que du

$$z^n dz \text{Cos.}^m z, \quad z^n dz \text{Sin.}^m z.$$

Aucun auteur, du moins que je sache, n'ayant donné les intégrales, sous forme finie, de ces deux formules, j'ai pensé que l'on ne serait pas fâché de les rencontrer ici.

L'intégration de ces deux formules pouvant toujours, comme nous le verrons tout à l'heure, être ramenée à celle des formules

$$(az)^n d.\text{Sin.}(az), \quad (az)^n d.\text{Cos.}(az),$$

lesquelles reviennent à

$$x^n d.\text{Sin.}x, \quad x^n d.\text{Cos.}x,$$

c'est par celles-ci que nous commencerons. A la vérité, nous pourrions en déduire les intégrales de notre équation générale (432) [*Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, tome II, page 236, art. 425], en y faisant $X=x^n$, $a=0$ et $b=1$; mais nous croyons devoir, dans ce mémoire, les intégrer immédiatement.

Intégration de $x^n d.\text{Sin.}x$.

On a

$$d(x^n \text{Sin.}x) = x^n d.\text{Sin.}x - nx^{n-1} d.\text{Cos.}x,$$

donc

temps et des efforts réunis de tous ceux qui voudront bien ne pas rejeter cette théorie avec dédain, sans l'avoir sérieusement examinée.

Ce qui me paraît résulter, bien clairement, du mémoire qu'on vient de lire; ce qui peut en être regardé comme le résumé, est la proposition suivante : *Lorsque cherchant, sur une droite indéfinie, une longueur déterminée, mais inconnue, qu'on croit être d'un certain côté d'un point fixe pris sur cette droite, il arrive que cette longueur est réellement du côté opposé de ce point fixe, on trouve, pour la longueur cherchée, une expression négative; et si cette longueur n'est pas même située sur la droite donnée, son expression se présente alors sous une forme imaginaire.*

J. D. G.

$$\int x^n d.\text{Sin}.x = x^n \text{Sin}.x + n \int x^{n-1} d.\text{Cos}.x ; \quad (a)$$

or ,

$$d(x^{n-1} \text{Cos}.x) = x^{n-1} d.\text{Cos}.x + (n-1)x^{n-2} d.\text{Sin}.x ;$$

donc

$$\int x^{n-1} d.\text{Cos}.x = x^{n-1} \text{Cos}.x - (n-1) \int x^{n-2} d.\text{Sin}.x. \quad (b)$$

De ces équations (a) et (b), on conclura aisément les valeurs de $\int x^{n-2} d.\text{Sin}.x$, $\int x^{n-3} d.\text{Cos}.x$, $\int x^{n-4} d.\text{Sin}.x$, ... et, par des substitutions successives, à partir de l'équation (a), on parviendra au résultat que voici :

$$(1) \quad \int x^n d.\text{Sin}.x = \{ x^n - n(n-1)x^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} - \dots \} \text{Sin}.x + \\ \{ nx^{n-1} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5} - \dots \} \text{Cos}.x ;$$

dont les séries, régies par une loi très-simple à apercevoir, sont finies, lorsque n est un nombre positif et entier. Il est d'ailleurs aisé de voir que le coefficient de $\text{Cos}.x$ est égal à la différentielle de celui de $\text{Sin}.x$, divisée par dx .

Intégration de $x^n d.\text{Cos}.x$.

Suivant la méthode des intégrations réciproques (Art. 217 de l'ouv. cité), on a

$$\int x^n d.\text{Cos}.x = x^n \text{Cos}.x - n \int x^{n-1} d.\text{Sin}.x , \quad (c)$$

$$\int x^{n-1} d.\text{Sin}.x = x^{n-1} \text{Sin}.x + (n-1) \int x^{n-2} d.\text{Cos}.x. \quad (d)$$

Mettant successivement $n-2$, $n-4$, ... dans les équations (c) et (d); on forme une suite d'équations qui ont chacune leur dernier terme affecté d'un facteur intégral qui est le premier membre de l'équation qui suit immédiatement; donc, par une suite de substitutions successives, à partir de l'équation (c), on parvient aisément à celle

$$(2) \int x^n d. \text{Cos.} x = \{ x^n - n(n-1)x^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} - \dots \} \text{Cos.} x - \\ \{ nx^{n-1} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5} - \dots \} \text{Sin.} x ;$$

dont les séries sont les mêmes que dans l'équation (1).

Intégration de $z^n dz \text{Cos.}^m z$.

Des équations, connues en trigonométrie, qui donnent respectivement les valeurs des puissances paires et impaires du cosinus d'un arc, en fonction des premières puissances des cosinus de ces arcs, et que j'ai rappelées, sous les lettres (a) et (b), à la page 411 du premier volume de mon *Traité de calculs différentiel et intégral*, on tire pour le cas de m NOMBRE POSITIF ET PAIR,

$$\int z^n dz \text{Cos.}^m z = \frac{1}{2^{m-1}} \{ \int z^n dz \text{Cos.} m z + \frac{m}{1} \int z^n dz \text{Cos.} (m-2) z + \\ \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \int z^n dz \text{Cos.} (m-4) z + \dots + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \dots \frac{\frac{1}{2} m + 2}{\frac{1}{2} m - 1} \int z^n dz \text{Cos.} 2 z \} + \\ \frac{1.3.5 \dots (m-1)}{2.4.6 \dots m(n+1)} z^{n+1} ;$$

et, pour le cas de m NOMBRE POSITIF ET IMPAIR,

$$\int z^n dz \text{Cos.}^m z = \frac{1}{2^{m-1}} \{ \int z^n dz \text{Cos.} m z + \frac{m}{1} \int z^n dz \text{Cos.} (m-2) z + \\ \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \int z^n dz \text{Cos.} (m-4) z + \dots + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \dots \frac{\frac{1}{2} (m+5)}{\frac{1}{2} (m+3)} \int z^n dz \text{Cos.} 3 z + \\ \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \dots \frac{\frac{1}{2} (m+3)}{\frac{1}{2} (m-1)} \int z^n dz \text{Cos.} z \}.$$

Multipliant et divisant, dans ces deux équations, chaque terme du second membre par la $(n+1)^{\text{me}}$ puissance du coefficient de z sous le cosinus, en observant qu'en général

$$kdz \operatorname{Cos}.kz = d.\operatorname{Sin}.kz ,$$

il viendra , pour le cas de m NOMBRE POSITIF ET PAIR ,

$$(3) \quad \int z^n dz \operatorname{Cos}.^m z = \frac{1}{2^{m-1}} \left\{ \frac{1}{m^{n+1}} \int (mz)^n d.\operatorname{Sin}.(mz) + \frac{m}{(m-2)^{n+1}} \int [(m-2)z]^n d.\operatorname{Sin}.[(m-2)z] \right. \\ \left. + \dots + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \dots \frac{\frac{1}{2}m+2}{\frac{1}{2}m-1} \frac{1}{2^{n+1}} \int (2z)^n d.\operatorname{Sin}.(2z) \right\} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{m-1}{m} \cdot \frac{1}{n+1} z^{n+1} .$$

et pour le cas de m NOMBRE POSITIF ET IMPAIR ,

$$(4) \quad \int z^n dz \operatorname{Cos}.^m z = \frac{1}{2^{m-1}} \left\{ \frac{1}{m^{n+1}} \int (mz)^n d.\operatorname{Sin}.(mz) + \frac{m}{(m-2)^{n+1}} \int [(m-2)z]^n d.\operatorname{Sin}.[(m-2)z] \right. \\ \left. + \dots + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \dots \frac{\frac{1}{2}(m+5)}{\frac{1}{2}(m+3)} \cdot \frac{1}{3^{n+1}} \int (3z)^n d.\operatorname{Sin}.(3z) + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \dots \frac{\frac{1}{2}(m+3)}{\frac{1}{2}(m-2)} \int z^n d.\operatorname{Sin}.z \right\} .$$

Or, les valeurs de tous les termes intégraux des seconds membres de ces équations (3) et (4) sont données , sous forme finie , par l'équation (1), en y faisant successivement $x = mz$, $(m-2)z$, ...; donc on aura aussi, sous forme finie , les intégrales demandées.

Intégration de $z^n dz \operatorname{Sin}.^m z$.

Des équations, connues en trigonométrie, qui donnent respectivement les valeurs des puissances paires et impaires du sinus d'un arc simple, en fonction des premières puissances des lignes trigonométriques, soit sinus soit cosinus, des multiples de l'arc simple; et que j'ai rappelées sous les lettres (a) et (b), à la page 407 du premier volume de mon *Traité de calculs différentiel et intégral*, on tire, pour le cas de m NOMBRE POSITIF ET PAIR,

$$(e) \quad \int z^n dz \operatorname{Sin}.^m z = \pm \frac{1}{2^{m-1}} \left\{ \int z^n dz \operatorname{Cos}.mz - \frac{m}{1} \int z^n dz \operatorname{Cos}.(m-2)z + \dots \right.$$

$$\frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \int z^n dz \text{Cos.}(m-4)z - \dots - \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \dots \frac{\frac{1}{2}m+2}{\frac{1}{2}m-1} \int z^n dz \text{Cos.}2z \} +$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{m-1}{m} \cdot \frac{1}{n+1} z^{n+1} ;$$

et, pour le cas de m NOMBRE POSITIF ET IMPAIR,

$$(f) \quad \int z^n dz \text{Sin.}^m z = \frac{1}{2^{m-1}} \left\{ \int z^n dz \text{Sin.} m z - \frac{m}{1} \int z^n dz \text{Sin.}(m-2)z + \right.$$

$$\frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \int z^n dz \text{Sin.}(m-4)z - \dots - \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \dots \frac{\frac{1}{2}(m+5)}{\frac{1}{2}(m-3)} \int z^n dz \text{Sin.}3z +$$

$$\left. \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \dots \frac{\frac{1}{2}(m+3)}{\frac{1}{2}(m-1)} \int z^n dz \text{Sin.}z \right\}.$$

Multipliant et divisant chacun des termes des seconds membres de ces deux équations affectés du signe d'intégration, par la $(n+1)^{\text{me}}$ puissance du coefficient de z sous le signe de cosinus, équation (e), et sous celui de sinus, équation (f), en remarquant qu'en général $k dz \text{Cos.} k z = d \text{Sin.} k z$, $k dz \text{Sin.} k z = -d \text{Cos.} k z$, on trouvera, pour le cas de m NOMBRE POSITIF ET PAIR,

$$(5) \quad \int z^n dz \text{Sin.}^m z = + \frac{1}{2^{m-1}} \left\{ \frac{1}{m^{n+1}} \int (mz)^n d \text{Sin.}(mz) - \frac{m}{(m-2)^{n+1}} \int [(m-2)z]^n d \text{Sin.}[(m-2)z] \right.$$

$$\left. + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{1}{(m-4)^{n+1}} \int [(m-4)z]^n d \text{Sin.}[(m-4)z] - \dots - \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \dots \frac{\frac{1}{2}m+2}{\frac{1}{2}m-1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \int (2z)^n d \text{Sin.}(2z) \right\}$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{m}{m-1} \cdot \frac{n+1}{1} z^{n+1} ;$$

les signes supérieurs devant être pris lorsque m est un nombre doublement pair et les inférieurs dans le cas contraire.

Et, pour le cas de m NOMBRE POSITIF ET IMPAIR ,

$$(6) \quad \int z^n dz \text{Sin.}^m z = \mp \frac{1}{2^{m-1}} \left\{ \frac{1}{m^{n+1}} \int (mz)^n d.\text{Cos.}(mz) - \frac{m}{(m-2)^{n+1}} \int [(m-2)z]^n d.\text{Cos.}[(m-2)z] + \right. \\ \left. \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{1}{(m-4)^{n+1}} \int [(m-4)z]^n d.\text{Cos.}[(m-4)z] - \dots + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \dots \frac{\frac{1}{2}(m+5)}{\frac{1}{2}(m-3)} \cdot \frac{1}{3^{m+1}} \int (3z)^n d.\text{Cos.}(3z) \right. \\ \left. + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \dots \frac{\frac{1}{2}(m+3)}{\frac{1}{2}(m-1)} \int z^n d.\text{Cos.}z \right\} ;$$

les signes supérieurs devant être pris lorsque $m-1$ est un nombre doublement pair, et les signes inférieurs dans le cas contraire.

Or, les valeurs des termes du second membre de l'équation (5) affectés du signe d'intégration, sont données, sous forme finie, par l'équation (1); et celles des termes du second membre de l'équation (6) sont également données, sous forme finie, par l'équation (2); donc, quelles que soient les valeurs entières et positives de m et n , on a exactement, et sous forme finie, l'intégrale demandée de $z^n dz \text{Sin.}^m z$.
