ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

FRANÇAIS

Philosophie mathématique. Sur la théorie des quantités imaginaires

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 4 (1813-1814), p. 222-227
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1813-1814__4__222_1>

PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

Extraits de deux lettres, l'une de M. J. F. FRANÇAIS, professeur à l'école impériale de l'artillerie et du génie, et l'autre de M. SERVOIS, professeur aux écoles d'artillerie,

Au Rédacteur des *Annales*;

Sur la théorie des quantités imaginaires.

Lettre de M. FRANÇAIS.

EN attendant que le mémoire de M. Argand, que vous me faites l'honneur de m'annoncer me soit parvenu, je prends, Monsieur, la liberté de vous indiquer brièvement les résultats auxquels j'ai été conduit par mes réflexions sur la manière d'étendre la nouvelle théorie des imaginaires à la géométrie à trois dimensions.

D'après ma définition 4.^{e} (pag. 64) , les angles , tant positifs que négatifs , sont censés situés dans un même plan que , pour abréger , j'appellerai plan des xy. Il serait donc naturel de supposer que les angles imaginaires sont situés dans des plans perpendiculaires à celui des xy ; et l'analogie seule justifierait cette supposition ; mais on peut en démontrer la légitimité comme il suit : l'angle $\pm b\sqrt{-1}$ est moyen proportionnel de grandeur et de position entre $+\beta$ et $-\beta$; donc il est situé par rapport à l'angle $+\beta$ comme l'angle $-\beta$ est situé par rapport à lui ; ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que le plan qui contient l'angle $\pm\beta\sqrt{-1}$ partage en deux parties égales l'angle formé par les plans des angles $+\beta$ et $-\beta$; or, ces deux plans se confondent en un seul ; donc le plan qui contient l'angle $\pm\beta\sqrt{-1}$ est perpendiculaire au plan des xy. Réciproquement, tout plan perpendiculaire à celui des xy, partageant en deux parties égales l'angle formé par les plans des angles positifs et des angles négatifs ; tout angle β , situé dans un plan perpendiculaire à celui des xy peut être considéré comme moyen proportionnel de grandeur et de position entre les deux angles $+\beta$ et $-\beta$; donc sa valeur de grandeur et de position est $\pm\beta\sqrt{-1}$.

Il suit de là, et de mes théorèmes 2.^{e} et 3.^{e} (pag. 66 et 68) qu'on a

$$1_{\beta\sqrt{-1}}=e^{(\beta\sqrt{-1})\sqrt{-1}}=e^{-\beta}=1^{\frac{\beta\sqrt{-1}}{2\varpi}}=\text{Cos.}(\beta\sqrt{-1})+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}(\beta\sqrt{-1}).$$

Voilà donc aussi les *sinus et cosinus hyperboliques de* LAMBERT rattachés à la même théorie que les arcs de cercles , les logarithmes naturels et les racines de l'unité.

Il suit encore de là qu'on a

$$1_{\alpha}.1_{\beta\sqrt{-1}}=e^{\alpha\sqrt{-1}}.e^{(\beta\sqrt{-1})\sqrt{-1}}=e^{(\alpha+\beta\sqrt{-1})\sqrt{-1}}=1_{\alpha+\beta\sqrt{-1}}$$

$$=e^{\alpha\sqrt{-1}}\{\text{Cos.}(\beta\sqrt{-1})+\sqrt{-1}\,.\,\text{Sin.}(\beta\sqrt{-1})\}$$

$$=\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}(\beta\sqrt{-1})+\sqrt{-1}.\text{Sin.}\alpha\text{Cos.}(\beta\sqrt{-1})+\sqrt{-1}.e^{\alpha\sqrt{-1}}.\text{Sin.}(\beta\sqrt{-1}).$$

Donc

$$a_{\alpha+\beta\sqrt{-1}}=a\text{Cos.}\alpha.\text{Cos.}(\beta\sqrt{-1})+\sqrt{-1}\,a\text{Sin.}\alpha.\text{Cos.}(\beta\sqrt{-1})+\sqrt{-1}.ae^{\alpha\sqrt{-1}}.\text{Sin.}(\beta\sqrt{-1}).$$

Les projections de a sur les trois axes des coordonnées, ou plutôt ses trois composantes seront donc

$$a\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}(\sqrt{-1}),\quad \sqrt{-1}\,.\,a\text{Sin.}\alpha.\text{Cos.}(\beta\sqrt{-1}),\quad \sqrt{-1}.a_{\alpha}.\text{Sin.}(\beta\sqrt{-1}).$$

Voilà, Monsieur, le résultat auquel je suis parvenu; mais je vous avoue que je n'en suis pas encore satisfait. Je voudrais élaguer entièrement la notation imaginaire, comme je l'ai fait pour la géométrie à deux dimensions. Je m'explique : pour la géométrie à deux dimensions, j'ai réduit les droites obliques de la forme $A+B\sqrt{-1}$ à celle a_{α}, où a représente la grandeur absolue de la droite, et α l'angle qu'elle fait avec l'axe des abscisses. Dans la géometrie à trois dimensions, je voudrais exprimer la position d'une droite quelconque par a_{α_A}, où a exprimerait la grandeur absolue de la droite, α l'angle qu'elle fait avec l'axe des abscisses, et A celui que le plan de l'angle α fait avec le plan des xy; mais toutes mes tentatives à cet égard ont été jusqu'ici infructueuses. Je désire que quelqu'un plus habile que moi vienne à bout de completter cette lacune. Quoi qu'il en soit, je suis persuadé que le vrai moyen d'étendre notre théorie des imaginaires à la géométrie à trois dimensions réside dans la considération des angles imaginaires.

Metz, le 8 de novembre 1813.

P. S. Je viens de recevoir, à l'instant, le mémoire de M. Argand; que j'ai lu avec autant d'intérêt que d'empressement. Il ne m'a pas été difficile d'y reconnaître le développement des idées contenues dans la lettre de M. Legendre à feu mon frère; et il n'y a pas le moindre doute qu'on ne doive à M. Argand la première idée de représenter géométriquement les quantités imaginaires. C'est avec bien du plaisir que je lui en fais hommage; et je me félicite de l'avoir engagé à publier ses idées, dans l'ignorance où j'étais de leur publication antérieure. J'ai vu aussi que nous nous étions rencontrés dans le principe qui doit servir à étendre cette nouvelle théorie des imaginaires à la géométrie à trois dimensions; mais, en partant d'un même principe, nous parvenons à des résultats différens.

J'ai dit plus haut que je n'avais pu parvenir à ramener l'expression de la position d'une droite quelconque dans l'espace à la forme a_{α_A}. Voici quels sont les motifs de cette impuissance. J'avais essayé de faire, par analogie, $\alpha_A = \alpha . e^{A\sqrt{-1}} = \alpha(\text{Cos}.A+\sqrt{-1}\,\text{Sin}.A)$, d'où l'on tire

$$1_{\alpha_A} = (e^{\alpha\sqrt{-1}})^{e^{A\sqrt{-1}}} = (\text{Cos}.\alpha+\sqrt{-1}\,.\,\text{Sin}.\alpha)^{(\text{Cos}.A+\sqrt{-1}\,.\,\text{Sin}.A)}$$

ce qui, dans le cas de $\alpha = \frac{1}{2}\varpi$, $A = \frac{1}{2}\varpi$, donne $1_{\frac{1}{2}\varpi . 1_{\frac{1}{2}\varpi}} = (\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$, comme le trouve M. Argand. Mais, en faisant le développement du cas général, on a

$$1_{\alpha_A} = (e^{\alpha\sqrt{-1}})^{e^{A\sqrt{-1}}} = e^{(\alpha . e^{A\sqrt{-1}})\sqrt{-1}} = e^{(\alpha\text{Cos}.A+\sqrt{-1}.\alpha\text{Sin}.A)\sqrt{-1}}$$

$$= e^{\sqrt{-1}\,.\,\alpha\text{Cos}.A} \,.\, e^{(\sqrt{-1}\,.\,\alpha\text{Sin}.A)\sqrt{-1}}$$

$$= \{\text{Cos}.(\alpha\text{Cos}.A)+\sqrt{-1}.\text{Sin}.(\alpha\text{Cos}.A)\}\{\text{Cos}.(\sqrt{-1}.\alpha\text{Sin}.A)+\sqrt{-1}.\text{Sin}.(\sqrt{-1}.\alpha\text{Sin}.A)\}$$

$$=\mathrm{Cos.}(\alpha\mathrm{Cos.}A)\mathrm{Cos.}(\sqrt{-1}.\alpha\mathrm{Sin.}A)+\sqrt{-1}.\mathrm{Sin.}(\alpha\mathrm{Cos.}A)\mathrm{Cos.}(\sqrt{-1}.\alpha\mathrm{Sin.}A)$$

$$+\sqrt{-1}.e^{\sqrt{-1}.\alpha\mathrm{Cos.}A}.\mathrm{Sin.}(\sqrt{-1}.\alpha\mathrm{Sin.}A)\;;$$

expression qui, vu la double transcendance de ses termes, me paraît inadmissible. Sa comparaison avec

$$1_{\lambda+\mu\sqrt{-1}}=\mathrm{Cos.}\lambda\mathrm{Cos.}(\lambda\sqrt{-1})+\sqrt{-1}.\mathrm{Sin.}\lambda\mathrm{Cos.}(\mu\sqrt{-1})+\sqrt{-1}.e^{\lambda\sqrt{-1}}.\mathrm{Sin.}(\mu\sqrt{-1})$$

me l'a fait rejeter entièrement ; parce que les angles α et A sont aisés à déterminer en λ et μ, par la trigonométrie sphérique. On trouve, en effet,

$$\mathrm{Cos.}\lambda\mathrm{Cos.}(\mu\sqrt{-1})=\mathrm{Cos.}\alpha\;;$$

$$\mathrm{Sin.}\lambda\mathrm{Cos.}(\mu\sqrt{-1})=\mathrm{Sin.}\alpha\mathrm{Cos.}(A\sqrt{-1})\;,$$

$$\mathrm{Sin.}(\mu\sqrt{-1})=\mathrm{Sin.}\alpha\mathrm{Sin.}(A\sqrt{-1})\;;$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{Cos.}\mu=\frac{\mathrm{Cos.}\alpha}{\sqrt{1-\mathrm{Sin.}^2\alpha\mathrm{Sin.}^2(A\sqrt{-1})}},\quad \mathrm{Sin.}\mu=\frac{\mathrm{Sin.}\alpha\mathrm{Cos.}(\sqrt{-1})}{\sqrt{1-\mathrm{Sin.}^2\alpha\mathrm{Sin.}(A\sqrt{-1})}}\;,$$

On a donc

$$1_{\alpha_A}=\{\mathrm{Cos.}\alpha+\sqrt{-1}.\mathrm{Sin.}\alpha\mathrm{Cos.}(A\sqrt{-1})\}\{1+\frac{\mathrm{Sin.}\alpha\mathrm{Sin.}(A\sqrt{-1})}{\sqrt{1-\mathrm{Sin.}^2\alpha\mathrm{Sin.}^2(A\sqrt{-1})}}\sqrt{-1}\}.$$

Il me paraît prouvé, d'après cela, que α_A ne doit pas être déterminé de la même manière que a_α, et que l'analogie supposée entre les angles et les lignes ne subsiste pas.

Vous avez dû remarquer, au surplus, Monsieur, que M. Argand ne démontre pas ma proposition $a_\alpha = a(\text{Cos.}\alpha + \sqrt{-1}\,\text{Sin.}\alpha)$; et que cette proposition fondamentale n'est chez lui qu'une simple supposition, justifiée seulement par quelques exemples. (*)

Je n'ai pas trop vu non plus, Monsieur, pourquoi M. Argand, n.° 11 (pag. 144), introduit une nouvelle unité, en posant $2\varpi=1$; cela m'a paru répandre de l'obscurité sur le reste de son mémoire.

Enfin j'aurais peine à passer à cet estimable geomètre son assertion sur la non réductibilité de $(c\sqrt{-1})^{d\sqrt{-1}}$ à la forme $A+B\sqrt{-1}$. On a, en effet,

$$c\sqrt{-1}=e^{\text{Log.}(c\sqrt{-1})}=e^{\text{Log.}c+\text{Log.}\sqrt{-1}}=e^{\text{Log.}c+\frac{1}{2}\varpi\sqrt{-1}}=e^{\text{Log.}c}.e^{\frac{1}{2}\varpi\sqrt{-1}};$$

donc

$$(c\sqrt{-1})^{d\sqrt{-1}}=e^{d\text{Log.}c\sqrt{-1}}.e^{-\frac{1}{2}d\varpi}$$

$$=e^{-\frac{1}{2}d\varpi}\{\text{Cos.})d\text{Log.}c)+\sqrt{-1}.\text{Sin.}(d\text{Log.}c)\}$$

qui est bien de la forme $A+B\sqrt{-1}$. Je crois donc être fondé à ne regarder la forme $(c\sqrt{-1})^{d\sqrt{-1}}$ qu'il assigne à la troisième coordonnée que comme une simple conjecture sujette à une sérieure contestation.

(*) La démonstration de cette proposition n'était point nécessaire dans le système de M. Argand qui a admis, comme *définition de nom*, que la *somme* dirigée de plusieurs *droites dirigées* se compose de l'ensemble des expressions de ces droites prises eu égard à leurs signes de direction; et M. Argand n'a fait en ceci que donner une extension fort naturelle à une définition généralement admise en algèbre.

J. D. G.