ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

DU BOURGUET

Algèbre élémentaire. Démonstrations élémentaires du théorème de d'Alembert sur la forme des imaginaires

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 4 (1813-1814), p. 20-25
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1813-1814__4__20_1>

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstrations élémentaires du théorème de d'ALEMBERT sur la forme des imaginaires ;

Par M. DU BOURGUET, professeur de mathématiques spéciales au lycée impérial.

D'ALEMBERT a démontré le premier, mais par les calculs différentiel et intégral, que toute quantité imaginaire

$$(a\pm b\sqrt{-1})^{m\pm n\sqrt{-1}},$$

peut toujours être ramenée à la forme

$$p\pm q\sqrt{-1};$$

(Voyez le *Calcul intégral* de Bougainville, page 42). (*)

(*) Voyez aussi la *Résolution des équations numériques* de Lagrange, note IX.
J. D. G.

Il y a environ onze ans qu'ayant vainement cherché, dans les auteurs les plus estimés à cette époque, une démonstration élémentaire du même théorème, je m'occupai à en trouver une, soit algébrique soit géométrique; j'en obtins, en effet, une fort simple de cette dernière sorte; c'est celle que j'annonçai en 1802, dans un ouvrage d'algèbre que je publiai à cette époque. Mais, depuis ce temps, M. Garnier ayant donné une démonstration semblable, dans un ouvrage qu'il a publié en 1804, sous le nom d'*Analise algébrique*, j'ai cru devoir reprendre mes recherches pour obtenir du même théorème une démonstration purement algébrique. Voici celle que j'ai obtenue, et qui me paraît préférable à l'autre; car, outre qu'elle est fort simple, il me paraît très-convenable de ne faire dépendre la démonstration du principe général que *toute fonction de quantités imaginaires est réductible à la forme* $p\pm q\sqrt{-1}$, de la seule branche des sciences exactes dont ce principe fait partie.

On sait que, quels que soient a et b, on a

$$(a\pm b)^{m\pm n\sqrt{-1}}=$$

$$a^{m\pm n\sqrt{-1}}\left\{1\pm\frac{m\pm n\sqrt{-1}}{1}\frac{b}{a}+\frac{m\pm n\sqrt{-1}}{1}\cdot\frac{m-1\pm n\sqrt{-1}}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2\pm\ldots\right\};$$

on aura donc, en changeant b en $b\sqrt{-1}$,

$$(a\pm b\sqrt{-1})^{m\pm n\sqrt{-1}}=$$

$$(1)\quad a^{m\mp n\sqrt{-1}}\left\{1\pm\frac{m\pm n\sqrt{-1}}{1}\left(\frac{b\sqrt{-1}}{a}\right)-\frac{m\pm n\sqrt{-1}}{1}\cdot\frac{m-1\pm n\sqrt{-1}}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2\mp\ldots\right\}.$$

Or, toutes les puissances paires de $\sqrt{-1}$ étant égales à ∓ 1, et toutes ses puissances impaires étant égales à $\pm\sqrt{-1}$, il s'ensuit qu'en exécutant toutes les multiplications, entre les accolades du second membre de l'équation (1), on obtiendra une suite de termes réels, dont l'ensemble pourra être représenté par g, et une suite de termes affectés de $\pm\sqrt{-1}$, dont l'ensemble pourra être représenté par $\pm h\sqrt{-1}$; en sorte que l'équation (1) deviendra simplement

$$(2) \qquad (a\pm b\sqrt{-1})^{m\pm n\sqrt{-1}}=a^{m\pm n\sqrt{-1}}(g\pm h\sqrt{-1}).$$

Mais, par la théorie des quantités exponentielles, théorie indépendante de l'exposant de la base, on a, en désignant par $\mathrm{l}a$ le logarithme naturel de a,

$$a^{m\pm n\sqrt{-1}}=$$

$$(3) \qquad 1+\frac{(m\pm n\sqrt{-1})}{1}\mathrm{l}a+\frac{(m\pm n\sqrt{-1})^2}{1.2}(\mathrm{l}a)^2+\frac{(m\pm n\sqrt{-1})^3}{1.2.3}(\mathrm{l}a)^3+\ldots\ldots$$

qui, pour les mêmes raisons que ci-dessus, pourra être réduit à la forme

$$a^{m\pm n\sqrt{-1}}=c\pm d\sqrt{-1} \ ;$$

substituant donc cette valeur dans l'équation (2), il viendra, en développant, et posant pour abréger

$$cg-dh=p \quad , \qquad ch+dg=q \ ,$$

$$(a\pm b\sqrt{-1})^{m\pm n\sqrt{-1}}=$$

$$(c\pm d\sqrt{-1})(g\pm h\sqrt{-1})=(cg-dh)\pm(ch+dg)\sqrt{-1}=p\pm q\sqrt{-1} \ ;$$

comme nous l'avions annoncé.

Voici présentement la démonstration géométrique du même théorème, que j'avais annoncée, dans l'ouvrage d'algèbre publié en 1802.

Soit posé

$$\frac{a}{b}=\mathrm{Cot.}\omega \ ,$$

il viendra

$$a=\sqrt{a^2+b^2}.\mathrm{Cos.}\omega \ , \quad b=\sqrt{a^2+b^2}.\mathrm{Sin.}\omega \ ,$$

donc

$$a\pm b\sqrt{-1}=(\mathrm{Cos.}\omega\pm\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin.}\omega)\sqrt{a^2+b^2} \ ,$$

et

$$\mathrm{l}(a\pm b\sqrt{-1})=\tfrac{1}{2}\mathrm{l}(a^2+b^2)+\mathrm{l}(\mathrm{Cos.}\omega\pm\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin.}\omega)=\tfrac{1}{2}\mathrm{l}(a^2+b^2)\pm\omega\sqrt{-1}.$$

Multipliant les deux membres de cette dernière équation par $m\pm n\sqrt{-1}$, il viendra

$$\mathrm{l}.(a\pm b\sqrt{-1})^{m\pm n\sqrt{-1}}=\{\tfrac{1}{2}m\mathrm{l}(a^2+b^2)-n\omega\}\pm\{\tfrac{1}{2}n\mathrm{l}(a^2+b^2)+m\omega\}\sqrt{-1},$$

posant alors, pour abréger

$$\tfrac{1}{2}m\mathrm{l}(a^2+b^2)-n\omega=g\ ,\quad \tfrac{1}{2}n\mathrm{l}(a^2+b^2)+m\omega=h\ ,$$

et repassant des logarithmes aux nombres, il viendra

$$(a\pm b\sqrt{-1})^{m\pm n\sqrt{-1}}=e^g.e^{\pm h\sqrt{-1}}=e^g\mathrm{Cos}.h\pm\sqrt{-1}e^g\mathrm{Sin}.h\ ;$$

posant donc enfin

$$e^g\mathrm{Cos}.h=p\ ,\qquad e^g\mathrm{Sin}.h=q\ ,$$

on aura, de nouveau

$$(a\pm b\sqrt{-1})^{m\pm n\sqrt{-1}}=p\pm q\sqrt{-1}.\ (*)$$

Réflexions sur le même sujet ;

Par M. GERGONNE.

LA forme

$$(a\pm b\sqrt{-1})^{m\pm n\sqrt{-1}}\ ,$$

est loin, ce me semble, d'être la plus générale que puissent affecter les fonctions d'imaginaires. D'abord un radical imaginaire peut excéder le second degré. A la vérité, dans ce cas, il peut toujours être ramené au second degré, puisque $\sqrt[2\alpha]{-A^2}=\sqrt[\alpha]{A\sqrt{-1}}$; mais c'est là une observation qui vaudrait bien la peine d'être faite aux commençans, à qui on ne parle jamais, dans les élémens, que de la *racine* QUARRÉE *de moins un.*

(*) Dans le vrai, cette dernière démonstration est tout aussi analitique que la première ; puisque les fonctions circulaires ne sont, au fond, que des transcendantes d'une espèce particulière, dont la théorie peut être présentée d'une manière tout à fait indépendante des considérations géométriques. C'est ainsi, en particulier, qu'elles ont été envisagées par M. Suremain-de-Missery, dans sa *Théorie des quantités imaginaires* (Paris, F. Didot, 1801, in-8.°). On trouve, au surplus, dans cet ouvrage (pag. 72), une démonstration du théorème de d'Alembert qui diffère très-peu de celles de MM. Du Bourguet et Garnier.

J. D. G.

En se bornant même aux seuls imaginaires de la forme $a \pm b\sqrt{-1}$, ne peut-on pas considérer des fonctions telles, par exemple, que

$$\text{Sin. Sin. Sin.} \ldots\ldots (a \pm b\sqrt{-1}) ,$$
$$\text{Cos. Cos. Cos.} \ldots\ldots (a \pm b\sqrt{-1}) ,$$
$$\text{Log. Log. Log.} \ldots\ldots (a \pm b\sqrt{-1}) ;$$

le nombre des sinus, cosinus ou logarithmes étant quelconque, fini ou infini, positif ou négatif, entier ou fractionnaire, commensurable ou incommensurable, et pouvant même être imaginaire de la forme $m \pm n\sqrt{-1}$? Ne peut-on pas également considérer des fonctions de la forme

$$(a \pm a'\sqrt{-1})^{m \pm m'\sqrt{-1} \mid r \pm r'\sqrt{-1}} \text{ ?}$$

Ne peut-on pas aussi considérer des fonctions de la forme

$$(a \pm b\sqrt{-1})^{(a' \pm b'\sqrt{-1})^{(a'' \pm b''\sqrt{-1})^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$$

ou de la forme

$$\frac{a \pm b\sqrt{-1}}{c \pm d\sqrt{-1}} + \frac{a' \pm b'\sqrt{-1}}{c' \pm d'\sqrt{-1}} + \frac{a'' \pm b''\sqrt{-1}}{c'' \pm d''\sqrt{-1}} + \ldots\ldots$$

les a, a', a'', ... b, b', b'', ... c, c', c'', ... d, d', d'', ... étant liés par une loi connue quelconque, et leur nombre pouvant être indifféremment fini ou infini, positif ou négatif, entier ou fractionnaire, commensurable ou incommensurable, ou même encore imaginaire, de la forme $m \pm n\sqrt{-1}$? Ne peut-on pas enfin considérer des fonctions d'imaginaires, composées de toutes celles-là et de beaucoup d'autres encore, telles que seraient, par exemple, des différentielles ou intégrales dont l'ordre serait imaginaire de la forme $m \pm n\sqrt{-1}$?

Il me semble que, dans tous les cas, la voie la plus simple pour parvenir, s'il est possible, à la démonstration du théorème, est celle que voici.

Soit posée l'équation

$$x = \varphi\{A\sqrt[2\alpha]{-1}\ ,\quad B\sqrt[2\beta]{-1}\ ,\quad C\sqrt[2\gamma]{-1}\ ,\ldots\}$$

et supposons, en premier lieu, que la fonction φ soit algébrique.

On

On pourra toujours, en chassant les dénominateurs et les radicaux, ramener cette équation à la forme

$$ax^m+bx^{m-1}+\dots\dots+gx+h=0\ ;$$

or, il est démontré, par les élémens, que toutes les racines d'une telle équation sont de la forme $p\pm q\sqrt{-1}$, sans en excepter même les racines réelles, puisqu'elles répondent à $q=0$; puis donc que la fonction φ est du nombre de ces racines, elle doit être aussi de cette forme.

Supposons, en second lieu, que la fonction φ soit transcendante, mais développable en une suite de termes qui soient algébriques ou du moins développables eux-mêmes en séries, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on n'ait plus qu'une suite de termes algébriques ; ces termes, d'après ce qui précède, seront tous de la forme $p\pm q\sqrt{-1}$; donc leur somme, c'est-à-dire, la fonction φ sera aussi de la même forme.

Toute la difficulté est donc maintenant réduite à savoir si vraiment toute fonction non algébrique est développable en série. Je regarde la chose comme extrêmement probable ; mais je ne crois pas qu'elle ait encore été jusqu'ici généralement et rigoureusement démontrée.