TÉDENAT

Questions résolues. Solutions du problème de probabilité proposé à la page 324 du second volume des Annales

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 59-76

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__59_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solutions du problème de probabilité proposé à la page 324 du second volume des Annales ;

Par MM. TÉDENAT, correspondant de la première classe de l'Institut, recteur de l'académie de Nismes ; D. ENCONTRE, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Montpellier ; LHUILIER, professeur de mathématiques

à l'académie impériale de Genève ; LE GRAND et ROCHAT, professeurs de mathématiques à Saint-Brieux.

ÉNONCÉ. *Une loterie étant composée de* m *numéros* 1, 2, 3,...m, *dont il en sort* n *à chaque tirage ; quelle est la probabilité que, parmi les* n *numéros d'un même tirage, il ne se trouvera pas deux nombres consécutifs de la suite naturelle ?*

Je vais rendre un compte sommaire des diverses solutions qui ont été données de ce problème, en insistant principalement sur les différences essentielles qu'elles pourront offrir.

Je commencerai par la démonstration d'un principe sur lequel reposent toutes ces solutions. Ce principe est généralement connu ; mais, la démonstration qu'en ont fourni MM. Le Grand et Rochat étant très-courte, on me pardonnera de la rapporter ici.

Soient

$$S_1= 1+2+3+\dots+m,$$

$$S_2= 1.2+2.3+3.4+\dots+m(m+1),$$

$$S_3=1.2.3+2.3.4+3.4.5+\dots+m(m+1)(m+2);$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$S_p=1.2.3\dots p+2.3.4\dots(p+1)+3.4.5\dots(p+2)+\dots+m(m+1)(m+2)\dots(m+p-1).$$

Il s'agit de prouver qu'on doit avoir

$$S_1=\tfrac{1}{2}\,m(m+1),$$

$$S_2=\tfrac{1}{3}\,m(m+1)(m+2),$$

$$S_3=\tfrac{1}{4}\,m(m+1)(m+2)(m+3);$$

$$S_p=\frac{1}{p+1}m(m+1)(m+2)(m+3)\dots(m+p-1)(m+p).$$

Pour y parvenir, supposons que cette loi se soit vérifiée pour les $m-1$ premiers termes de la dernière suite, de manière qu'on ait

$$1.2.3.\,p+2.3.4\dots(p+1)+3.4.5\dots(p+2)+\dots+(m-1)(m)(m+1)\dots(m+p-2)$$

$$=\frac{1}{p+1}(m-1)(m)(m+1)\dots(m+p-2)(m+p-1);$$

on aura alors

$$S_p=\frac{1}{p+1}(m-1)(m)(m+1)..(m+p-2)(m+p-1)+m(m+1)(m+2)....(m+p-1),$$

ou $$S_p=\frac{1}{p+1}m(m+1)(m+2)....(m+p-1)\{(m-1)+(p+1)\},$$

ou $$S_p=\frac{1}{p+1}m(m+1)(m+2)....(m+p-1)(m+p).$$

Il est donc prouvé par là que cette formule serait vraie pour les m premiers termes de la suite, si elle était vraie pour ses $m-1$ premiers termes; or, il est aisé de se convaincre qu'elle est vraie pour les deux premiers; car on a

$$1.2.3....p+2.3.4....p+1=2.3.4....p[1+(p+1)]$$
$$=\frac{1}{p+1}2.3.4....p(p+1)(p+2);$$

ainsi l'expression de S_p est exacte, et il en doit être de même de celles de S_1, S_2, S_3,.... qui n'en sont que des cas particuliers.

Il résulte aussi de là qu'on doit avoir

$$\frac{m-2}{1}+\frac{m-3}{1}+\frac{m-4}{1}+...+3+2+1=\frac{m-1}{1}.\frac{m-2}{2},$$

$$\frac{m-3}{1}.\frac{m-4}{2}+\frac{m-4}{1}.\frac{m-5}{2}+...+6+3+1=\frac{m-1}{1}.\frac{m-3}{2}.\frac{m-4}{3},$$

$$\frac{m-4}{1}.\frac{m-5}{2}.\frac{m-6}{3}+\frac{m-5}{1}.\frac{m-6}{2}.\frac{m-7}{3}+...+10+4+1=\frac{m-3}{1}.\frac{m-4}{2}.\frac{m-5}{3}.\frac{m-6}{4}.$$

....

Je passe présentement à la question proposée. Comme il est connu que, lorsqu'un événement dépend de quelques chances, comprises parmi plusieurs autres, toutes également possibles, la probabilité de cet événement est exprimée par une fraction dont le numérateur est le nombre des chances de l'arrivée desquelles cet événement dépend, et dont le dénominateur est le nombre total des chances; et comme, d'un autre côté, on sait de combien de manières n numéros peuvent être choisis entre m; on voit que la question se réduit à déterminer de combien de manières les m nombres $1.2.3 \ldots m$ peuvent être pris n à n sans que, dans aucune combinaison, il se trouve deux ou un plus grand nombre de numéros consécutifs.

On peut chercher directement le nombre des combinaisons de cette sorte ; ou bien on peut, au contraire, chercher le nombre de celles qui renferment des numéros consécutifs ; puisque ce dernier nombre, retranché du nombre total des combinaisons n à n, donnera pour reste le nombre des combinaisons dont il est question dans l'énoncé du problème. C'est ce dernier parti qu'a pris M. Lhuilier. Pour abréger le discours, il appelle *Ambe successif* l'assemblage de deux numéros se succédant consécutivement dans la suite des nombres naturels ; soit que ces numéros soient seuls, soit qu'ils fassent partie d'une combinaison d'un plus grand nombre de numéros. Cette définition posée, M. Lhuilier parvient à la formule générale par la considération des cas particuliers, en procédant à peu près comme il suit.

1.° Dans le cas de $n=1$, le nombre des tirages qui donnent des ambes successifs est évidemment $0=\frac{m}{1}-\frac{m}{1}$.

2.° Dans le cas de $n=2$, le nombre des tirages qui donnent des ambes successifs est évidemment

$$\frac{m-1}{1}=\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}-\frac{m-1}{1}.\frac{m-2}{2}.$$

3.° Dans le cas de $n=3$; si 1 et 2 font tous deux parties d'un tirage, on pourra leur adjoindre l'un quelconque des $m-2$ numéros restans ; si, au contraire, 1 doit faire partie d'un tirage, sans que 2 doive s'y trouver, il faudra lui adjoindre toutes les combinaisons deux à deux des $m-2$ numéros restans qui peuvent fournir des ambes consécutifs, et dont le nombre est, par ce qui précède, $m-3$.

Ainsi le nombre des tirages ayant 1 pour leur plus petit numéro, et présentant des ambes successifs, sera $(m-2)+(m-3)$; pareillement le nombre de ceux d'entre eux qui auront 2 pour leur plus petit numéro, sera $(m-3)+(m-4)$; le nombre de ceux qui auront 3 pour leur plus petit numéro, sera $(m-4)+(m-5)$, et ainsi de suite.

On voit, d'après cela, que le nombre total des tirages de trois numéros présentant des ambes successifs, sera

$$\{(m-2)+(m-3)\}+\{(m-3)+(m-4)\}+\{(m-4)+(m-5)\}+\ldots+\{1+0\}$$
$$=\{(m-2)+(m-3)+(m-4)+\ldots+1\}+\{(m-3)+(m-4)+(m-5)+\ldots+1\}$$
$$=\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}+\frac{m-2}{1}\cdot\frac{m-3}{2}=\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}-\frac{m-2}{1}\cdot\frac{m-3}{2}\cdot\frac{m-4}{3}.$$

4.° Dans le cas de $n=4$; 1 et 2 devant faire à la fois partie d'un même tirage, on pourra leur adjoindre chacune des $\frac{m-2}{1}\cdot\frac{m-3}{2}$ combinaisons deux à deux fournies par les $m-2$ numéros restans. Si au contraire 1 doit faire partie d'un tirage, sans que 2 doive s'y trouver; il faudra adjoindre à ce numéro 1 toutes celles des combinaisons trois à trois des $m-2$ numéros restans qui présenteront des ambes successifs et dont le nombre est, par ce qui précède, $\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}+\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}$.

Ainsi le nombre des tirages de quatre numéros qui, présentant des ambes successifs, auront 1 pour leur plus petit numéro, sera $\frac{m-2}{1}\cdot\frac{m-3}{2}+\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}+\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}$; le nombre des tirages de cette sorte qui auront 2 pour leur plus petit numéro, devra donc être $\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}+\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-6}{2}$; le nombre de ceux qui auront 3 pour leur plus petit numéro, sera semblablement $\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-6}{2}+\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-7}{2}$, et ainsi de suite.

On voit, d'après cela, que le nombre total des tirages de quatre numéros présentant des ambes successifs, sera

$$\left\{\frac{m-2}{1}\cdot\frac{m-3}{2}+\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}+\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\right\}$$
$$+\left\{\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}+\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\right\}$$

$$+\left\{\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-6}{2}+\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\right\}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\left\{\quad 6 \quad + \quad 3 \quad + \quad 1 \quad\right\}$$
$$+\left\{\quad 3 \quad + \quad 1 \quad + \quad 0 \quad\right\}$$
$$+\left\{\quad 1 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad\right\}$$

$$=\left\{\frac{m-2}{1}\cdot\frac{m-3}{2}+\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}+\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\ldots+6+3+1\right\}$$
$$+\left\{\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}+\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-6}{2}+\ldots+6+3+1\right\}$$
$$+\left\{\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-6}{2}+\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-7}{2}+\ldots+6+3+1\right\}$$
$$=\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-3}{3}+\frac{m-2}{1}\cdot\frac{m-3}{2}\cdot\frac{m-4}{3}+\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}\cdot\frac{m-5}{3}$$
$$=\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}-\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}\cdot\frac{m-5}{3}\cdot\frac{m-6}{4}.$$

M. Lhuilier applique encore ce raisonnement au cas où $n=5$ et, à raison de la marche uniforme du procedé, il est conduit à considérer le nombre des tirages de n numéros qui présentent des ambes consécutifs comme étant la différence entre le $(m-n+1)^{me}$ et le $(m-2n+2)^{me}$ nombres figurés du n^{me} ordre. Or, comme le premier de ces deux nombres figurés exprime le nombre total des tirages de n numéros, il en résulte que le dernier représente le nombre de ceux d'entre eux qui n'ont point d'ambes successifs.

M. Lhuilier observe, au surplus, que l'on pourrait s'assurer d'une manière rigoureuse de l'exactitude de ce résultat, par le raisonnement connu qui consiste à prouver que, si ce résultat est exact, pour des tirages de $n-1$ numéros, il doit l'être aussi pour des tirages de n numéros.

MM. Tédenat, Encontre, le Grand et Rochat ont au contraire cherché à calculer directement le nombre des chances favorables. Pour parvenir à leur but, ils supposent qu'on a fait des chances de cette sorte divers groupes, en plaçant dans le premier groupe toutes

toutes celles dont le plus petit numéro est 1, dans le second toutes celles dont le plus petit numéro est 2, dans le troisième toutes celles dont le plus petit numéro est 3, et ainsi de suite. Les choses ainsi entendues, voici comment ils procèdent.

1.° Il est d'abord évident que, s'il ne doit sortir qu'un seul numéro à chaque tirage, le nombre des chances favorables sera le nombre total des chances, c'est-à-dire, m ou $\frac{m}{1}$.

2.° S'il doit sortir deux numéros à chaque tirage, celles des chances favorables dont le plus petit numéro sera 1, ne pourront être complétées que par quelqu'un des $m-2$ numéros $3, 4, 5, \ldots m$; le nombre de ces chances sera donc $m-2$.

Celles des chances favorables dont le plus petit numéro sera 2, ne pourront être complétées que par quelqu'un des $m-3$ numéros $4, 5, 6, \ldots m$; le nombre de ces chances sera donc $m-3$.

Celles des chances favorables dont le plus petit numéro sera 3, ne pourront être complétées que par quelqu'un des $m-4$ numéros $5, 6, 7, \ldots m$; le nombre de ces chances sera donc $m-4$.

Et ainsi de suite, jusqu'à la chance favorable dont le plus petit numéro sera $m-2$, laquelle sera unique : attendu qu'elle ne pourra être complétée que par le seul numéro m.

Ainsi, dans le cas de $n=2$, le nombre total des chances favorables sera

$$(m-2)+(m-3)+(m-4)+\ldots\ldots+2+1=\frac{m-2}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\,;$$

c'est-à-dire, le $(m-2)^{\text{me}}$ nombre triangulaire.

3.° S'il doit sortir trois numéros à chaque tirage, celles des chances favorables dont le plus petit numéro sera 1, ne pourront être complétées que par celles des combinaisons deux à deux des $m-2$ numéros $3, 4, 5, \ldots m$ qui ne présentent point de nombres consécutifs, et dont le nombre est, par ce qui précède,

$$\frac{(m-2)-2}{1}\cdot\frac{(m-2)-1}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-3}{2}.$$

Celles des chances favorables dont le plus petit numéro sera 2, ne pourront être complétées que par celles des combinaisons deux à deux des $m-3$ numéros 4, 5, 6,....m qui ne présentent point de nombres consécutifs, et dont le nombre est, par ce qui précède,

$$\frac{(m-3)-2}{1}\cdot\frac{(m-3)-1}{2} \text{ ou } \frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-4}{2}.$$

Celles des chances favorables dont le plus petit numéro sera 3, ne pourront être complétées que par celles des combinaisons deux à deux des $m-4$ numéros 5, 6, 7,....m qui ne présentent point de nombres consécutifs, et dont le nombre est, par ce qui précède,

$$\frac{(m-4)-2}{1}\cdot\frac{(m-4)-1}{2} \text{ ou } \frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}.$$

Et ainsi de suite, jusqu'à la chance favorable dont le plus petit numéro sera $m-4$, laquelle sera unique : attendu qu'elle ne pourra être complétée que par les deux seuls numéros $m-2$ et m.

Ainsi, dans le cas de $n=3$, le nombre total des chances favorables est

$$\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-3}{2}+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-4}{2}+\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\dots+3+1=\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-3}{2}\cdot\frac{m-2}{3};$$

c'est-à-dire, le $(m-4)^{me}$ nombre pyramidal.

4.° S'il doit sortir quatre numéros à chaque tirage ; celles des chances favorables dont le plus petit numéro sera 1, ne pourront être complétées que par celles des combinaisons trois à trois des $m-2$ numéros 3, 4, 5,....m qui ne présentent point de nombres consécutifs, et dont le nombre est, par ce qui précède,

$$\frac{(m-2)-4}{1}\cdot\frac{(m-2)-3}{2}\cdot\frac{(m-2)-2}{3} \text{ ou } \frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-4}{3}.$$

Celles des chances favorables dont le plus petit numéro sera 2, ne pourront être complétées que par celles des combinaisons trois à trois des $m-3$ numéros $4, 5, 6, \ldots. m$ qui ne présentent point de nombres consécutifs, et dont le nombre est, par ce qui précède,

$$\frac{(m-3)-4}{1}\cdot\frac{(m-3)-3}{2}\cdot\frac{(m-3)-2}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}.$$

Celles des chances favorables dont le plus petit numéro sera 3, ne pourront être complétées que par celles des combinaisons trois à trois des $m-4$ numéros $5, 6, 7, \ldots m$ qui ne présentent point de nombres consécutifs, et dont le nombre est, par ce qui précède,

$$\frac{(m-4)-4}{1}\cdot\frac{(m-4)-3}{2}\cdot\frac{(m-4)-2}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}.$$

Et ainsi de suite, jusqu'à la chance favorable ayant $m-6$ pour son plus petit numéro, laquelle sera unique ; attendu qu'elle ne pourra être complétée que par les trois seuls numéros $m-4$, $m-2$, m.

Ainsi, dans le cas de $n=4$, le nombre total des chances favorables est

$$\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-4}{3}+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}+\ldots+4+1$$
$$=\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-4}{3}\cdot\frac{m-3}{4};$$

c'est-à-dire, le $(m-6)^{\text{me}}$ nombre figuré du $4.^{\text{e}}$ ordre.

La marche parfaitement uniforme de ce procédé conduit à conclure, sans qu'il soit nécessaire de pousser l'induction plus avant, qu'en général, n désignant le nombre des numéros qui sortent à chaque tirage, le nombre des tirages différens qui ne présentent point de numéros consécutifs, est le $(m-2n+2)^{\text{me}}$ nombre figuré du n^{me} ordre ; c'est-à-dire,

$$\frac{m-2n+2}{1}\cdot\frac{m-2n+3}{2}\cdot\frac{m-2n+4}{3}\cdots\cdots\frac{m-n+1}{n}.$$

ce qu'il serait d'ailleurs facile d'établir par un raisonnement rigoureux.

Si présentement on considère que le nombre total des tirages possibles de n numéros parmi m est

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\cdots\frac{m-n+1}{n},$$

on en conclura que la probabilité demandée par l'énoncé de la question est

$$\frac{m-2n+2}{m}\cdot\frac{m-2n+3}{m-1}\cdot\frac{m-2n+4}{m-2}\cdots\frac{m-n+1}{m-n+1}.$$

M. Encontre remarque que, si l'on avait égard à l'ordre de sortie des numéros, dans chaque tirage, le nombre des tirages dans lesquels il ne se trouverait pas deux numéros voisins dans la suite des nombres naturels, serait simplement

$$(m-2n+2)(m-2n+3)(m-2n+4)\ldots.(m-n+1)\ ;$$

et comme alors le nombre total des tirages possibles serait

$$m.(m-1).(m-2)\ldots.(m-n+1)\ ;$$

il s'ensuit que la probabilité cherchée serait encore la même que dans le premier cas.

M. Tédenat observe que, lorsque $n=\frac{1}{2}(m+1)$, le nombre des tirages sans numéros consécutifs se réduit à l'unité, et qu'il devient nul, si l'on a $n>\frac{1}{2}(m+1)$.

On peut encore parvenir au but par une autre méthode qui peut paraître un peu moins simple que les précédentes, mais qui a sur elles l'avantage de résoudre, outre la question proposée, une autre question non moins intéressante, et qui a avec elle une très-grande analogie. Je vais l'exposer brièvement.

Pour être plus court et plus clair, j'adopterai les dénominations suivantes :

J'appellerai *Combinaison totalement continue*, toute combinaison dont les numéros, du plus petit au plus grand, se trouveront être des nombres consécutifs de la suite naturelle. J'appellerai *Combinaison totalement discontinue*, toute combinaison dans laquelle il sera impossible de rencontrer deux nombres consécutifs de la même suite. Quant aux combinaisons formées en partie de nombres consécutifs et en partie de nombres non consécutifs, elles pourront être indifféremment appelées *Combinaisons partiellement continues* ou *Combinaisons partiellement discontinues*.

J'observe présentement que chacune de ces diverses sortes de combinaisons peut être considérée sous deux points de vue très-distincts. On peut supposer tous les numéros à combiner disposés les uns à côté des autres, du premier au dernier, suivant l'ordre de leur grandeur, sur une ligne droite, sur une branche de courbe ou sur une portion de polygone; ou bien on peut les supposer rangés, suivant le même ordre, soit sur la circonférence d'un cercle, soit sur toute autre courbe fermée, soit enfin sur le périmètre d'un polygone; et les deux numéros extrêmes qui, dans le premier cas, ne seront point consécutifs, devront être réputés tels dans le second. J'appellerai *Combinaisons rectilignes* les combinaisons faites avec les numéros disposés de la première de ces deux manières, et *Combinaisons circulaires* celles qui seront faites avec les numéros rangés conformément à la seconde hypothèse. Les unes et les autres pourront être d'ailleurs *totalement* ou *partiellement continues* ou *discontinues*.

Il est d'abord clair que m numéros, pris n à n, doivent fournir m combinaisons circulaires et $m-n+1$ combinaisons rectilignes totalement continues; mais le nombre de leurs combinaisons, soit rectilignes soit circulaires, totalement discontinues, n'est point aussi facile à déterminer.

La question où l'on propose de déterminer combien m numéros, pris n à n, peuvent fournir de combinaisons circulaires totalement discontinues, revient à celle-ci : *Un polygone de* m *côtés étant donné, combien peut-on construire de polygones de* n *côtés dont tous les sommets soient des sommets du polygone donné sans qu'au-*

cun de leurs côtés soit côté de ce polygone ? Sur quoi il faut remarquer qu'ici toute diagonale isolée doit être considérée comme un polygone de deux côtés dont les côtés se confondent ; et que tout sommet doit être considéré comme un polygone d'un seul côté.

La question où l'on propose de déterminer combien m numéros, pris n à n, peuvent fournir de combinaisons rectilignes, totalement discontinues, revient à celle-ci : *Une portion de polygone de* m *sommets, ou de* m—1 *côtés, étant donnée ; combien peut-on construire de portions de polygones de* n *sommets, ou de* n—1 *côtés, dont les sommets soient tous des sommets de la portion de polygone donnée, sans qu'aucun de leurs côtés soient côtés de cette portion de polygone ?* C'est proprement là la question qui a été proposée.

Je vais mener de front ces deux questions ; mais je dois observer auparavant que, comme ici la disposition respective des numéros, dans chaque combinaison, n'est de nulle considération ; on peut supposer qu'ils sont rangés, dans toutes, par ordre de grandeur, et qu'ainsi les polygones et portions de polygone dont il s'agit d'assigner le nombre, doivent être convexes, si les polygones ou portions de polygones donnés sont supposés tels.

1.° Il est d'abord évident que le nombre des extraits, soit circulaires soit rectilignes, totalement discontinus, n'est autre que le nombre total des extraits, c'est-à-dire, $\frac{m}{1}$.

2.° L'adoption d'un numéro quelconque, pour faire partie d'un ambe circulaire totalement discontinu, donnant l'exclusion à ses deux voisins, à droite et à gauche, on ne pourra lui adjoindre que les extraits rectilignes, totalement discontinus, que pourront fournir les $m-3$ numéros restans, et dont le nombre est par ce qui précède, $\frac{m-3}{1}$. Si l'on en fait de même successivement, pour chacun des m numéros, le nombre des ambes qu'on aura formés sera $m.\frac{m-3}{1}$; mais, chaque ambe se trouvant ainsi répété deux fois, il s'ensuit que le nombre des ambes circulaires, totalement discontinus que m numéros peuvent fournir, est seulement

$$\frac{m}{2}\cdot\frac{m-1}{1}.$$

Pour passer de là aux ambes rectilignes, on remarquera que le seul de ces ambes qui ait été exclu du nombre de ceux qui viennent d'être formés, est celui qui résulte de l'assemblage des deux numéros extrêmes. Ainsi, le nombre des ambes rectilignes, totalement discontinus, que m numéros peuvent fournir est

$$\frac{m}{2}\cdot\frac{m-3}{1}+1=\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}.$$

3.° L'adoption d'un numéro quelconque, pour faire partie d'un terne circulaire, totalement discontinu, donnant l'exclusion à ses deux voisins, à droite et à gauche; on ne pourra lui adjoindre que les ambes rectilignes, totalement discontinus, que pourront fournir les $m-3$ numéros restans, et dont le nombre est, par ce qui précède, $\frac{(m-3)-1}{1}\cdot\frac{(m-3)-2}{2}$ ou $\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}$. Si l'on en fait de même successivement, pour chacun des m numéros, le nombre des ternes qu'on aura formés sera $m\cdot\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}$; mais, chaque terne se trouvant ainsi évidemment répété trois fois, il s'ensuit que le nombre des ternes circulaires, totalement discontinus, que m numéros peuvent fournir est seulement

$$\frac{m}{3}\cdot\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}.$$

Pour passer de là aux ternes rectilignes, il faudra joindre à ce résultat le nombre des ternes circulaires dont les numéros extrêmes font partie, sans renfermer d'autres numéros consécutifs, et dont le second et le pénultième se trouvent conséquemment exclus; or, ce nombre de ternes est évidemment égal au nombre des extraits rectilignes, totalement discontinus que peuvent fournir les $m-4$ numéros restans, c'est-à-dire, par ce qui précède, $\frac{m-4}{1}$. Ainsi, le nombre des ternes rectilignes, totalement discontinus, que m numéros peuvent fournir est

$$\frac{m}{3}\cdot\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\frac{m-4}{1}=\frac{m^2-5m+6}{1.2}\cdot\frac{m-4}{3}=\frac{m-2}{1}\cdot\frac{m-3}{2}\cdot\frac{m-4}{3}.$$

4.° L'adoption d'un numéro quelconque, pour faire partie d'un quaterne circulaire, totalement discontinu, donnant l'exclusion à ses deux voisins, à droite et à gauche ; on ne pourra lui adjoindre que les ternes rectilignes, totalement discontinus, que pourront fournir les $m-3$ numéros restans, et dont le nombre est, par ce qui précède, $\frac{(m-3)-2}{1}\cdot\frac{(m-3)-3}{2}\cdot\frac{(m-3)-4}{3}$ ou $\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-7}{3}$. Si l'on en fait de même successivement, pour chacun des m numéros, le nombre des quaternes qu'on aura formés sera $m.\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-7}{3}$; mais, chaque quaterne se trouvant ainsi évidemment répété quatre fois, il s'ensuit que le nombre des quaternes circulaires, totalement discontinus, que m numéros peuvent fournir est seulement

$$\frac{m}{4}\cdot\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-7}{3}.$$

Pour passer de là aux quaternes rectilignes, il faudra joindre à ce résultat le nombre des quaternes circulaires, dont les deux numéros extrêmes font partie, et dont le second et le pénultième se trouvent conséquemment exclus ; or, ce nombre de quaternes est évidemment égal au nombre des ambes rectilignes, totalement discontinus, que peuvent fournir les $m-4$ numéros restans, c'est-à-dire, par ce qui précède, $\frac{(m-4)-1}{1}\cdot\frac{(m-4)-2}{2}$ ou $\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-6}{2}$. Ainsi, le nombre des

quaternes

quaternes rectilignes, totalement discontinus, que m numéros peuvent fournir est

$$\frac{m}{4}\cdot\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-7}{3}+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-6}{2}=\frac{m^2-7m+12}{1.2}\cdot\frac{m-5}{3}\cdot\frac{m-6}{4}$$
$$=\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}\cdot\frac{m-5}{3}\cdot\frac{m-6}{4}.$$

Comme on aperçoit déjà facilement, sans pousser l'induction plus loin, la loi de ces divers résultats, je vais de suite en prouver l'exactitude, pour le cas général où les m numéros doivent être pris n à n.

Soient respectivement désignés par $C_{m,n}$ et $R_{m,n}$ le nombre des combinaisons circulaires et le nombre des combinaisons rectilignes, totalement discontinues que peuvent fournir m numéros, pris n à n.

L'adoption d'un numéro quelconque, pour faire partie de l'une des combinaisons circulaires, n à n, totalement discontinues, donnant l'exclusion à ses deux voisins, à droite et à gauche, on ne pourra lui adjoindre que les combinaisons rectilignes, $n-1$ à $n-1$, totalement discontinues, que pourront fournir les $m-3$ numéros restans, et dont le nombre devra être représenté par $R_{m-3,n-1}$. Si l'on en fait de même successivement, pour chacun des m numéros, le nombre des combinaisons n à n qu'on aura formées, sera $mR_{m-3,n-1}$; mais, chaque combinaison, n à n, se trouvant ainsi évidemment répétée n fois, il s'ensuit qu'on doit avoir seulement

$$C_{m,n}=\frac{m}{n}R_{m-3,n-1}. \qquad \text{(I)}$$

Pour passer de là aux combinaisons rectilignes, il faudra joindre à ce résultat le nombre des combinaisons circulaires, n à n, dont les deux numéros extrêmes font parties, sans renfermer d'autres numéros consécutifs, et dont le second et le pénultième se trouvent conséquemment exclus; or, ce nombre de combinaisons est évidemment égal au nombre des combinaisons rectilignes, $n-2$

à $n-2$, totalement discontinues, que peuvent fournir les $m-4$ numéros restans, c'est-à-dire, $R_{m-4,n-2}$. On a donc d'après cela

$$R_{m,n}=C_{m,n}+R_{m-4,n-2}. \qquad \text{(II)}$$

Telles sont les équations générales de relation entre le nombre des combinaisons rectilignes et le nombre des combinaisons circulaires, et dont l'intégration résoudrait complètement les deux problèmes.

De ces deux équations on en peut facilement déduire deux autres dans lesquelles R et C soient séparés. Si, en effet, on élimine $C_{m,n}$ entre elles, on aura d'abord

$$R_{m,n}=\frac{m}{n}R_{m-3,n-1}+R_{m-4,n-2}. \qquad (r)$$

Si, ensuite, on change m et n respectivement en $m-4$ et $n-2$, dans la première, et en $m-3$ et $n-1$, dans la seconde, il viendra

$$(n-2)C_{m-4,n-2}=(m-4)R_{m-7,n-3},$$

$$C_{m-3,n-1}=R_{m-3,n-1}-R_{m-7,n-3};$$

d'où on conclura, par l'élimination de $R_{m-7,n-3}$ et la substitution de la valeur de $R_{m-3,n-1}$, donnée par l'équation (I)

$$C_{m,n}=\frac{m}{n}C_{m-3,n-1}+\frac{m}{n}\cdot\frac{n-2}{m-4}C_{m-4,n-2}. \qquad (c)$$

Si maintenant, en suivant l'analogie indiquée par les résultats précédemment obtenus, on pose

$$R_{m,n}=\frac{m-n+1}{1}\cdot\frac{m-n}{2}\cdot\frac{m-n-1}{3}\cdots\cdots\frac{m-2n+2}{n},$$

$$C_{m,n}=\frac{m}{n}\cdot\frac{m-n-1}{1}\cdot\frac{m-n-2}{2}\cdots\cdots\frac{m-2n+1}{n-1}\ ;$$

il sera facile de se convaincre que ces valeurs satisfont aux équations (r) et (c), et conséquemment aux équations (I) et (II), et qu'ainsi elles en sont les intégrales ; ce qui garantit l'exactitude de ces deux formules.

D'après l'inspection des mêmes formules, on voit aisément qu'on peut écrire

$$R_{m,n}=\frac{m-2n+2}{n}R_{m-1,n-1} \qquad (r')$$

$$C_{m,n}=\frac{m}{n}\cdot\frac{m-2n+1}{m-1}C_{m-1,n-1} \qquad (c')$$

équations qui conséquemment peuvent remplacer, soit les équations (r) et (c), soit les équations (I) et (II).

Les valeurs successives de $C_{m,n}$ qui répondent à $n=1, 2, 3, \ldots n$, c'est-à-dire,

$$\frac{m}{1},\ \frac{m}{1}\cdot\frac{m-3}{2},\ \frac{m}{1}\cdot\frac{m-4}{2}\cdot\frac{m-5}{3},\ \frac{m}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-6}{3}\cdot\frac{m-7}{4}\cdots\cdots\ ;$$

sont très-remarquables, parce qu'elles entrent, comme coefficiens, dans un grand nombre de développemens. Ce sont, en particulier, les coefficiens des termes du développement de $2\mathrm{Cos}.mx$, ordonné suivant les puissances descendantes de $2\mathrm{Cos}.x$. Ces sortes de nombres, qui se représentent fréquemment dans l'analise, reçoivent donc, par ce qui précède, une interprétation à la fois combinatoire et géométrique.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorèmes de Statique.

I. Si l'on joint, par des droites, le milieu de chacune des diagonales d'un quadrilatère à un point de l'autre diagonale, qui soit autant éloigné de l'une de ses extrémités, que le point d'intersection des deux diagonales est éloigné de son autre extrémité ; l'intersection de ces deux droites sera le centre de gravité de l'aire du quadrilatère

II. Soit déterminé, sur chacune des deux diagonales de la base d'une pyramide quadrangulaire, un point qui soit autant éloigné de l'une de ses extrémités, que le point d'intersection des deux diagonales est éloigné de son autre extrémité.

Si, du point ainsi déterminé, sur chaque diagonale, on mène une droite au centre de gravité de l'aire du triangle qui, ayant pour base l'autre diagonale, a son sommet au sommet de la pyramide ; les deux droites ainsi menées se couperont en un point, et ce point sera le centre de gravité du volume de cette pyramide.