ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

ENCONTRE

Démonstration du théorème énoncé à la page 160 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 4 (1813-1814), p. 294-295
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1813-1814__4__294_1>

Démonstration du théorème énoncé à la page 160 *de ce volume ;*

Par M. Encontre, fils.

ÉNONCÉ. CA *et* CB *sont deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse ou d'une hyperbole. On a mené la droite* AB ; *et, par un point quelconque* M *de la courbe, on a mené à cette droite une parallèle coupant respectivement* CA *et* CB *en* A′ *et* B′. *On propose de démontrer que, quelle que soit la situation du point* M *sur la courbe, la quantité* $\overline{MA'}^2 \pm \overline{MB'}^2$ *est constante.*

Démonstration (**). Soit menée MP, ordonnée au diamètre CA,

(**) On sous-entend la figure qu'il est très-facile de suppléer.

et conséquemment parallèle à CB ; et soient $CP=x$, $PM=y$, $CA=a$, $CB=b$, $AB=c$.

Les triangles semblables BCA, MPA′ donnent

$$b:a::y:PA'=\frac{ay}{b}\,, \qquad b:c::y:MA'=c.\frac{y}{b}\,,$$

donc

$$CA'=CP+PA'=x+\frac{ay}{b}=\frac{bx+ay}{b}\,.$$

D'un autre côté, les triangles semblables CAB, CA′B′ donnent

$$a:c::\frac{ay+bx}{b}:A'B'=\frac{c(ay+bx)}{ab}\,;$$

d'où il suit que

$$MB'=A'B'-MA'=\frac{c(ay+bx)}{ab}-\frac{cy}{b}=c.\frac{x}{a}\,,$$

donc

$$\overline{MA'}^2\pm\overline{MB'}^2=c^2\left\{\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{x^2}{a^2}\right\};$$

mais, dans l'ellipse et dans l'hyperbole, on a respectivement

$$\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{x^2}{a^2}=1\,;$$

donc, dans les deux courbes, on doit avoir respectivement

$$\overline{MA'}^2\pm\overline{MB'}^2=c^2=\overline{AB}^2.\ (*)$$

(*) Si l'on désigne par N l'autre point d'intersection de A′B′ avec la courbe, on aura pareillement

$$\overline{NB'}^2\pm\overline{NA'}^2=\overline{AB}^2\,;\ \text{d'où}\ \overline{MA'}^2\pm\overline{MB'}^2=\overline{NB}^2\pm\overline{NA'}^2\,,$$

d'où, en développant, on conclura,

$$MA'=NB'.$$

Cette dernière proposition, et conséquemment la première qui peut en être aisément déduite, se démontre facilement pour l'ellipse, en recourant à sa projection circulaire, dans laquelle les projections des deux diamètres conjugués sont deux diamètres perpendiculaires l'un à l'autre. Ceci peut donc former un petit supplément au mémoire de M. Ferriot, inséré à la page 240 du 2.e volume de ce recueil. *J. D. C.*