DU BOURGUET

Correspondance

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 94-97
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__94_0>

CORRESPONDANCE.

Lettre de M. Du Bourguet, professeur de mathématiques spéciales au lycée impérial,

Au Rédacteur des *Annales ;*

En réponse aux observations contenues dans la lettre de M. Bret, insérée à la page 31 de ce volume.

Monsieur et cher Confrère,

Il n'était pas, ce me semble, nécessaire d'établir, *à priori*, les deux propositions mentionnées par M. Bret, pour démontrer le principe qui sert de fondement à la théorie des équations, puisqu'il s'agissait seulement de prouver, comme je l'ai fait complètement, qu'il existe au moins une quantité α (et non plusieurs quantités α, α', α'',....) qui, substituée à la place de x, dans le polynome $Ax^n+Bx^{n-1}+....+Q$, le fait évanouir.

Mais, indépendamment du principe que j'ai démontré à la page 338 du second volume des *Annales*, rien n'empêche que, conformément au désir qu'en témoigne M. Bret, je ne démontre que, dans les équations

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \varphi\ (A, B, \ldots.\beta\ ), \\ \alpha' &= \varphi'\ (A, B, \ldots.\beta'), \\ \alpha'' &= \varphi''(A, B, \ldots.\beta''), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right\} (a)$$

les fonctions indiquées par φ, φ', φ'', ... sont les mêmes ; ce qui, ce me semble, peut se faire, assez simplement, de la manière suivante.

En mettant successivement α et β, α' et β', α'' et β'',...., à la place de x et y, dans l'équation

$$y = Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots.. ,$$

il vient

$$\left.\begin{aligned} \beta\ &= A\alpha^n + B\alpha^{n-1} + \ldots. , \\ \beta' &= A\alpha^n + B\alpha^{n-1} + \ldots. , \\ \beta'' &= A\alpha^n + B\alpha^{n-1} + \ldots. , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right\} (b)$$

Or, puisqu'il faut faire les mêmes opérations sur α, α', α'',....., pour obtenir les valeurs respectives de β, β', β'',....., et que les coefficiens A, B,..... sont combinés d'une même manière dans toutes ces équations avec α, α', α'',...., il est clair que, si l'on met la première des équations (b) sous la forme

$$\beta = F(A, B, \ldots.\alpha) ,$$

on pourra mettre les suivantes sous les formes respectives

$$\begin{aligned} \beta' &= F(A, B, \ldots.\alpha') , \\ \beta'' &= F(A, B, \ldots.\alpha') , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{aligned}$$

et, à cause des équations (a), on pourra ensuite écrire

$$\left.\begin{array}{l}\beta\ =F[A,B,\ldots.\varphi\ (A,B,\ldots\beta\ )]\ ,\\ \beta'\ =F[A,B,\ldots.\varphi'(A,B,\ldots\beta')]\ ,\\ \beta''=F[A,B,\ldots.\varphi''(A,B,\ldots\beta'')]\ ,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,\end{array}\right\}(c)$$

mais, si l'on fait $\beta=\beta'=\beta''=\ldots\ldots$, ce qui ne saurait altérer l'égalité entre les membres des équations (c) (*), les premiers membres de ces équations devenant identiques, les seconds le deviendront aussi; on aura donc

$$F[A,B,\ldots\varphi(A,B,\ldots.\beta)]=F[A,B,\ldots\varphi'(A,B,\ldots.\beta)]=F[A,B,\ldots\varphi''(A,B,\ldots.\beta)]=\ldots.\ ;$$

or, puisque les fonctions indiquées par φ', φ'',.... ne changent pas, par les substitutions respectives de β à la place de β', β'',..., et que, de plus, tous les membres de la suite d'égalités précédente sont des mêmes fonctions, indiquées par le caractère commun F, il s'ensuit évidemment que ces égalités ne peuvent avoir lieu qu'autant qu'on a simultanément

$$\varphi(A,B,\ldots.\beta)=\varphi'(A,B,\ldots.\beta)=\varphi''(A,B,\ldots.\beta)=\ldots.\ ;$$

car, s'il en était autrement, il s'ensuivrait que les mêmes combinaisons de quantités différentes $\varphi(A,B,\ldots.\beta)$, $\varphi'(A,B,\ldots.\beta)$, $\varphi''(A,B,\ldots.\beta)$,.... avec les mêmes quantités A, B,.... seraient égales, ce qui est absurde: donc les fonctions φ, φ', φ'',.... sont les mêmes.

(*) En effet, l'équation $\beta'=F[A,B,\ldots\varphi'(A,B,\ldots\beta')]\ldots(d)$ ou $\beta'=F(A,B,\ldots.\alpha')$, prise pour exemple n'étant qu'une autre manière d'écrire l'équation $\beta'=A\alpha'^{n}+B\alpha'^{n-1}+\ldots(e)$; il est clair que la substitution du symbole β, à la place du symbole β', dans l'équation (d), équivaut à la substitution de α et β, à la place de α' et β' dans l'équation (e); substitution permise d'après l'hypothèse.

Quant au second principe que M. Bret trouve que mon raisonnement n'est pas établi, il est encore plus étranger à la démonstration en question que le précédent, et je dois d'autant moins m'arrêter à le démontrer, qu'il l'est déjà, de la manière la plus simple et la plus claire, dans tous les ouvrages élémentaires de mathématiques qui traitent des problèmes indéterminés et de l'interpolation.

Agréez, etc.

Paris, le 6 juillet 1812.