DUBUAT
FRANÇAIS

Dynamique. Solution nouvelle du problème de la tractoire plane, et éclaircissemens sur ce problème

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 4 (1813-1814), p. 332-336
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1813-1814__4__332_0>

DYNAMIQUE.

Solution nouvelle du problème de la Tractoire plane, *et éclaircissemens sur ce problème* ;

Par M. Dubuat, professeur à l'école de l'artillerie et du génie.

Lettre de M. Françai, professeur à l'école de l'artillerie et du génie,

Au Rédacteur des Annales ;

Monsieur,

Si j'avais prévu que vous dussiez publier aussi prochainement la solution donnée par feu mon frère du problème de la *Tractoire* (*), je n'aurais pas omis la phrase suivante, qui vient immédiatement après l'équation $c'\text{Cos.}\alpha+c\text{Sin.}\alpha=b\text{Cos.}\alpha$.

« Il faut faire attention que ces vitesses initiales ne sont pas celles » qu'on a pu imprimer au mobile M par quelque impulsion ; ce » sont les résultats et de l'impulsion imprimée à M et de l'action » de P sur M ; de sorte que, s'il n'y a point d'impulsion, elles

(*) Voyez la page 305 de ce volume.

» sont dues uniquement à l'action de P. La vitesse b n'est pas non » plus due à la seule action de la force accélératrice p, mais à cette » action modifiée par l'effet de l'impulsion donnée à M. »

Cette phrase aurait servi à éclaircir l'espèce de paradoxe que vous trouvez dans cette équation de condition. Mais voici une note, sur le même objet, qui m'a été remise par mon collègue M. Dubuat; elle explique complètement la signification de cette équation, et offre un très-bel exemple de la manière de déterminer les vitesses initiales dans les problèmes de mécanique. Vous penserez sans doute comme moi, Monsieur, qu'elle ne sera pas déplacée dans les *Annales*.

1. L'équation $c'\text{Cos.}\alpha+c\text{Sin.}\alpha=b\text{Cos.}\alpha$ n'est autre chose que l'équation générale de condition $(x-x')(\text{d}x-\text{d}x')+y\text{d}y=0$, dans laquelle on a mis pour les variables $\text{d}x'$, $\text{d}x$, $\text{d}y$, $x-x'$, y les valeurs $b\text{d}t$, $c'\text{d}t$, $c\text{d}t$, $a\text{Cos.}\alpha$, $a\text{Sin.}\alpha$, qu'elles ont à l'origine du mouvement.

2. Or, l'équation générale $(x-x')(\text{d}x-\text{d}x')+y\text{d}y=0$ signifie que les vitesses variables $\frac{\text{d}x}{\text{d}t}$, $\frac{\text{d}y}{\text{d}t}$ du point M, dans la direction des axes des coordonnées, sont telles que, si de la vitesse $\frac{\text{d}x}{\text{d}t}$, suivant l'axe des x, on retranche la vitesse $\frac{\text{d}x'}{\text{d}t}$ du point P, la vitesse restante $\frac{\text{d}x-\text{d}y}{\text{d}t}$ forme, avec la vitesse $\frac{\text{d}y}{\text{d}t}$ suivant l'axe des y, une résultante perpendiculaire au rayon vecteur PM ; d'où il suit que la vitesse du point M, considérée soit au commencement soit dans la suite du mouvement, peut toujours être décomposée en deux vitesses, l'une parallèle à l'axe des x constante et égale à b, l'autre perpendiculaire au rayon vecteur, et dont la valeur peut être quelconque.

3. Donc, si la vitesse imprimée au point M, à l'origine du mouvement, n'est pas décomposable en deux vitesses suivant la même

loi, cette vitesse n'est pas la vitesse initiale d'après laquelle il faut déterminer les constantes d'intégration.

4. Soit, à l'origine du mouvement, V la vitesse imprimée au point M, et β l'angle que fait sa direction avec l'axe des x : ses composantes sont $V\text{Cos}.\beta$, dans le sens des x, et $V\text{Sin}.\beta$, dans le sens des y.

La première composante $V\text{Cos}.\beta$ est équivalente aux deux vitesses b et $V\text{Cos}.\beta - b$, dont la première b subsiste seule, en vertu de l'équation de condition; mais la vitesse $V\text{Cos}.\beta - b$ n'est pas détruite en totalité : en la décomposant en deux vitesses, l'une suivant le rayon vecteur, et l'autre perpendiculaire à ce rayon; celle-ci, dont l'expression est $(V\text{Cos}.\beta - b)\text{Sin}.\alpha$, subsiste, tandis que l'autre est détruite.

La vitesse $V\text{Sin}.\beta$, imprimée dans le sens des y, étant aussi décomposée en deux vitesses, l'une suivant le rayon vecteur, et l'autre perpendiculaire à ce rayon; la seconde subsiste seule, et son expression est $V\text{Sin}.\beta\text{Cos}.\alpha$.

5. La vitesse initiale, résultant de la vitesse imprimée V, est donc composée d'une vitesse b, parallèle à l'axe des x, et d'une vitesse $(V\text{Cos}.\beta - b)\text{Sin}.\alpha + V\text{Sin}.\beta\text{Cos}.\alpha$, perpendiculaire au rayon vecteur; ce qui donne pour la composante c' de la vitesse initiale, suivant l'axe des x

$$c' = b \pm \{V\text{Sin}.(\alpha+\beta) - b\text{Sin}.\alpha\}\,\text{Sin}.\alpha\ ;$$

et pour la composante c de la vitesse initiale suivant l'axe des y

$$c = \pm \{V\text{Sin}.(\alpha+\beta) - b\text{Sin}.\alpha\}\,\text{Cos}.\alpha.$$

6. Mais voici une autre difficulté que présentent les équations (11) et (12).

Si l'on fait, dans la première $c=0$, ou $c'-b=0$ dans la seconde, on a $x=\sqrt{a^2-y^2}+\infty$; ce qui n'a pas de signification. Pour lever cette difficulté, je remarque qu'en vertu de l'équation de condition $(c'-b)\text{Cos.}\alpha+c\text{Sin.}\alpha=0$, l'hypothèse $c=0$ donne $(c'-b)\text{Cos.}\alpha=0$, et par conséquent $c'=b$ ou $\text{Cos.}\alpha=0$.

Soient d'abord $c=0$, $c'=b$. Ces deux équations signifient que la vitesse initiale du point M, parallèle à l'axe des y est nulle, et que sa vitesse initiale parallèle à l'axe des y est b, et égale par conséquent à la vitesse du point P dans le même sens ; les deux points M et P sont donc animés, à l'origine du mouvement, de vitesses égales et parallèles ; l'équation de condition laisse subsister ces deux vitesses dans le premier instant et dans toute la suite du mouvement. Le point M décrit donc une droite parallèle à l'axe des x, avec une vitesse constante et égale à b ; ce qui donne $y=Const.$ et $x=bt+Const.$

Soit, en second lieu, $c=0$ et $\text{Cos.}\alpha=0$. Ces deux équations signifient que la vitesse initiale du point M parallèlement aux y, est nulle, et que l'ordonnée du même point est aussi nulle, à l'origine du mouvement, sans rien déterminer sur la vitesse initiale parallèle aux x. Les deux points M, P, à l'origine du mouvement, sont donc sur l'axe des x, et le point P a une vitesse b qui, en vertu de l'équation de condition, ne peut ni augmenter ni diminuer. Il est aisé de conclure de là que le système des deux points se mouvra, dans le premier instant et pendant toute la durée du mouvement, sur l'axe des x, avec une vitesse commune b ; c'est-à-dire, qu'on aura $y=0$, $x=bt+Const.$

Au surplus, le problème peut être résolu de la manière suivante :

7. Les équations de condition sont, en faisant le rayon vecteur $=1$,

$$(x-x')^2+y^2=1\ , \quad x'=bt\ ;$$

celles du mouvement sont

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\mu(x-x') \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2}=\mu y \ ;$$

μ étant une indéterminée. Soient $y=\text{Sin}.\varphi$ et $x-x'=\text{Cos}.\varphi$; en substituant ces valeurs dans les équations du mouvement, on trouve

$$-\frac{d^2\varphi}{dt^2}\text{Sin}.\varphi-\frac{d^2\varphi}{dt^2}\text{Cos}.\varphi=\mu\text{Cos}.\varphi \ ,$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}\text{Cos}.\varphi-\frac{d^2\varphi}{dt^2}\text{Sin}.\varphi=\mu\text{Sin}.\varphi \ ;$$

et, en éliminant μ,

$$d^2\varphi=0 \ , \quad \text{donc} \quad \varphi=At+A' \ , \quad \text{et}$$

$$x=bt+\text{Cos}.(At+A') \ , \quad y=\text{Sin}.(At+A').$$

En déterminant les constantes d'après la vitesse initiale V, faisant avec l'axe des x un angle β, on a

$$x=bt+\text{Cos}.\{[V\text{Sin}.(\alpha+\beta)-b\text{Sin}.\alpha]t+\alpha\} \ ,$$

$$y=\text{Sin}.\{[V\text{Sin}.(\alpha+\beta)-b\text{Sin}.\alpha]t+\alpha\}.$$

Ces formules expriment que le point M se meut autour du point P d'un mouvement uniforme et continu, avec une vitesse $V\text{Sin}.(\alpha+\beta)-b\text{Sin}.\alpha$.

8. Si l'on suppose, comme ci-dessus, que la vitesse initiale du point M, parallèle à l'axe des y est nulle, et que celle parallèle à l'axe des x est b ; on trouve, en faisant $V=b$ et $\beta=0$, $y=\text{Sin}.\alpha$, $x=bt+\text{Cos}.\alpha$; résultat conforme à celui du n.° 6. Si l'on suppose encore que la vitesse initiale du point M, parallèlement aux y est nulle, et que l'ordonnée du même point est aussi nulle, à l'origine du mouvement ; on trouvera, en faisant $\alpha=0$, $\beta=0$, conformément à ces hypothèses, $y=0$, $x=bt+1$, comme ci-dessus.

Metz, le 25 avril 1814.

CHRONOLOGIE.