ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

KRAMP

Astronomie. Essai d'une nouvelle solution des principaux problèmes d'astronomie

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 4 (1813-1814), p. 161-179
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1813-1814__4__161_0>

ASTRONOMIE.

Essai d'une nouvelle solution des principaux problèmes d'astronomie ;

Par M. KRAMP, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.

1. SOIENT, p le *temps périodique* d'une planète ; a, le *demi-grand axe* ; $a\text{Cos.}\lambda$, le *demi-petit axe* ; $a\text{Sin.}\lambda$, l'*excentricité* ; φ, l'*anomalie vraie* ; φ', l'*anomalie de l'excentrique* ; t, le *temps*, compté depuis l'aphélie ; ce qui donne $\frac{2\varpi t}{p}$ pour l'*anomalie moyenne*. On parviendra de φ à φ', et de là à t, moyennant les équations connues

$$\frac{2\varpi t}{p}=\varphi'+\text{Sin.}\lambda\text{Sin.}\varphi'\ ,\quad \text{Sin.}\varphi'=\frac{\text{Cos.}\lambda\text{Sin}\,\varphi}{1-\text{Sin.}\lambda\text{Cos.}\varphi}\,,\quad \text{Cos.}\varphi'=\frac{\text{Cos.}\varphi-\text{Sin.}\lambda}{1-\text{Sin.}\lambda\text{Cos.}\varphi}\ .$$

2. *PROBLÈME I. Connaissant le temps* t, *et par conséquent l'anomalie moyenne* $\frac{2\varpi t}{p}$, *on demande l'anomalie vraie* φ, *exprimée par une série disposée selon les puissances ascendantes de l'excentricité* λ, *telle que* $\varphi=A+B\lambda+C\lambda^2+\ldots..$; *les coefficiens* A, B, C,.... *étant des fonctions de* t *qui ne renferment point* λ *et qu'il s'agit de déterminer ?*

A cet énoncé, on reconnaît le *Problème de Képler.* Pour le résoudre, on a employé jusqu'ici la série $\varphi=t+A\text{Sin.}t+B\text{Sin.}2t+C\text{Sin.}3t+\ldots..$ Ici les coefficiens A, B, C,.... étaient des séries, ordonnées selon les puissances ascendantes de l'excentricité ; convergentes, à la vérité, mais pourtant infinies, et qui ne sont sommables dans aucun cas. Les coefficiens de la nôtre seront des expressions finies ; et elle se trouvera ainsi exempte du défaut de l'autre.

3. *Solution.* Le premier terme est ce que devient φ, dans le cas de $\lambda=0$, ce qui donne $\frac{2\varpi t}{p}=\varphi'=\varphi$. Ainsi $A=\frac{2\varpi t}{p}$. Les autres coefficiens seront ce que deviennent, dans ce même cas de $\lambda=0$, les coefficiens différenticls partiels $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, $\frac{d^3\varphi}{dt^3}$,..... pris en regardant λ comme la seule variable, et le temps t comme exempt de différentiation. Cherchons d'abord l'équation différentielle complète entre dt, $d\lambda$ et $d\varphi$.

4. De $\text{Sin.}\varphi'=\frac{\text{Cos.}\lambda\text{Sin}\,\varphi}{1-\text{Sin.}\lambda\text{Cos.}\varphi}$ ou de

$$0=\text{Sin.}\varphi'-\text{Sin.}\varphi'\text{Sin.}\lambda\text{Cos.}\varphi-\text{Cos.}\lambda\text{Sin.}\varphi\,,$$

on tire en différentiant

$$\begin{aligned}0=&\,d\lambda(\text{Cos.}\lambda\text{Cos.}\varphi\text{Sin.}\varphi'-\text{Sin.}\lambda\text{Sin.}\varphi)\\&-d\varphi(\text{Sin.}\lambda\text{Sin.}\varphi\text{Sin.}\varphi'-\text{Cos.}\lambda\text{Cos.}\varphi)\\&-d\varphi'\text{Cos.}\varphi'(1-\text{Sin.}\lambda\text{Cos.}\varphi).\end{aligned}$$

En mettant à la place de $\text{Sin.}\varphi'$ et de $\text{Cos.}\varphi'$ leurs expressions en λ et en φ, cette équation deviendra divisible par $\text{Cos.}\varphi-\text{Sin.}\lambda$, et fournira, après les réductions

$$d\varphi'=\frac{d\lambda\text{Sin.}\varphi+d\varphi\text{Cos.}\lambda}{1-\text{Sin.}\lambda.\text{Cos.}\varphi}\,.$$

L'autre équation

$$\frac{2\varpi t}{p}=\varphi'+\text{Sin.}\lambda\text{Sin.}\varphi'\,,$$

donne, après avoir été différentiée et réduite

$$d\varphi'=-d\lambda\text{Sin.}\varphi+\frac{2\varpi dt}{p}.\frac{1-\text{Sin.}\lambda\text{Cos.}\varphi}{\text{Cos.}^2\lambda}\,.$$

Egalant entre elles les deux expressions de $d\varphi'$, on aura une équation entre les trois différentielles dt, $d\lambda$, $d\varphi$, d'après laquelle

$$d\varphi = \frac{2\varpi(1-\mathrm{Sin}.\lambda\mathrm{Cos}.\varphi)^2}{p\mathrm{Cos}.^3\lambda}\,dt - \frac{\mathrm{Sin}.\varphi(2-\mathrm{Sin}.\lambda\mathrm{Cos}.\varphi)}{\mathrm{Cos}.\lambda}\,d\lambda\ ;$$

d'où il résulte

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{2\varpi}{p}.\frac{(1-\mathrm{Sin}.\lambda\mathrm{Cos}\,\varphi)^2}{\mathrm{Cos}.^3\lambda}\ ,$$

$$\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right) = -\frac{\mathrm{Sin}.\varphi(2-\mathrm{Sin}.\lambda\mathrm{Cos}.\varphi)}{\mathrm{Cos}.\lambda}\ .$$

5. Considérant ici le temps t et l'anomalie vraie φ comme les seules variables, on aura l'équation très-connue

$$dt = \frac{p\mathrm{Cos}.^3\lambda\ d\varphi}{2\varpi(1-\mathrm{Sin}\ \lambda\mathrm{Cos}.\varphi)^2}\ ,$$

d'où l'on pourrait tirer, sur-le-champ, l'anomalie vraie φ, moyennant une série, ordonnée d'après les sinus des angles multiples de l'anomalie moyenne. Mais, si l'on regarde λ comme la seule variable, et le temps t comme exempt de différentiation, on aura d'abord

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\mathrm{Sin}.\varphi(2-\mathrm{Sin}.\lambda\mathrm{Cos}.\varphi)}{\mathrm{Cos}.\lambda}\ ,$$

pour le premier de nos *rapports différentiels partiels*. Faisons ici $\lambda=0$, on aura $\varphi=A$, et $\frac{d\varphi}{dt}=-2\mathrm{Sin}.A$. Il en résulte $B=-2\mathrm{Sin}.A$; et tel est le coefficient du second terme de la série.

6. Pour faciliter les différentiations ultérieures, et les développemens qui, dès le troisième terme deviennent assez compliqués, faisons $\mathrm{Sin}.\lambda=x$ et $\mathrm{Cos}.\varphi=y$; ce qui donne

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = -\frac{\mathrm{Sin}.\varphi}{\mathrm{Cos}.\lambda}(2-xy)\ ,\quad \frac{dx}{d\lambda}=\mathrm{Cos}.\lambda\ ,\quad \frac{dy}{d\lambda}=\frac{\mathrm{Sin}.^2\varphi}{\mathrm{Cos}.\lambda}(2-xy)\ .$$

Remarquons, de plus, que le rapport différentiel $\frac{d\,\varphi}{d\lambda^n}$ est constamment de la forme $\frac{z\mathrm{Sin}\ \varphi}{\mathrm{Cos}.^n\lambda}$, la lettre z désignant une fonction entièrement algébrique, ordonnée selon les puissances ascendantes de x et de y. Si l'on désigne par $Pdx+Qdy$ la différentielle de cette fonction z, on aura, après les réductions

$$\frac{d^{n+1}\varphi}{d\lambda^{n+1}}=\frac{\text{Sin.}\varphi}{\text{Cos.}^{n+1}\lambda}\{z(nx-2y+xy^2)+P(1-x^2)+Q(2-xy-2y^2+xy^3)\}.$$

Ainsi, pour trouver ces coefficiens, il faudra effectuer les multiplications; c'est la seule difficulté qu'il restera à surmonter.

7. D'après cela, pour passer du premier $\frac{d\varphi}{d\lambda}=-\frac{\text{Sin.}\varphi}{\text{Cos.}\lambda}(2-xy)$ au second $\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}$, on aura $n=1$, $z=-2+xy$, $P=y$, $Q=x$, d'où il résulte

$$\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}=\frac{\text{Sin.}\varphi}{\text{Cos.}^2\lambda}(5y-x^2y-6xy^2+2x^2y^3).$$

On en tire

$$\begin{aligned} n=2\ ;\ z&=5y-x^2y-6xy^2+2x^2y^3\ ,\\ P&=-2xy-6y^2+4xy^3\ ,\\ Q&=5-x^2-12xy+6x^2y^2\ ,\end{aligned}$$

donc

$$\frac{d^3\varphi}{d\lambda^3}=\frac{\text{Sin.}\varphi}{\text{Cos.}^3\lambda}\left\{\begin{matrix}10-2x^2+21xy-26y^2+x^3y\\ +22x^2y^2+50xy^3-8x^3y^3-34x^2y^4+8x^3y^5\end{matrix}\right\}.$$

Faisant ensuite $n=3$ et

$$\begin{aligned} z&=10-2x2-21xy-26y^2+x^3y+22x^2y^2+50xy^3-8x^3y^3-34x^2y^4+8x^3y^5\ ,\\ P&=-4x-21y+3x^2y+44xy^2+50y^3-24x^2y^3-68xy^4+24x^2y^5\ ,\\ Q&=-21x-52y+x^3+44x^2y+150xy^2-24x^3y^2-136x^2y^3+40x^3y^4\ ;\end{aligned}$$

d'où il résulte

$$\frac{d^4\varphi}{d\lambda^4}=\frac{\text{Sin.}\varphi}{\text{Cos.}4\lambda}\cdot\left\{\begin{matrix}-16x-145y+74x^2y+412xy^2+206y^3\\ -x^4y-76x^3y^2-520x^2y^3-546xy^4+26x^4y^3\\ +288x^3y^4+564x^2y^5-72x^4y^5-266x^3y^6+48x^4y^7\end{matrix}\right\}.$$

Et ainsi des autres.

8. Il ne reste donc qu'à faire, dans tous ces rapports différentiels, $\lambda=0$, et par conséquent $x=0$, $\varphi=A$, $y=\text{Cos.}A$. On aura

$$B=-2\text{Sin.}A\ ,$$

$$2C = +5\,\mathrm{Sin.}A\,\mathrm{Cos.}A\ ,$$
$$6D = +\ \mathrm{Sin.}A(10 - 26\,\mathrm{Cos.}^2A)\ ;$$
$$24E = -\ \mathrm{Sin.}A\,\mathrm{Cos.}A(145 - 206\,\mathrm{Cos.}^2A)\ ,$$
$$120F = -\ \mathrm{Sin.}A(306 - 2228\,\mathrm{Cos.}^2A + 2194\,\mathrm{Cos.}^4A)\ ,$$

et ainsi des autres. On aura $\varphi = A + B\lambda + C\lambda^2 + D\lambda^3 + \ldots\ldots$ La série, ordonnée selon les puissances ascendantes de la petite fraction angulaire λ, est convergente par elle-même ; et les coefficiens numériques qui accompagnent les puissances de $\mathrm{Cos.}A$ ne mettent aucun obstacle à cette convergence.

9. La série donnée par l'illustre auteur de la *Mécanique céleste* (tome I, page 181), est

$$\varphi = A + (2e - \tfrac{1}{4}e^3 + \tfrac{5}{96}e^5)\mathrm{Sin.}A + (\tfrac{5}{4}e^2 - \tfrac{11}{24}e^4 + \tfrac{17}{192}e^6)\mathrm{Sin.}2A$$
$$+ (\tfrac{13}{12}e^3 - \tfrac{43}{64}e^5)\mathrm{Sin.}3A + (\tfrac{103}{96}e^4 - \tfrac{451}{480}e^6)\mathrm{Sin.}4A$$
$$+ \tfrac{1097}{960}e^5\mathrm{Sin.}5A + \tfrac{1223}{960}e^6\mathrm{Sin.}6A.$$

Pour la transformer dans la nôtre, il suffira de mettre à la place de $\mathrm{Sin.}2A$, $\mathrm{Sin.}3A$, ... les formules connues, ordonnées selon les puissances ascendantes de $\mathrm{Cos.}A$; il faudra faire de plus $e = \mathrm{Sin.}\lambda$ et changer enfin les signes de λ et de toutes ses puissances impaires, attendu que, dans notre formule, les anomalies sont comptées, non du périhélie, mais de l'aphélie. On reconnaîtra bientôt ainsi l'identité absolue entre l'une et l'autre.

10. Faisant, dans cette formule, $t = p$ ou $t = \frac{1}{2}p$, on aura $\varphi = A$. Et si l'on fait $t = \frac{1}{4}p$, il résultera $\varphi = 90^\circ - 2\lambda + \frac{5}{3}\lambda^3 - \frac{51}{20}\lambda^5 + \ldots$ On aura donc $90^\circ - \varphi = 2\lambda - \frac{5}{3}\lambda^3 + \frac{51}{20}\lambda^5 - \ldots$; et telle est aussi, à très-peu près, la plus grande *équation du centre.*

11. *PROBLÈME II. On demande d'exprimer le rayon vecteur* r, *par une série analogue à la précédente, savoir* $r = 1 + B\lambda + C\lambda^2 + D\lambda^3 + \ldots\ldots$; *le demi-grand axe étant supposé égal à l'unité ?*

12. *Solution.* On a, par la théorie connue de l'ellipse,

$$r = \frac{\mathrm{Cos.}^2\lambda}{1 - \mathrm{Sin.}\lambda\,\mathrm{Cos.}\varphi}\ .$$

Le premier terme de la série étant ce que devient r, dans le cas de $\lambda=0$, c'est-à-dire, égal à l'unité; pour trouver $\frac{dr}{d\lambda}$, faisons encore

$$\left.\begin{array}{l} x=\text{Sin.}\lambda\ , \\ y=\text{Cos.}\varphi\ ; \end{array}\right\}\ \text{d'où}\ \left\{\begin{array}{l} dx=\ \ d\lambda\text{Cos.}\lambda\ , \\ dy=-d\varphi\,\text{Sin.}\varphi\ ; \end{array}\right.$$

donc

$$\frac{dx}{d\lambda}=\text{Cos.}\lambda\ ;\quad \frac{dy}{d\lambda}=\frac{\text{Sin.}^2\varphi}{\text{Cos.}\lambda}(2-xy)\ ,\quad \frac{d\varphi}{d\lambda}=-\frac{\text{Sin.}\varphi}{\text{Cos.}\lambda}(2-xy)\ ;$$

de plus

$$r=\frac{1-x^2}{1-xy}\ ,$$

d'où on conclura, après les réductions, la formule très-simple $\frac{dr}{d\lambda}=y\text{Cos.}\lambda$.

13. Pour effectuer, avec facilité, les différentiations ultérieures; remarquons que le rapport différentiel $\frac{d^nr}{d\lambda^n}$ aura generalement la forme $\frac{z}{\text{Cos.}^{n-2}\lambda}$; la lettre z désignant un polynôme ordonné selon les puissances ascendantes de x et de y, et dont la différentielle complète pourra être supposée $dz=Pdx+Qdy$. Il en résultera, après les réductions, le rapport suivant

$$\frac{d^{n+1}r}{d\lambda^{n+1}}=\frac{(n-2)zx+P(1-x^2)+Q(2-xy-2y^2+xy^3)}{\text{Cos.}^{n-2}\lambda}\ .$$

Aidé de cette formule générale, on passera facilement d'un rapport différentiel à l'autre; les multiplications à faire seront la seule difficulté qu'il faudra surmonter.

Ainsi, ayant eu $\frac{dr}{d\lambda}=y\text{Cos.}\lambda$, on aura d'abord, par la différentiation,

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2}=2-2xy-2y^2+xy^3\ ;$$

et dès lors on pourra se servir de la formule générale. Pour trouver $\frac{d^3y}{d\lambda^3}$, on aura

$$n=2\ , \quad z=2-2xy-2y^2+xy^3\ ,$$
$$P=-2y+y^3\ ,$$
$$Q=-2x-4y+3xy^2\ ;$$

d'où on conclura

$$\frac{d^3r}{d\lambda^3}=\frac{1}{\text{Cos.}\lambda}.\left\{\begin{array}{l}-4x-10y+4x^2y+14xy^2\\ +9y^3-6x^2y^3-10xy^4+3x^2y^5\end{array}\right\}.$$

Par un semblable procédé, on fera ensuite $n=3$,

$$z=-4x-10y+4x^2y+14xy^2+9y^3-6x^2y^3-10xy^4+3x^2y^5\ ,$$
$$P=-4+8xy+14y^2-12xy^3-10y^4+6xy^5\ ,$$
$$Q=-10+4x^2+28xy+27y^2-18x^2y^2-40xy^3+15x^2y^4\ ;$$

d'où on conclura

$$\frac{d^4r}{d\lambda^4}=\frac{1}{\text{Cos.}^2\lambda}\left\{\begin{array}{l}-24+8x^2+64xy+88y^2-8x^3y\\ -72x^2y^2-176xy^3-64y^4+28x^3y^3+134x^2y^4\\ +113xy^5-36x^3y^5-70x^2y^6+15x^3y^7\end{array}\right\};$$

et ainsi du reste.

14. Ainsi donc, pour trouver les coefficiens de la série $r=1+B\lambda+C\lambda^2+D\lambda^3+\ldots\ldots$, il faudra voir ce que deviendront ces rapports différentiels $\frac{dr}{d\lambda}$, $\frac{d^2r}{d\lambda^2}$, $\frac{d^3r}{d\lambda^3}$, ..., dans le cas de $\lambda=0$, qui donne $x=0$, $\varphi=A=\frac{2\varpi t}{p}$, et $y=\text{Cos.}A$; et l'on aura

$$B=+\text{Cos.}A\ ,$$
$$2C=+2-2\text{Cos.}^2A\ ;$$
$$6D=-10\text{Cos.}A+9\text{Cos.}^3A\ ;$$
$$24E=-24+88\text{Cos.}^2A-64\text{Cos.}^4A\ ,$$
$$120F=+416\text{Cos.}A-1040\text{Cos.}^3A+625\text{Cos.}^5A\ ;$$

et ainsi des autres.

15. Dans le cas de $t=0$, on aura $A=0$; $\text{Cos.}A=1$, et $r=1+\lambda-\frac{\lambda^3}{6}+\frac{\lambda^5}{120}-\ldots$, ou bien, $r=1+\text{Sin.}\lambda$. Dans le cas de $t=\frac{1}{2}p$, on aura $A=\varpi$, $\text{Cos.}A=-1$, et $r=1-\lambda+\frac{\lambda^3}{6}-\frac{\lambda^5}{120}+\ldots$, ou bien, $r=1-\text{Sin.}\lambda$. Il est presque superflu de remarquer que ces deux expressions $1+\text{Sin.}\lambda$, $1-\text{Sin.}\lambda$, sont effectivement celles des distances du foyer de l'ellipse à ses deux apsides. Faisant enfin $t=\frac{1}{4}p$, on aura $A=\frac{1}{2}\varpi$, $\text{Cos.}A=0$, et $r=1+\lambda^2-\lambda^4+\lambda^6-\ldots$, ou bien, $r=\frac{1+2\lambda^2}{1+\lambda^2}$. Ainsi, le rayon vecteur qui répond au quart de la révolution est une fonction algébrique de la quantité angulaire λ.

16. Nous nous proposerons, en troisième lieu, de déterminer, pour un temps quelconque proposé, la *longitude géocentrique* d'une planète, moyennant une série double, ordonnée selon les puissances ascendantes des excentricités de la planète et de la terre. L'extrême complication des calculs auxquels nous conduit le développement des coefficiens nous oblige à faire une supposition qui heureusement est admissible, et qui ne restreint en aucune manière la généralité du problème. Nous supposerons que, la terre étant dans l'aphélie de son orbite, la planète soit en même temps à une très-petite distance de l'une de ses deux apsides. De pareilles époques sont toujours assignables, et leurs retours doivent former des périodes que l'on peut déterminer avec toute la précision qu'on désire. Soient, en effet, p et q, les durées des *révolutions anomalistiques* des deux planètes et α, β leurs anomalies vraies, pour une époque quelconque. Il est clair que la première des deux planètes passera par l'une de ses apsides au bout d'un temps égal à $\frac{\alpha+m\varpi}{2\varpi}p$, tandis que l'autre passera par l'un des siens au bout d'un temps $\frac{\beta+n\varpi}{2\varpi}q$: les deux nombres m, n étant des nombres entiers quelconques, *positifs* ou *négatifs*. Donc, pour déterminer une des époques où les deux

deux planètes auront été ou seront, à la fois, dans l'une de leurs apsides, il faudra déterminer les deux nombres entiers m et n de manière qu'ils remplissent le plus exactement que possible la condition

$$\frac{\alpha+m\varpi}{2\varpi}.p=\frac{\beta+n\varpi}{2\varpi}q \quad \text{ou} \quad mp-nq=\frac{\beta q-\alpha p}{\varpi};$$

et l'on sent que la solution de cette question ne peut présenter de difficulté.

17. *PROBLÈME III. On demande, pour un temps quelconque proposé, la longitude géocentrique d'une planète généralement exprimée par une série double, ordonnée selon les puissances ascendantes des excentricités de l'orbite de la planète et de celle de la terre?*

18. *Solution.* Supposons que la terre et la planète ayant quitté au même instant leurs aphélies A, B (fig. 1), soient arrivées, au bout du temps t, aux points P, Q de leurs orbites respectives; en désignant par F le foyer commun ou le centre du soleil, et supposant que la ligne des équinoxes soit EE′, l'angle EHQ sera la longitude géocentrique de la planète. Désignons de plus:

par p et q les durées des révolutions anomalistiques,
par a et b les demi-grands axes des deux orbites,
par $a\text{Cos}.\lambda$ et $b\text{Cos}.\mu$ leurs demi-petits axes,
par $a\text{Sin}.\lambda$ et $b\text{Sin}.\mu$ leurs excentricités,
par α et β les longitudes EFA, EFB des deux aphélies,
par φ et ψ les deux anomalies vraies AFP, BFQ, à l'époque t,
par φ' et ψ' les deux anomalies de l'excentrique,
par r et s les deux rayons vecteurs FP, FQ,
et enfin par ϖ la longitude géocentrique demandée EHQ.

19. Les deux longitudes héliocentriques seront ainsi les angles EFP, EFQ; et l'on aura

$$\text{EFP}=\alpha-\varphi, \quad \text{EFQ}=\beta-\psi;$$

ce qui donne

$$\text{Tang}.\varpi=\frac{s\text{Sin}.(\beta-\psi)-r\text{Sin}.(\alpha-\varphi)}{s\text{Cos}.(\beta-\psi)-r\text{Cos}.(\alpha-\varphi)}.$$

On aura de plus, pour les deux rayons vecteurs FP et FQ ou r et s

$$r=\frac{a\mathrm{Cos.}^2\lambda}{1-\mathrm{Sin.}\lambda\mathrm{Cos.}\varphi}, \qquad s=\frac{b\mathrm{Cos.}^2\mu}{1-\mathrm{Sin.}\mu\mathrm{Cos.}\psi}.$$

On aura enfin les équations, déjà employées dans le premier problème, par lesquelles on passe de l'anomalie vraie à l'anomalie moyenne, et réciproquement : savoir,

$$\mathrm{Sin.}\varphi'=\frac{\mathrm{Cos.}\lambda\mathrm{Sin.}\varphi}{1-\mathrm{Sin.}\lambda\mathrm{Cos.}\varphi}, \qquad \mathrm{Sin.}\psi'=\frac{\mathrm{Cos.}\mu\mathrm{Sin.}\psi}{1-\mathrm{Sin.}\mu\mathrm{Cos.}\psi},$$

$$\mathrm{Cos.}\varphi'=\frac{\mathrm{Cos.}\varphi-\mathrm{Sin.}\lambda}{1-\mathrm{Sin.}\lambda\mathrm{Cos.}\varphi}, \qquad \mathrm{Cos.}\psi'=\frac{\mathrm{Cos.}\varphi-\mathrm{Sin.}\lambda}{1-\mathrm{Sin.}\mu\mathrm{Cos.}\psi},$$

$$\frac{2\varpi t}{p}=\varphi'+\mathrm{Sin.}\lambda\mathrm{Sin.}\varphi'\,; \qquad \frac{2\varpi t}{q}=\psi'+\mathrm{Sin.}\mu\mathrm{Sin.}\psi.$$

20. Comme on demande pour w une série double, ordonnée selon les puissances ascendantes des deux excentricités, telle que

$$\begin{aligned} w=A+B\lambda+C\lambda^2+D\lambda^3+\ldots\ldots \\ +B'\mu+C'\lambda\mu+D'\lambda^2\mu+\ldots\ldots \\ +C''\mu^2+D''\lambda\mu^2+\ldots\ldots \\ +D'''\mu^3+\ldots\ldots \\ +\ldots\ldots \end{aligned}$$

on voit que son premier terme A sera ce que devient l'angle w, dans le cas de $\lambda=0$, $\mu=0$; ce qui donne $r=a$, $s=b$, $\varphi=\frac{2\varpi t}{p}$, $\psi=\frac{2\varpi t}{q}$; d'où il résulte

$$\mathrm{Tang.}A=\frac{a\mathrm{Sin.}\left(\alpha-\frac{2\varpi t}{p}\right)-b\mathrm{Sin.}\left(\beta-\frac{2\varpi t}{q}\right)}{a\mathrm{Cos.}\left(\alpha-\frac{2\varpi t}{p}\right)-b\mathrm{Cos.}\left(\beta-\frac{2\varpi t}{q}\right)}.$$

21. Les deux coefficiens qui suivent, B et B', seront ce que deviennent les deux rapports différentiels $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\lambda}$, $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\mu}$, dans la même supposition de $\lambda=0$, $\mu=0$; et l'on voit que la differentiation doit

porter uniquement sur les deux excentricités λ et μ, et que le temps t doit être regardé comme exempt de différentiation. On aura ainsi

$$\frac{d\phi}{d\lambda}=-\frac{\text{Sin}.\phi(2-\text{Sin}.\lambda\text{Cos}.\phi)}{\text{Cos}.\lambda}, \qquad \frac{dr}{d\lambda}=a\text{Cos}.\lambda\text{Cos}.\phi,$$

$$\frac{d\psi}{d\mu}=-\frac{\text{Sin}.\psi(2-\text{Sin}.\mu\text{Cos}.\psi)}{\text{Cos}.\mu}; \qquad \frac{ds}{d\mu}=b\text{Cos}.\mu\text{Cos}.\psi.$$

22. Enfin, de l'expression de Tang.ϖ, donnée ci-dessus, on tire l'expression générale de dϖ, ainsi qu'il suit

$$d\varpi=\frac{\begin{array}{c}-r^2d\phi+rsd\phi\text{Cos}.(\alpha-\beta-\phi+\psi)-sdr\text{Sin}.(\alpha-\beta-\phi+\psi)\\-s^2d\psi+rsd\psi\text{Cos}.(\alpha-\beta-\phi+\psi)+rds\text{Sin}.(\alpha-\beta-\phi+\psi)\end{array}}{r^2-2rs\text{Cos}.(\alpha-\beta-\phi+\psi)+s^2};$$

ce qui donnera, pour les deux coefficiens partiels $\frac{d\varpi}{d\lambda}$, $\frac{d\varpi}{d\mu}$

$$\frac{d\varpi}{d\lambda}=\frac{\text{Cos}.\lambda}{r^2-2rs\text{Cos}.(\alpha-\beta-\phi+\psi)+s^2}\left\{\frac{a^2\text{Cos}.^2\lambda\text{Sin}.\phi(2-\text{Sin}.\lambda\text{Cos}.\phi)}{(1-\text{Sin}.\lambda\text{Cos}.\phi)^2}\right.$$
$$-\frac{ab\text{Cos}.^2\mu\text{Sin}.\phi(2-\text{Sin}.\lambda\text{Cos}.\phi)}{(1-\text{Sin}.\lambda\text{Cos}.\phi)(1-\text{Sin}.\mu\text{Cos}.\psi)}\text{Cos}.(\alpha-\beta-\phi+\psi)$$
$$\left.-\frac{ab\text{Cos}.^2\mu\text{Cos}.\phi}{(1-\text{Sin}.\mu\text{Cos}.\psi)}\text{Sin}.(\alpha-\beta-\phi+\psi)\right\};$$

$$\frac{d\varpi}{d\mu}=\frac{\text{Cos}.\mu}{r^2-2rs\text{Cos}.(\alpha-\beta-\phi+\psi)+s^2}\left\{\frac{b^2\text{Cos}.^2\mu\text{Sin}.\psi(2-\text{Sin}.\mu\text{Cos}.\psi)}{(1-\text{Sin}.\mu\text{Cos}.\psi)^2}\right.$$
$$-\frac{ab\text{Cos}.^2\lambda\text{Sin}.\psi(2-\text{Sin}.\mu\text{Cos}.\psi)}{(1-\text{Sin}.\lambda\text{Cos}.\phi)(1-\text{Sin}.\mu\text{Cos}.\psi)}\text{Cos}.(\alpha-\beta-\phi+\psi)$$
$$\left.+\frac{ab\text{Cos}.^2\lambda\text{Cos}.\psi}{(1-\text{Sin}.\lambda\text{Cos}.\phi)}\text{Sin}.(\alpha-\beta-\phi+\psi)\right\}.$$

24. Pour en tirer les deux coefficiens B, B', il faudra faire, dans les deux expressions, $\lambda=0$, $\mu=0$, $r=a$, $s=b$, $\phi=\frac{2\varpi t}{p}$, $\psi=\frac{2\varpi t}{q}$; on aura ainsi

$$B=\frac{1}{a^2-ab\,\mathrm{Cos.}\left(\alpha-\beta-\frac{2\varpi t}{p}+\frac{2\varpi t}{q}\right)+b^2}\left\{2a^2\mathrm{Sin.}\frac{2\varpi t}{p}\right.$$

$$\left.-2ab\,\mathrm{Sin.}\frac{2\varpi t}{p}\,\mathrm{Cos.}\left(\alpha-\beta-\frac{2\varpi t}{p}+\frac{2\varpi t}{q}\right)-ab\,\mathrm{Cos.}\frac{2\varpi t}{p}\,\mathrm{Sin.}\left(\alpha-\beta-\frac{2\varpi t}{p}+\frac{2\varpi t}{q}\right)\right\},$$

$$B'=\frac{1}{a^2-2ab\,\mathrm{Cos.}\left(\alpha-\beta-\frac{2\varpi t}{p}+\frac{2\varpi t}{q}\right)+b^2}\left\{2b^2\mathrm{Sin.}\frac{2\varpi t}{q}\right.$$

$$\left.-2ab\,\mathrm{Sin.}\frac{2\varpi t}{p}\,\mathrm{Cos.}\left(\alpha-\beta-\frac{2\varpi t}{p}+\frac{2\varpi t}{q}\right)+ab\,\mathrm{Cos.}\frac{2\varpi t}{q}\,\mathrm{Sin.}\left(\alpha-\beta-\frac{2\varpi t}{p}+\frac{2\varpi t}{q}\right)\right\}.$$

25. La forme, très-compliquée, des deux différentielles partielles $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\lambda}$, $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\mu}$ ne permet guère de procéder, avec quelque espérance de succès, au développement des coefficiens ultérieurs; et nous avouons que la formule que nous venons de trouver ne pourra guère être regardée que comme le résultat d'une première approximation, à laquelle il nous paraît convenable de nous arrêter. Pour trouver la longitude géocentrique, avec une plus grande précision, il faudra encore recourir, dans chaque cas particulier, à l'emploi des tables, et renoncer aux avantages qui pourraient résulter d'une formule générale.

26. Connaissant la position des deux aphélies, ou les angles EFA, EFB; et les deux longitudes héliocentriques EFP, EFQ, et par conséquent aussi les deux rayons vecteurs FP, FQ, on trouvera la longitude géocentrique, ou l'angle EHQ par la formule

$$\mathrm{Tang.EHQ}=\frac{\mathrm{FQ}\,Sin.\mathrm{EFQ}-\mathrm{FP}\,Sin.\mathrm{EFP}}{\mathrm{FQ}\,Cos.\mathrm{EFQ}-\mathrm{FP}\,Cos.\mathrm{EFP}}\;.$$

Ici la ligne FP, rayon vecteur de la terre, peut toujours être regardée comme donnée; mais, pour trouver FQ, rayon vecteur de la planète, il faut connaître l'anomalie vraie de cette dernière, ou l'angle AFQ, qui est lui-même égal à la longitude EFB de l'aphélie, moins la longitude héliocentrique EFQ; ce qui fait naître une difficulté, lorsque, de la longitude géocentrique, qui est la seule donnée, tant par les tables que par l'observation, on veut repasser à la longitude héliocentrique. La difficulté sera levée, par la résolution du problème que voici.

27. *Connaissant, outre les longitudes des deux aphélies, aussi bien que les grands axes et les excentricités des deux orbites, la longitude géocentrique d'une planète, pour un instant donné, trouver sa longitude héliocentrique?*

Désignons par

B l'angle EFB, longitude de l'aphélie de la planète;

b le côté BF, demi-grand axe,

ϖ l'angle EHQ, longitude géocentrique de la planète,

f le rayon vecteur FP,

η l'angle EFP, longitude héliocentrique de la terre,

θ l'angle EFQ, longitude héliocentrique de la planète;

donc, Ang.FPH$=\varpi-\eta$,

Ang.PQF$=\varpi-\theta$.

L'angle BFQ, anomalie vraie de la planète, sera $B-\theta$; et l'angle θ formera ainsi l'inconnue du problème.

Le triangle FPQ donnera FP : FQ$=\text{Sin.}(\varpi-\theta):\text{Sin.}(\varpi-\eta)$; donc

$$\text{FQ}=\frac{\text{Sin.}(\varpi-\eta)}{\text{Sin.}(\varpi-\theta)}f.$$

Mais, parce que FQ est un rayon vecteur de l'ellipse, on a aussi

$$\text{FQ}=\frac{b\text{Cos.}^2\mu}{1-\text{Sin.}\mu\text{Cos.}(B-\theta)};$$

donc, si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{b\text{Cos.}^2\mu}{f\text{Sin.}(\varpi-\eta)}=n,$$

on aura l'équation

$$1=n\text{Sin.}(\varpi-\theta)+\text{Sin.}\mu\text{Cos.}(B-\theta).$$

Pour la résoudre, il suffira de faire

$$\text{Tang.K}=\frac{n\text{Cos.}\varpi-\text{Sin.}\mu\text{Sin.}B}{n\text{Sin.}\varpi+\text{Sin.}\mu\text{Cos.}B},\quad \text{R}^2=n^2+2n\text{Sin.}\mu\text{Sin.}(\varpi-B)+\text{Sin.}^2\mu;$$

et l'on aura finalement

$$\text{Cos.}(\theta+\text{K})=\frac{1}{\text{R}}.$$

Le problème sera résolu.

28. *PROBLÈME VI. On demande de comprendre les époques des conjonctions et des oppositions d'une planète dans une seule série double, ordonnée selon les puissances ascendantes des deux excentricités?*

29. *Solution.* Par les mêmes raisons exposées au sujet du précédent problème, le temps t sera compté d'une époque où, la terre étant dans son aphélie en A, la planète était très-près de l'une de ses deux apsides B ou B'. Les quantités données du problème seront donc: savoir, les demi-grands axes a, b des deux orbites; les deux demi-petits axes $a\text{Cos.}\lambda$, $b\text{Cos.}\mu$; les deux révolutions anomalistiques, p, q; enfin l'angle AFB que les deux grands axes font entre eux, et que nous désignerons par ε; et les lettres φ et ψ continueront à désigner les anomalies vraies AFP, BFQ des deux planètes au bout du temps t. On aura ainsi AFP$=\varphi$, AFQ$=\varepsilon+\psi$; ce qui donne, pour le cas du problème $\varphi-\psi-\varepsilon=n\varpi$; la lettre n désignant un nombre entier pris à volonté, *pair* dans les *conjonctions*, *impair* dans les *oppositions*. Il en résulte l'équation différentielle $d\varphi=d\psi$; c'est la première des équations différentielles qui nous conduiront à la connaissance des coefficiens.

30. La série étant supposée de la forme

$$\begin{aligned} t=A+B\lambda+C\lambda^2+D\lambda^3+&\ldots\ldots \\ +B'\mu+C'\lambda\mu+D'\lambda^2\mu+&\ldots\ldots \\ +C''\mu^2+D''\lambda\mu^2+&\ldots\ldots \\ +D'''\mu^3+&\ldots\ldots \\ +&\ldots\ldots \end{aligned}$$

Le premier terme A sera ce que devient t dans le cas de $\lambda=0$, $\mu=0$; or, on a, dans ce cas, $\frac{2\varpi t}{p}=\varphi$, $\frac{2\varpi t}{q}=\psi$, ce qui fournit l'équation $\frac{2\varpi t}{p}-\frac{2\varpi t}{q}=n\varpi+\varepsilon$; donc

$$A = \frac{(n\varpi + \varepsilon)pq}{2\varpi(q-p)}.$$

Telle est la valeur du *premier* coefficient de la série.

31. Les coefficiens B, B' seront ce que deviennent, dans le cas de $\lambda = 0$, $\mu = 0$, les deux rapports différentiels partiels $\frac{dt}{d\lambda}$, $\frac{dt}{d\mu}$: On a trouvé (4), dans le premier problème, pour la différentielle complète de φ,

$$d\varphi = \frac{2\varpi(1-\text{Sin.}\lambda\text{Cos.}\varphi)^2}{p\text{Cos.}^3\lambda}dt - \frac{\text{Sin.}\varphi(2-\text{Sin.}\lambda\text{Cos.}\varphi)}{\text{Cos.}\lambda}d\lambda;$$

on aura de même, pour la seconde orbite,

$$d\psi = \frac{2\varpi(1-\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\psi)^2}{q\text{Cos.}^3\mu}dt - \frac{\text{Sin.}\psi(2-\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\psi)}{\text{Cos.}\mu}d\mu:$$

Egalant entre elles ces deux différentielles, ce qui est effectivement l'équation de condition (29) des syzygies, on en tirera la différentielle complète de t qui doit répondre à la nature du problème; ce qui donnera ensuite, pour les rapports différentiels $\frac{dt}{d\lambda}$, $\frac{dt}{d\mu}$,

$$\frac{dt}{d\lambda} = +\frac{1}{2\varpi}\cdot\frac{pq\text{Cos.}^2\lambda\text{Cos.}^3\mu\text{Sin.}\varphi(2-\text{Sin.}\lambda\text{Cos.}\varphi)}{q\text{Cos.}^3\mu(1-\text{Sin.}\lambda\text{Cos.}\varphi)^2 - p\text{Cos.}^3\lambda(1-\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\psi)^2},$$

$$\frac{dt}{d\mu} = -\frac{1}{2\varpi}\cdot\frac{pq\text{Cos.}^2\mu\text{Cos.}^3\lambda\text{Sin.}\psi(2-\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\psi)}{q\text{Cos.}^3\mu(1-\text{Sin.}\lambda\text{Cos.}\varphi)^2 - p\text{Cos.}^3\lambda(1-\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\psi)^2}.$$

32. Il ne restera qu'à faire, dans ces expressions, $\lambda = 0$, $\mu = 0$; ce qui donne $\varphi = \frac{2\varpi A}{p}$, $\psi = \frac{2\varpi A}{q}$, pour avoir les deux coefficiens B, B'. On trouvera ainsi

$$B = \frac{pq\text{Sin.}\frac{2\varpi A}{p}}{\varpi(q-p)}, \qquad B' = \frac{pq\text{Sin.}\frac{2\varpi A}{q}}{\varpi(q-p)}:$$

33. Les coefficiens C, C', C'' des termes du second ordre seront ce que deviennent, dans le même cas de $\lambda = 0$, $\mu = 0$, les trois

rapports différentiels partiels $\frac{d^2t}{2d\lambda^2}$, $\frac{2d^2t}{2d\lambda d\mu}$, $\frac{d^2t}{2d\mu^2}$. Faisant, pour abréger

$$P=1-\mathrm{Sin.}\lambda\mathrm{Cos.}\varphi \quad , \qquad Q=1-\mathrm{Sin}\,\mu\mathrm{Cos.}\psi \ ,$$

ce qui donne

$$dP=-d\lambda\,\mathrm{Cos.}\lambda\mathrm{Cos.}\varphi+d\varphi\,\mathrm{Sin.}\lambda\,\mathrm{Sin.}\,\varphi \ ,$$
$$dQ=-d\mu\mathrm{Cos.}\mu\mathrm{Cos.}\psi+d\psi\mathrm{Sin.}\mu\mathrm{Sin.}\psi \ ;$$

on parviendra ainsi à donner une forme un peu plus abrégée aux deux rapports $\frac{dt}{d\lambda}$, $\frac{dt}{d\mu}$, lesques deviendront

$$2\varpi\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)=+\frac{pq\mathrm{Cos.}^2\lambda\mathrm{Cos.}^3\mu\mathrm{Sin.}\varphi(1+P)}{qP^2\mathrm{Cos.}^3\mu-pQ^2\mathrm{Cos.}^3\lambda} \ ,$$
$$2\varpi\left(\frac{dt}{d\mu}\right)=-\frac{pq\mathrm{Cos.}^2\mu\mathrm{Cos.}^3\lambda\mathrm{Sin.}\psi(1+Q)}{qP^2\mathrm{Cos.}^3\mu-pQ^2\mathrm{Cos.}^3\lambda} \ .$$

Mais il est convenable d'abréger encore. Désignons par F, M, N le dénominateur commun et les numérateurs de ces deux valeurs, de manière qu'on ait

$$2\varpi\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)=\frac{M}{F} \quad , \quad 2\varpi\left(\frac{dt}{d\mu}\right)=\frac{N}{F} \ ;$$

les différentiations partielles nous apprendront que

$$\left(\frac{dF}{d\lambda}\right)=-2qP\mathrm{Cos.}\lambda^3\mu\mathrm{Cos.}\varphi+3pQ^2\mathrm{Sin.}\lambda\mathrm{Cos.}^2\lambda$$
$$+\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)(2qP\mathrm{Cos.}^3\mu\mathrm{Sin.}\lambda\mathrm{Sin.}\varphi-2pQ\mathrm{Cos.}^3\lambda\mathrm{Sin.}\mu\mathrm{Sin.}\psi) \ ,$$
$$\left(\frac{dF}{d\mu}\right)=+2pQ\mathrm{Cos.}\mu\mathrm{Cos.}^3\lambda\mathrm{Cos.}\psi-3qP^2\mathrm{Sin.}\mu\mathrm{Cos.}^2\mu$$
$$+\left(\frac{d\psi}{d\mu}\right)(2qP\mathrm{Cos.}^3\mu\mathrm{Sin.}\lambda\mathrm{Sin.}\varphi-2pQ\mathrm{Cos.}^3\lambda\mathrm{Sin.}\mu\mathrm{Sin.}\psi) \ ;$$
$$\left(\frac{dM}{d\lambda}\right)=-pq\mathrm{Cos.}\lambda\mathrm{Cos.}^3\mu\mathrm{Sin.}\varphi(4\mathrm{Sin.}\lambda+\mathrm{Cos.}^2\lambda\mathrm{Cos.}\varphi-2\mathrm{Sin.}^2\lambda\mathrm{Cos.}\varphi)$$

+

$$+\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)(pq\text{Cos.}^2\lambda\text{Cos.}^3\mu(2\text{Cos.}\varphi-\text{Sin.}\lambda\text{Cos.}^2\varphi+\text{Sin.}\lambda\text{Sin.}^2\varphi),$$

$$\left(\frac{dM}{d\mu}\right)=-3pq\text{Cos.}^2\lambda\text{Cos.}^2\mu\text{Sin.}\mu\text{Sin.}\varphi(2-\text{Sin.}\lambda\text{Cos.}\varphi)$$

$$+\left(\frac{d\psi}{d\mu}\right)pq\text{Cos.}^2\lambda\text{Cos.}^3\mu(2\text{Cos.}\varphi-\text{Sin.}\lambda\text{Cos.}^2\varphi+\text{Sin.}\lambda\text{Sin.}^2\varphi),$$

$$\left(\frac{dN}{d\lambda}\right)=-3pq\text{Cos.}^2\lambda\text{Sin.}\lambda\text{Cos.}^2\mu\text{Sin.}\psi(2-\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\psi)$$

$$+\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)pq\text{Cos.}^3\lambda\text{Cos.}^2\mu(2\text{Cos.}\psi-\text{Sin.}\mu\text{Cos.}^2\psi+\text{Sin.}\mu\text{Sin.}^2\psi),$$

$$\left(\frac{dN}{d\mu}\right)=-pq\text{Cos.}^3\lambda\text{Cos.}\mu\text{Sin.}\psi(4\text{Sin.}\mu+\text{Cos.}^2\mu\text{Cos.}\psi-2\text{Sin.}^2\mu\text{Cos.}\psi)$$

$$+\left(\frac{d\psi}{d\mu}\right)pq\text{Cos.}^3\lambda\text{Cos.}^2\mu(2\text{Cos.}\psi+\text{Sin.}\mu\text{Sin.}^2\psi-\text{Sin.}\mu\text{Cos.}^2\psi).$$

Reste donc à trouver les expressions littérales de $\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)$, $\left(\frac{d\psi}{d\mu}\right)$ en $d\lambda$ et $d\mu$, et à effectuer ensuite les développemens. Or, ayant déjà exprimé $d\varphi$ en dt et $d\lambda$, de même que $d\psi$ en dt et $d\mu$, on n'aura qu'à substituer, dans l'une de ses expressions, la valeur de dt en $d\lambda$ et $d\mu$: on aura ainsi la différentielle complète de $d\varphi$ ou $d\psi$, d'où on conclura

$$\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)=\frac{p\text{Sin.}\varphi\text{Cos.}^2\lambda(1+P)Q^2}{qP^2\text{Cos.}^3\mu-pQ^2\text{Cos.}^3\lambda},\quad \left(\frac{d\psi}{d\mu}\right)=-\frac{q\text{Sin}\,\psi\text{Cos.}^2\mu(1+Q)P^2}{qP^2\text{Cos.}^3\mu-pQ^2\text{Cos.}^3\lambda}.$$

34. Après avoir effectué ces développemens, on pourra procéder, sans difficulté, à la détermination des rapports différentiels $\frac{d^2t}{d\lambda^2}$, $\frac{d^2t}{d\lambda d\mu}$, $\frac{d^2t}{d\mu^2}$. Ayant $2\varpi\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)=\frac{M}{F}$, $2\varpi\left(\frac{dt}{d\mu}\right)=-\frac{N}{F}$, il en résultera

$$2\varpi F^2\left(\frac{d^2t}{d\lambda^2}\right)=F\left(\frac{dM}{d\lambda}\right)-M\left(\frac{dF}{d\lambda}\right),$$

$$2\varpi F^2\left(\frac{d^2t}{d\lambda d\mu}\right)=F\left(\frac{dM}{d\mu}\right)-M\left(\frac{dF}{d\mu}\right)=-F\left(\frac{dN}{d\lambda}\right)+N\left(\frac{dF}{d\lambda}\right),$$

$$2\varpi F^2\left(\frac{d^2t}{d\mu^2}\right)=-\left(\frac{dN}{d\mu}\right)+N\left(\frac{dF}{d\mu}\right).$$

35. Ainsi donc, pour trouver les coefficiens C, C', C'', de nos termes du second ordre, il faûdra voir ce que deviennent ces rapports différentiels partiels, dans le cas de $\lambda=0$, $\mu=0$. On tire de cette supposition $P=1$, $Q=1$, $\varphi=\frac{2\varpi A}{p}$, $\psi=\frac{2\varpi A}{q}$; et en continuant, par abréviation, d'employer les lettres φ et ψ à la place de leurs valeurs, on aura, dans la même supposition de $\lambda=0$, $\mu=0$,

$$F=q-p\ ,\quad M=2pq\text{Sin.}\varphi\ ,\quad N=2pq\text{Sin.}\psi\ ,$$

$$\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)=\frac{2p\text{Sin.}\varphi}{q-p},\ \left(\frac{d\psi}{d\mu}\right)=-\frac{2q\text{Sin.}\psi}{q-p}\ ;$$

et ensuite

$$\left(\frac{dF}{d\lambda}\right)=-2q\text{Cos.}\varphi\ ,\quad \left(\frac{dF}{d\mu}\right)=+2p\text{Cos.}\psi\ ;$$

$$\left(\frac{dM}{d\lambda}\right)=-\frac{pq(q-5p)\text{Sin.}\varphi\text{Cos.}\varphi}{q-p},\quad \left(\frac{dM}{d\mu}\right)=-\frac{4pq^2\text{Cos.}\varphi\text{Sin.}\psi}{q-p}\ ;$$

$$\left(\frac{dN}{d\mu}\right)=-\frac{pq(5q-p)\text{Sin.}\psi\text{Cos.}\psi}{q-p},\quad \left(\frac{dN}{d\lambda}\right)=+\frac{4p^2q\text{Cos.}\psi\text{Sin.}\varphi}{q-p}.$$

36. De là on pourra passer immédiatement aux rapports différentiels du second ordre $\frac{d^2t}{d\lambda^2}$, $\frac{d^2t}{d\lambda d\mu}$, $\frac{d^2t}{d\mu^2}$. On aura, toujours dans le cas de $\lambda=0$, $\mu=0$,

$$\frac{d^2t}{d\lambda^2}=\frac{pq(5p+3q)}{2\varpi(q-p)^2}\text{Sin.}\varphi\text{Cos.}\varphi\ ,$$

$$\frac{d^2t}{d\lambda d\mu}=-\frac{4pq}{2\varpi(q-p)^2}(p\text{Sin.}\varphi\text{Cos.}\psi+q\text{Sin.}\psi\text{Cos.}\varphi)\ ,$$

$$\frac{d^2t}{d\mu^2}=\frac{pq(5q+3p)}{2\varpi(p-q)^2}\text{Sin.}\psi\text{Cos.}\psi\ ;$$

d'où l'on tire enfin

$$C=\frac{pq(5p+3q)\text{Sin.}\varphi\text{Cos.}\varphi}{4\varpi(q-p)^2},$$

$$C'=-\frac{8pq(p\text{Sin.}\varphi\text{Cos.}\psi+q\text{Sin.}\psi\text{Cos.}\varphi)}{4\varpi(q-p)^2},$$

$$C''=\frac{pq(5q+3p)\text{Sin.}\psi\text{Cos.}\psi}{4\varpi(q-p)^2}.$$

37. Pour trouver pareillement les coefficiens D, D', D'', D''', des termes du troisième ordre, il faudra différencier de même, par rapport à λ et μ, les rapports différentiels dont nous avons donné la liste (33). Nous n'exécuterons pas ces développemens ; mais la route est tracée, et, en attendant, la série

$$\begin{aligned}t=A+B\lambda+C\lambda^2&\\ +B'\mu+C'\lambda\mu&\\ +C''\mu^2&,\end{aligned}$$

fera connaître, à peu près, les époques auxquelles il arrivera quelque conjonction ou opposition de la planète à laquelle se rapporte l'ellipse BQB′ de la figure.

Nous poursuivrons ces recherches dans un prochain article.